Kako je logika mogoča?

Žiga Knap

Filozofska fakulteta Univerze v Ljubljani

Povzetek

Kant se v svoji *Prolegomeni* sprašuje o možnosti metafizike (kot znanosti). Pri tem izhaja iz svoje klasifikacije sodb kot analitičnih in sintetičnih, ki so lahko aposteriorne ali apriorne. Glavni problem vidi v možnosti sintetičnih apriornih sodb. Sam je prepričan, da so take vrste sodb matematična sklepanja, denimo aritmetična resnica »7 + 5 = 12«. V 18. stoletju status aksiomov še ni bil določen v modernem smislu, čeprav je K. F. Gauss že vedel, kakšen je status aksiomov v geometriji, a prav zaradi Kantovega vpliva ni objavil svojih raziskav (kar sta v 19. stoletju napravila Lobačevski in Bolyai). Tako v geometriji kot v aritmetiki so aksiomi svobodna konstrukcija človekovega duha in niso povezani z empirijo. S takim razumevanjem statusa aksiomov pa seveda brez osnov ostane Kantovo prepričanje o možnosti sintetičnih apriornih sodb tako v matematiki kot tudi nasploh (v metafiziki, ontologiji), saj je logika ključnega pomena pri izgradnji ontologije. In res, logika je izgradnja strukture »pravilnega« mišljenja, ki pa je »empirično« pridobljena na osnovi študija nekega objekta. Aristotel denimo svoje logične kategorije izpeljuje iz jezika, v moderni dobi pa je tak objekt matematika oziroma matematična logika, ki je primerna za presojanje na posameznih področjih matematike, kot so klasična matematika, intuicionistična matematika (Brouwer), konstruktivna matematika (A. A. Markov). Andrej Bauer šteje logiko za empirično znanost v opisanem smislu. Če torej parafraziram Kanta – ni vprašljiv obstoj logike, temveč to, kako je logika mogoča.

Ključne besede: logika, Kant, sintetične sodbe *a priori*, aksiomi, metafizika (kot znanost)

How is Logic Possible? – Abstract

In his *Prolegomena*, Kant asks of the possibility of metaphysics (as a science). He starts from his classification of judgements as analytic and synthetic, which can be *a posteriori* or *a priori*. He sees the main problem in the possibility of synthetic a priori judgements. Kant beliefs that there are such judgements, namely judgements in mathematics, one such being the truth of arithmetic "7 + 5 = 12." In the 18th century, the status of axioms was not yet determined in the modern sense, although K. F. Gauss already knew the status of axioms in geometry, but did not publish his research due to Kant's influence (Lobachevsky and Bolyai independently published their findings in the 19th century). In geometry as well as in arithmetic, axioms are a free construct of the human mind and are not rooted in the empirical. With such an understanding of axioms, Kant's belief that synthetic a priori judgements are possible becomes baseless in mathematics (as well as in metaphysics and ontology) since logic is of key importance in the construction of ontology. Indeed, logic is the construction of the structure of "correct" thinking, which is obtained "empirically" based on the study of an object. For instance, Aristotle derives his logic categories from language, and in modern times this object is mathematics or mathematical logic, which is appropriate for making judgements in various field of mathematics, such as classical mathematics, intuitionistic mathematics (Brouwer), constructive mathematics (A. A. Markov). Andrej Bauer counts logic as an empirical science in the described sense. To paraphrase Kant, what is questionable is not the existence of logic, but its possibility.

Keywords: logic, Kant, synthetic judgements *a priori*, axioms, metaphysics (as a science)

Kant se v *Prolegomeni* ukvarja s problemom možnosti metafizike kot znanosti; kako je mogoče iz čistega uma izpeljati splošne sodbe, ki so veljavne. Zanima ga »spoznanje, ki se nam ponuja v imenu čistega uma«, kar postavlja kritično vprašanje, ali je metafizika sploh mogoča. *Prolegomena* je neke vrste priprava, ki naj pokaže, kaj je treba storiti, da se neka znanost po možnosti ustvari. Kantova metoda je v tem, da se opira na tisto, kar je že poznano in zanesljivo in ki nam omogoča dostop k virom, ki jih še ne poznamo. Glede metafizike ne moremo trditi, da je resnična znanost, so pa nekatere znanstvene discipline, ki vsebujejo sintetična spoznanja *a priori*, ki so resnična in dana, taka znanost je čista matematika. Kant meni, da imamo v primeru matematike nesporna sintetična spoznanja (sodbe) *a priori*, glede katerih se nam ni treba spraševati, kako so možna (ker obstojé), temveč samo: kako lahko iz načel, ki omogočajo ta spoznanja, izvedemo tudi možnost vseh drugih.

Pomembna za Kantovo izpeljavo je njegova klasifikacija sodb v sintetične in analitične. Sodbe so po vsebini, ne glede na logično obliko, ali pojasnjevalne – ne dodajajo ničesar k znanju – ali pa razširjevalne – povečajo naše znanje in spoznanje. Prve je Kant imenoval analitične, druge pa sintetične. Analitične sodbe v povedku ne povedo ničesar, kar ni v pojmu osebka že vsebovano in mišljeno. Njegov primer take sodbe je »Vsa telesa so razsežna« (Kant, 1999: 49). Primer sintetične sodbe je »Nekatera telesa so težka« (*Ibid.*), ki pa v povedku obsega nekaj, kar ni mišljeno že v splošnem pojmu telesa. Takšna sodba poveča znanje, pojmu nekaj doda, zato jo imenuje sintetična sodba.

Analitične sodbe temeljijo na načelu protislovja (protislovij se je treba izogibati), ki ga je kot najvišje logično načelo prvi formuliral Aristotel. In zato so analitične trditve apriorne sodbe, četudi morda vsebujejo empirične pojme.

Eksistenca sintetičnih sodb *a posteriori*, katerih izvor je empiričen, ni problematična. Kant pa je prepričan, da obstajajo tudi sintetične sodbe, ki so apriorno gotove, namreč tiste, ki izvirajo iz čistega razuma in uma. Do teh sodb (spoznanj) ne moremo priti zgolj z razčlenjevanjem samega pojma, torej samo z upoštevanjem načela protislovja.

Po Kantovem mnenju so torej sintetične vse izkustvene sodbe, kar je splošno sprejeto mnenje, novo pa je njegovo prepričanje, da so sintetične tudi vse matematične sodbe. S tem se ne strinjajo tisti, ki vidijo, da matematiki vse sklepe izpeljujejo po načelu protislovja, in so zato prepričani, da iz slednjega izhaja tudi spoznanje samih aksiomov.

Predvsem je treba pripomniti, da so prava matematična načela vedno apriorne sodbe, nikoli empirične, saj vključujejo nujnost, ki je ni mogoče izvesti iz izkustva. Čista matematika ne vsebuje ničesar empiričnega, temveč čista apriorna spoznanja.

Preden se lotimo obravnave Kantovega primera iz aritmetike, si na kratko oglejmo glavne značilnosti njegovega pojmovanja matematike. Svoje razumevanje matematike predstavi v *Prolegomeni* v »Prvem delu glavnega transcendentalnega vprašanja«, namreč »Kako je mogoča čista matematika«. Matematika je za Kanta čisti umski proizvod, ki je sintetične narave. Sprašuje se, kako zmore človeški um priti do takšnega spoznanja popolnoma *a priori*. Uvideva, da ima vsako matematično spoznanje to posebnost, da svoj pojem najprej predstavi v zrenju (nem. *Anschauung*), in sicer v apriornem zrenju, namreč takšnem, ki ni empirično, ampak je čisto zrenje (nem. *reine Anschauung*). Tako pravi: »Zato so sodbe matematike vedno intuitivne.« (Kant, 1999: 68) Za naravo matematike to pomeni, da ji mora biti temelj čisto zrenje, v katerem mora prikazati ali skonstruirati svoje pojme *in concreto*, a vendar *a priori*. »Prostor in čas sta torej tisti obliki zrenja, ki ju matematika postavlja za temelj vsem svojim spoznavam in sodbam, ki nastopajo hkrati kot apodiktične in nujne.« (Kant, 1999: 71) Geometrija za osnovo postavlja čisto zrenje prostora, aritmetika ustvarja svoje pojme o številu s postopnim dodajanjem enic v času (Kant, 1999: 71).[1] Za Kanta sta obe predstavi – prostor in čas – le obliki zrenja. Pribije takole: »Čista matematika je kot sintetično spoznanje *a priori* mogoča le zato, ker se nanaša samo na predmete čutnosti. Empiričnemu zrenju teh /predmetov/ je temelj čisto zrenje (prostora in časa), in sicer *a priori*, a temelj je lahko zato, ker ni nič drugega kot zgolj oblika čutnosti, ki obstaja pred realnim pojavom predmeta in ga v resnici šele omogoča.« (Kant, 1999: 72)

Kant na primeru sodbe »7 + 5 = 12« najprej pojasni, da ne drži, da je ta sodba analitična in da izhaja iz pojma vsote sedem in pet po načelu protislovja. Če pogledamo pobliže, bomo videli, da pojem vsote sedem in pet vsebuje samo združitev obeh števil v eno, pri tem pa ni niti najmanj mišljeno to, katero je tisto edino število, ki združuje obe števili. »S sodbo '7 + 5 = 12' človek torej svoj pojem resnično razširi; prvemu pojmu je dodan nov, ki v prvem nikakor ni zaobsežen. Z drugimi besedami, aritmetične sodbe so vedno sintetične.« (Kant, 1999: 52)

Kant je menil, da je treba poklicati na pomoč (nazorno) predstavo in pojmu pet dodajati točke ali črtice, kot si to zamišljajo v intuicionizmu[2] ali konstruktivizmu v matematiki. To je stoletje pred G. Peanom, ki je v 19. stoletju formuliral aksiome za konstrukcijo naravnih števil in, tudi na osnovi teh aksiomov, definicijo vsote, ki je tako fascinirala Kanta. In še nekaj se je zgodilo v stoletju po Kantu: pomen in status aksiomov sta postala določnejša. Lahko bi se zadovoljili z naslednjo ugotovitvijo, da Kant pač ni

1 Ta model konstruiranja je analogen modelu konstrukcije naravnih števil v intuicionistični in konstruktivistični matematiki.

2 Glej denimo Heyting, 1956.

poznal aksiomov naravnih števil in njihove aritmetike, je pa pravilno ocenil situacijo v primeru seštevanja naravnih števil. Vendar tu naletimo na nevarno čer, ki se skriva v sledečem razmisleku: za Kanta je nazorno seštevanje pet in sedem pomenilo poleg formalne sodbe, ki ji je pripisoval status sintetične sodbe *a priori*, tudi sodbo, ki je imela status resničnosti – zanj je torej to bila resnična sodba. Na ravni Peanovih aksiomov pa je seštevanje naravnih števil samo postopek, ki je v skladu z aksiomi, sam postopek pa je pravilen ali nepravilen ter nima nobenega neposrednega odnosa z resničnostjo in resnico in ne ontološke zaveze. Kakšen pa je status aksiomov v matematiki? Ti so svobodne konstrukcije človekovega duha, nekaj, kar si človek (matematik) izmisli, nikakor pa nimajo statusa resničnosti, nimajo ontološkega statusa, še posebno ne do zunanjega, tako imenovanega objektivnega sveta.

Narava aksiomov je bila v matematiki dognana šele v 19. stoletju z razvojem neevklidske geometrije, ki jo povezujemo z imeni N. Lobačevski (1792–1856) in J. Bolyai (1802–1860). Zanimivo je, da je pred njima naravo petega Evklidovega postulata in problem aksiomatike v geometriji razrešil že K. F. Gauss (1777–1855), ki pa svojih odkritij ni nikoli objavil, ker se je prav zaradi vpliva stališč I. Kanta bal »vpitja Beočanov« (Vidav, 1975: 115). Očitno je bilo Kantovo stališče o možnosti sintetičnih sodb *a priori* in s tem možnosti ustvarjanja metafizike (in mogoče tudi metafizike kot znanosti) vplivno v njegovem času, relevantno pa je še danes.

Najbrž lahko verjamemo, da Kant, Gauss, Lobačevski in Bolyai niso imeli težav z logiko v tem smislu, da bi uporabljali več logik; zanje je bila logika le ena in edina. Gotovo pa je G. Boole s svojo formalizacijo približal logiko aritmetiki oziroma matematičnemu modelu (jo je matematiziral) in lahko rečemo, da jo je s tem tudi poglobil ter zakoličil njene meje. Logika je v 19. stoletju postala abstraktnejša in manj povezana z nazornostjo. Znameniti Paschev aksiom, ki je bil formuliran v 19. stoletju, je bil »znan« že Evklidu. Trditev, da »če premica ne gre skozi nobeno oglišče trikotnika in seka eno stranico trikotnika, potem seka še eno stranico trikotnika«, torej Paschev aksiom, je v svoji knjigi na svoj način dokazal. In sicer je dokaz skonstruiral na osnovi nazorne slike in logičnega sklepanja ter je torej ta posledica logičnega sklepanja in nazorne slike. Če pa se odpovemo nazornosti, potem potrebujemo aksiom, ki ga je podal Pasch. Matematika se je do začetka 20. stoletja zadovoljila s tradicionalno (Aristotelovo) logiko, so se pa v sami matematiki zgodili nekateri premiki pod vplivom študija neevklidske geometrije in uvedbe teorije množic (G. Cantor). Poleg geometrije se je aksiomatski pristop v matematiki razširil še na druge matematične discipline (npr. G. Peano ga uporabi v teoriji števil in aritmetiki). Na prelomu stoletij je bil B. Russell prepričan, da je možno vso matematiko izpeljati iz logike oziroma logičnega sklepanja. Russell je razvil tudi formalizem za logiko, zaradi česar je ta dobila ime »matematična logika«, saj se jo lahko obravnava kot eno od matematičnih struktur, logika pa služi za opisovanje logičnih operacij pri izvajanju matematičnih dokazov. (Matematično) logiko kot eno od matematičnih struktur opredeljuje tudi N. Bourbaki. Je pa med obema razumevanjema logike razlika. Russell verjame, da lahko iz logike izpeljemo vso matematiko, kar pomeni, da je vsa matematika posledica, je torej izpeljana iz logike, nasprotno pa N. Bourbaki vidi logiko le kot eno od mnogih matematičnih struktur, z enakim statusom, le da jo lahko apliciramo na vse druge matematične strukture kot metodo pri dokazovanju. Lahko bi dejali, da imamo opravka z matematičnimi strukturami in iz njih, torej izhajajoč iz objekta, pridemo do logike s konstruiranjem na empiričnem materialu, ta konstrukcija pa je spet ena od matematičnih struktur.[3] Če je bila v 19. stoletju glavna novost v matematiki aksiomatski pristop v posameznih matematičnih disciplinah (strukturah), ki je bil v drugi polovici 19. stoletja dopolnjen z razvojem teorije množic, potem v 20. stoletju glavno novost predstavlja intenzivna razširitev algoritmov na vsa področja matematike, ki pa so prinesli tudi nekatere nove poglede na logiko. V sami matematiki so se pojavile različne logike. Pri tem se mi zdi pomembna okoliščina to, da je posamezna matematična teorija zadostno formalizirana in je zato logiko, ki se v njej uporablja, mogoče dovolj natančno razločiti od logike, ki se uporablja v kateri drugi matematični teoriji. Če študiramo dve »matematiki« – en tip pogojno označimo kot »tradicionalno« ali tudi kot »klasično«, drug tip pa kot »intuicionistično« (Brouwer) ali »konstruktivno« (A. Markov) –, kmalu uvidimo, da imata oba tipa različni logiki (odstopanje od tradicionalne Aristotelove logike v intuicionizmu in konstruktivizmu, saj ne velja »zakon izključenega tretjega«, drugače pa se interpretira tudi dvojna negacija). Naj poudarim, da je v obeh teh primerih izbrana logika posledica predmetnega področja, s katerim se ukvarjamo, torej je logika odvisna od predmeta, ki ga študiramo. Prepričan sem, da bi nekaj podobnega našli tudi na drugih področjih, ne le matematičnem, če so ta le zadosti formalizirana (fizika, pravo, teologija itd.).[4] Ali lahko na osnovi tega dejstva oblikujemo zaključek, da je logika eksperimentalna znanost, kot nakazuje Andrej Bauer v svojem nastopnem predavanju »Matematični relativizem« (2014)? Morda pa lahko premišljevanje zaključimo s parafrazo Kantovega vprašanja: *Kako je logika mogoča*?

Literatura

Bauer, A. (2014). »Matematični relativizem: nastopno predavanje ob izvolitvi v naziv rednega profesorja, 11. 11. 2014«. Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Povzetek dostopen na: https://www.fmf.uni-lj.si/si/obvestila/31597/. [Zadnji dostop: 5. 9. 2018]

Heyting, A. (1956). *Intuitionism*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Kant, I. (1999). *Prolegomena*. Ljubljana: DZS.

Rheinwald, R. (1984). *Der Formalismus und seine Grenzen. Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik*. Koenigstein. Ts: Verlag Anton Hain Maisenheim GmbH.

3 Več o tem v Rheinwald, 1984.

4 Zalta, 2018, predstavlja tak primer razvoja logike, in sicer znotraj splošne teorije o abstraktnih objektih.

Vidav, I. (1975). Števila in matematične teorije. Ljubljana: Mladinska knjiga.
Zalta, E. N. (2018). *Principia Logico-Metaphysica (Draft)*. Dostopno na: http://mally.stanford.edu/principia.pdf. [Zadnji dostop: 5. 9. 2018]