Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

Priporočeno predznanje iz srednješolske MATEMATIKE

Študijsko gradivo za študente FGG

Mojca Premuš

Ljubljana, 2021

VSEBINA:

I. Računanje z ulomki in potencami. Razstavljanje izrazov.

II. Linearna funkcija, linearna enačba in neenačba. Enačbe premic.

Linearna funkcija, enačba in neenačba

O (različnih) enačbah premic

III. Kvadratna funkcija, enačba in neenačba. Polinomi, polinomska enačba in neenačba. Racionalna funkcija, racionalna enačba in neenačba. Enačbe krožnice, elipse in hiperbole.

Kvadratna funkcija, enačba in neenačba

Polinomi, polinomska enačba in neenačba

Racionalna funkcija, racionalna enačba in neenačba

Enačbe krožnice, elipse in hiperbole

IV. Eksponentna funkcija, enačba in neenačba. Logaritemska funkcija, enačba in neenačba.

Eksponentna funkcija, enačba in neenačba

Logaritemska funkcija, enačba in neenačba

V. Trigonometrija. Kotne funkcije.

VI. Operacije na grafih.

VII. Naloge.

- i. Računanje z ulomki in potencami. Razstavljanje izrazov.
- ii. Linearna funkcija, linearna enačba in neenačba. Enačbe premic.
- iii. Kvadratna funkcija, enačba in neenačba. Polinomi, polinomska enačba in neenačba. Racionalna funkcija, racionalna enačba in neenačba. Enačbe krožnice, elipse in hiperbole.
- iv. Eksponentna funkcija, enačba in neenačba. Logaritemska funkcija, enačba in neenačba.
- v. Trigonometrija. Kotne funkcije.
- vi. Operacije na grafih.
- vii. Rešitve.

I. RAČUNANJE Z ULOMKI IN POTENCAMI. RAZSTAVLJANJE IZRAZOV.

Dogovor: Simboli, ki jih bomo uporabljali za označevanje množic števil:

- *naravna števila:* števila s katerimi štejemo, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- *cela števila:* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- *racionalna števila:* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$;
- *realna števila:* $\mathbb{R}$.

Opomba: Za zgoraj omenjene množice števil velja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Lastnosti računanja z realnimi števili:

- $a + b = b + a$, (zakon komutativnosti seštevanja)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, (zakon asociativnosti seštevanja)
- $a \cdot b = b \cdot a$, (zakon komutativnosti množenja)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, (zakon asociativnosti množenja)
- $(a + b)c = ac + bc$. (distributivnostni zakon)

Računanje s potencami (z naravnimi eksponenti):

- Definicija: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - krat}}$;
- Dogovor: $a^1 = a$.

Lastnosti računanja s potencami:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Pogoste napake: Zgornji formuli študentje včasih pomešajo in pridejo do (nepravilnih) različic $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ in $(a^m)^n = a^{m+n}$. Ti dve različici seveda ne držita, kot se lahko prepričamo na primerih:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &: \quad 2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5 \\ a^{m \cdot n} &: \quad 2^{3 \cdot 2} = 2^6 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} (a^m)^n &: \quad (2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6 \\ a^{m+n} &: \quad 2^{2+3} = 2^5\,. \end{aligned}$$

Formule: (ki si jih lahko vsak študent hitro izpelje sam)

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, (kvadrat dvočlenika)
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, (kub dvočlenika)
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, (razlika kvadratov)
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, (razlika kubov)

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, (vsota kubov)
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. (razlika potenc)

Pogoste napake:

- Večkrat pride do nepravilnega računa $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, protiprimer:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 : &\quad (2-1)^2 = 1^2 \\ a^2 - b^2 : &\quad 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3\,; \end{aligned}$$

- Včasih kakšen študent uporabi formulo za vsoto kvadratov, ki je podobna formuli za razliko kvadratov in je nepravila (formula za vsoto kvadratov ne obstaja): $a^2 + b^2 = (a+b)(a+b)$, protiprimer:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 : &\quad 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \\ (a+b)(a+b) : &\quad (2+1)(2+1) = 9\,. \end{aligned}$$

Lastnosti računanja z racionalnimi števili: (v vseh formulah, ki vsebujejo ulomke, je število v imenovalcu ulomka različno od 0)

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$, (seštevanje ulomkov)
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, (množenje ulomkov)
- $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, (razširjanje oz. krajšanje ulomka)
- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. (deljenje ulomkov)

Pogoste napake: večkrat študenti za računanje z ulomki "poenostavijo" v formuli $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d+b}$ in $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$, ki sta seveda napačni, protiprimera:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} : &\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{a+c}{d+b} : &\quad \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} : &\quad \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{b} + \frac{a}{c} : &\quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2\,. \end{aligned}$$

Računanje s potencami: (v vseh formulah je osnova potence strogo večja od nič in $n \in \mathbb{N}$)

- Definicija 1: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Definicija 2: $\sqrt[n]{a} = b$, če velja $b^n = a$ in $b \geq 0$.

Lastnosti računanja s potencami (z racionalnimi eksponenti, t.j. $m, n \in \mathbb{Q}$):

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,
- $a^n b^n = (ab)^n$,
- $a^0 = 1$,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$,
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$,
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

II. LINEARNA FUNKCIJA, LINEARNA ENAČBA IN NEENAČBA. ENAČBE PREMIC.

LINEARNA FUNKCIJA, ENAČBA IN NEENAČBA

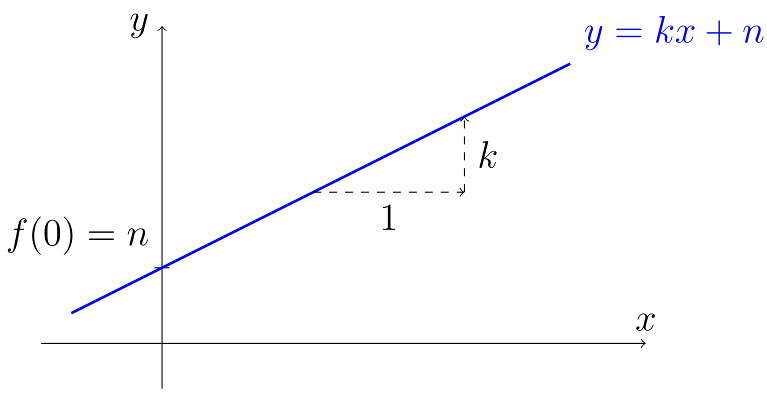
Definicija: *Linearna funkcija* je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = kx + n,\ k, n \in \mathbb{R}\,.$$

Konstanto n imenujemo *začetna vrednost*, konstanto k pa *smerni koeficient* funkcije.

Opomba: Imena v zgornji definiciji so naravna, če se zavedamo, da je graf linearne funkcije premica (lat. *linea*), ki seka ordinatno os v $f(0) = n$. Njen naklonski koeficient lahko interpretiramo po principu "če se iz premice premaknemo za eno enoto na desno, se moramo premakniti k enot navzgor (če je k pozitiven) ali navzdol (če je k negativen), da pridemo spet nazaj na premico".

Graf:



Izračun smernega koeficienta: Za izračun smernega koeficienta premice, ki poteka skozi (različni) točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ (kjer $x_1 \neq x_2$), uporabimo formulo:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pravokotnost in vzporednost premic: Za premici $p_1 : y = k_1x + n_1$ in $p_2 : y = k_2x + n_2$ velja:

- p_1 in p_2 sta vzporedni natanko tedaj, ko velja $k_1 = k_2$,
- p_1 in p_2 sta pravokotni natanko tedaj, ko velja $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Opomba: Iz geometrijskega pomena smernega koeficienta in iz zgornje formule je razvidno, da so grafi vseh linearnih funkcij premice, vse premice pa niso grafi linearnih funkcij. Če vzamemo npr. premico skozi točki $T_1(1, 0)$ in $T_2(1, 1)$ dobimo premico z enačbo $x = 1$, ki pa ni graf nobene linearne funkcije.

Linearna enačba: *Linearna enačba* je enačba oblike $kx + n = 0$ $(k \neq 0)$. Njena rešitev je $x = -\frac{n}{k}$.

Na kazalo

Opomba: Geometrijski pomen linearne enačbe: sprašujemo se po točki v kateri graf linearne funkcije seka abscisno os.

Linearna neenačba: V spodnji tabeli so predstavljene različne oblike *linearne neenačbe* in njihovih rešitev (glede na predznak koeficienta $k \neq 0$).

		$k > 0$	$k < 0$
(I)	$kx + n > 0$	$x > -\frac{n}{k}$	$x < -\frac{n}{k}$
(II)	$kx + n \geq 0$	$x \geq -\frac{n}{k}$	$x \leq -\frac{n}{k}$
(III)	$kx + n < 0$	$x < -\frac{n}{k}$	$x > -\frac{n}{k}$
(IV)	$kx + n \leq 0$	$x \leq -\frac{n}{k}$	$x \geq -\frac{n}{k}$

Opomba: Geometrijski pomen linearne neenačbe: sprašujemo se po točkah v katerih graf linearne funkcije leži nad abscisno osjo (I), nad ali na abscisni osi (II), pod abscisno osjo (III) in pod ali na abscisni osi (IV).

O (RAZLIČNIH) ENAČBAH PREMIC

Eksplicitna oblika enačbe premice: $y = kx + n$, $k, n \in \mathbb{R}$
Geometrijski pomen koeficientov k in n je opisan že na prejšnjih straneh. Videli smo, da so grafi linearnih funcij premice. Izkaže se, da se pa vseh premic ne da predstaviti kot graf neke linearne funkcije. Lep protiprimer so vse premice, ki so vzporedne y osi. Njihove enačbe so $x = a$, za nek $a \in \mathbb{R}$.

Implicitna enačba premice: $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
Z implicitno obliko enačbe lahko predstavimo vse premice v ravnini. Medtem ko sta geometrijska pomena parametrov a in b malce neočitna (njun geometrijski pomen bomo spoznali pri analitični geometriji), je pomen parametra c razdelitev premic na tiste, ki potekajo skozi izhodišče koordinatnega sistema in tiste ki ne. Konkretneje: če je $c = 0$, potem premica poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema, če pa je $c \neq 0$, pa ne.

Odsekovna enačba premice: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$
Tudi z odsekovno obliko enačbe premice ne moremo predstaviti vseh premic v ravnini. Izjeme so premice, ki so vzporedne osi x in tiste, ki so vzporedne osi y. Geometrijski pomen parametra n je enak kot pri eksplicitni obliki enačbe premice: opisana premica seka y-os pri vrednosti n (če seveda premica ni vzporedna y-osi, v tem primeru je enačba premice oblike $\frac{x}{m} = 1$). Parameter m nam pove, da premica seka x-os pri vrednosti m (če premica ni vzporedna x-osi, v tem primeru je enačba premice oblike $\frac{y}{n} = 1$).

III. KVADRATNA FUNKCIJA, ENAČBA IN NEENAČBA. POLINOMI, POLINOMSKA ENAČBA IN NEENAČBA. RACIONALNA FUNKCIJA, RACIONALNA ENAČBA IN NEENAČBA. ENAČBE KROŽNICE, ELIPSE IN HIPERBOLE.

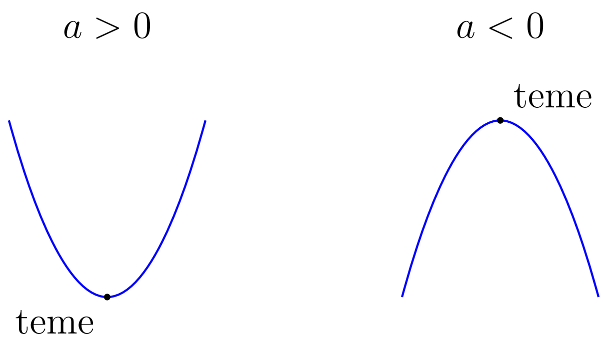
KVADRATNA FUNKCIJA, ENAČBA IN NEENAČBA

Definicija: *Kvadratna funkcija* je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R} \text{ in } a \neq 0.$$

Konstanto a imenujemo *kvadratni (ali vodilni) koeficient*, konstranto b *linearni koeficient* in konstanto c *prosti člen* kvadratne funkcije.

Graf: Graf kvadratne funkcije je kvadratna parabola. Smer odprtosti kvadratne parabole je odvisna od predznaka kvadratnega koeficienta a. Če je $a > 0$, je parabola odprta v pozitivni smeri osi y. V tem primeru ima kvadratna funkcija minimum v točki, ki jo imenujemo *teme parabole*. Če je $a < 0$, je parabola odprta v smeri negativnega dela y osi, v temenu pa doseže maksimum.



Kvadratna enačba: *Kvadratna enačba* je enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Njeni rešitvi sta $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Vietovo pravilo: Pri reševanju kvadratne enačbe si lahko pomagamo tudi s pravilom:

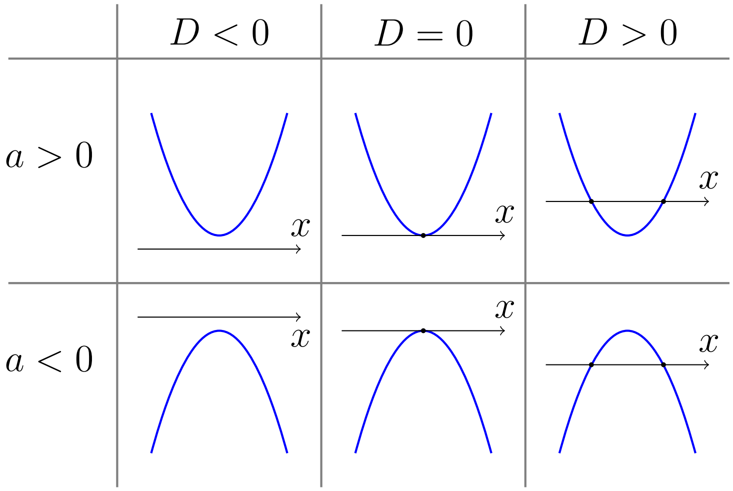
$$x^2 - (a + b)x + a \cdot b = (x - a)(x - b).$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta potem $x_1 = a$ in $x_2 = b$.

Opomba: Kvadratna enačba ima lahko dve različni realni rešitvi, eno dvojno realno rešitev ali pa nima realnih rešitev. Katera izmed možnosti drži za posamezno enačbo, je hitro razvidno iz *diskriminante* $D = b^2 - 4ac$. Če je $D > 0$, je njen kvadratni koren pozitivno realno število, zato dobimo dve različni realni rešitvi kvadratne enačbe. Če je $D = 0$, dobimo eno samo (dvojno) rešitev, saj je $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Če pa velja $D < 0$, pa enačba nima realnih[1] rešitev.

Graf-bolj natančno: Prejšnjo tabelo, v kateri smo predstavili obliki grafa v odvisnosti od kvadratnega koeficienta funkcije, lahko zdaj dopolnimo s slikami, ki orišejo vpliv diskriminante D na graf kvadratne funkcije.

[1]Dobimo dve konjugirani kompleksni rešitvi kvadratne enačbe, saj je $\sqrt{D}$ imaginarno število.



Kvadratna neenačba: *Kvadratne neenačbe* so neenačbe naslednjih oblik

$$\left.\begin{array}{r} \text{(I) } ax^2+bx+c>0, \\ \text{(II) } ax^2+bx+c\geq 0, \\ \text{(III) } ax^2+bx+c<0, \\ \text{(IV) } ax^2+bx+c\leq 0. \end{array}\right\} a\neq 0$$

Reševanja kvadratne neenačbe se lahko lotimo računsko ali grafično. Pri obeh načinih potrebujemo najprej rešitve, $x_{1,2}$, kvadratne enačbe $ax^2+bx+c=0$, če le obstajata (t.j. če nista kompleksni).

Reševanje kvadratne neenačbe:
I. način (računsko): Če kvadratna enačba, ki pripada kvadratni neenačbi nima (realnih) rešitev, je izraz ax^2+bx+c vedno istega predznaka (saj kvadratna funkcija menja predznak le v realnih enkratnih rešitvah kvadratne enačbe). Rešitve kvadratnih neenačb so tako:

tip neenačbe	$a > 0$	$a < 0$
(I) in (II)	$x \in \mathbb{R}$	$\emptyset$
(III) in (IV)	$\emptyset$	$x \in \mathbb{R}$

Če obstajata realni ničli pripadajoče kvadratne enačbe $x_{1,2}$, lahko desno stran neenačb (vseh tipov) faktoriziramo:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ko rešujemo neenačbe zgoraj opisanih tipov se lahko vprašamo, za katera realna števila x bo produkt dveh števil $(x-x_1)$ in $(x-x_2)$:

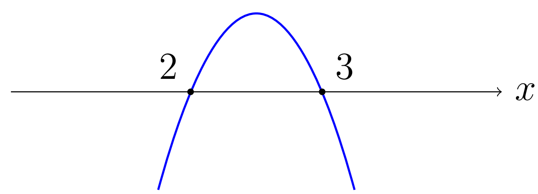
- pozitiven (I), nenegativen (II), negativen (III) ali nepozitiven (IV), ko je $a > 0$,
- negativen (I), nepozitiven (II), pozitiven (III) ali nenegativen (IV), ko je $a < 0$.

Primer: Rešimo neenačbo $-x^2+5x-6\geq 0$. Levo stran faktoriziramo s pomočjo Vietovih pravil $-x^2+5x-6=-(x^2-5x+6)=-(x-2)(x-3)$. Ker želimo, da je produkt števil na levi strani neenačbe nenegativen, mora veljati $(x-2)(x-3)\leq 0$. Produkt dveh realnih števil ($(x-2)$ in $(x-3)$) je nepozitiven, ko veljata $x-2\geq 0$ in $x-3\leq 0$ ali pa $x-2\leq 0$ in

$x - 3 \geq 0$. Prvi pogoj velja, ko veljata neenačbi $x \geq 2$ in $x \leq 3$, torej, ko je $x \in [2, 3]$. Drugi pogoj pa velja, ko veljata neenačbi $x \leq 2$ in $x \geq 3$, kar pa ne drži za nobeno realno število x (ne obstaja realno število x, ki je hkrati manjše od 2 in večje od 3).
Rešitev neenačbe so $x \in [2, 3]$.

II. način (grafično): Levo stran neenačbe predstavimo z grafom kvadratne funkcije. Rešitve neenačbe so tisti x (abscise točk), za katere bo graf kvadratne funkcije ležal strogo nad abscisno osjo (I), nad ali na abscisni osi (II), strogo pod abscisno osjo (III) ali pa pod ali na abscisni osi (IV).

Primer: Rešimo neenačbo $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$. Že zgoraj smo ugotovili, da lahko levo stran zapišemo v faktorizirani obliki $-(x-2)(x-3)$, od koder odčitamo ničli kvadratne funkcije $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$. Skicirajmo graf kvadratne funkcije.



Rešitev kvadratne neenačbe so tista realna števila x, za katera je graf parabole nad ali na abscisni osi, to je med obema ničlama (vključno z ničlama).
Rešitev neenačbe so $x \in [2, 3]$.

Pogoste napake: V primeru reševanja kvadratne neenačbe $x^2 \geq 1$ večkrat pride do napačnih rešitev $x \geq 1$ ali celo $x \geq \pm 1$ (katera realna števila so tukaj mišljena sploh ni jasno). Če dano neenačbo zapišemo v obliki $x^2 - 1 \geq 0$ oz. $(x-1)(x+1) \geq 0$ hitro vidimo, da je rešitev $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

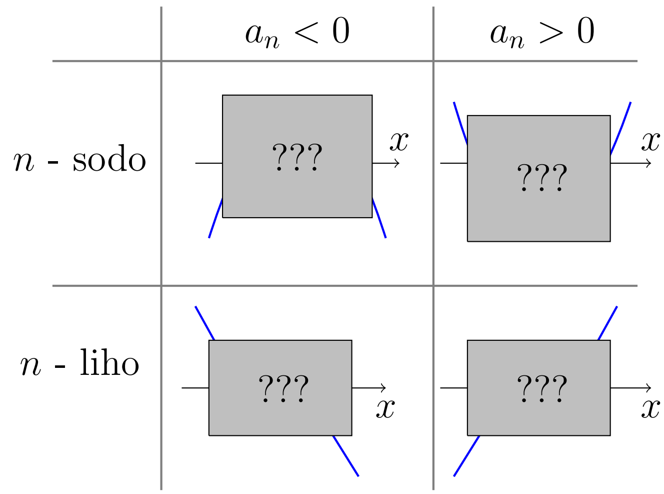
POLINOMI, POLINOMSKA ENAČBA IN NEENAČBA

Definicija: *Polinom stopnje* n je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n,\ a_{n-1},\ \ldots, a_1,\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ in } a_n \neq 0.$$

Konstanto a_n imenujemo *vodilni koeficient*, konstranto a_0 pa *prosti člen* polinoma.
Opomba: Ničelni polinom $p(x) = 0$ je polinom stopnje 0 (čeprav je njegov vodilni koeficient enak 0).

Graf: Graf polinoma je odvisen od njegove stopnje (še posebej od dejstva ali je n sodo ali liho število) in od predznaka vodilnega koeficienta. Na spodnji skici grafov je vmesni del grafa (označen s sivim pravokotnikom) neznanka, odvisen je od preostalih členov polinoma.



Polinomska enačba: *Polinomska enačba* je enačba oblike $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$). Polinomska enačba ima lahko največ n različnih rešitev. Medtem ko poznamo rešitve polinomskih enačb reda 2 (to so ravno kvadratne enačbe), za enačbe višjih redov ne bomo podali formul (za nekatere enačbe formule sploh ne obstajajo).

Omenimo *Hornerjev algoritem* za iskanje ničel polinoma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. S pomočjo tega algoritma iščemo ničle med deljitelji prostega člena a_0. Postopek si poglejmo na primeru:

Primer: Reši enačbo $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.
Kandidati za ničle, po Hornerjevem algoritmu, so 2, 1, -1 in -2. Preizkusimo jih:

	1	2	− 1	− 2	
		2	8	14	
2	1	4	7	12	⇒ 2 ni ničla danega polinoma

	1	2	− 1	− 2	
		1	3	2	
1	1	3	2	0	⇒ 1 je ničla danega polinoma

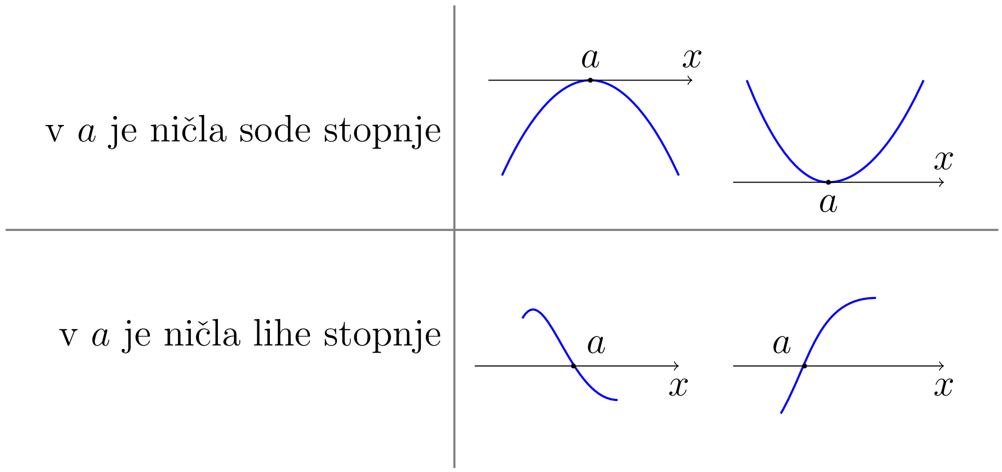
koeficienti kvadratnega polinoma

Število 1 je ničla danega polinoma, 1, 3 in 2 pa so koeficienti kvadratnega polinoma, ki ga dobimo pri faktorizaciji danega polinoma: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$. Da rešimo polinomsko enačbo, faktoriziramo še kvadratni polinom (npr. s pomočjo Vietovih formul):

$$\begin{aligned}x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0\\(x - 1)(x^2 + 3x + 2) &= 0\\(x - 1)(x + 2)(x + 1) &= 0\end{aligned}$$

Rešitve polinomske enačbe so $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ in $x_3 = -1$.

Graf - bolj natančno: Opišimo še pomen stopnje ničle polinomske enačbe na obliko grafa polinoma. Če je a ničla sode stopnje (t.j., če se v faktorizirani obliki polinoma pojavi a le v členu $(x-a)^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$), potem polinom v a ne spreminja predznaka. Graf polinoma se v a osi x le dotakne. Če je a ničla lihe stopnje (t.j., če se v faktorizirani obliki polinoma pojavi a le v členu $(x-a)^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$), potem polinom v a spremeni predznak. Graf polinoma v a seka os x.

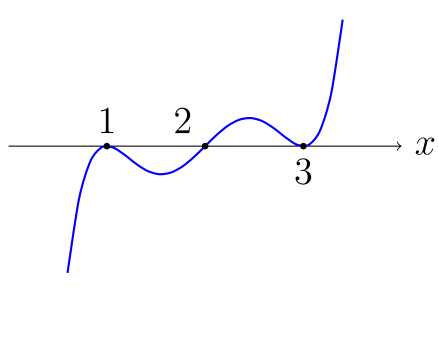


Reševanje polinomske neenačbe:
I. način (računsko): Če poznamo vse ničle polinoma, zapišemo polinom v faktorizirani obliki in potem sklepamo na predznak polinoma. Lahko pa tudi izračunamo vrednost polinoma v neki točki (ne ničli), potem pa sklepamo na predznake polinoma v intervalih med različnimi ničlami po principu: v ničlah lihe stopnje polinom spremeni predznak, v ničlah sode stopnje pa ne.

Primer: Reši neenačbo $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 \geq 0$.
Rešitve enačbe $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2$ so $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ in $x_3 = 3$. Ker je v teh točkah $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 = 0$, so te točke tudi v množici rešitev dane neenačbe. Ker sta faktorja $(x-1)^2$ in $(x-3)^2$ vedno nenegativna, bo produkt na levi strani neenakosti pozitiven, ko bo pozitiven $(x-2)$, to pa je za $x > 2$. Rešitev neenačbe so tako vsa števila iz množice $\{1\} \cup [2, \infty)$.

II. način (grafično): Skiciramo graf polinoma in rešitev odčitamo iz grafa.

Primer: Reši neenačbo $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 \geq 0$.
Vodilni koeficient danega polinoma je 1, njegove ničle pa $x_1 = 1$ (2. stopnje), $x_2 = 2$ (1. stopnje) in $x_3 = 3$ (2. stopnje). Skicirajmo graf:



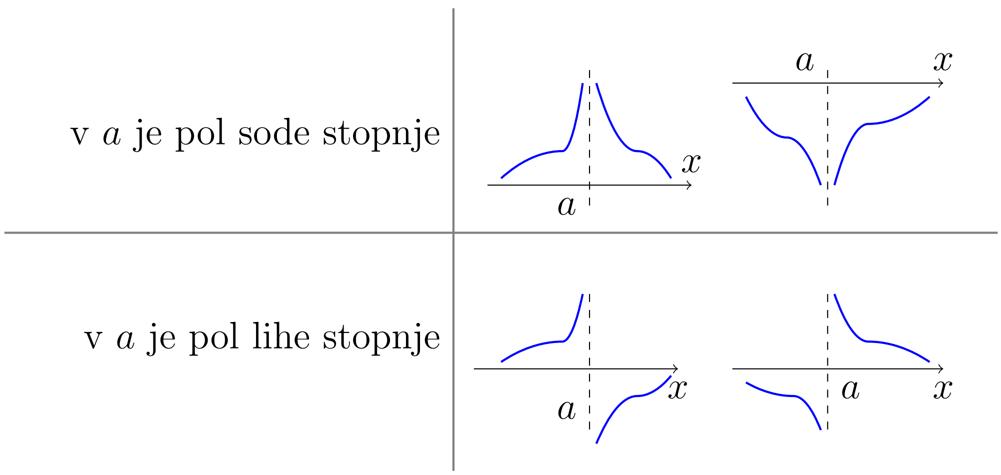
Rešitve dane neenačbe sovpadajo z abscisami točk, kjer graf polinoma leži nad ali na x osi, torej: $\{1\} \cup [2, \infty)$.

RACIONALNA FUNKCIJA, RACIONALNA ENAČBA IN NEENAČBA

Definicija: Racionalna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ tuja si polinoma (t.j. nimata skupnih ničel) in $q(x) \neq 0$.

Graf: Na obliko grafa racionalne funkcije vplivajo ničle (in njihova stopnja), poli (in njihova stopnja) ter asimptote.

- **Ničle:** ničle racionalne funkcije sovpadajo z ničlami polinoma p. Za vpliv stopnje ničle na graf poglejte vpliv stopnje ničle na graf polinoma.
- **Poli:** poli racionalne funkcije sovpadajo z ničlami polinoma q. Če je v a pol lihe stopnje, funkcija menja predznak, če pa je v a pol sode stopnje, pa ne.



- **Asimptote:** Ločimo tri primere:
  1. Stopnja polinoma v števcu je manjša od stopnje polinoma v imenovalcu (torej $n < m$): vodoravna asimptota je x os.
  2. Stopnji polinomov sta enaki ($n = m$): vodoravna asimptota je premica $y = \frac{a_n}{b_m}$.
  3. Stopnja polinoma v števcu je večja od stopnje polinoma v imenovalcu ($n > m$): asimptota je kvocient, ki ga dobimo, ko delimo $p(x) : q(x)$.
     Opomba: Ničla ostanka pri deljenju $p(x) : q(x)$ nam pove, kje graf racionalne funkcije seka asimptoto.

Primer: Določi ničle, pole in asimptote racionalne funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$ ter skiciraj njen graf.

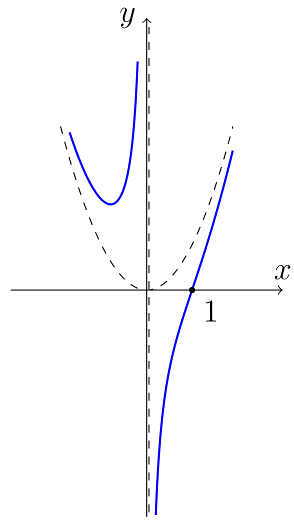
- **Ničle:** $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$
  Vidimo, da je ena ničla enaka $x_1 = 1$ (1. stopnje). Preostale ničle dobimo iz enačbe $x^2 + x + 1 = 0$, ker pa je diskriminanta kvadratne funkcije, ki nastopa na levi strani kvadratne enačbe enaka $D = 1 - 4 = -3$, je 1 edina ničla racionalne funkcije.
- **Poli:** $x = 0$

- **Asimptota:**

$$\begin{array}{l} \left(\;\; x^3 - 1\right) : x = x^2 + \dfrac{-1}{x}. \\ \underline{-\,x^3} \\ \qquad -\,1 \end{array}$$

  Enačba asimptote: $y = x^2$.
  Opomba: Ostanek -1 nam pove, da graf racionalne funkcije ne seka asimptote, saj ta ostanek nikoli ni enak 0.

- **Graf:**

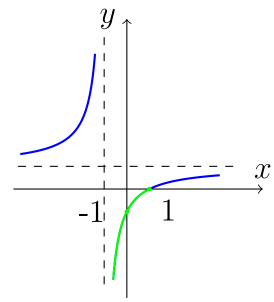


Reševanje racionalne neenačbe:
I. način (računsko): Neenakost $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ bo držala za tista realna števila x, za katera bosta števec in imenovalec hkrati pozitivna, ali hkrati negativna. Torej $p(x) > 0$ in $q(x) > 0$ ali $p(x) < 0$ in $q(x) < 0$. Analogno sklepamo še pri preostalih tipih neenačb (vrednost ulomka je negativna, ko sta števec in imenovalec nasprotno predznačena).
Primer 1: Reši neenačbo: $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$.
Prva možnost: $x - 1 \leq 0$ (oz. $x \leq 1$) in $x + 1 > 0$ (oz. $x > -1$) nam vrne rešitev $x \in (-1, 1]$.
Druga možnost: $x - 1 \geq 0$ (oz. $x \geq 1$) in $x + 1 < 0$ (oz. $x < -1$) nima rešitev.
Rešitev neenačbe: $x \in (-1, 1]$.
Primer 2: Reši neenačbo: $\frac{x^3-1}{x} > 0$.
Prva možnost: $x^3 - 1 > 0$ in $x > 0$. Rešimo neenačbo $x^3 - 1 > 0$ tako, da levo stran faktoriziramo in neenačbo prepišemo v obliko $(x-1)(x^2+x+1) > 0$. Prej smo ugotovili, da je $(x^2+x+1) > 0$, zato bo produkt polinomov pozitiven natanko tedaj, ko bo veljalo $(x-1) > 0$ oz. $x > 1$. Ker je imenovalec pozitiven, ko je $x > 0$, je ulomek pozitiven, ko je $x \in (1, \infty)$.
Druga možnost: $x^3 - 1 < 0$ in $x < 0$. Faktoriziramo levo stran prve neenačbe in jo prepišemo v obliko $(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$. Prej smo ugotovili, da je $(x^2 + x + 1) > 0$, zato bo produkt polinomov pozitiven le, ko bo veljalo $(x - 1) < 0$ oz. $x < 1$. Ne pozabimo, da je imenovalec negativen, ko je $x < 0$, zato je ulomek pozitiven, ko je $x \in (-\infty, 0)$.
Rešitev neenačbe: $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

II. način (grafično): Skiciramo graf racionalne funkcije in rešitev odčitamo iz grafa.

Primer 1: Reši neenačbo: $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$.

- **Ničle:** $x = 1$ (1. st.)
- **Poli:** $x = -1$ (1. st.)
- **Asimptota:** $y = 1$
- **Začetna vrednost:** $f(0) = -1$ (vrednost, ki jo hitro izračunamo in večkrat pride prav pri skici grafa)



Odčitamo rešitev: $x \in (-1, 1]$.

Primer 2: Reši neenačbo: $\frac{x^3-1}{x} > 0$.
Ker smo graf skicirali že prej, rešitev enostavno odčitamo (gledamo abscise točk grafa funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$, ki ležijo nad osjo x): $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

ENAČBE KROŽNICE, ELIPSE IN HIPERBOLE

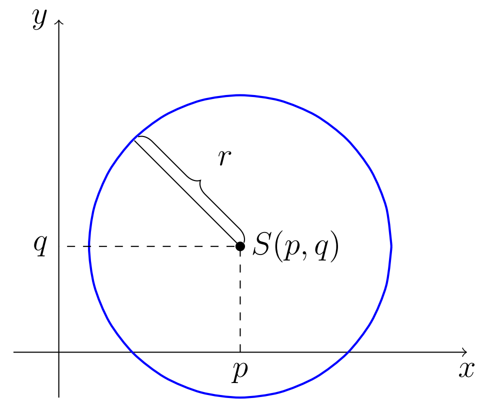
KROŽNICA

Enačba krožnice s polmerom r v izhodiščni legi (t.j. središče krožnice je v izhodišču koordinatnega sistema):

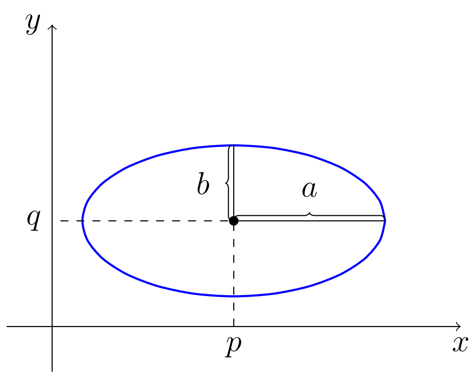
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Enačba krožnice s polmerom r in središčem v točki $S(p, q)$ (slika desno):

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$



ELIPSA



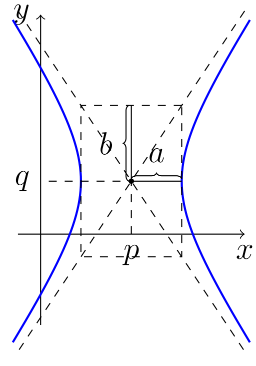
Enačba elipse z veliko polosjo a, malo polosjo b in središčem v točki $S(p, q)$:

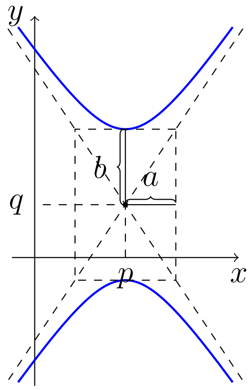
$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1.$$

HIPERBOLA

Enačba hiperbole z veliko polosjo a, malo polosjo b in središčem v točki $S(p, q)$:

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} - \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1 \text{ (slika desno) ali}$$





$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1 \text{ (slika levo).}$$

Primer: Ali je krivulja z enačbo $x^2 + x = 2 - y^2$ krožnica, elipsa ali hiperbola? Določite njeno središče.

Najprej dopolnimo izraz $x^2 + x$ do popolnega kvadrata. Pri tem se naslonimo na formulo $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Če je v našem izrazu x enak a, potem je b enak $\frac{1}{2}$, zato računamo

$$x^2 + x = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Enačba naše krivulje se zdaj glasi

$$\begin{aligned} x^2 + x &= 2 - y^2, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 2, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Prepoznamo, da gre za krožnico s središčem v točki $S\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (in polmerom $\frac{3}{2}$).

IV. EKSPONENTNA IN LOGARITEMSKA FUNKCIJA. EKSPONENTNA IN LOGARITEMSKA ENAČBA.

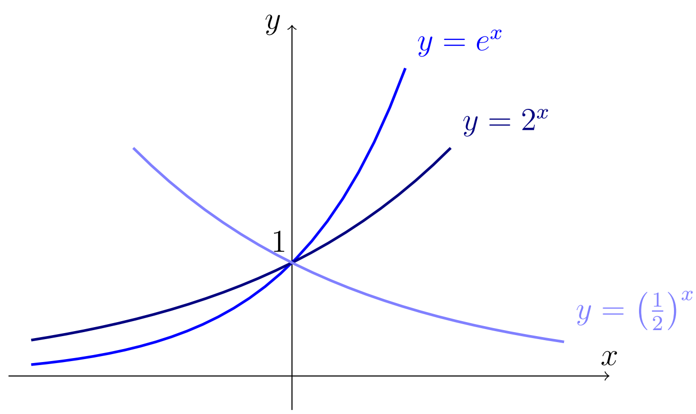
EKSPONENTNA FUNKCIJA

Definicija: *Eksponentna funkcija* je oblike

$$f(x) = a^x,\ a > 0 \text{ in } a \neq 1\,.$$

Opomba: Če v zgornji definiciji izberemo $a = 1$, dobimo konstantno funkcijo $f(x) = 1$.

Graf: Oblika grafa je odvisna od osnove a. Če velja $0 < a < 1$, eksponentna funkcija pada (proti nič), če je $a > 1$ pa narašča (od nič). Vsi grafi potekajo skozi točko $(0, 1)$.



Eksponentna enačba: (Preprostejše) eksponentne enačbe rešujemo s preoblikovanjem enačbe na obliko $a^b = a^c$, saj je ta enakost ekvivalentna enakosti $b = c$.

LOGARITEMSKA FUNKCIJA

Preden se lotimo definicije logaritemske funkcije si poglejmo definicijo logaritma kot računske operacije ter nekaj njenih osnovnih lastnosti.

Definicija: Naj bo $a > 0$, $a \neq 1$ in $b > 0$. Zveza $\log_a b = c$ velja natanko tedaj, ko je $a^c = b$.

Lastnosti logaritma:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$,
- $n \log_a b = \log_a b^n$,
- $\log_a 1 = 0$.

Dogovor:

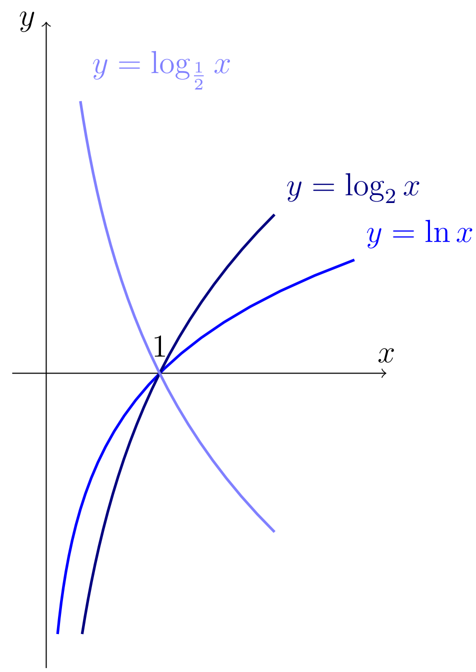
- $\log_e b = \ln b$,
- $\log_{10} b = \log b$.

Definicija: *Logaritemska funkcija* je oblike

$$f(x) = \log_a x,\ a > 0 \text{ in } a \neq 1\,.$$

Opomba: Logaritemska funkcija je definirana za $x > 0$.

Graf: Oblika grafa je odvisna od osnove a. Če velja $0 < a < 1$, logaritemska funkcija pada (proti $-\infty$), če je $a > 1$ pa narašča (od $-\infty$).

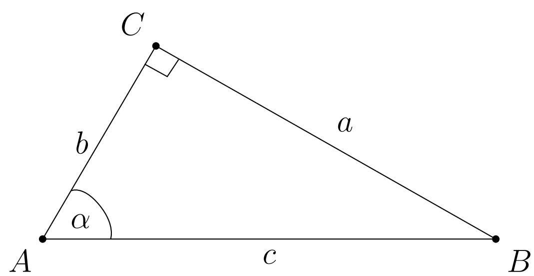


Logaritemska enačba: (Preprostejše) logaritemske enačbe rešujemo s preoblikovanjem enačbe na obliko $a = \log_b c$, saj je ta enakost ekvivalentna enakosti $c = b^a$.

V. TRIGONOMETRIJA. KOTNE FUNKCIJE.

Definicija: V pravokotnem trikotniku s katetama a in b ter hipotenuzo c definiramo *sinus kota* kot razmerje med kotu nasprotno kateto in hipotenuzo, *kosinus kota* kot razmerje med priležno kateto in hipotenuzo, *tangens kota* kot razmerje med nasprotno in priležno kateto ter *kotangens kota* kot razmerje med priležno in nasprotno kateto.

Oznake: Za trikotnik na spodnji skici so vse definicije zapisane simbolno.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

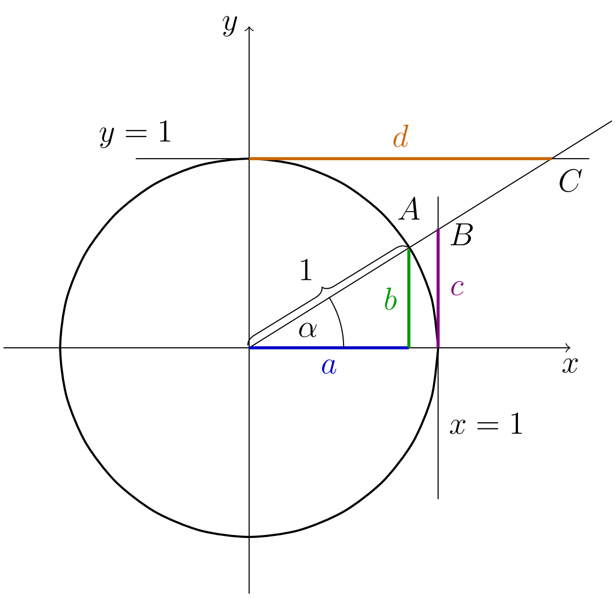
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$

$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$

Ker z zgornjo definicijo definiramo sinus, kosinus, tangens in kotangens le za ostre kote, razširimo definicijo s pomočjo enotske krožnice.

Definicija: V koordinatni sistem narišimo enotsko krožnico (t.j. krožnica s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom 1). Naj bo x kot z vrhom v izhodišču koordinatnega sistema, enim krakom na pozitivnem delu abscisne osi in drugim krakom nanesenim v nasprotni smeri urinega kazalca (t.j. pozitivna smer)[2]. Točka A, v kateri drugi krak seka enotsko krožnico, ima koordinate (a, b), točka, v kateri drugi krak seka premico $x = 1$, je $B(1, c)$ in točka, v kateri seka premico $y = 1$, $C(d, 1)$.



Sinus in kosinus kota α definiramo:

$\cos\alpha = a$,

$\sin\alpha = b$,

$\mathrm{tg}\ \alpha = c$,

$\mathrm{ctg}\ \alpha = d$.

Lastnosti:

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ in $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,

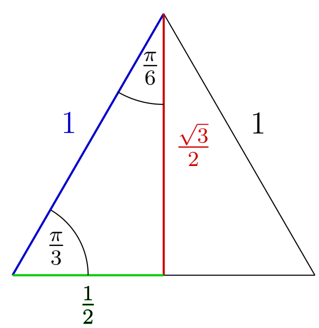
[2] Če je kot x negativen, ga nanašamo v smeri urinega kazalca t.j. v negativni smeri.

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,
- (adicijska izreka) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ in $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,
- (dvojni koti) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ in $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
- (komplementarni koti) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ in $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$,
- (suplementarni koti) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ in $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$,
- (periodičnost) $\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha$ in $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$ ter $\mathrm{tg}\,(\alpha+\pi) = \mathrm{tg}\,\alpha$ in $\mathrm{ctg}\,(\alpha+\pi) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
- $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ in $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Tabela vrednosti sinusa, kosinusa, tangensa in kotangensa nekaterih kotov:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

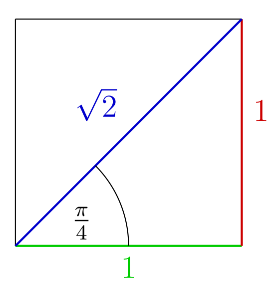
Nekaj receptov kako si zapomniti vrednosti iz tabele:
1. recept:
Za kota $\frac{\pi}{3}$ in $\frac{\pi}{6}$ uporabimo polovico enakostraničnega trikotnika, s stranico dolžine 1.



Za poljubne vrednosti uporabimo prve definicije in gledamo primerne katete, npr.:
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{1}{2}$

Za kot $\frac{\pi}{4}$ uporabimo polovico (po diagonali razrezanega) kvadrata s stranico dolžine 1.

Za poljubne vrednosti spet uporabimo prve definicije, npr.:
$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}} = 1$

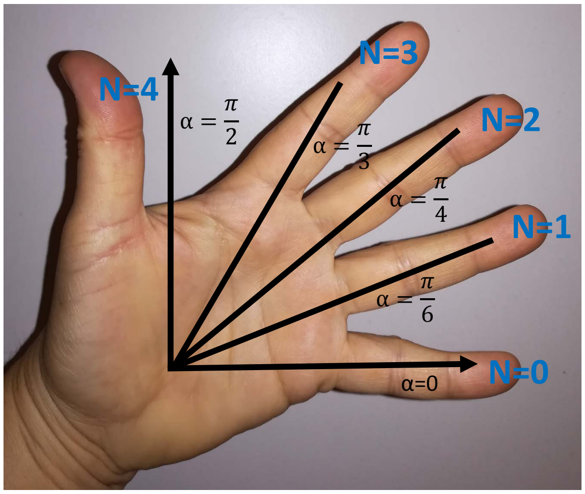


2. recept:
Dovolj je, da si zapomnimo vrednosti za sinus petih kotov iz tabele, vrednosti kosinusov dobimo

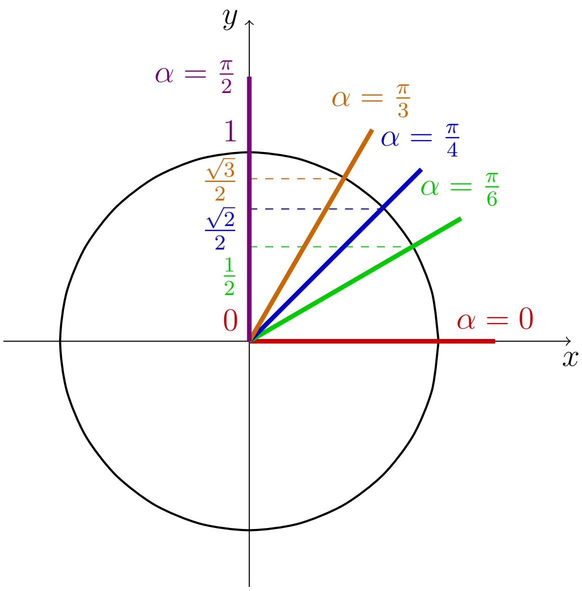
s pomočjo formule $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$, vrednosti tangensa in kotangensa pa s formulama $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ in $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Za vrednosti sinusa pa si zapolnimo zgolj formulo

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{N}}{2},$$

kjer je vrednost N odvisna od kota α, kot je razloženo na naslednji sliki. Vrednost N-ja za posamezen kot je označena z modro barvo.



3. recept:
Tudi pri tem receptu je dovolj, da si zapomnimo le vrednosti za sinus omenjenih petih kotov, ostale vrednosti pridobimo s prej zapisanimi formulami. Tokrat uporabimo enotsko krožnico. Na skici so označene zgolj vrednosti za sinuse. Pomaga nam neenakost $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

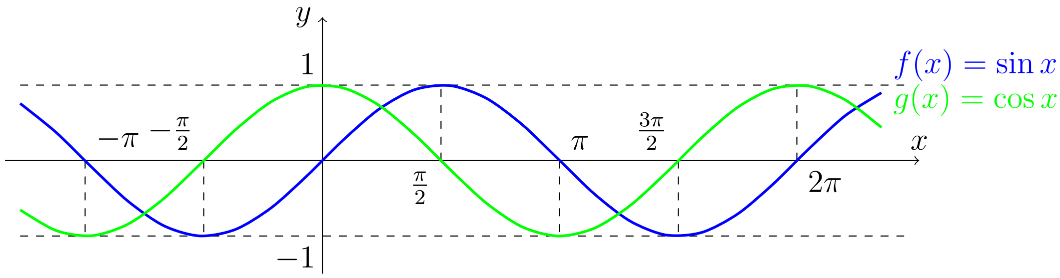


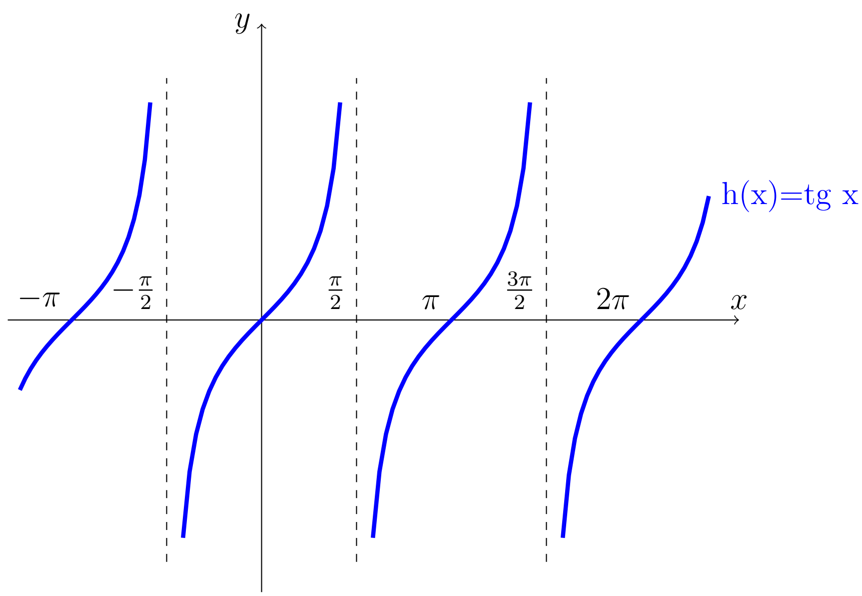
Definicija: *Trigonometrične funkcije* so funkcije[3] $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \operatorname{tg} x$ in $k(x) = \operatorname{ctg} x$. Prvi dve funkciji sta definirani za vsa realna števila. Funkcija $h(x) = \operatorname{tg} x$ je

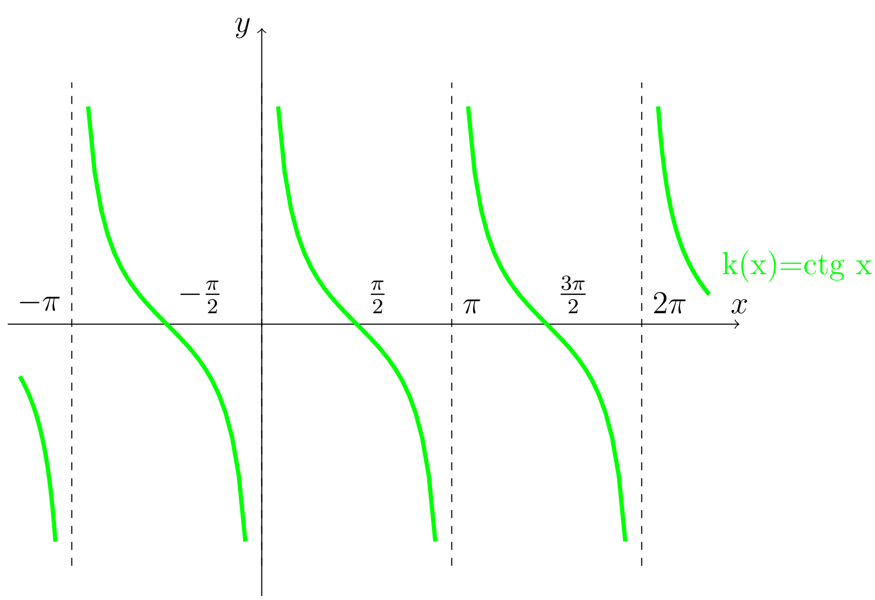
[3]Opisane funkcije so podane v najpreprostejši obliki. Za grafe funkcij kompleksnejših oblik poglejte zadnje poglavje.

definirana za vsa realna števila, razen za tiste x, v katerih je vrednost $\cos x$ enaka 0. To pomeni, da je definicijsko območje funkcije enako $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Definicijsko območje funkcije $k(x) = \text{ctg } x$ je (po podobnem premisleku) enako $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Grafi trigonometričnih funkcij: Grafa funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$ bomo narisali v prvi koordinatni sistem, grafa funkcij $h(x) = \text{tg } x$ in $k(x) = \text{ctg } x$ pa vsakega v svoj koordinatni sistem.



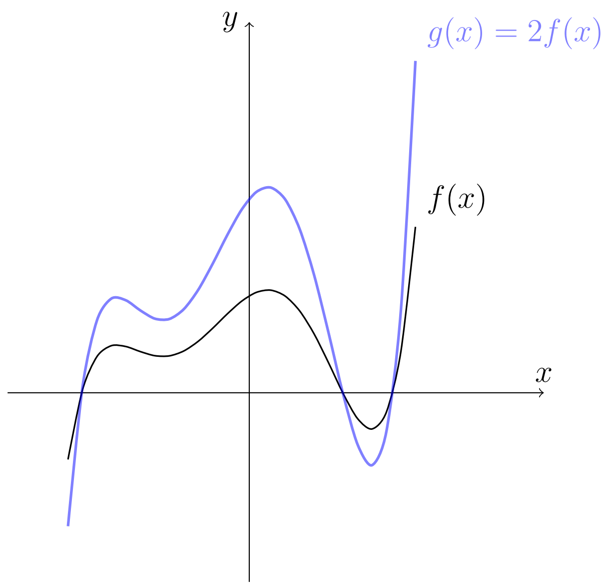




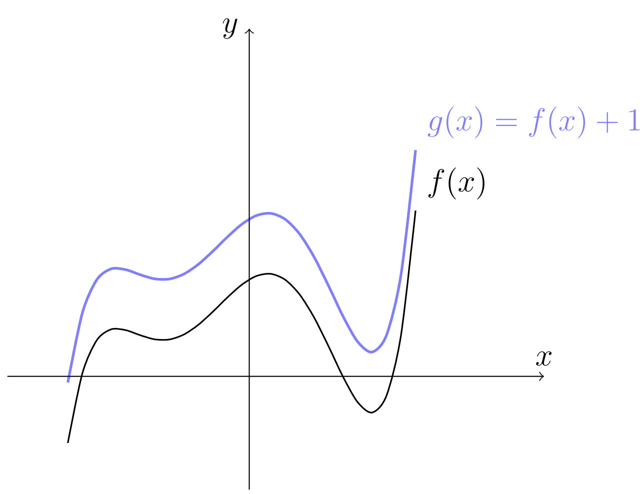
VI. OPERACIJE NA GRAFIH.

V prejšnjih poglavjih smo videli nekaj grafov funkcij v njihovih preprostejših oblikah. V tem poglavju bomo pogledali nekaj preprostih operacij, s katerimi bomo spremenili funkcijski predpis ter pogledali še kako se te operacije odražajo na grafih.

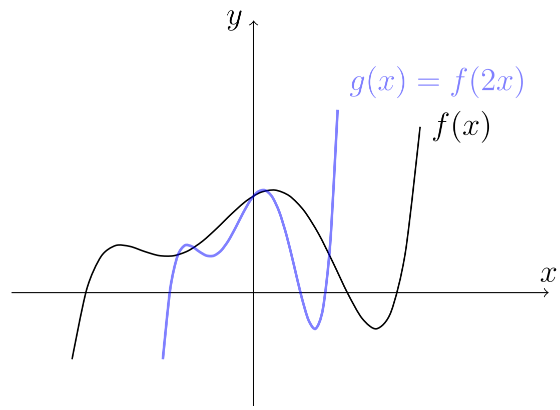
$\mathbf{g(x) = Af(x)}$: Ko funkcijski predpis pomnožimo z neničelnim realnim številom A, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ raztegnemo v smeri y osi za faktor A. Če je A negativno število, gre za negativen raztezek, t.j. raztezek za $-A$ ter zrcaljenje čez os x.



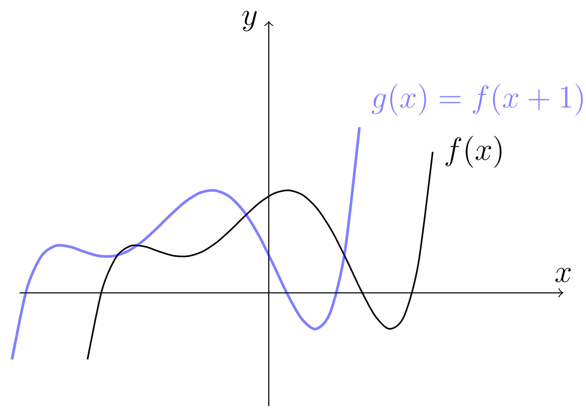
$\mathbf{g(x) = f(x) + B}$: Ko funkcijskemu predpisu prištejemo neničelno realno število B, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ premaknemo navzgor v smeri y osi za B. Če je B negativno število, gre za premik navzdol.



$\mathbf{k(x) = f(ax)}$: Ko v funkcijskemu predpisu spremenljivko x pomnožimo z neničelnim realnim številom a, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ skrčimo v smeri x osi za faktor a.

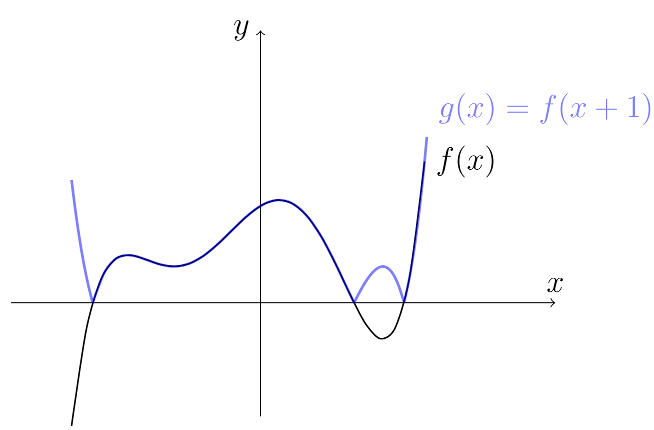


$\mathbf{k(x) = f(x + b)}$: Ko v funkcijskemu predpisu spremenljivki x prištejemo neničelno realno število b, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ premaknemo v negativni smeri x osi za b. Če je b negativen, gre seveda za premik v smeri osi x.



Pri funkcijskih predpisih kompleksnejših oblik, npr. $\mathbf{k(x) = Af(a(x + b)) + B}$ se je najbolje držati vrstnega reda: premik v smeri osi x za b, raztezek v smeri osi x za a, raztezek v smeri osi y za A ter premik v smeri osi y za B.

$\mathbf{k(x) = |f(x)|}$: Ko rišemo graf absolutne vrednosti neke funkcije, ga dobimo tako, da tiste dele grafa funkcije $f(x)$, ki ležijo pod osjo x zrcalimo čez os x, dele grafa, ki ležijo nad osjo x pa pustimo pri miru.



VII. NALOGE.

i. RAČUNANJE Z ULOMKI IN POTENCAMI. RAZSTAVLJANJE IZRAZOV.

1. Izpostavi skupni faktor:
   (a) $ab + ac + bb + bc =$

   (b) $acd - ace + bcd - bce =$

   (c) $abc + bda - eba =$

2. Faktoriziraj izraz:
   (a) $49a^2 - 4b^2 =$

   (b) $a^3 + 27 =$

   (c) $x^5 - 8x^2 =$

   (d) $4x^3 + 20x^2 + 24x =$

3. Okrajšaj ulomke:
   (a) $\frac{ac+bc}{cd} =$

   (b) $\frac{a^5-3a^4+9a^3-27a^2}{a^4-81} =$

4. Poenostavi:
   (a) $\frac{3x}{x^2-4} : \frac{x^3}{x^2-2x} =$

   (b) $\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x^2-y^2}\right) \cdot \left(\frac{x^2y^2-y^4}{4x^2-1}\right) =$

   (c) $\frac{1-\frac{x}{x-y}}{\frac{y}{x}-\frac{y}{x-y}} =$

5. Izrazi s pomočjo racionalnega eksponenta:
   (a) $\sqrt[4]{x^3} =$

   (b) $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^3}\sqrt[6]{x^{-5}} =$

Na kazalo

6. Delno koreni:
   (a) $\sqrt{175} =$

   (b) $\sqrt{32} + \sqrt{98} + \sqrt{18} =$

7. Racionaliziraj ulomek:
   (a) $\frac{3}{\sqrt{5}} =$

   (b) $\frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}} =$

ii. LINEARNA FUNKCIJA, LINEARNA ENAČBA IN NEENAČBA. ENAČBE PREMIC.

8. Določi parametra k in n v funkcijskem predpisu $f(x) = kx + n$, če velja $f(-1) = 2$ in $f(1) = -4$.

9. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točko $T(2, 3)$ in je:
   (a) vzporedna premici $y = x$,

   (b) pravokotna na premico $x + 2y = 1$.

10. Prepričaj se, da so točke $A(1, 3)$, $B(4, 7)$, $C(2, 8)$ in $D(-1, 4)$ oglišča paralelograma.

11. Reši enačbo:
   (a) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$,

   (b) $(2x-5)^2 - (5+x)(5-x) = (5x+16)(x+12)$.

12. Obravnavaj enačbo $ax + 3 = a + 3x$ glede na vrednost parametra a.

13. Reši neenačbo $4x - 1 < 2x + 3$.

14. Obravnavaj neenačbo glede na vrednost parametra a:
   (a) $ax - 2 < 3x + 2$,

   (b) $ax + 4 \leq 2x + a^2$.

iii. KVADRATNA FUNKCIJA, ENAČBA IN NEENAČBA. POLINOMI, POLINOMSKA ENAČBA IN NEENAČBA. RACIONALNA FUNKCIJA, RACIONALNA ENAČBA IN NEENAČBA. ENAČBE KROŽNICE, ELIPSE IN HIPERBOLE.

15. V kvadratni funkciji $f(x) = ax^2 + bx + 8$ določi parametra a in b tako, da bo njen graf potekal skozi točko $A(2, 5)$ in bo abscisa temena $x = -2$.

16. Reši enačbe:

    (a) $7x^2 + 12x = 0$

    (b) $x^2 - 6x - 9 = 0$

    (c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

17. Skiciraj graf funkcije $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

18. Okrajšaj ulomek $\frac{3x^2-11x-4}{x^2-x-12}$.

19. Določi presečišče parabole $y = x^2 + 3x - 1$ in premice $y = 6x - 3$.

20. Reši neenačbo:
   (a) $x^2 < 1$,

   (b) $x^2 - x - 2 \geq 0$,

   (c) $x - 2x^2 < 4$.

21. Reši enačbo $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

22. Določi ničle, začetno vrednost in nariši graf funkcije $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x+1)^2$.

23. $(x^4 + 1) : (x^2 + x) =$

24. Določi ničle, pole, asimptoto in skiciraj graf funkcije:

    (a) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 4x + 4}$,

    (b) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$,

    (c) $f(x) = \frac{1}{x}$,

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

(e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

iv. EKSPONENTNA IN LOGARITEMSKA FUNKCIJA. EKSPONENTNA IN LOGARITEMSKA ENAČBA.

25. Reši enačbo:
    (a) $12^{x-8} = \frac{1}{144}$,

    (b) $5^{2x-1} = 1$,

    (c) $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x-1} = 5$.

26. Reši neenačbo
    (a) $12^{x-8} > \frac{1}{144}$,

(b) $5^{2x-1} \leq 1$.

27. Izrazi z $\log a$ in $\log b$:
    (a) $\log(a^3 b^4)$,
    (b) $\log \sqrt[5]{\frac{2a^3}{3b^2}}$.

v. TRIGONOMETRIJA. KOTNE FUNKCIJE.

28. Izrazi s funkcijami pozitivnih kotov manjših od $\frac{\pi}{4}$:
    (a) $\sin \frac{4\pi}{3} =$
    (b) $\cos \frac{50\pi}{7} =$
    (c) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$

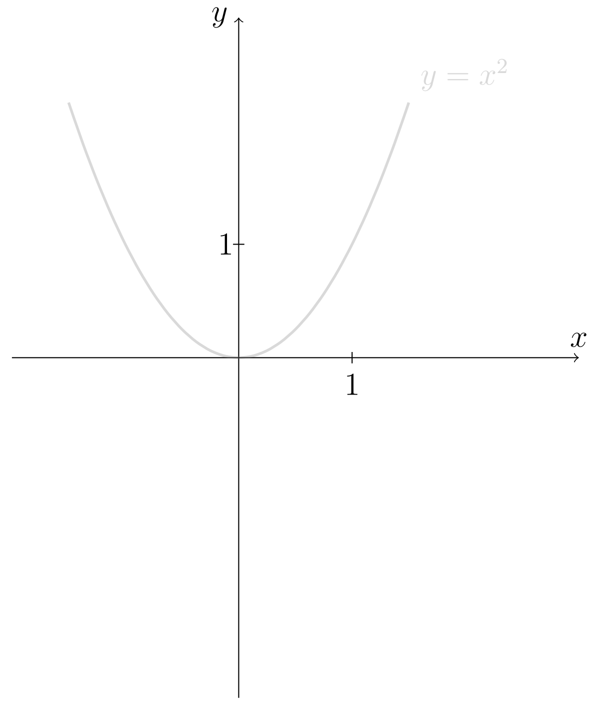
29. Poenostavi izraz $\frac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)}$.

30. Reši enačbo:
    (a) $\sin x = \frac{1}{2}$,
    (b) $\cos \frac{3x}{5} = 0$.

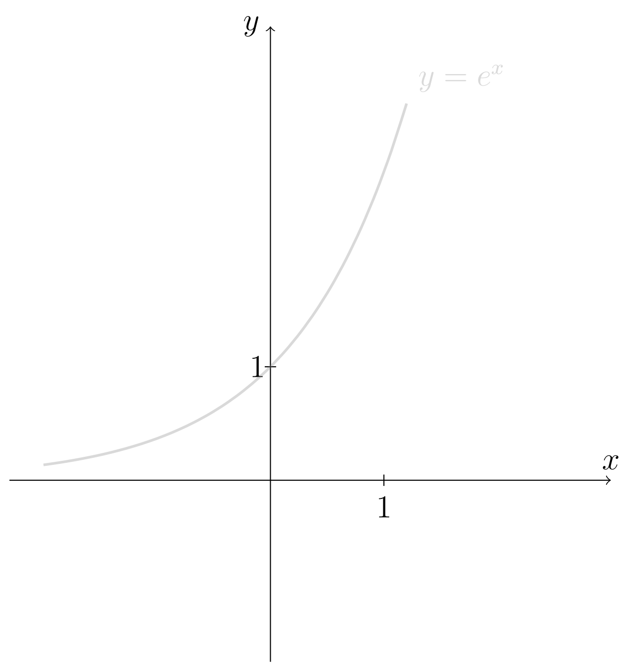
vi. OPERACIJE NA GRAFIH.

31. Skiciraj graf:

(a) $f(x) = 1 - x^2$

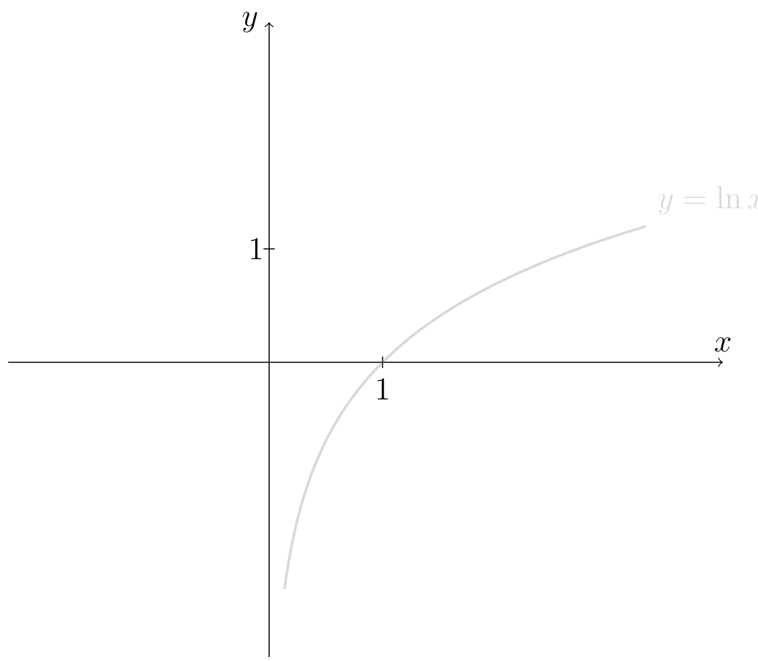


(b) $f(x) = e^{2-x} - 1$

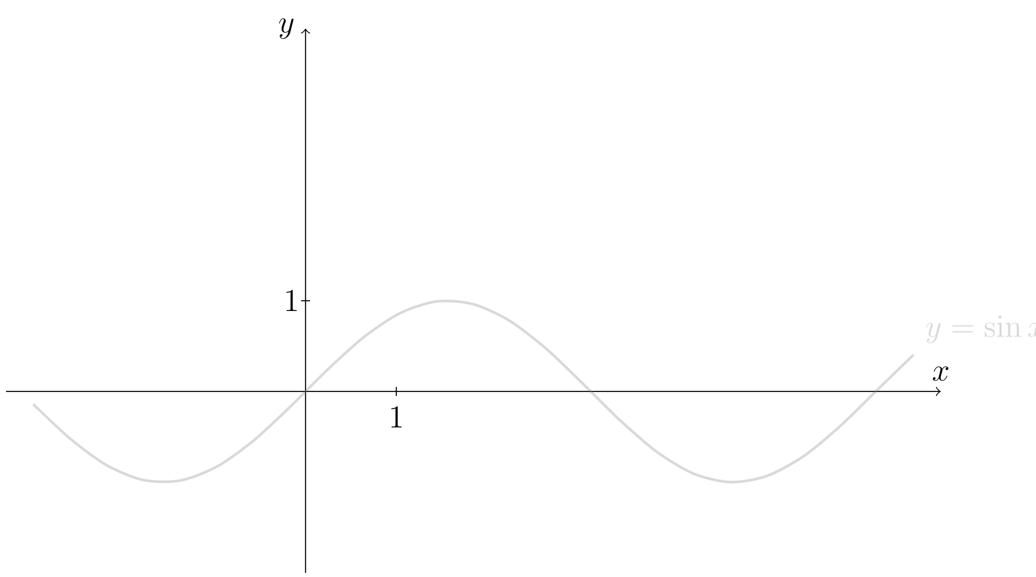


Na kazalo

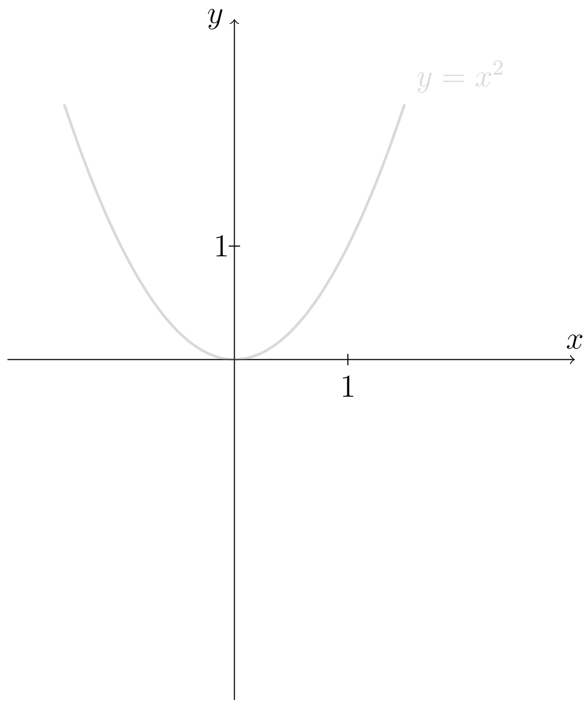
(c) $f(x) = 1 - \ln(2x)$



(d) $f(x) = 2\sin(x - \pi) + 1$

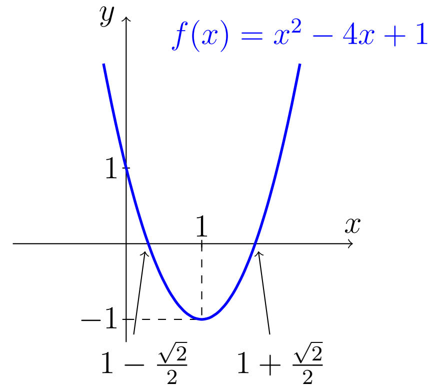


(e) $f(x) = |2 - x^2|$

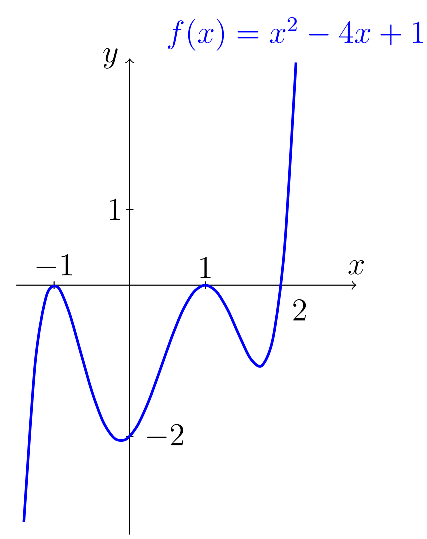


vii. REŠITVE.

1. (a) $(b+c)(a+b)$
   (b) $(a+b)c(d-e)$
   (c) $ab(c+d-e)$
2. (a) $(7a-2b)(7a+2b)$
   (b) $(a+3)(a^2-3a+9)$
   (c) $x^2(x-2)(x^2+2x+4)$
   (d) $4x(x+2)(x+3)$
3. (a) $\frac{a+b}{d}$
   (b) $\frac{a^2}{a+3}$
4. (a) $\frac{3}{x(x+2)}$
   (b) $\frac{y^2}{2x+1}$
   (c) $\frac{x}{y}$
5. (a) $x^{\frac{3}{4}}$
   (b) $x^{\frac{5}{12}}$
6. (a) $5\sqrt{7}$
   (b) $14\sqrt{2}$
7. (a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
   (b) $-\frac{\sqrt{2}+4}{7}$
8. $K=-3$, $n=-1$
9. (a) $y=x+1$
   (b) $y=2x-1$
10. Premica skozi A, B je vzporedna premici skozi D, C ter premica skozi A, D je vzporedna premici skozi B, C.
11. (a) $x=-\frac{5}{2}$
    (b) $x=-2$
12. Če je $a=3$, enačbo rešijo vsa realna števila x, če pa je $a\neq 3$, pa je rešitev $x=1$.
13. $x<2$
14. (a) Za $a=3$ neenačbo rešijo vsa realna števila, za $a>3$ jo rešijo $x<\frac{4}{a-3}$, za $a<3$ pa $x>\frac{4}{a-3}$
    (b) Za $a=2$ neenačbo rešijo vsa realna števila, za $a>2$ jo rešijo $x\geq a+2$, za $a<2$ pa $x\leq a+2$
15. $a=-\frac{1}{4}$, $b=-1$
16. (a) $x_1=0$, $x_2=-\frac{12}{7}$
    (b) $x_{1,2}=3\pm 3\sqrt{2}$
    (c) enačba nima rešitve
17.

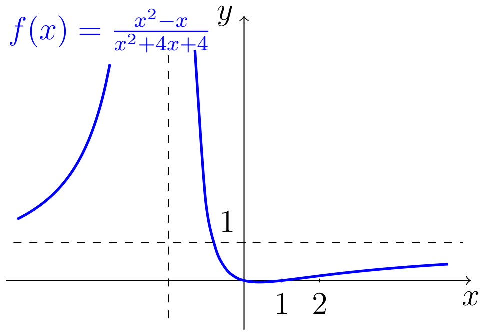


18. $\frac{3x+1}{x+3}$
19. $T_1(2,9)$, $T_2(1,3)$
20. (a) $x\in(-1,1)$
    (b) $x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$
    (c) vsi realni x
21. $x_1=-2$, $x_{2,3}=\pm 1$
22.

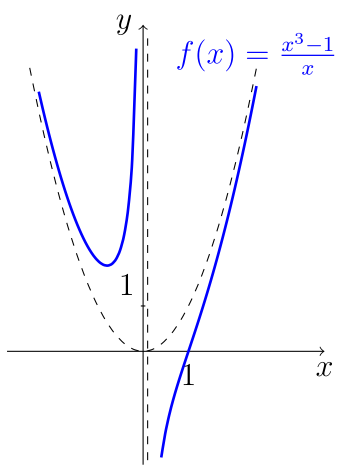


23. $x^2-x+1+\frac{1-x}{x^2+x}$

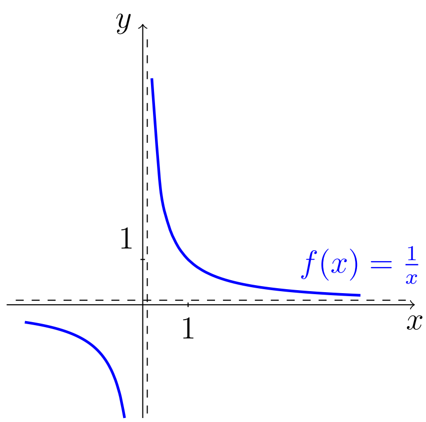
24. (a)



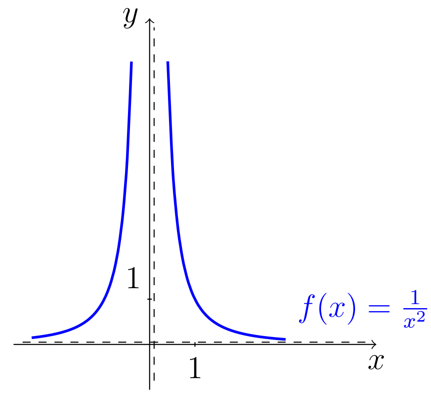
(b)



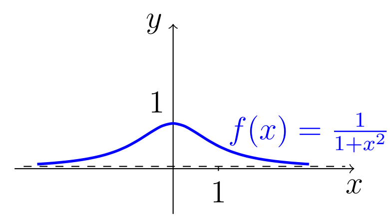
(c)



(d)



(e)



25. (a) $x = 6$

    (b) $x = \frac{1}{2}$

    (c) $x = 1$

26. (a) $x > 6$

    (b) $x \leq \frac{1}{2}$

27. (a) $3\log a + 4\log b$

    (b) $\frac{1}{5}\left(\log\frac{2}{3} + 3\log a - 2\log b\right)$

28. (a) $-\cos\frac{\pi}{6}$

    (b) $-\cos\frac{\pi}{7}$

    (c) $\sin\frac{\pi}{6}$

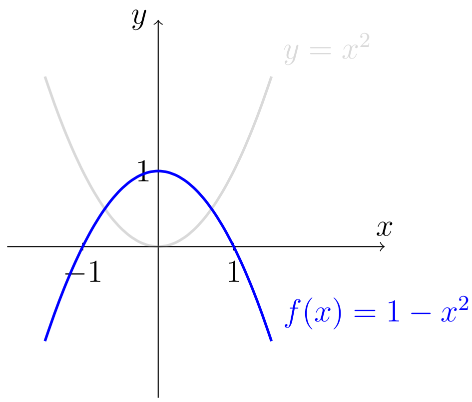
29. $\operatorname{ctg} x$

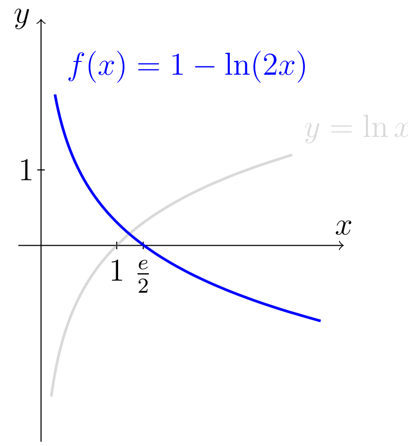
30. (a) $x_{1,k} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_{2,k} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

    (b) $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

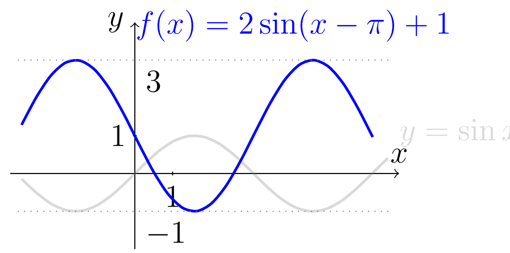
Na kazalo

31. (a)

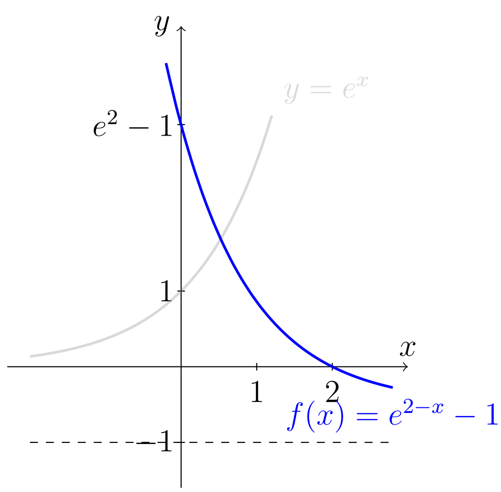




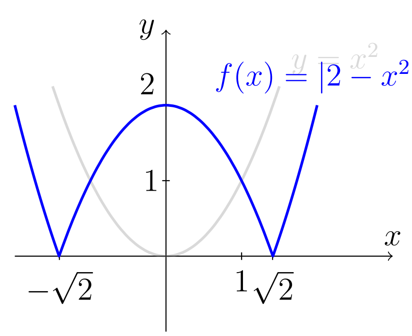
(d)



(b)



(e)



(c)

Zadnjič popravljeno: 4.11.2021 (MP)

Na kazalo