Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

MATEMATIKA 3

REŠENE NALOGE

Študijsko gradivo za študente univerzitetnega študija VOI

Marjeta Škapin Rugelj

Ljubljana, 2022

Kazalo

1 Diferencialne enačbe **4**

1.1 Navadne diferencialne enačbe . . . 4
1.2 Linearni sistemi diferencialnih enačb . . . 12
1.3 Robni problemi . . . 21
1.4 Fourierove vrste . . . 27
1.5 Parcialne diferencialne enačbe . . . 37
1.5.1 Posebne enačbe, nove spremenljivke . . . 37
1.5.2 Metoda karakteristik . . . 39
1.5.3 Fourierova metoda ločevanja spremenljivk . . . 42
1.5.4 Valovna enačba na premici . . . 44
1.5.5 Toplotna enačba na končnem intervalu . . . 46
1.5.6 Valovna enačba na končnem intervalu - nihanje končne strune . . . 47

2 Grafi **53**

2.1 Definicije . . . 53
2.2 Osnovno o grafih . . . 55
2.3 Eulerjevi in Hamiltonovi grafi . . . 59
2.4 Najkrajše poti . . . 62
2.5 Minimalna vpeta drevesa in ravninski grafi . . . 72
2.6 Ford-Fulkersonov algoritem . . . 77

1 Diferencialne enačbe

1.1 Navadne diferencialne enačbe

1. **Linearna diferencialna enačba n-tega reda s konstantnimi koeficienti** je enačba oblike

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = b(x), \tag{1}$$

kjer so $a_1, \ldots, a_n$ dane konstante in $b(x)$ dana zvezna funkcija na nekem intervalu. Rešitev enačbe (1) je oblike $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, kjer je y_H rešitev prirejene homogene enačbe

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \tag{2}$$

in y_P partikularna rešitev enačbe (1).

Splošna rešitev $y_H(x)$ prirejene homogene enačbe (2):

Enačbo (2) rešujemo z nastavkom $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

(a) Če je λ r-kratna realna ničla karakterističnega polinoma $p(\lambda)$, so linearno neodvisne partikularne rešitve enačbe (2) oblike

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}.$$

(b) Če je $\alpha + i\beta$ r-kratna konjugirano kompleksna ničla karakterističnega polinoma $p(\lambda)$, so linearno neodvisne partikularne rešitve enačbe (2) oblike

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x} sin\beta x.$$

Nastavek za partikularno rešitev $y_P(x)$ enačbe (1):

(a) Če je

$$b(x) = e^{\alpha x} P_m(x),$$

kjer je $P_m(x)$ polinom stopnje m, potem iščemo partikularno rešitev z nastavkom

$$y_P(x) = x^r e^{\alpha x} Q_m(x),$$

kjer je $Q_m(x)$ polinom stopnje m in r red ničle α karakterističnega polinoma $p(\lambda)$ enačbe (2).

(b) Če je

$$b(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x],$$

kjer je $P_m(x)$ polinom stopnje m in $R_n(x)$ polinom stopnje n, potem iščemo partikularno rešitev z nastavkom

$$y_P(x) = x^r e^{\alpha x}[Q_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x],$$

kjer sta $Q_N(x)$ in $S_N(x)$ polinoma stopnje $N = \max\{m, n\}$ in r red ničle $\alpha + i\beta$ karakterističnega polinoma $p(\lambda)$ enačbe (2).

2. **Reševanje linearne diferencialne enačbe 2. reda z metodo variacije konstant:**

   Rešujemo enačbo oblike
   $$y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x),$$
   kjer so $b(x)$, $c(x)$ in $d(x)$ zvezne funkcije. Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo
   $$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$
   in dobimo rešitev oblike $y_H(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešitev y_P poiščemo z metodo variacije konstant, kjer uporabimo nastavek $y(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$ in upoštevamo pogoja:
   $$\begin{aligned} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) &= 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) &= d(x) \end{aligned}$$
   za funkciji $A(x)$ in $B(x)$.

3. **Numerične metode za reševanje navadne diferencialne enačbe 1. reda:**

   Rešujemo začetni problem
   $$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

   (a) Picardova iteracija:
   $$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt, k = 0, 1, 2, \ldots,$$
   kjer je $y_0(t) = y_0$.

   (b) Metoda s Taylorjevo vrsto:

   Rešitev $y(x)$ začetnega problema (3) iščemo s približkom Taylorjevega polinoma
   $$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_0) + 0(h^{n+1}).$$
   Iz (3) sledi $y(x_0) = y_0$ in $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
   Z uporabo verižnega pravila dobimo naslednje odvode
   $$\begin{aligned} y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \\ y''' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot y' \cdot f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot f \\ &\vdots \end{aligned}$$
   Izračunamo toliko odvodov, kolikor je želena stopnja približka. Približek dobimo, ko vstavimo $x = x_0$.

   (c) Eulerjeva metoda:

   Iščemo rešitev začetnega problema (3) na intervalu $[x_0, b]$.
   Interval razdelimo na N enakih delov dolžine $h = \frac{b-x_0}{N}$: $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ in poščemo približke $y_n \approx y(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, z rekurzivno formulo:
   $$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n), \\ x_{n+1} &= x_n + h. \end{aligned}$$

1. Dan je začetni problem $y' = 1+y^2$, $y(0) = 0$. Z uporabo Picardove iteracije z začetno aproksimacijo $y_0 = 0$ izračunaj prve štiri približke. Izračunaj še eksaktno rešitev začetnega problema.

   Rešitev: Če upoštevamo, da je $y_0 = 0$, dobimo rekurzivno formulo

   $$y_{n+1} = \int_0^x (1 + y_n^2)dt.$$

   Potem je $y_1 = x$, $y_2 = x + \frac{x^3}{3}$ in $y_3 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}$. Če rešimo začetni problem, dobimo eksaktno rešitev $y = \tan x$.

2. Dan je začetni problem $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Z uporabo Picardove iteracije z začetno aproksimacijo $y_0 = 1$ izračunaj prve tri približke. Izračunaj še eksaktno rešitev začetnega problema.

   Rešitev: Če upoštevamo, da je $y_0 = 1$, dobimo rekurzivno formulo

   $$y_{n+1} = 1 + \int_0^x (t - y_n)dt.$$

   Potem je $y_1 = 1 - x + \frac{x^2}{2}$ in $y_2 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$. Eksaktna rešitev začetnega problema je enaka $y = (2 - e^x + xe^x)e^{-x}$.

3. Dan je začetni problem $y' = 1+xy$, $y(0) = 1$. Z uporabo Picardove iteracije z začetno aproksimacijo $y_0 = 1$ izračunaj prve štiri približke.

   Rešitev: Če upoštevamo, da je $y_0 = 1$, dobimo rekurzivno formulo

   $$y_{n+1} = 1 + \int_0^x (1 + ty_n)dt = 1 + x + \int_0^x ty_n dt.$$

   Potem je $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}$ in $y_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{48}$.

4. Z uporabo metode s Taylorjevo vrsto reda 4 izračunaj $y(0.1)$ za $y' = 1 + xy$, $y(0) = 1$.

   Rešitev: Taylorjeva formula reda 4 je enaka $y(h) \approx 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{8}$, $y(0.1) \approx 1.1053$.

5. Z uporabo metode s Taylorjevo vrsto reda 4 izračunaj $y(0.2)$ za $y' = -2xy^2$, $y(0) = 1$.

   Rešitev: Taylorjeva formula reda 4 je enaka $y(h) \approx 1 - h^2 + h^4$, $y(0.2) \approx 0.9616$.

6. Z uporabo metode s Taylorjevo vrsto reda 4 izračunaj $y(0.1)$ za $y' = x - y^2$, $y(0) = 1$.

   Rešitev: Taylorjeva formula reda 4 je enaka $y(h) \approx 1-h+\frac{3h^2}{2} - \frac{4h^3}{3} + \frac{17h^4}{12} - \frac{31h^5}{20}$, $y(0.1) \approx 0.9138$.

7. Dan je začetni problem $y' = 2y$, $y(0) = 1$. Na intervalu $[0, 1]$ ga reši z uporabo Eulerjeve metode. Pri tem uporabi začetno aproksimacijo $y_0 = 1$ in korak $h = 0.1$. Izračunaj še eksaktno rešitev začetnega problema.

   Rešitev: Rekurzivna formula je enaka $y_{n+1} = (1 + 2h)y_n$. Za $h = 0.1$ velja $y_n = 1.2^n$. Eksaktna rešitev začetnega problema je $y = e^{2x}$.

8. Dan je začetni problem $y' = y + x^2$, $y(0) = 2$. Na intervalu $[0, 1]$ ga reši z uporabo Eulerjeve metode. Pri tem uporabi začetno aproksimacijo $y_0 = 2$ in korak $h = 0.1$. Izračunaj še eksaktno rešitev začetnega problema.

   Rešitev: Rekurzivna formula je enaka $y_{n+1} = y_n + h(y_n + x_n^2) = (1 + h)y_n + hx_n^2$, kjer je $x_{n+1} = x_n + h$. Eksaktna rešitev začetnega problema je $y = 4e^x - 2 - 2x - x^2$.

9. Reši

   (a) $y'' + y' - 2y = 0$
   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$
   (c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
   (d) $y^{(4)} + 9y'' = 0$
   (e) $y''' + 6y'' + 13y' = 0$
   (f) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
   (g) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$
   (h) $y^{(4)} - 2y'' - 3y = 0$
   (i) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
   (j) $y^{(6)} + y^{(5)} - y^{(4)} - y''' = 0$

   Rešitev:

   (a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (b) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   (d) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
   (e) $y = C_1 + e^{-3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   (f) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
   (g) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   (h) $y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
   (i) $y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
   (j) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{-x} + C_6 x e^{-x},\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \in \mathbb{R}$

10. Reši

   (a) $y''' - 4y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 4$
   (b) $y''' + 2y'' = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 4$
   (c) $y''' - 2y'' - 3y' = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = -12,\ y''(0) = 0$
   (d) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
   (e) $y''' + 4y'' + 5y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -2$

   Rešitev:

   (a) $y = 3 + 2e^{2x} - xe^{2x}$
   (b) $y = 4 + x + e^{-2x}$
   (c) $y = -3 + 9e^{-x} - e^{3x}$
   (d) $y = e^{-x}(\cos 2x + 2 \sin x)$
   (e) $y = 2 + e^{-2x}(2 \cos x + \sin x)$

11. Reši

   (a) $y'' - y' = 2xe^x$
   (b) $y'' + 9y = \cos 2x$

(c) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$

(d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x + 5x$

Rešitev:

(a) $y_H = C_1 + C_2 e^x$; nastavek za partikularno rešitev: $y_P = x(Ax + B)e^x$;
splošna rešitev: $y = C_1 + C_2 e^x + (x^2 - 2x)e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y_H = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$; nastavek za partikularno rešitev: $y_P = A \cos 2x + B \sin 2x$;
splošna rešitev: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{5} \cos 2x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; nastavek za partikularno rešitev: $y_P = x(A \cos x + B \sin x) + Ce^{-x}$;
splošna rešitev: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \cos x - e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y_H = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$; nastavek za partikularno rešitev: $y_P = Ax^3 e^x + Bx + C$;
splošna rešitev: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + 2x^3 e^x - 5x - 15$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

12. Reši

(a) $y'' + y' = 2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

(b) $y'' - 2y' + y = (3 + x)e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$

(c) $y'' + y = x^2 - x + 1$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

(d) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$

(e) $y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

(f) $y'' + y = 2 \sin x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$

Rešitev:

(a) $y_H = C_1 + C_2 e^{-x}$; $y_P = Ax$; $y = 1 + e^{-x} + 2x$

(b) $y_H = C_1 e^x + C_2 x e^x$; $y_P = (Ax + B)e^{2x}$; $y = e^x + (x + 1)e^{2x}$

(c) $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; $y_P = Ax^2 + Bx + C$; $y = 3 \sin x + x^2 - x - 1$

(d) $y_H = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$; $y_P = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$; $y = (1 + 2x + \frac{x^3}{6})e^{2x}$

(e) $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$; $y_P = A \cos x + B \sin x$; $y = 2e^x - e^{-x} + 2 \cos x - \sin x$

(f) $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; $y_P = x(A \cos x + B \sin x)$; $y = 3 \cos x + 2 \sin x - x \cos x$

13. Poišči nastavek za partikularno rešitev

(a) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$

(b) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$

(c) $y'' - 3y' = x + \cos x$

Rešitev:

(a) $y_P = (Ax^2 + Bx + C)e^x + (Dx^2 + Ex)e^{2x}$

(b) $y_P = xe^x[(Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x]$

(c) $y_P = Ax^2 + Bx + C \cos x + D \sin x$

14. (a) Sestavi diferencialno enačbo oblike $y'' + by' + cy = 0$, katere splošna rešitev je

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Določi začetni vrednosti $y(0)$ in $y'(0)$ tako, da bo $y_0(x) = \sin x - \cos x$ edina rešitev konstruirane enačbe.

(c) Enačbi, dobljeni v (a), na desni strani dodaj nehomogenost $d(x) = \sin x$ in poišči partikularno rešitev dobljene nehomogene enačbe.

Rešitev:

(a) Iz splošne rešitve diferencialne enačbe sledi, da sta ničli karakterističnega polinoma enaki $\lambda_{1,2} = \pm i$. Potem je karakteristični polinom enak $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 1$. Torej je diferencialna enačba enaka $y'' + y = 0$.

(b) Če v $y_0(x)$ vstavimo $x = 0$, dobimo pogoj $y(0) = -1$. Če v odvod $y_0'(x)$ vstavimo $x = 0$, pa dobimo še pogoj $y'(0) = 1$.

(c) Ker je i enojna ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za partikularno rešitev enak $y_P = x(A\cos x + B\sin x)$. Če nastavek odvajamo in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo, dobimo $y_P = -\frac{1}{2}x\cos x$.

15. (a) Sestavi diferencialno enačbo oblike $y'' + by' + cy = 0$, katere splošna rešitev je

$$y(x) = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Določi začetni vrednosti $y(0)$ in $y'(0)$ tako, da bo $y_0(x) = e^{-x}\sin 2x$ edina rešitev konstruirane enačbe.

(c) Enačbi, dobljeni v (a), na desni strani dodaj nehomogenost $d(x) = \sin 2x$ in poišči partikularno rešitev dobljene nehomogene enačbe.

Rešitev:

(a) Iz splošne rešitve diferencialne enačbe sledi, da sta ničli karakterističnega polinoma enaki $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Potem je karakteristični polinom enak $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$. Torej je diferencialna enačba enaka $y'' + 2y' + 5y = 0$

(b) Če v $y_0(x)$ vstavimo $x = 0$, dobimo pogoj $y(0) = 0$. Če v odvod $y_0'(x)$ vstavimo $x = 0$, pa dobimo še pogoj $y'(0) = 2$.

(c) Ker $2i$ ni ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za partikularno rešitev enak $y_P = A\cos 2x + B\sin 2x$. Če nastavek odvajamo in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo, dobimo $y_P = -\frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$.

16. Sestavi homogeno linearno diferencialno enačbo 2. reda s konstantnimi koeficienti, katere splošna rešitev je

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dobljeni enačbi na desni strani dodaj nehomogenost $b(x) = -3e^x$ in poišči rešitev dobljene nehomogene enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Rešitev: Iz splošne rešitve diferencialne enačbe sledi, da sta ničli karakterističnega polinoma $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -2$. Potem je karakteristični polinom enak $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + \lambda - 2$. Torej je diferencialna enačba enaka $y'' + y' - 2y = 0$. Ker je 1 enojna ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za partikularno rešitev enak $y_P = Axe^x$. Če nastavek odvajamo in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo, dobimo $y_P(x) = -xe^x$. Splošna rešitev je potem $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} - xe^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $y(x) = (2 - x)e^x - x^{-2x}$.

17. Sestavi homogeno linearno diferencialno enačbo 3. reda s konstantnimi koeficienti, katere splošna rešitev je

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Dobljeni enačbi na desni strani dodaj nehomogenost $b(x) = 12x - 2$ in poišči rešitev dobljene nehomogene enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

Rešitev: Iz splošne rešitve diferencialne enačbe sledi, da so ničle karakterističnega polinoma $\lambda_{1,2} = 0$ in $\lambda_3 = -2$. Potem je karakteristični polinom enak $(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_3) = \lambda^2(\lambda + 2) = \lambda^3 + 2\lambda^2$. Torej je diferencialna enačba enaka $y''' + 2y'' = 0$. Ker je 0 dvojna ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za partikularno rešitev enak $y_P = x^2(Ax + B)$. Če nastavek odvajamo in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo, dobimo $y_P(x) = x^3 - 2x^2$. Splošna rešitev je potem $y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}x^3 - 2x^2$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $y(x) = 4 + x(x-1)^2 + x^{-2x}$.

18. S pomočjo metode variacije konstant reši nehomogeno linearno diferencialno enačbo 2. reda.

 (a) $y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x$
 (b) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$
 (c) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$
 (d) $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$

 Rešitev:

 (a) Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo $y'' - 2y' + y = 0$ in dobimo rešitev oblike $y_H = Ae^x + Bxe^x$, $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešitev y_P poiščemo z metodo variacije konstant, kjer uporabimo nastavek $y_P = A(x)e^x + B(x)xe^x$ in upoštevamo pogoja:

$$A'(x)e^x + B'(x)xe^x = 0$$
$$A'(x)e^x + B'(x)(e^x + xe^x) = \frac{1}{x}e^x$$

 za funkciji $A(x)$ in $B(x)$. Iz prvega pogoja izrazimo $A'(x) = -B'(x)x$. Če to upoštevamo v drugem pogoju, dobimo $B'(x) = \frac{1}{x}$ in $B(x) = \ln|x|$. Ker je $A'(x) = -B'(x)x = -1$, je $A(x) = -x$. Splošna rešitev je torej

$$y = Ae^x + Bxe^x + xe^x(\ln|x| - 1), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

 (b) Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo $y'' + 4y = 0$ in dobimo rešitev oblike $y_H = A\cos 2x + B\sin 2x$, $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešitev y_P poiščemo z metodo variacije konstant, kjer uporabimo nastavek $y_P = A(x)\cos 2x + B(x)\sin 2x$ in upoštevamo pogoja:

$$A'(x)\cos 2x + B'(x)\sin 2x = 0$$
$$-2A'(x)\sin 2x + 2B'(x)\cos 2x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

 za funkciji $A(x)$ in $B(x)$. Iz prvega pogoja izrazimo $A'(x) = -B'(x)\tan 2x$. Če to upoštevamo v drugem pogoju, dobimo $B'(x) = \frac{1}{2\sin^2 x} - 1$ in $B(x) = -\frac{1}{2}\cot x - x$. Ker je $A'(x) = -B'(x)\tan 2x = -\frac{\cos x}{\sin x}$, je $A(x) = -\ln|\sin x|$. Splošna rešitev je torej

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x - \ln|\sin x|\cos 2x - \frac{1}{2}\Big(2x + \cot x\Big)\sin 2x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

 (c) Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo $y'' - 2y' + y = 0$ in dobimo rešitev oblike $y_H = Ae^x + Bxe^x$, $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešitev y_P poiščemo z metodo variacije konstant, kjer uporabimo nastavek $y_P = A(x)e^x + B(x)xe^x$ in upoštevamo pogoja:

$$A'(x)e^x + B'(x)xe^x = 0$$
$$A'(x)e^x + B'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

za funkciji $A(x)$ in $B(x)$. Iz prvega pogoja izrazimo $A'(x) = -B'(x)x$. Če to upoštevamo v drugem pogoju, dobimo $B'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ in $B(x) = \arcsin\frac{x}{2}$. Ker je $A'(x) = -B'(x)x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, je $A(x) = \sqrt{4-x^2}$. Splošna rešitev je torej

$$y = Ae^x + Bxe^x + e^x\left(\sqrt{4-x^2} + x\arcsin\frac{x}{2}\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(d) Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo $y'' + y = 0$ in dobimo rešitev oblike $y_H = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$. Partikularno rešitev y_P poiščemo z metodo variacije konstant, kjer uporabimo nastavek $y_P = A(x)\cos x + B(x)\sin x$ in upoštevamo pogoja:

$$\begin{aligned} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x &= 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x &= \frac{1}{\cos^3 x} \end{aligned}$$

za funkciji $A(x)$ in $B(x)$. Iz prvega pogoja izrazimo $A'(x) = -B'(x)\tan x$. Če to upoštevamo v drugem pogoju, dobimo $B'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ in $B(x) = \tan x$. Ker je $A'(x) = -B'(x)\tan x = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$, je $A(x) = -\frac{1}{2\cos^2 x}$. Splošna rešitev je torej

$$y = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{2\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

1.2 Linearni sistemi diferencialnih enačb

1. **Homogen sistem dveh linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti** je sistem oblike

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t), \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t), \end{aligned} \tag{4}$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ koeficienti sistema ter $x(t)$ in $y(t)$ neznani funkciji. Začetni problem sestavljata enačbi (4) skupaj z začetnima pogojema $x(t_0) = x_0$ in $y(t_0) = y_0$.
Sistem (4) lahko bolj enostavno zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t), \text{ kjer je } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Rešitve sistema (4) dobimo s pomočjo lastnih vrednosti matrike A.

(a) Če ima A dve različni realni lastni vrednosti λ_1 in λ_2, ki jima pripadata lastna vektorja $\mathbf{V_1}$ in $\mathbf{V_2}$, potem sta linearno neodvisni rešitvi

$$\mathbf{X_1}(t) = \mathbf{V_1}e^{\lambda_1 t}, \ \mathbf{X_2}(t) = \mathbf{V_2}e^{\lambda_2 t}.$$

(b) Če ima A dvojno lastne vrednosti λ, ki ji pripadata dva linearno neodvisna lastna vektorja $\mathbf{V_1}$ in $\mathbf{V_2}$, potem sta linearno neodvisni rešitvi

$$\mathbf{X_1}(t) = \mathbf{V_1}e^{\lambda t}, \ \mathbf{X_2}(t) = \mathbf{V_2}e^{\lambda t}.$$

(c) Če ima A dvojno lastne vrednosti λ, ki ji pripada samo en linearno neodvisen lastni vektor $\mathbf{V}$, poiščemo posplošeni lastni vektor $\mathbf{W}$ kot rešitev sistema $(A - \lambda I)\mathbf{W} = \mathbf{V}$. Potem sta linearno neodvisni rešitvi

$$\mathbf{X_1}(t) = \mathbf{V}e^{\lambda t}, \ \mathbf{X_2}(t) = (t\mathbf{V} + \mathbf{W})e^{\lambda t}.$$

(d) Če ima A konjugirano kompleksni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, ki jima pripadata lastna vektorja $\mathbf{V_{1,2}} = \mathbf{W} \pm i\mathbf{Z}$. Potem sta realni linearno neodvisni rešitvi

$$\mathbf{X_1}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{W}\cos\beta t - \mathbf{Z}\sin\beta t), \ \mathbf{X_2}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{W}\sin\beta t + \mathbf{Z}\cos\beta t).$$

Rešitev sistema (4) lahko ponazorimo na dva načina.

- Če v isti koordinatni sistem narišemo grafa funkcij $x = x(t)$ in $y = y(t)$, dobimo **časovni diagram**, ki nam pokaže, kako se komponenti rešitve spreminjata s časom t.
- Če v (x, y)-koordinatnem sistemu narišemo krivuljo $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ dobimo **fazni diagram**. To krivuljo imenujemo **orbita** ali **trajektorija**.

2. **Homogen sistem n linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti** je sistem oblike

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t), \end{aligned} \tag{5}$$

kjer so $a_{ij} \in \mathbb{R}$ koeficienti sistema ter $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, neznane funkcije. Sistem (5) lahko zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t), \text{ kjer je } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

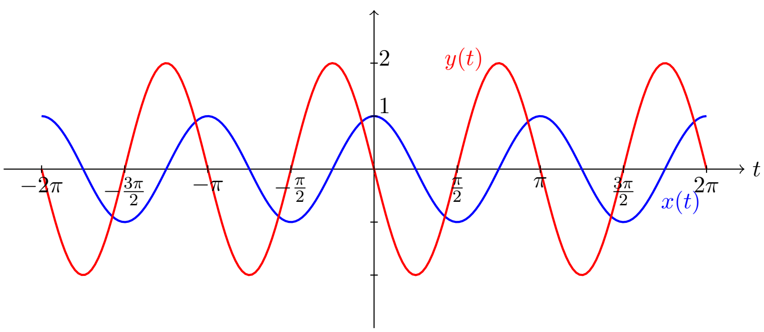
Rešitve sistema (5) dobimo s pomočjo lastnih vrednosti matrike A. Tu so lahko večkratne realne lastne vrednosti tudi stopnje več kot 2. Prav tako so lahko večkratne tudi konjugirano kompleksne lastne vrednosti.

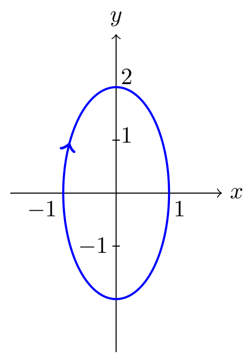
1. Reši sistem

$$x' = y$$
$$y' = -4x$$

z začetnimi pogoji $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Nariši časovni diagram in določi orbito ter jo skiciraj.

Rešitev: Sistem bi lahko zapisali v matrični obliki in rešitve zapisali s pomočjo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Lahko pa ga preoblikujemo v diferencialno enačbo 2. reda. Enačbo $x' = y$ odvajamo in dobimo $x'' = y'$. Če zdaj upoštevamo enačbo $y' = -4x$, dobimo diferencialno enačbo $x'' + 4x = 0$, ki ima splošno rešitev $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$. Potem je pa $y(t) = x'(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t$. Če upoštevamo začetna pogoja, dobimo rešitvi $x(t) = \cos 2t$ in $y(t) = -2 \sin 2t$. Ker je $x(t) = \cos 2t$ in $y(t) = -2 \sin 2t$ parametrizacija elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, je orbita elipsa. Narišimo še časovni diagram in orbito.





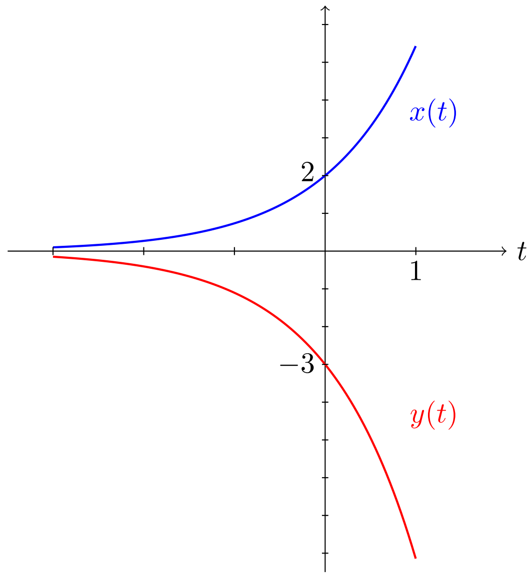
2. Reši sistem

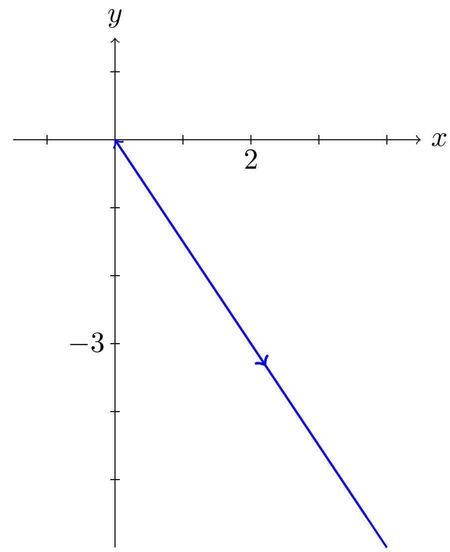
$$x' = 4x + 2y$$
$$y' = -3x - y$$

z začetnimi pogoji $x(0) = 2$, $y(0) = -3$. Nariši časovni diagram in določi orbito ter jo skiciraj.

Rešitev:

Sistem bi lahko zapisali v matrični obliki in rešitve zapisali s pomočjo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Lahko pa ga preoblikujemo v diferencialno enačbo 2. reda. Enačbo $x' = 4x + 2y$ odvajamo in dobimo $x'' = 4x' + 2y'$. Če zdaj upoštevamo enačbo $y' = -3x - y$ in da iz prve enačbe sistema sledi $2y = x' - 4x$, dobimo diferencialno enačbo $x'' - 3x' + 2x = 0$, ki ima splošno rešitev $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Potem je pa $y(t) = \frac{1}{2}(x' - 4x) = -\frac{3}{2} C_1 e^t - C_2 e^{2t}$. Če upoštevamo začetna pogoja, dobimo rešitvi $x(t) = 2e^t$ in $y(t) = -3e^{2t}$. Ker je $\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{3}{2}$, je orbita poltrak $y = -\frac{3}{2}$, $x > 0$. Narišimo še časovni diagram in orbito.



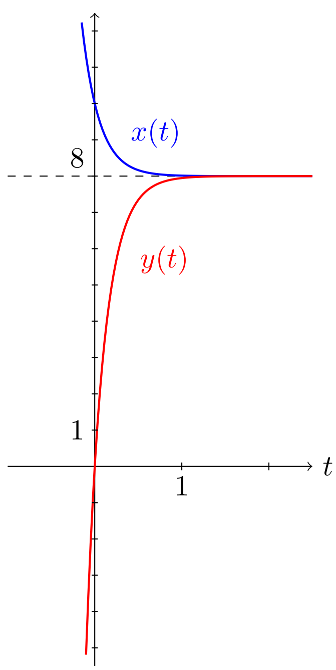


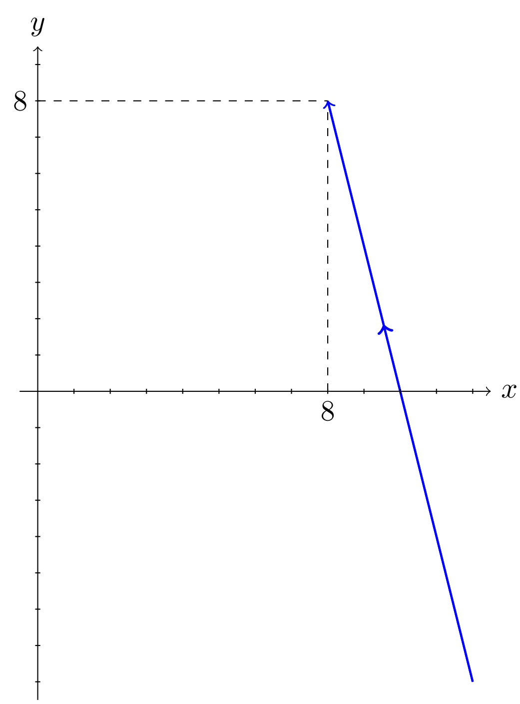
3. Reši sistem

$$x' = -x + y$$
$$y' = 4x - 4y$$

z začetnimi pogoji $x(0) = 10$, $y(0) = 0$. Nariši časovni diagram in določi orbito ter jo skiciraj. Kaj lahko poveste o $x(t)$ in $y(t)$, ko preteče veliko časa?

Rešitev: Sistem bi lahko zapisali v matrični obliki in rešitve zapisali s pomočjo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Lahko pa ga preoblikujemo v diferencialno enačbo 2. reda. Enačbo $x' = -x + y$ odvajamo in dobimo $x'' = x' + y'$. Če zdaj upoštevamo enačbo $y' = 4x - 4y$ in da iz prve enačbe sistema sledi $y = x' + x$, dobimo diferencialno enačbo $x'' + 5x' = 0$, ki ima splošno rešitev $x(t) = C_1 + C_2 e^{-5t}$. Potem je pa $y(t) = x' + x = -\frac{3}{2}C_1 - 4C_2 e^{-5t}$. Če upoštevamo začetna pogoja, dobimo rešitvi $x(t) = 8 + 2e^{-5t}$ in $y(t) = 8 - 8e^{-5t}$. Torej je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 8$. Ker je $y(t) = -4x(t) + 40$, je orbita poltrak $y = 40 - 4x$, $x > 8$. Narišimo še časovni diagram in orbito.





4. Sisteme prevedi na linearne diferencialne enačbe drugega reda in jih reši

   (a) $$\begin{aligned} x' &= x + 3y \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} x' &= -7x + 3y \\ y' &= -3x - y \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x + y \end{aligned}$$

   Rešitev:

   (a) $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$, $y(t) = \frac{C_1}{3} e^{2t} - C_2 e^{-2t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   (b) $x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$, $y(t) = \frac{3C_1 + C_2}{3} e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   (c) $x(t) = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t$, $y(t) = C_2 e^t \cos t - C_1 e^t \sin t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5. Populaciji lisic in zajcev se spreminjata v skladu s sistemom diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} l' &= l + z, \\ z' &= -2l + 4z. \end{aligned}$$

   Če je $l(0) = 200$ in $z(0) = 300$, izračunaj kolikšni sta populaciji za $t > 0$. Kolikšno je razmerje $\frac{z(t)}{l(t)}$ med populacijama zajcev in lisic, ko preteče precej časa? Ali je model realen?

   Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti in lastna vektorja matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} l(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \\ 2C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \end{bmatrix}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $l(t) = 100e^{3t} + 100e^{2t}$ in $z(t) = 200e^{3t} + 100e^{2t}$. Torej je $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{z(t)}{l(t)} = 2$. Iz našega modela sledi, da bi populaciji lisic in zajcev eksponentno rastli. Model ni realen, ker nismo upoštevali še drugih dejavnikov: lisice in zajci ne živijo izolirano, bolezni,...

6. Reši začetni problem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \;\; \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

   Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti in lastna vektorja matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} \\ -C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} \end{bmatrix}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = 2e^t + e^{3t}$ in $y(t) = -2e^t + e^{3t}$.

7. Reši začetni problem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Poišči $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$.

Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti in lastna vektorja matrike $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\lambda_2 = 11$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 7C_1 e^{3t} + C_2 e^{11t} \\ C_1 e^{3t} - C_2 e^{11t} \end{bmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = 21e^{3t} - 7e^{11t}$ in $y(t) = 3e^{3t} + 7e^{11t}$.
Torej je $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = -1$.

8. Reši začetni problem

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, in $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} + C_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t} \\ C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t} \\ C_3 e^{3t} \end{bmatrix}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $x(t) = e^t + 6e^{2t} - 6e^{3t}$, $y(t) = 6e^{2t} - 2e^{3t}$ in $z(t) = 2e^{3t}$.

9. Reši sistem

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t), \text{ kjer je } \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, in dvojna lastna vrednost $\lambda_{2,3} = 2$ z dvema linearno neodvisnima lastnima vektorjema $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} + C_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ -C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t} \\ -C_3 e^{2t} \end{bmatrix}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

10. Reši začetni problem

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma:

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0.$$

Torej $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, in $\lambda_3 = 2$, $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} + C_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t} \\ C_2 e^t \\ -C_1 - C_2 e^t + C_3 e^{2t} \end{bmatrix}, \, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $x(t) = 2 - e^t + e^{2t}$, $y(t) = -e^t$ in $z(t) = -2 + e^t + e^{2t}$.

11. Reši začetni problem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Kaj lahko poveš o $\mathbf{z}(t)$ za velike t?

Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$: $\lambda_{1,2} = -2$. Ker imamo samo en linearno neodvisen lastni vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, poiščemo še posplošeni lastni vektor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Posplošeni lastni vektor je rešitev enačbe $(A - \lambda_1)\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v} e^{\lambda_1 t} + C_2(t\mathbf{v} + \mathbf{w})e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} (C_1 + tC_2)e^{-2t} \\ (-3C_1 + (1-3t)C_2)\, e^{-2t} \end{bmatrix}, \, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = (1-t)e^{-2t}$ in $y(t) = (3t-4)e^{-2t}$.
Torej je $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

12. Reši začetni problem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$.

Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$: $\lambda_{1,2} = 3$. Ker imamo samo en linearno neodvisen lastni vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, poiščemo še posplošeni lastni vektor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v} e^{\lambda_1 t} + C_2(t\mathbf{v} + \mathbf{w})e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} (C_1 + tC_2)e^{3t} \\ (-C_1 + (1-t)C_2)\, e^{3t} \end{bmatrix}, \, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = (1+4t)e^{3t}$ in $y(t) = (3-4t)e^{3t}$.
Torej je $\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = -1$.

13. Reši začetni problem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$.

Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$: $\lambda_{1,2} = 5$. Ker imamo samo en linearno neodvisen lastni vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, poiščemo še posplošeni lastni vektor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v} e^{\lambda_1 t} + C_2(t\mathbf{v} + \mathbf{w})e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} (C_1 + tC_2)e^{5t} \\ \Big(-C_1 + \big(-t - \frac{1}{3}\big) C_2 \Big) e^{5t} \end{bmatrix}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = (2-15t)e^{5t}$ in $y(t) = (3+15t)e^{5t}$.
Torej je $\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = -1$.

14. Reši sistem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti in lastni vektor ene od lastnih vrednosti matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ in $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$. Izračunamo

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} = e^{(2+i)t}\mathbf{v_1} = e^{2t}(\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + ie^{2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} = \mathbf{z_1}(t) + i\mathbf{z_2}(t).$$

Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{z_1}(t) + C_2 \mathbf{z_2}(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t \\ C_1 e^{2t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

15. Reši začetni problem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Kaj lahko poveš o $\mathbf{z}(t)$ za velike t?

Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti in lastni vektor ene od lastnih vrednosti matrike $A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$: $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$ in $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$. Izračunamo

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} &= e^{(-6+i)t}\mathbf{v_1} = e^{-6t}(\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \\ &= e^{-6t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + ie^{-6t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} = \mathbf{z_1}(t) + i\mathbf{z_2}(t). \end{aligned}$$

Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1\mathbf{z_1}(t)+C_2\mathbf{z_2}(t) = \begin{bmatrix} C_1e^{-6t}\cos t + C_2e^{-6t}\sin t \\ C_1e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = e^{-6t}(3\cos t + 2\sin t)$ in $y(t) = e^{-6t}(5\cos t - \sin t)$. Torej je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

16. Reši začetni problem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{z}(t),\quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \text{kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastni vrednosti in lastni vektor ene od lastnih vrednosti matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ in $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Izračunamo

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} = e^{(2+i)t}\mathbf{v_1} = e^t(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{bmatrix} + ie^t\begin{bmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{bmatrix} = \mathbf{z_1}(t) + i\mathbf{z_2}(t).$$

Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1\mathbf{z_1}(t) + C_2\mathbf{z_2}(t) = \begin{bmatrix} C_1e^t\cos 3t + C_2e^t\sin 3t \\ C_1e^t\sin 3t - C_2e^t\cos 3t \end{bmatrix},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = e^t(2\cos 3t + \sin 3t)$ in $y(t) = e^t(2\sin 3t - \cos 3t)$.

17. Reši začetni problem

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},\ \text{kjer je } \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastne vrednosti matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma:

$\det(A-\lambda I) = 3(1-\lambda)+(1-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = (1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+5) = -(\lambda-1)(\lambda-1-2i)(\lambda-1+2i) = 0,$

torej $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Lastni vektor, ki pripada λ_1, je enak $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Lastni vektor za kompleksno lastno vrednost $\lambda_2 = 1 + 2i$ pa je enak $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Izračunamo

$$e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} = e^{(1+2i)t}\mathbf{v_2} = e^t(\cos 2t + i\sin 2t)\begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{bmatrix} + ie^t\begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{bmatrix} = \mathbf{w_2}(t) + i\mathbf{w_3}(t).$$

Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^t \mathbf{v_1} + C_2 \mathbf{w_2}(t) + C_3 \mathbf{w_3}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -2C_2 e^t \sin 2t + 2C_3 e^t \cos 2t \\ C_1 e^t + C_2 e^t \cos 2t + C_3 e^t \sin 2t \\ -C_1 e^t + 3C_2 e^t \cos 2t + 3C_3 e^t \sin 2t \end{bmatrix}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $x(t) = e^t(-2\cos 2t - 2\sin 2t)$, $y(t) = e^t(3 + \cos 2t - \sin 2t)$ in $z(t) = e^t(-3 + 3\cos 2t - 3\sin 2t)$.

18. (a) Določi vrednost parametra d, da bo imel sistem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -8 & d \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

periodične rešitve (orbite bodo sklenjene krivulje).

(b) Reši začetni problem pri d iz točke (a). Za katere $t \in \mathbb{R}$ velja, da je $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(0)$?

Rešitev:

(a) Najprej poiščemo lastni vrednosti matrike $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -8 & d \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \lambda 32 - (d+2)\lambda + 2d + 8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{(d+2) \pm \sqrt{d^2 - 4d - 28}}{2}.$$

Rešitve bodo periodične, če bosta λ_1 in λ_2 imaginarni števili. Torej mora veljati $d + 2 = 0$ in $d^2 - 4d - 28 < 0$. Če je $d = -2$, dobimo $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

(b) Lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = 2i$ je enak $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i - 2 \end{bmatrix}$. Izračunamo

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{v_1} = e^{2it} \mathbf{v_1} = e^t(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2i - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\cos 2t - 2\sin 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t - 2\sin 2t \end{bmatrix} = \mathbf{z_1}(t) + i\mathbf{z_2}(t).$$

Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{z_1}(t) + C_2 \mathbf{z_2}(t) = \begin{bmatrix} C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ 2(C_2 - C_1)\cos 2t - 2(C_1 + C_2)\sin 2t) \end{bmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo $x(t) = \cos 2t + 2\sin 2t$ in $y(t) = 2\cos 2t - 6\sin 2t$.

Torej je $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(0)$, če je $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Robni problemi

- Če linearni diferencialni enačbi
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x),\ x \in I, a, b, f \text{ zvezne funkcije na } I, \tag{6}$$
predpišemo še obnašanje v krajiščih intervala $I = [x_1, x_2]$ dobimo **robni problem**.
Razcepni robni pogoji so oblike
$$\begin{aligned} \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) &= \gamma_1 \ \ (\alpha_1, \beta_1 \text{ ne oba } 0) \\ \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) &= \gamma_2 \ \ (\alpha_2, \beta_2 \text{ ne oba } 0) \end{aligned} \tag{7}$$

- Če je v enačbi (6) $f(x) = 0$ in v razcepnih pogojih (7) $\gamma_1 = \gamma_2$, potem imamo **homogen robni problem**.

- λ je **lastna vrednost homogenega robnega problema**, če obstaja netrivialna funkcija $y_\lambda(x) \neq 0$, t.j. **lastna funkcija**, ki reši enačbo
$$y''_\lambda + a(x)y'_\lambda + b(x)y_\lambda = \lambda \cdot y_\lambda.$$

- Reševanje nehomogenega robnega problema z uporabo lastnih vrednosti $\lambda_i \neq 0$ in lastnih funkcij y_{λ_i} pripadajočega homogenega robnega problema :
  (a) Če je $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i y_{\lambda_i}$, je $y(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} y_{\lambda_i}$ rešitev nehomogenega robnega problema.
  (b) Če je $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i y_{\lambda_i}$, je $y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{\lambda_i} y_{\lambda_i}$ rešitev nehomogenega robnega problema.

1. Reši robne probleme

   (a) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = -2,\ y(\frac{\pi}{4}) = 10$
   (b) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = -2,\ y(2\pi) = -2$
   (c) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = -2,\ y(2\pi) = 3$
   (d) $y'' + 3y = 0,\ y(0) = 7,\ y(2\pi) = 0$
   (e) $y'' + 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 0$
   (f) $y'' + 25y = 0,\ y'(0) = 6,\ y'(\pi) = -9$
   (g) $y'' + 9y = \cos x,\ y'(0) = 5,\ y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{5}{3}$
   (h) $y'' - y' = 1,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$
   (i) $y'' - y' = 1,\ y'(0) = 1,\ y'(1) = 0$
   (j) $y'' + y = x^2 + 1,\ y(0) = 2,\ y(\frac{\pi}{2}) = -1$
   (k) $y'' + 4y = 8x,\ y(0) = 0,\ y(\pi) + y'(\pi) = 0$

   Rešitev:

   (a) Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo rešitev $y(x) = -2\cos 2x + 10 \sin 2x$.
   (b) Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo samo $C_1 = -2$. Rešitev robnega problema je torej neskončno
$$y(x) = -2\cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Iz prvega robnega pogoja sledi $C_1 = -2$, iz drugega pa $C_1 = 3$. To pa pomeni, da robni problem nima rešitve.

(d) Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right)$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo rešitev $y(x) = 7\cos\left(\sqrt{3}x\right) - 7\cot\left(2\sqrt{3}\pi\right)\sin\left(\sqrt{3}x\right)$.

(e) Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right)$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo rešitev $y(x) = 0$.

(f) Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$. Iz prvega robnega pogoja sledi $C_2 = \frac{6}{5}$, iz drugega pa $C_2 = \frac{9}{5}$. To pa pomeni, da robni problem nima rešitve.

(g) Rešitev prirejene homogene enačbe je $y_H(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. Nastavek za partikularno rešitev je $y_P = A\cos x + B \sin x$. Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{8}$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo samo $C_2 = \frac{5}{3}$. Rešitev robnega problema je torej neskončno $y(x) = C_1 \cos 3x + \frac{5}{3}\sin 3x + \frac{1}{8}\cos x$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

(h) Rešitev prirejene homogene enačbe je $y_H(x) = C_1 + C_2 e^x$. Nastavek za partikularno rešitev je $y_P = Ax$. Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 + C_2 e^x - x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo $y(x) = 1 - x$.

(i) Rešitev prirejene homogene enačbe je $y_H(x) = C_1 + C_2 e^x$. Nastavek za partikularno rešitev je $y_P = Ax$. Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 + C_2 e^x - x$. Iz prvega robnega pogoja sledi $C_2 = 2$, iz drugega pa $C_2 = \frac{1}{e}$. To pa pomeni, da robni problem nima rešitve.

(j) Rešitev prirejene homogene enačbe je $y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Nastavek za partikularno rešitev je $y_P = Ax^2 + Bx + C$. Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 1$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo rešitev $y(x) = x^2 - 1 + 3\cos x - \frac{1}{4}\pi^2 \sin x$.

(k) Rešitev prirejene homogene enačbe je $y_H(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Nastavek za partikularno rešitev je $y_P = Ax + B$. Splošna rešitev je enaka $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo rešitev $y(x) = 2x - (1+\pi)\sin 2x$.

2. Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije robnega problema

$$y''(x) = 0, \quad y(0) = y(2\pi) = 0.$$

Z njihovo uporabo reši robna problema:

(a) $y'' = \sin 2x$, $y(0) = y(2\pi) = 0$

(b) $y'' = 2\sin x + 3\sin 5x$, $y(0) = y(2\pi) = 0$

Rešitev: Iščemo rešitve enačbe $y_\lambda'' = \lambda y_\lambda$. Pripadajoči karakteristični polinom je potem $\mu^2 = \lambda$, ki ima ničli $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Ločimo 3 primere:

- $\underline{\lambda = 0}$: Ker imamo dvojno ničlo karakterističnega polinoma $\mu_{1,2} = 0$, je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 + C_2 x$. Če upoštevamo robna pogoja:

$$\begin{aligned} 0 &= y_\lambda(0) = C_1, \\ 0 &= y_\lambda(2\pi) = C_1 + C_2 2\pi, \end{aligned}$$

  dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.

- $\underline{\lambda > 0}$: Karakteristični polinom ima dve različni realni ničli $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$, zato je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Če upoštevamo robna pogoja:

$$\begin{aligned} 0 &= y_\lambda(0) = C_1 + C_2, \\ 0 &= y_\lambda(2\pi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}2\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi}, \end{aligned}$$

  dobimo, ker je eksponentna funkcija injektivna, samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.

- $\underline{\lambda < 0}$: Karakteristični polinom ima dve konjugirano kompleksni ničli $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$, zato je splošna rešitev oblike

$$y_\lambda(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

  Iz robnega pogoja $y_\lambda(0) = 0$, sledi $C_1 = 0$. Če uporabimo še robni pogoj $y_\lambda(2\pi) = 0$, dobimo, da mora biti

$$C_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}2\pi\right) = 0.$$

  Če je $C_2 = 0$, potem dobimo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$. Enačbi $\sin\left(\sqrt{-\lambda}2\pi\right) = 0$ pa je zadoščeno le, če je $\sqrt{-\lambda_k}2\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne funkcije in pripadajoče lastne funkcije so torej $\lambda_k = -\frac{k^2}{4}$, $y_{\lambda_k}(x) = \sin\frac{kx}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Rešitvi robnih problemov:

(a) Ker je desna stran enačbe $f(x) = \sin 2x$ lastna funkcija $y_{\lambda_4}(x)$, je rešitev robnega problema enaka $y(x) = \frac{1}{\lambda_4}y_{\lambda_4} = -\frac{1}{4}\sin 2x$.

(b) Ker je desna stran enačbe $f(x) = 2\sin x + 3\sin 5x = 2y_{\lambda_2}(x) + 3y_{\lambda_{10}}(x)$, je rešitev robnega problema enaka $y(x) = \frac{2}{\lambda_2}y_{\lambda_2} + \frac{3}{\lambda_{10}}y_{\lambda_{10}} = -2\sin x - \frac{3}{25}\sin 5x$.

3. Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije robnega problema

$$y''(x) = 0, \quad y'(0) = y'(2\pi) = 0.$$

Z njihovo uporabo reši robna problema:

(a) $y'' = 3\cos x$, $y'(0) = y'(2\pi) = 0$

(b) $y'' = 2\cos 4x + 4\cos 5x$, $y'(0) = y'(2\pi) = 0$

Rešitev: Iščemo rešitve enačbe $y_\lambda'' = \lambda y_\lambda$. Pripadajoči karakteristični polinom je potem $\mu^2 = \lambda$, ki ima ničli $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Ločimo 3 primere:

- $\underline{\lambda = 0}$: Ker imamo dvojno ničlo karakterističnega polinoma $\mu_{1,2} = 0$, je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 + C_2x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo, da je $C_2 = 0$ in C_1 poljuben. Pri lastni vrednosti $\lambda_0 = 0$ lahko za lastno funkcijo vzamemo $y_{\lambda_0}(x) = 1$.
- $\underline{\lambda > 0}$: Če v splošni rešitvi $y_\lambda(x) = C_1e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$ upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.
- $\underline{\lambda < 0}$: Splošna rešitev je oblike

$$y_\lambda(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

  Potem je

$$y_\lambda'(x) = -\sqrt{-\lambda}C_1 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \sqrt{-\lambda}C_2 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

  Iz robnega pogoja $y_\lambda'(0) = 0$ sledi, da je $C_2 = 0$. Če upoštevamo še robni pogoj $y_\lambda'(2\pi) = 0$, dobimo enačbo

$$-\sqrt{-\lambda}C_1 \sin\left(\sqrt{-\lambda}2\pi\right) = 0.$$

  Ker $\lambda \neq 0$, je bodisi $C_1 = 0$ ali pa $\sin\left(\sqrt{-\lambda}2\pi\right) = 0$. Če je $C_1 = 0$, potem dobimo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$. Enačba $\sin\left(\sqrt{-\lambda}2\pi\right) = 0$ pa ima rešitve $\sqrt{-\lambda_k}2\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. To pomeni, da so lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije $\lambda_k = -\frac{k^2}{4}$, $y_{\lambda_k}(x) = \cos\frac{kx}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Vse lastne vrednosti in lastne funkcije so torej $\lambda_k = -\frac{k^2}{4}$, $y_{\lambda_k}(x) = \cos\frac{kx}{2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Rešitvi robnih problemov:

(a) Ker je desna stran enačbe $f(x) = 3\cos x = 3y_{\lambda_2}(x)$, je $y(x) = \frac{3}{\lambda_2} y_{\lambda_2} = -3\cos x$ rešitev robnega problema. Ker pa je vsaka konstanta tudi rešitev prirejenega homogenega robnega problema, so rešitve robnega problema oblike $y(x) = C - 3\cos x$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) Ker je desna stran enačbe $f(x) = 2\cos 4x + 4\cos 5x = 2y_{\lambda_8}(x) + 4y_{\lambda_{10}}(x)$, je

$$y(x) = \frac{2}{\lambda_8} y_{\lambda_8} + \frac{4}{\lambda_{10}} y_{\lambda_{10}} = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x$$

rešitev robnega problema. Ker pa je vsaka konstanta tudi rešitev prirejenega homogenega robnega problema, so rešitve robnega problema oblike

$$y(x) = C - \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije robnega problema

$$y''(x) = 0, \quad y(0) = y(1), y'(0) = y'(1).$$

Z njihovo uporabo reši robni problem

$$y''(x) = \sin(2\pi x), \quad y(0) = y(1), y'(0) = y'(1).$$

Rešitev: Iščemo rešitve enačbe $y_\lambda'' = \lambda y_\lambda$. Pripadajoči karakteristični polinom je potem $\mu^2 = \lambda$, ki ima ničli $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Ločimo 3 primere:

- $\underline{\lambda = 0}$: Ker imamo dvojno ničlo karakterističnega polinoma $\mu_{1,2} = 0$, je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 + C_2 x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo, da je $C_2 = 0$ in C_1 poljuben. Pri lastni vrednosti $\lambda_0 = 0$ lahko za lastno funkcijo vzamemo $y_{\lambda_0}(x) = 1$.
- $\underline{\lambda > 0}$: Če v splošni rešitvi $y_\lambda(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.
- $\underline{\lambda < 0}$: Splošna rešitev je oblike

  $$y_\lambda(x) = C_1 \cos\big(\sqrt{-\lambda}x\big) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x\big).$$

  Potem je

  $$y_\lambda'(x) = -\sqrt{-\lambda}C_1 \sin\big(\sqrt{-\lambda}x\big) + \sqrt{-\lambda}C_2 \cos\big(\sqrt{-\lambda}x\big).$$

  Če zapišemo robna pogoja in drugega delimo s $\sqrt{-\lambda}$, dobimo:

  $$\begin{aligned} C_1 &= C_1 \cos\big(\sqrt{-\lambda}\big) + C_2 \sin\big(\sqrt{-\lambda}\big), \\ C_2 &= -C_1 \sin\big(\sqrt{-\lambda}\big) + C_2 \cos\big(\sqrt{-\lambda}\big). \end{aligned} \tag{8}$$

  - Če je $C_1 = C_2 = 0$, dobimo samo ničelno rešitev.
  - Če je $C_1 = 0$ in $C_2 \neq 0$, se pogoja (8) poenostavita v

    $$\begin{aligned} 0 &= C_2 \sin\big(\sqrt{-\lambda}\big), \\ C_2 &= C_2 \cos\big(\sqrt{-\lambda}\big). \end{aligned}$$

    Ker $C_2 \neq 0$, je to res le, če je $\sqrt{-\lambda} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije so potem $\lambda_k = -4k^2\pi^2$, $y_{\lambda_k}^1(x) = \sin(2k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$.

– Če $C_1 \neq 0$ in $C_2 = 0$, se pogoja (8) poenostavita v

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\right), \\ 0 &= -C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\right). \end{aligned}$$

Ker $C_1 \neq 0$, je to res le, če je $\sqrt{-\lambda} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije so potem $\lambda_k = -4k^2\pi^2$, $y^2_{\lambda_k}(x) = \cos(2k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$.

– Če $C_1 \neq 0$ in $C_2 \neq 0$, lahko pogoja (8) pomnožimo s C_1 oz. C_2 in seštejemo. Iz dobljene enakosti $C_1^2 + C_2^2 = (C_1^2 + C_2^2)\cos\left(\sqrt{-\lambda}\right)$ sledi, da mora veljati $\cos\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 1$. Potem pa iz prvega pogoja (8) sledi, da mora veljati tudi $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$. Obema enačbama je zadoščeno le, če je $\sqrt{-\lambda} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije so potem $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$, $\lambda_k = -4k^2\pi^2$, $y^1_{\lambda_k}(x) = \sin(2k\pi x)$, $y^2_{\lambda_k}(x) = \cos(2k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Rešitev robnega problema:

Ker je desna stran enačbe $f(x) = \sin(2\pi x) = y^1_{\lambda_1}(x)$, je $y(x) = \frac{1}{\lambda_1} y^1_{\lambda_1} = -\frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$ rešitev robnega problema. Ker pa je konstanta rešitev prirejenega robnega problema $y''(x) = 0$, so rešitve robnega problema oblike $C - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$, $C \in \mathbb{R}$.

5. Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije robnega problema

$$y''(x) = 0, \quad y'(0) = y(\pi) = 0.$$

Rešitev: Iščemo rešitve enačbe $y_\lambda'' = \lambda y_\lambda$. Pripadajoči karakteristični polinom je potem $\mu^2 = \lambda$, ki ima ničli $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Ločimo 3 primere:

- $\underline{\lambda = 0}$: Ker imamo dvojno ničlo karakterističnega polinoma $\mu_{1,2} = 0$, je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 + C_2 x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo, dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.
- $\underline{\lambda > 0}$: Če v splošni rešitvi $y_\lambda(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.
- $\underline{\lambda < 0}$: Splošna rešitev je oblike

$$y_\lambda(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Iz robnega pogoja $y_\lambda'(0) = 0$ sledi, da je $C_2 = 0$. Če upoštevamo še robni pogoj $y_\lambda(\pi) = 0$, dobimo enačbo $C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$. Če je $C_1 = 0$, potem dobimo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$. Enačba $\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$ pa ima rešitve $\sqrt{-\lambda}\pi = \frac{2k-1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije so $\lambda_k = -\frac{(2k-1)^2}{4}$ in $y_{\lambda_k}(x) = \cos\frac{(2k-1)x}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

6. Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije robnega problema

$$y''(x) + 2y'(x) = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Rešitev: Iščemo rešitve enačbe $y_\lambda'' + 2y_\lambda' = \lambda y_\lambda$. Pripadajoči karakteristični polinom je potem $\mu^2 + 2\mu = \lambda$, ki ima ničli $\mu_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$. Ločimo 3 primere:

- $\underline{\lambda = -1}$: Ker imamo dvojno ničlo karakterističnega polinoma $\mu_{1,2} = -1$, je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev.
- $\underline{\lambda > -1}$: Če v splošni rešitvi $y_\lambda(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})x}$ upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.

- $\underline{\lambda < -1}$: Splošna rešitev je oblike

$$y_\lambda(x) = C_1 e^{-x} \cos\left(\sqrt{-(1+\lambda)}x\right) + C_2 e^{-x} \sin\left(\sqrt{-(1+\lambda)}x\right).$$

  Iz robnega pogoja $y_\lambda(0) = 0$ sledi, da je $C_1 = 0$. Če upoštevamo še robni pogoj $y_\lambda(\pi) = 0$, dobimo enačbo $C_2 e^{-\pi} \sin\left(\sqrt{-(1+\lambda)}\pi\right) = 0$. Če je $C_2 = 0$, potem dobimo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$. Enačba $\sin\left(\sqrt{-(1+\lambda)}\pi\right) = 0$ pa ima rešitve $\sqrt{-(1+\lambda)}\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije so $\lambda_k = -(1+k^2)$ in $y_{\lambda_k}(x) = e^{-x} \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$.

7. Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije robnega problema

$$y''(x) - 4y'(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Rešitev: Iščemo rešitve enačbe $y_\lambda'' - 4y_\lambda' = \lambda y_\lambda$. Pripadajoči karakteristični polinom je potem $\mu^2 - 4\mu = \lambda$, ki ima ničli $\mu_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+\lambda}$. Ločimo 3 primere:

- $\underline{\lambda = -4}$: Ker imamo dvojno ničlo karakterističnega polinoma $\mu_{1,2} = 2$, je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev.
- $\underline{\lambda > -4}$: Če v splošni rešitvi $y_\lambda(x) = C_1 e^{(2+\sqrt{4+\lambda})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{4+\lambda})x}$ upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.
- $\underline{\lambda < -4}$: Splošna rešitev je oblike

$$y_\lambda(x) = C_1 e^{2x} \cos\left(\sqrt{-(4+\lambda)}x\right) + C_2 e^{2x} \sin\left(\sqrt{-(4+\lambda)}x\right).$$

  Iz robnega pogoja $y_\lambda(0) = 0$ sledi, da je $C_1 = 0$. Če upoštevamo še robni pogoj $y_\lambda(1) = 0$, dobimo enačbo $C_2 e^2 \sin\left(\sqrt{-(4+\lambda)}\right) = 0$. Če je $C_2 = 0$, potem dobimo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$. Enačba $\sin\left(\sqrt{-(4+\lambda)}\right) = 0$ ima rešitve $\sqrt{-(4+\lambda)} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije so $\lambda_k = -(4+k^2\pi^2)$ in $y_{\lambda_k}(x) = e^{2x} \sin k\pi x$, $k \in \mathbb{N}$.

1.4 Fourierove vrste

- Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ in periodična s periodo $b - a$. Potem je njena **Fourierova vrsta** enaka

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right),$$

kjer so koeficienti a_n in b_n enaki

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx.$$

- Če ima f v točki x levi in desni odvod, potem je Fourierova vrsta konvergentna v x in velja:

$$F(x) = \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2},$$

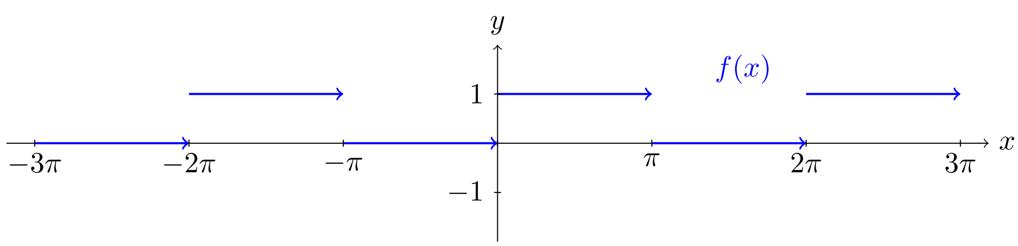
kjer $f_-(x)$ oz. $f_+(x)$ označujeta levo oz. desno limito v točki x.

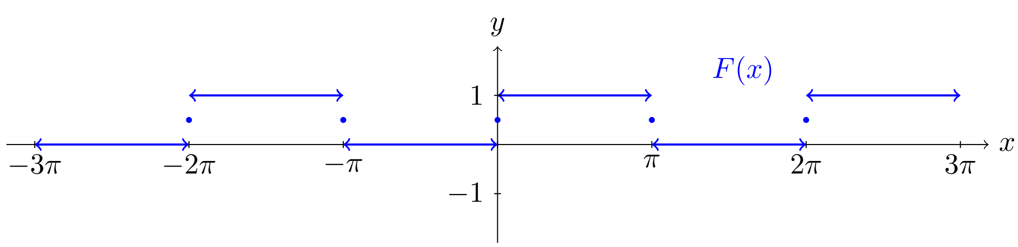
1. Določi Fourierovo vrsto $F(x)$ funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases},$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Nariši grafa funkcij $f(x)$ in $F(x)$ na intervalu $(-3\pi, 3\pi)$.

Rešitev:





Izračunajmo koeficiente Fourierove vrste:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{\pi n}\Bigg|_0^{\pi} = 0,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{\pi n}\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi n} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0 & ;\text{n je sod}\\ \frac{2}{n\pi} & ;\text{n je lih}\end{cases}.
\end{aligned}
$$

Rešitev je

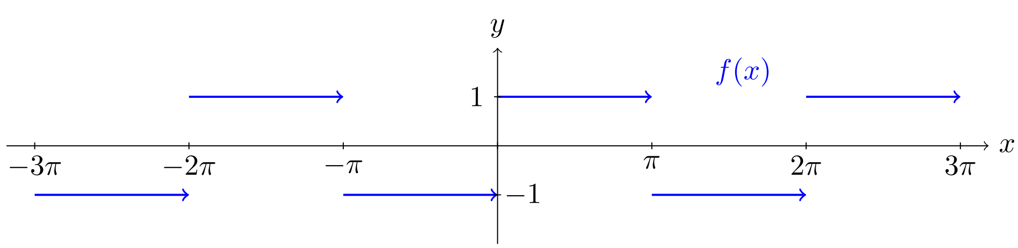
$$
F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\big((2n-1)x\big).
$$

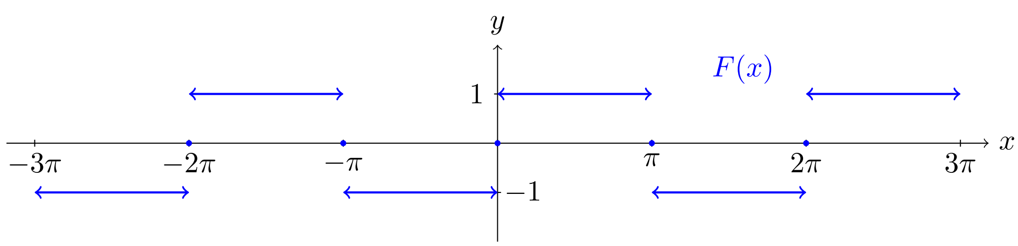
2. Funkcijo

$$
f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0\\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases},
$$

$f(x+2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, razvij v Fourierovo vrsto $F(x)$. Nariši grafa funkcij $f(x)$ in $F(x)$ na intervalu $(-3\pi, 3\pi)$.
Z dobljenim rezultatom izračunaj vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Rešitev:





Izračunajmo koeficiente Fourierove vrste:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0, \text{ ker je } f(x) \text{ liha funkcija,}\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx = -\frac{2\cos(nx)}{\pi n}\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{2\big(1-\cos(n\pi)\big)}{\pi n} = \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & ;\text{n je sod}\\ \frac{4}{n\pi} & ;\text{n je lih}\end{cases}.
\end{aligned}
$$

Reštev je

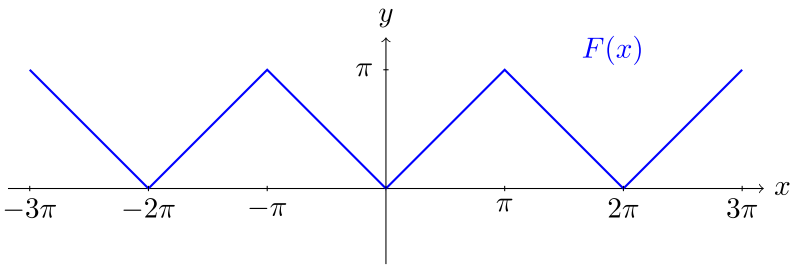
$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\big((2n-1)x\big).$$

Če v Fourierovo vrsto vstavimo $x = \frac{\pi}{2}$ in upoštevamo, da je $F(\frac{\pi}{2}) = 1$, dobimo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

3. Funkcijo $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, razvij v Fourierjevo vrsto $F(x)$. Nariši funkcije $F(x)$ na intervalu $(-3\pi, 3\pi)$.

   Z dobljenim rezultatom izračunaj vsoto vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

   Rešitev:



Izračunajmo koeficiente Fourierove vrste:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \left.\frac{x^2}{\pi}\right|_0^{\pi} = \pi, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx \quad \ldots \text{ uporabimo integracijo per partes} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \left.\frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big) = \begin{cases} 0 & ;\text{n je sod} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & ;\text{n je lih} \end{cases}, \\
b_n &= 0, \text{ ker je } f(x) \text{ soda funkcija.}
\end{aligned}$$

Potem je

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\big((2n-1)x\big).$$

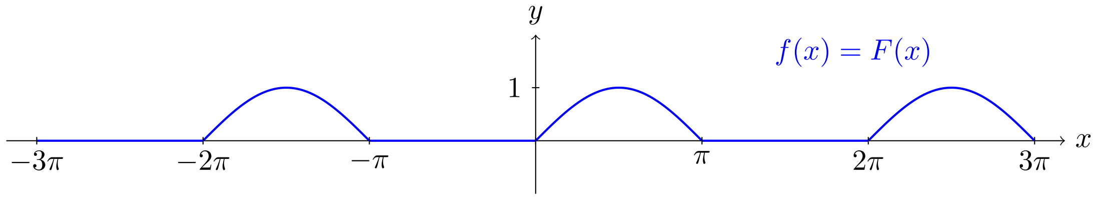
Če v Fourierovo vrsto vstavimo $x = 0$ in upoštevamo, da je $F(0) = 0$, dobimo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \sin x, & 0 \le < x < \pi \end{cases},$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, razvij v Fourierovo vrsto $F(x)$. Nariši grafa funkcij $f(x)$ in $F(x)$ na intervalu $(-3\pi, 3\pi)$.

Rešitev:



Pri računanju Fourierovih koeficientov si bomo pomagali s formulama:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big) \quad \text{in} \quad \sin x \sin y = -\frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) - \cos(x-y)\Big).$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi},\\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2\pi}\Big|_0^{\pi} = 0,\\
a_{n(n>1)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\big)dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos\big((1+n)x\big)}{1+n} - \frac{\cos\big((1-n)x\big)}{1-n}\right)\Bigg|_0^{\pi}\\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\big((1+n)\pi\big)-1}{n+1} - \frac{\cos\big((1-n)\pi\big)-1}{n-1}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) = \begin{cases} 0 & ;\text{n je lih}\\ -\frac{2}{\pi(n^2-1)} & ;\text{n je sod}\end{cases},\\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(1-\cos(2x)\big)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2},\\
b_{n(n>1)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos\big((1+n)x\big) - \cos\big((1-n)x\big)\Big)\,dx\\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\big((1+n)x\big)}{1+n} - \frac{\sin\big((1-n)x\big)}{1-n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Potem je

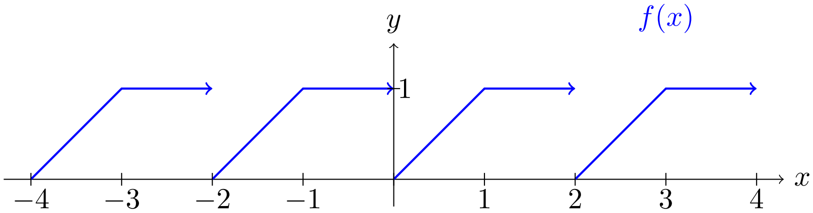
$$F(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).$$

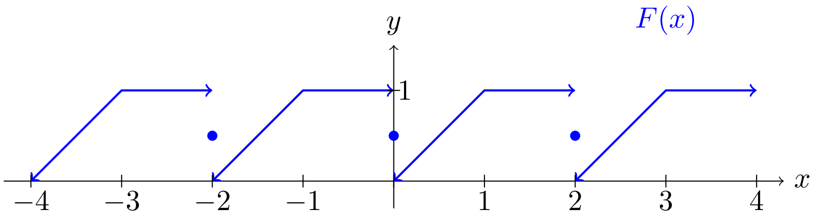
5. Določi Fourierovo vrsto $F(x)$ funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0\\ x, & 0 \le x < 1\end{cases},$$

$f(x+2) = f(x)$. Nariši grafa funkcij $f(x)$ in $F(x)$ na intervalu $(-4, 4)$.

Rešitev:





Izračunajmo koeficiente Fourierove vrste:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} x\, dx = 1 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\, dx = \int_{-1}^{0} \cos(n\pi x)\, dx + \int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)\, dx \quad \ldots \text{ uporabimo integracijo per partes}$$

$$= \left.\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & ;\text{n je sod} \\ -\frac{2}{n^2\pi^2} & ;\text{n je lih} \end{cases},$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\, dx = \int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)\, dx + \int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)\, dx \quad \ldots \text{ uporabimo integracijo per partes}$$

$$= -\left.\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\, dx$$

$$= \frac{-1+\cos(-n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \left.\frac{\sin(n\pi x}{n^2\pi^2}\right|_0^1$$

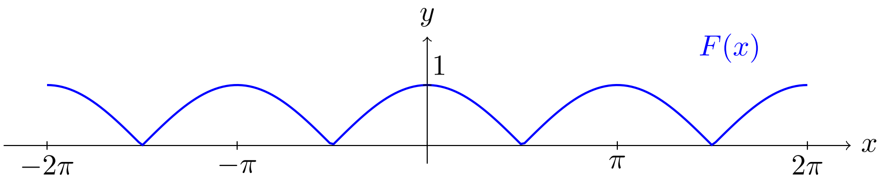
$$= \frac{-1+\cos(-n\pi)-\cos(n\pi)}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi}$$

Potem je

$$F(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos\left((2n-1)\pi x\right) + \frac{1}{n}\sin(n\pi x)\right].$$

6. Funkcijo $f(x) = \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, razvij v Fourierovo vrsto $F(x)$. Z dobljenim rezultatom izračunaj vsoto vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Rešitev:



Pri računanju Fourierovih koeficientov si bomo pomagali s formulo

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big).$$

Izračunajmo koeficiente Fourierove vrste:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{4}{\pi}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{2}{\pi}} \cos x\cos(2nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\Big(\cos(x+2nx) + \cos(x-2nx)\Big)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{2n+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin\big((1-2n)x\big)}{1-2n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right) = -\frac{4(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}, \\
b_n &= 0, \text{ ker je } \cos x \text{ soda funkcija.}
\end{aligned}$$

Potem je

$$F(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos(2nx).$$

Če v Fourierovo vrsto vstavimo $x = \frac{\pi}{2}$ in upoštevamo, da je $F(\frac{\pi}{2}) = 0$, dobimo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

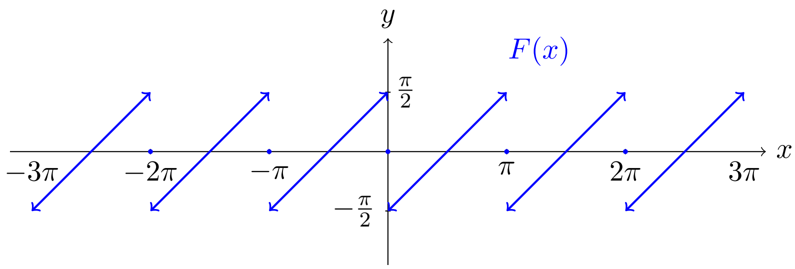
7. Funkcijo $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$, $x \in (0, \pi)$, razvij v Fourierovo vrsto $F(x)$

   (a) po samih sinusih

   (b) po samih cosinusih

   Rešitev:

   (a) Če želimo funkcijo razviti po samih sinusih, jo liho nadaljujemo na interval $(-\pi, 0)$.



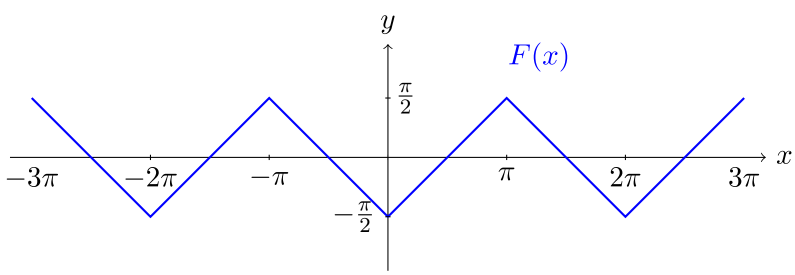
Ker je funkcija liha, so $a_n = 0$. Izračunajmo še koeficiente b_n Fourierove vrste:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(nx)\,dx \quad \ldots \text{ uporabimo integracijo per partes} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos(n\pi)}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^\pi\right) \\
&= -\frac{\cos(n\pi)+1}{n} = -\frac{(-1)^n+1}{n} = \begin{cases} 0 & ;\text{n je lih} \\ -\frac{2}{n}, & ;\text{n je sod} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Potem je

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2nx).$$

(b) Če želimo funkcijo razviti po samih cosinusih, jo sodo nadaljujemo na interval $(-\pi, 0)$.



Ker je funkcija soda, so $b_n = 0$. Izračunajmo še koeficiente a_n Fourierove vrste:

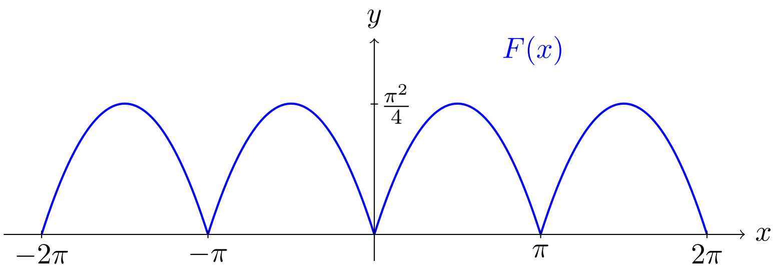
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-\frac{\pi}{2})\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^\pi = 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nx)\,dx \quad \ldots \text{ uporabimo integracijo per partes} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\right) = \frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\big(\cos(n\pi)-1\big) = \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n-1\big) = \begin{cases} 0 & ;\text{n je sod} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & ;\text{n je lih} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Torej je

$$F(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\big((2n-1)x\big).$$

8. Funkcijo $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in (0,\pi)$, razvij v Fourierovo vrsto $F(x)$ po samih kosinusih. Z dobljenim rezultatom izračunaj vsoto vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Rešitev: Če želimo funkcijo razviti po samih kosinusih, jo sodo nadaljujemo na interval $(-\pi, 0)$.



Ker je funkcija soda, so $b_n = 0$. Izračunajmo še koeficiente a_n Fourierove vrste:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\cos(nx)\,dx \quad \ldots \text{ uporabimo integracijo per partes}\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x(\pi-x)\sin(nx)}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\sin(nx)\,dx\right) \quad \ldots \text{ uporabimo integracijo per partes}\\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{(\pi-2x)\cos(nx)}{-n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) = -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi\big(\cos(n\pi)+1\big)}{n} - \frac{2\sin(nx)}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right)\\
&= -\frac{2\big(\cos(n\pi)+1\big)}{n^2} = -\frac{2\big((-1)^n+1\big)}{n^2} = \begin{cases} 0 & ;\text{n je lih}\\ -\frac{4}{n^2} & ;\text{n je sod}\end{cases}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2nx).$$

Če v Fourierovo vrsto vstavimo $x = 0$ in upoštevamo, da je $F(0) = 0$, dobimo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9. (a) Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije homogenega robnega problema

$$y''(x) + 3y(x) = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

(b) Funkcijo $f(x) = \sin x$, $x \in (0,\pi)$, razvij v Fourierovo vrsto $F(x)$ po samih kosinusih.

(c) Z uporabo Fourierove vrste $F(x)$ reši robni problem

$$y''(x) + 3y(x) = \sin x, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

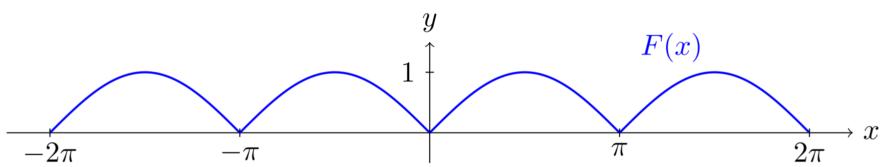
Rešitev:

(a) Iščemo rešitve enačbe $y_\lambda'' + 3y_\lambda = \lambda y_\lambda$. Pripadajoči karakteristični polinom je potem $\mu^2 + (3 - \lambda) = 0$, ki ima ničli $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda - 3}$. Ločimo 3 primere:

- $\underline{\lambda = 3}$: Ker imamo dvojno ničlo karakterističnega polinoma $\mu_{1,2} = 0$, je splošna rešitev oblike $y_\lambda(x) = C_1 + C_2 x$. Če upoštevamo robna pogoja, dobimo, da je $C_2 = 0$ in C_1 poljuben. Pri lastni vrednosti $\lambda_0 = 3$ lahko za lastno funkcijo vzamemo $y_{\lambda_0}(x) = 1$.
- $\underline{\lambda > 3}$: Če v splošni rešitvi $y_\lambda(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda-3}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda-3}x}$ upoštevamo robna pogoja, dobimo samo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$.
- $\underline{\lambda < 3}$: Splošna rešitev je oblike $y_\lambda(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3-\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3-\lambda}x\right)$. Iz robnega pogoja $y_\lambda'(0) = 0$ sledi, da je $C_2 = 0$. Če upoštevamo še robni pogoj $y_\lambda'(\pi) = 0$, dobimo enačbo $-\sqrt{3-\lambda}C_1 \sin\left(\sqrt{3-\lambda}\pi\right) = 0$. Ker $\lambda \neq 3$, je bodisi $C_1 = 0$ ali pa $\sin(\sqrt{3-\lambda}\pi) = 0$. Če je $C_1 = 0$, potem dobimo ničelno rešitev $y_\lambda(x) = 0$. Enačba $\sin\left(\sqrt{3-\lambda}\pi\right) = 0$ pa ima rešitve $\sqrt{3-\lambda}\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne funkcije so $\lambda_k = 3 - k^2$, $y_{\lambda_k}(x) = \cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}$.

Zapišimo še vse lastne vrednosti in lastne funkcije z enim predpisom: $\lambda_k = 3 - k^2$ in $y_{\lambda_k}(x) = \cos kx$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) Če želimo funkcijo razviti po samih kosinusih, jo sodo nadaljujemo na interval $(-\pi, 0)$.



Ker je funkcija soda, so $b_n = 0$. Pri računanju Fourierovih koeficientov a_n si bomo pomagali s formulo: $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\frac{2\cos x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}, \\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = 0, \\
a_{n(n>1)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(x+nx) + \sin(x-nx))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos((1+n)x)}{1+n} - \frac{\cos((1-n)x)}{1-n}\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((1+n)\pi) - 1}{n+1} - \frac{\cos((1-n)\pi) - 1}{n-1}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1}\right) = \begin{cases} 0 & ;\text{n je lih} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} & ;\text{n je lih} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Potem je

$$F(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2nx).$$

(c) Ker je

$$\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2nx),$$

je

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{2}{\pi\lambda_0} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)\lambda_{2n}} \cos(2nx) \\ &= \frac{2}{3\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)(3-4n^2)} \cos(2nx). \end{aligned}$$

1.5 Parcialne diferencialne enačbe

1.5.1 Posebne enačbe, nove spremenljivke

1. Poišči rešitev parcialne diferencialne enačbe $u_{xy} + u_y = 0$ in naredi preizkus.

   Rešitev: Naj bo $v = u_y$. Potem se parcialna diferencialna enačba prepiše v $v_x + v = 0$, ki ima rešitev $v = f(y)e^{-x}$, kjer je f poljubna odvedljiva funkcija. Iz $u_y = f(y)e^{-x}$ sledi

   $$u(x,y) = e^{-x}\int f(y)\,dy = e^{-x}(q(y) + g(x)) = q(y)e^{-x} + g(x)e^{-x} = q(y)e^{-x} + p(x),$$

   kjer sta q in p odvedljivi funkciji.

2. Pokaži, da je $u = F(xy) + x\,G(\frac{x}{y})$ splošna rešitev parcialne diferencialne enačbe

   $$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

   za poljubni funkciji F in G, ki sta dvakrat odvedljivi.

   Rešitev: Izračunamo parcialne odvode

   $$\begin{aligned} u_x &= F'(xy)y + G(\tfrac{x}{y}) + \tfrac{x}{y}G'(\tfrac{x}{y}), \\ u_{xx} &= F''(xy)y^2 + \tfrac{2}{y}G'(\tfrac{x}{y}) + \tfrac{x}{y^2}G''(\tfrac{x}{y}), \\ u_y &= F'(xy)x - \tfrac{x^2}{y^2}G'(\tfrac{x}{y}), \\ u_{yy} &= F''(xy)x^2 + \tfrac{2x^2}{y^3}G'(\tfrac{x}{y}) + \tfrac{x^3}{y^4}G''(\tfrac{x}{y}), \end{aligned}$$

   in vstavimo v parcialno diferencialno enačbo.

3. Poišči funkcijo $u = u(x,y)$, ki zadošča enačbam

   $$u_x = 3x^2y + y, \quad u_y = x^3 + x$$

   in $u(0,0) = 0$.

   Rešitev: Iz prve enačbe sledi, da je $u(x,y) = x^3y + xy + \varphi(y)$. Iz druge enačbe sledi, da je $u(x,y) = x^3y + xy + \psi(x)$. Torej je $u(x,y) = x^3y + xy + C$. Če upoštevamo še začetni pogoj, dobimo $C = 0$ in $u(x,y) = x^3y + xy$.

4. Zapiši enačbo

   $$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

   v koordinatah $s = x$ in $t = x - y$. Poišči splošno rešitev in naredi preizkus.

   Rešitev: Označimo $v(s,t) = u(x,y)$ in odvajamo:

   $$\begin{aligned} u_x &= v_s + v_t, \\ u_y &= -v_t, \\ u_{xx} &= v_{ss} + 2v_{st} + v_{tt}, \\ u_{xy} &= -v_{st} - v_{tt}, \\ u_{yy} &= v_{tt}. \end{aligned}$$

   Vstavimo odvode v diferencialno enačbo in dobimo $v_{ss} = 0$.

   Če enačbo $v_{ss} = 0$ integriramo po s, dobimo $v_s = f(t)$. Če dobljeno enačbo še enkrat integriramo po s, dobimo $v = sf(t) + g(t)$. Če upoštevamo, da je $s = x$ in $t = x - y$, dobimo $u(x,y) = xf(x-y) + g(x-y)$, kjer sta f in g poljubni dvakrat ovedljivi funkciji.

5. Zapiši enačbo
$$xu_x - yu_y = 2x^2$$
v koordinatah $s = xy$ in $t = \frac{x}{y}$. Poišči njeno splošno rešitev ter naredi preizkus.

Rešitev: Označimo $v(s,t) = u(x,y)$ in odvajamo:
$$\begin{aligned} u_x &= yv_s + \tfrac{1}{y}v_t, \\ u_y &= xv_s - \tfrac{x}{y^2}v_t. \end{aligned}$$
Vstavimo odvode v diferencialno enačbo in dobimo $v_t = s$.

Če enačbo $v_t = s$ integriramo po t, dobimo $v = st + f(s)$. Če upoštevamo, da je $s = xy$ in $t = \frac{x}{y}$, dobimo rešitev $u(x,y) = x^2 + f(xy)$, kjer je f poljubna odvedljiva funkcija.

6. Zapiši enačbo
$$u_{xx} - 3u_{xy} = 9y$$
v koordinatah $s = y$ in $t = 3x + y$. Poišči njeno splošno rešitev ter naredi preizkus.

Rešitev: Označimo $v(s,t) = u(x,y)$ in odvajamo:
$$\begin{aligned} u_x &= 3v_t, \\ u_{xx} &= 9v_{tt}, \\ u_{xy} &= 3v_{st} + 3v_{tt}. \end{aligned}$$
Vstavimo odvode v diferencialno enačbo in dobimo $v_{ts} = -s$.

Če enačbo $v_{ts} = -s$ integriramo po s, dobimo $v_t = -\frac{s^2}{2} + f(t)$. Če dobljeno enačbo integriramo še po t, dobimo $v = -\frac{s^2 t}{2} + g(t) + h(s)$. Če upoštevamo, da je $s = y$ in $t = 3x + y$, dobimo $u(x,y) = -\frac{y^2(3x+y)}{2} + g(3x+y) + h(y)$, kjer sta g in h poljubni dvakrat ovedljivi funkciji.

7. Zapiši enačbo
$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$
v koordinatah $s = x$ in $t = 2x + y$. Poišči njeno splošno rešitev ter naredi preizkus.

Rešitev: Označimo $v(s,t) = u(x,y)$ in odvajamo.
$$\begin{aligned} u_x &= v_s + 2v_t, \\ u_{xx} &= v_{ss} + 4v_{st} + 4v_{tt}, \\ u_{xy} &= v_{st} + 2v_{tt}, \\ u_y &= v_t, \\ u_{yy} &= v_{tt}. \end{aligned}$$
Vstavimo odvode v diferencialno enacbo in dobimo $v_{ss} = 0$.

Enačbo $v_{ss} = 0$ integriramo po s in dobimo $v_s = f(t)$. Če dobljeno enačbo še enkrat integriramo po s, dobimo $v = sf(t) + g(t)$. Ker je $s = x$ in $t = 2x + y$, je rešitev diferencialne enačbe enaka $u(x,y) = xf(2x+y) + g(2x+y)$, kjer sta f in g poljubni dvakrat odvedljivi funkciji.

8. Zapiši enačbo $xu_x + u_y = \frac{1}{x}$ v koordinatah $s = xe^{-y}$ in $t = x$. Poišči njeno splošno rešitev ter naredi preizkus.

Rešitev: Označimo $v(s,t) = u(x,y)$ in odvajamo.
$$\begin{aligned} u_x &= v_s e^{-y} + v_t \\ u_y &= -xe^{-y}v_s. \end{aligned}$$
Vstavimo odvode v diferencialno enačbo in dobimo $v_t = \frac{1}{t^2}$.

Če enačbo $v_t = \frac{1}{t^2}$ integriramo po t, dobimo $v = -\frac{1}{t} + f(s)$. Če upoštevamo, da je $s = xe^{-y}$ in $t = x$, dobimo rešitev $u(x,y) = -\frac{1}{x} + f(xe^{-y})$, kjer je f poljubna odvedljiva funkcija.

1.5.2 Metoda karakteristik

- **Linearna parcialna difererencialna enačba** je enačba oblike

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c_0(x,y)u + c_1(x,y). \tag{9}$$

Parcialno diferencialno enačbo skupaj z začetnim pogojem imenujemo **začetni problem** ali **Cauchyjeva naloga**. Začetni pogoj zapišemo parametrično

$$\Gamma = \Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)), \quad s \in I = (\alpha, \beta).$$

Sistem navadnih diferencialnih enačb 1. reda

$$\begin{aligned} x_t(t) &= a(x(t), y(t)), \\ y_t(t) &= b((x(t), y(t)), \\ u_t(t) &= c_0(x(t), y(t))u(t) + c_1(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

imenujemo **karakteristične enačbe**. Ta sistem nam določa krivulje na ploskvi $u(x,t)$, ki jih imenujemo **karakteristične krivulje**. Postavimo začetno točko na začetno krivuljo

$$\Gamma: \quad x(0,s) = x_0(s),\ y(0,s) = y_0(s),\ u(0,s) = u_0(s).$$

Dobili smo parametrizacijo ploskve $u = u(x,y)$ v $\mathbb{R}^3$: $(x(t,s), y(t,s), u(t,s))$, ki jo imenujemo **integralska ploskev**.

- Če so koeficienti enačbe (9) zvezno parcialno odvedljivi v okolici Γ in velja

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} a & b \\ (x_0)_s & (y_0)_s \end{vmatrix} = x_t(0,s)y_s(0,s) - y_t(0,s)x_s(0,s) \neq 0, \tag{10}$$

ima začetni problem enolično rešitev v okolici začetne krivulje Γ.

- Pogoj (10) imenujemo **transverzalnostni pogoj**. Geometrijsko pogoj zagotavlja, da se projekcija začetne krivulje Γ na ravnino (x,y) in karakteristike sekajo netangencialno.

1. Reši naslednje linearne PDE z metodo karakteristik:

   (a) $u_x + u_y = 2$ z začetnim pogojem $u(x,0) = g(x)$

   (b) $xu_x + u_y = 1$ z začetnim pogojem $u(x,0) = g(x)$

   (c) $xu_x + (x+y)u_y = 1$ z začetnim pogojem $u(1,y) = y$

   (d) $yu_x + u_y = 2u$ z začetnim pogojem $u(x,0) = \cos x$

   (e) $xu_x + yu_y = 2u$ z začetnim pogojem $u(x,1) = \sin x$

   (f) $xu_x + yu_y = 4u$ z začetnim pogojem $u = 1$ na krogu $x^2 + y^2 = 1$

   (g) $-yu_x + xu_y = u$ z začetnim pogojem $u(x,0) = x^2$, $x > 0$

   (h) $-yu_x + xu_y = u$ z začetnim pogojem $u(x,0) = e^{-x^2}$, $x > 0$

   Rešitev:

(a) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = 1$, $y_t(t,s) = 1$ in $u_t(t,s) = 2$. Iz začetnega pogoja dobimo začetno krivuljo $x(0,s) = s$, $y(0,x) = 0$ in $u(0,s) = g(s)$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Ko integriramo karakteristične enačbe po t, dobimo $x(t,s) = t + f_1(s)$, $y(t,s) = t + f_2(s)$ in $u(t,s) = 2t + f_3(s)$. Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $x(t,s) = t + s$, $y(t,s) = t$ in $u(t,s) = 2t + g(s)$. Izrazimo $s = x - y$, $t = y$ in dobimo $u(x,y) = g(s) + 2t = g(x-y) + 2y$, kjer je g odvedljiva funkcija.

(b) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = x$, $y_t(t,s) = 1$ in $u_t(t,s) = 1$, parametrični začetni pogoji pa $x(0,s) = s$, $y(0,s) = 0$ in $u(0,s) = g(s)$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Iz sistema karakterističnih enačb dobimo $x(t,s) = f_1(s)e^t$, $y(t,s) = t + f_2(s)$. $u(t,s) = t + f_3(s)$. Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $x(t,s) = se^t$, $y(t,s) = t$ in $u_t(t,s) = t + g(s)$. Ker je $t = y$ in $s = xe^{-t} = xe^{-y}$, je $u(x,y) = y + g(xe^{-y})$.

(c) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = x$, $y_t(t,s) = x + y$ in $u_t(t,s) = 1$. Iz začetnega pogoja dobimo $x(0,s) = 1$, $y(0,s) = s$ in $u(0,s) = s$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & 1+s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Ko prvo karakteristično enačbo integriramo po t, dobimo $x(t,s) = f_1(s)e^t$. Če upoštevamo še začetni pogoj $x(0,s) = 1$, dobimo $x(t,s) = e^t$. Ko to upoštevamo v drugi karakteristični enačbi, dobimo linearno diferencialno enačbo $y_t = y + e^t$, ki ima splošno rešitev $y(t,s) = f_2(s)e^t + te^t$. Če upoštevamo še začetni pogoj $y(0,s) = s$, dobimo $f_2(s) = s$ in $y(s,t) = (s+t)e^t$. Ker je $u_t(t,s) = 1$, je $u(t,s) = t + f_3(s)$. Če upoštevamo še začetni pogoj, dobimo $f_3(s) = s$ in $u(s,t) = t + s$.
Iz zveze $y = (s+t)e^t = ux$ sledi, da $u(x,y) = \frac{y}{x}$.

(d) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = y$, $y_t(t,s) = 1$ in $u_t(t,s) = 2u$. Iz začetnega pogoja dobimo začetno krivuljo $x(0,s) = s$, $y(0,s) = 0$ in $u(0,s) = \cos s$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Ko integriramo drugo karakteristično enačbo po t, dobimo $y(t,s) = t + f_1(s)$. Če upoštevamo še začetni pogoj $y(0,s) = f_1(s) = 0$, dobimo $y(t,s) = t$. Ko v prvi karakteristični enačbi upoštevamo, da je $y(t,s) = t$, dobimo z integriranjem $x(t,s) = \frac{t^2}{2} + f_2(s)$. Če upoštevamo še začetni pogoj $x(0,x) = f_2(s) = s$, dobimo $x(t,s) = \frac{t^2}{2} + s$. Ker je $u_t(t,s) = 2u$, je $u(t,s) = f_3(s)e^{2t}$. Iz začetnega pogoja sledi $u(0,s) = f_3(s) = \cos s$. Torej $u(t,s) = \cos s e^{2t}$. Ker je $t = y$, lahko zapišemo $s = x - \frac{t^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}$. Rešitev je potem $u(x,y) = e^{2y}\cos\left(x - \frac{y^2}{2}\right)$.

(e) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = x$, $y_t(t,s) = y$ in $u_t(t,s) = 2u$. Iz začetnega pogoja dobimo $x(0,s) = s$, $y(0,s) = 1$ in $u(0,s) = \sin s$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Iz sistema karakterističnih enačb dobimo $x(t,s) = f_1(s)e^t$, $y(t,s) = f_2(s)e^t$ in $u(t,s) = f_3(s)e^{2t}$. Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $x(t,s) = se^t$, $y(t,s) = e^t$ in $u(t,s) = \sin se^{2t}$. Ker je $s = \frac{x}{y}$ in $e^t = y$, je rešitev $u(x,y) = y^2 \sin \frac{x}{y}$.

(f) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = x$, $y_t(t,s) = y$ in $u_t(t,s) = 4u$. Ker je začetna krivulja krožnica s polmerom 1, je ena od možnih parametrizacij začetne krivulje $x(0,s) = \cos s$, $y(0,s) = \sin s$ in $u(0,s) = 1$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Iz sistema karakterističnih enačb dobimo $x(t,s) = f_1(s)e^t$, $y(t,s) = f_2(s)e^t$ in $u(t,s) = f_3(s)e^{4t}$. Če upoštevamo še začetne pogoje, dobimo $x(t,s) = e^t \cos s$, $y(t,s) = e^t \sin s$ in $u(t,s) = e^{4t}$. Iz zveze $x^2 + y^2 = e^{2t}$ sledi, da je $u(x,y) = (x^2 + y^2)^2$.

(g) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = -y$, $y_t(t,s) = x$ in $u_t(t,s) = u$. Iz začetnega pogoja dobimo $x(0,s) = s$, $y(0,s) = 0$ in $u(0,s) = s^2$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} 0 & s \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -s$$

in na začetni krivulji $s \neq 0$, je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Prvi dve karakteristični enačbi sta homogen sistem dveh linearnih diferencialnih enačb. Sistem rešimo tako, da ga preoblikujemo v diferencialno enačbo drugega reda $x_{tt} + x = 0$. Potem pa je $x(t,s) = f_1(s)\cos t + f_2(s)\sin t$ in $y(t,s) = -x_t(t,s) = f_1(s)\sin t - f_2(s)\cos t$. Če upoštevamo začetna pogoja, dobimo $f_1(s) = s$ in $f_2(s) = 0$. Torej $x(t,s) = s\cos t$ in $y(t,s) = s\sin t$. Ko tretjo katakteristično enačbo integriramo po t in upoštevamo začetni pogoj, dobimo $u(t,s) = s^2 e^t$. Ker je $x^2 + y^2 = s^2$ in $\tan t = \frac{y}{x}$, je $u(x,y) = (x^2 + y^2)e^{\arctan \frac{y}{x}}$.

(h) Enačbe karakterističnih krivulj so $x_t(t,s) = -y$, $y_t(t,s) = x$ in $u_t(t,s) = u$. Iz začetnega pogoja dobimo $x(0,s) = s$, $y(0,s) = 0$ in $u(0,s) = e^{-s^2}$. Ker je

$$J|_{t=0} = \begin{vmatrix} 0 & s \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -s$$

in na začetni krivulji $s \neq 0$, je rešitev enolična v okolici začetne krivulje.
Prvi dve karakteristični enačbi sta homogen sistem dveh linearnih diferencialnih enačb. Sistem rešimo tako, da ga preoblikujemo v diferencialno enačbo drugega reda $x_{tt} + x = 0$. Potem pa je $x(t,s) = f_1(s)\cos t + f_2(s)\sin t$ in $y(t,s) = -x_t(t,s) = f_1(s)\sin t - f_2(s)\cos t$. Če upoštevamo začetna pogoja, dobimo $f_1(s) = s$ in $f_2(s) = 0$. Torej $x(t,s) = s\cos t$ in $y(t,s) = s\sin t$. Ko tretjo katakteristično enačbo integriramo po t in upoštevamo začetni pogoj, dobimo $u(t,s) = e^{t-s^2}$. Ker je $x^2 + y^2 = s^2$ in $\tan t = \frac{y}{x}$, je $u(x,y) = e^{\arctan \frac{y}{x} - x^2 - y^2}$.

1.5.3 Fourierova metoda ločevanja spremenljivk

1. S Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk poišči rešitve oblike $u(x,y) = X(x)Y(y)$ diferencialne enačbe
$$xu_x = yu_y$$
in naredi preizkus.

Rešitev: Če zapišemo $u(x,t) = X(x)Y(y)$ in ustrezne odvode vstavimo v diferencialno enačbo $xu_x = yu_y$, dobimo enačbo $xX'(x)Y(y) = yX(x)Y'(y)$ oziroma $\frac{xX'(x)}{X(x)} = \frac{yY'(y)}{Y(y)}$. Ker je leva stran enačbe funkcija spremenjivke x, desna pa funkcija spremenjivke y, morata biti enaki konstanti, ki jo označimo s C_1. Tako dobimo dve navadni diferencialni enačbi. Rešitev diferencialne enačbe $X'(y) = \frac{C_1X(x)}{x}$ je oblike $X(x) = C_2x^{C_1}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Rešitev diferencialne enačbe $Y'(y) = \frac{C_1Y(y)}{y}$ je oblike $Y(y) = C_3y^{C_1}$, $C_1, C_3 \in \mathbb{R}$. Potem pa lahko zapišemo
$$u(x,y) = C_2x^{C_1}C_3y^{C_1} = A(xy)^B,\ A, B \in \mathbb{R}.$$

2. S Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk poišči rešitve oblike $u(x,y) = X(x)Y(y)$ diferencialne enačbe
$$u_{xy} = u$$
in naredi preizkus.

Rešitev: Če zapišemo $u(x,t) = X(x)Y(y)$ in ustrezne odvode vstavimo v diferencialno enačbo $u_{xy} = u$, dobimo enačbo $X'(x)Y'(y) = X(x)Y(y)$ oziroma $\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y(y)}{Y'(y)}$. Ker je leva stran enačbe funkcija spremenjivke x, desna pa funkcija spremenjivke y, morata biti enaki konstanti, ki jo označimo s C_1. Tako dobimo dve navadni diferencialni enačbi. Rešitev diferencialne enačbe $X'(x) = C_1X(x)$ je oblike $X(x) = C_2e^{C_1x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Rešitev diferencialne enačbe $Y'(y) = \frac{Y(y)}{C_1}$ je oblike $Y(y) = C_3e^{\frac{y}{C_1}}$, $C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $C_3 \in \mathbb{R}$. Potem pa je
$$u(x,y) = C_2e^{C_1x}C_3e^{\frac{y}{C_1}} = Ae^{Bx+\frac{y}{B}},\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

3. S Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk poišči rešitve oblike $u(x,y) = X(x)Y(y)$ diferencialne enačbe
$$u_x + u_y = u$$
in naredi preizkus.

Rešitev: Če zapišemo $u(x,t) = X(x)Y(y)$ in odvajamo in ustrezne odvode vstavimo v diferencialno enačbo $u_x + u_y = u$, dobimo enačbo $X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = X(x)Y(y)$ oziroma $\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y(y)-Y'(y)}{Y(y)}$. Ker je leva stran enačbe funkcija spremenjivke x, desna pa funkcija spremenjivke y, morata biti enaki konstanti, ki jo označimo s C_1. Tako dobimo dve navadni diferencialni enačbi. Rešitev diferencialne enačbe $X'(x) = C_1X(x)$ je oblike $X(x) = C_2e^{C_1x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Rešitev diferencialne enačbe $Y'(y) = (1-C_1)Y(y)$ je oblike $Y(y) = C_3e^{(1-C_1)y}$, $C_1, C_3 \in \mathbb{R}$. Potem pa je
$$u(x,y) = C_2e^{C_1x}C_3e^{(1-C_1)y} = Ae^{y+B(x-y)},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

4. S Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk poišči rešitve oblike $u(x,y) = X(x)Y(y)$ enačbe
$$u_{xx} = u_{xy}$$
in naredi preizkus.

Rešitev: Če zapišemo $u(x,t) = X(x)Y(y)$ in ustrezne odvode vstavimo v diferencialno enačbo $u_{xx} - u_{xy} = 0$, dobimo enačbo $X''(x)Y(y) = X'(x)Y'(y)$ oziroma $\frac{X''(x)}{X'(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$. Ker je leva stran enačbe funkcija spremenjivke x, desna pa funkcija spremenjivke y, morata biti enaki konstanti, ki jo označimo z λ. Tako dobimo dve navadni diferencialni enačbi. Rešitev diferencialne enačbe $Y'(y) = \lambda Y(y)$ je oblike $Y(y) = Ce^{\lambda y}$, $C \in \mathbb{R}$. Oblika rešitve diferencialne enačbe $X''(x) - \lambda X'(x) = 0$ pa je odvisna od vrednosti λ.

(a) Če je $\lambda = 0$, je rešitev oblike $X(x) = A + Bx$, $A, B \in \mathbb{R}$. Potem je

$$u(x,t) = X(x)Y(y) = (A + Bx)C = \tilde{A} + \tilde{B}x,\ \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}.$$

(b) Če je $\lambda \neq 0$, je rešitev oblike $X(x) = A + Be^{\lambda x}$, $A, B \in \mathbb{R}$. Potem je

$$u(x,t) = X(x)Y(y) = (A + Be^{\lambda x})Ce^{\lambda y} = \tilde{A}e^{\lambda y} + \tilde{B}e^{\lambda(x+y)},\ \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}.$$

5. S Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk poišči rešitve oblike $u(x,y) = X(x)Y(y)$ diferencialne enačbe

$$u_{xx} = 4u_y$$

in naredi preizkus.

Rešitev: Če zapišemo $u(x,t) = X(x)Y(y)$ in ustrezne odvode vstavimo v diferencialno enačbo $u_{xx} = 4u_y$, dobimo enačbo $X''(x)Y(y) = 4X(x)Y'(y)$ oziroma $\frac{X''(x)}{4X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$. Ker je leva stran enačbe funkcija spremenjivke x, desna pa funkcija spremenjivke y, morata biti enaki konstanti, ki jo označimo z λ. Rešitev diferencialne enačbe $Y'(y) = \lambda Y(y)$ je oblike $Y(y) = Ce^{\lambda y}$, $C \in \mathbb{R}$. Oblika rešitve diferencialne enačbe $X''(x) - 4\lambda X(x) = 0$ pa je odvisna od vrednosti λ.

(a) Če je $\lambda = 0$, je $X(x) = C_1 + C_2 x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, in

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = (C_1 + C_1 x)C = A_1 + A_2 x,\ A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Če je $\lambda > 0$, je $X(x) = C_3 e^{2\sqrt{\lambda}x} + C_4 e^{-2\sqrt{\lambda}x}$, $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$, in

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(C_3 e^{2\sqrt{\lambda}x} + C_4 e^{-2\sqrt{\lambda}x}\right) Ce^{\lambda y} = \left(A_3 e^{2\sqrt{\lambda}x} + A_4 e^{-2\sqrt{\lambda}x}\right) e^{\lambda y},\ A_3, A_4 \in \mathbb{R}.$$

(c) Če je $\lambda < 0$, potem je $X(x) = C_5 \cos\left(2\sqrt{-\lambda}x\right) + C_6 \sin\left(2\sqrt{-\lambda}x\right)$, $C_5, C_6 \in \mathbb{R}$, in

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \left(C_5 \cos\left(2\sqrt{-\lambda}x\right) + C_6 \sin\left(2\sqrt{-\lambda}x\right)\right) Ce^{\lambda y} \\ &= \left(A_5 \cos\left(2\sqrt{-\lambda}x\right) + A_6 \sin\left(2\sqrt{-\lambda}x\right)\right) e^{\lambda y},\ A_5, A_6 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6. S Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk poišči rešitve oblike $u(x,t) = X(x)T(t)$ diferencialne enačbe

$$ku_{xx} - u = u_t,\ k > 0,$$

in naredi preizkus.

Rešitev: Če zapišemo $u(x,t) = X(x)T(t)$ in ustrezne odvode vstavimo v diferencialno enačbo $ku_{xx} - u = u_t$, dobimo enačbo $kX''(x)T(t) - X(x)T(t) = X(x)T'(t)$ oziroma $\frac{kX''(x) - X(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$. Ker je leva stran enačbe funkcija spremenjivke x, desna pa funkcija spremenjivke t, morata biti enaki konstanti, ki jo označimo z λ. Rešitev diferencialne enačbe $T'(t) = \lambda T(t)$ je oblike $T(t) = Ce^{\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$. Oblika rešitve diferencialne enačbe $X''(x) - \frac{\lambda+1}{k}X(x) = 0$ pa je odvisna od vrednosti λ.

(a) Če je $\lambda = -1$, je $X(x) = C_1 + C_2 x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, in

$$u(x,y) = X(x)T(t) = (C_1 + C_2 x)Ce^{\lambda t} = (A_1 + A_2 x)e^{-t},\ A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Če je $\frac{\lambda+1}{k} = \alpha^2 > 0$, potem je $X(x) = C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}$, $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$, in

$$\begin{aligned} u(x,y) = X(x)T(t) &= (C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}) C e^{(k\alpha^2 - 1)t} \\ &= (A_3 e^{\alpha x} + A_4 e^{-\alpha x}) e^{(k\alpha^2-1)t},\ A_3, A_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Če je $\frac{\lambda+1}{k} = -\alpha^2 < 0$, potem je $X(x) = C_5 \cos(\alpha x) + C_6 \sin(\alpha x)$, $C_5, C_6 \in \mathbb{R}$, in

$$\begin{aligned} u(x,y) = X(x)T(t) &= \big(C_5 \cos(\alpha x) + C_6 \sin(\alpha x)\big) C e^{-(1+k\alpha^2)t} \\ &= \big(A_5 \cos(\alpha x) + A_6 \sin(\alpha x)\big) e^{-(1+k\alpha^2)t},\ A_5, A_6 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.5.4 Valovna enačba na premici

- **Valovna enačba na premici**

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \Phi(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x),\ x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ima rešitev oblike

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds + \frac{1}{2c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\, d\xi.$$

1. Naj bo $u(x,t)$ rešitev Cauchyjevega problema

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2; \\ 0, & |x| > 2; \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2; \\ 0, & |x| > 2; \end{cases}$$

(a) Poišči $u\big(0, \frac{1}{6}\big)$.

(b) Obravnavaj obnašanje pri velikih vrednosti t.

Rešitev:

(a) Upoštevajmo, da je $c = 3$ in $\Phi(x,t) = 0$. Potem je $u(x,t) = \frac{f(x+3t)+f(x-3t)}{2} + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} g(s)\, ds$ in

$u\big(0, \frac{1}{6}\big) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{6} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)\, ds = \frac{1+1}{2} + \frac{1}{6} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, ds = \frac{7}{6}.$

(b) Fiksirajmo $\xi \in \mathbb{R}$. Ker je $\lim_{t\to\infty} f(\xi + ct) = \lim_{t\to\infty} f(\xi - ct) = 0$, je

$$\lim_{t\to\infty} u(\xi,t) = \frac{1}{6} \lim_{t\to\infty} \int_{\xi-3t}^{\xi+3t} g(s)\, ds = \frac{1}{6} \int_{-2}^{2} 1\, ds = \frac{2}{3}.$$

2. Reši

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 1,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\\
u(x,0) &= x^2,\ x \in \mathbb{R},\\
u_t(x,0) &= 1,\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Rešitev: Upoštevajmo, da je $c = 1$, $\Phi(x,t) = 1$, $f(x) = x^2$ in $g(x) = 1$. Potem je

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\\
&= \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\xi\\
&= \frac{x^2 + 2xt + t^2 + x^2 - 2xt + t^2}{2} + \frac{x+t-x+t}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (x + t - \tau - x + t - \tau)\,d\tau\\
&= x^2 + t^2 + t + \left(t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_0^t\\
&= x^2 + t^2 + t + t^2 - \frac{t^2}{2} = x^2 + \frac{3t^2}{2} + t.
\end{aligned}
$$

3. Reši

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= 6t,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\\
u(x,0) &= x,\ x \in \mathbb{R},\\
u_t(x,0) &= 0,\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Rešitev: Upoštevajmo, da je $c = 2$, $\Phi(x,t) = 6t$, $f(x) = x$ in $g(x) = 0$. Potem je

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\\
&= \frac{x+2t+x-2t}{2} + \frac{6}{4}\int\limits_0^t \tau d\tau \int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} d\xi\\
&= x + \frac{3}{2}\int\limits_0^t \tau(x + 2t - 2\tau - x + 2t - 2\tau)d\tau\\
&= x + 6\int\limits_0^t \tau(t-\tau)d\tau\\
&= x + 6\left(\frac{t\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right)\Big|_0^t\\
&= x + t^3.
\end{aligned}
$$

4. Reši

$$u_{tt} - u_{xx} = xt,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u_t(x,0) = e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Rešitev: Upoštevajmo, da je $c = 1$, $\Phi(x,t) = xt$, $f(x) = 0$ in $g(x) = e^x$. Potem je

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \tau d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi d\xi \\
&= \frac{1}{2}e^s\Big|_{x-t}^{x+t} + \frac{1}{2}\int_0^t \tau\left(\frac{\xi^2}{2}\right)\Big|_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} d\tau \\
&= \frac{e^{x+t}-e^{x-t}}{2} + \frac{1}{4}\int_0^t \tau\big(x^2 + 2x(t-\tau) + (t-\tau)^2 - x^2 + 2x(t-\tau) - (t-\tau)^2\big)d\tau \\
&= \frac{e^{x+t}-e^{x-t}}{2} + x\left(\frac{t\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right)\Big|_0^t \\
&= \frac{e^{x+t}-e^{x-t}}{2} + \frac{xt^3}{6}.
\end{aligned}$$

1.5.5 Toplotna enačba na končnem intervalu

- **Toplotna enačba na končnem intervalu**

$$u_t - ku_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \geq 0, \quad \text{(Dirichletovi robni pogoji)}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq L, \quad \text{(začetni pogoji)}$$

ima rešitev oblike

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

kjer so B_n Fourierovi koeficienti razvoja f po sinusih na $[0,L]$.

1. Reši

$$u_t - 4u_{xx} = 0,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = \sin x + 2\sin 5x,\ 0 \leq x \leq \pi.$$

Rešitev: Upoštevajmo, da je $k = 4$ in $L = \pi$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) e^{-4n^2 t}.$$

Pri $t = 0$ dobimo

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = \sin x + 2\sin 5x.$$

Torej je $B_1 = 1$, $B_5 = 2$ in $B_n = 0$ za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,5\}$. Potem je

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) e^{-4n^2 t} = e^{-4t}\sin x + 2e^{-100t}\sin 5x.$$

2. Reši

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0,\ 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(2,t) &= 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) &= \frac{1}{3}\sin(\pi x). \end{aligned}$$

Rešitev: Upoštevajmo, da je $k = 1$ in $L = 2$. Ker je $f(x) = \frac{1}{3}\sin(\pi x)$, je edini neničelni koeficient $B_2 = \frac{1}{3}$. Potem je

$$u(x,t) = \frac{1}{3}\sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

3. Reši

$$\begin{aligned} u_t - 3u_{xx} &= 0,\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev: Upoštevajmo, da je $k = 3$, $L = \pi$ in da so koeficienti razvoja funkcije $f(x) = 1$ po sinusih na intervalu $[0,\pi]$ enaki

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\sin(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & ;\text{n je sod} \\ \frac{4}{n\pi} & ;\text{n je lih} \end{cases}.$$

Potem je

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin\big((2n-1)x\big) e^{-3(2n-1)^2 t}.$$

1.5.6 Valovna enačba na končnem intervalu - nihanje končne strune

- Neumannovi robni pogoji

Cauchyjev problem nihanja končne strune

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0,\ t \geq 0, \quad \text{(Neumannovi robni pogoji)} \\ u(x,0) &= f(x),\ 0 \leq x \leq L, \quad \text{(začetna oblika)} \\ u_t(x,0) &= g(x),\ 0 \leq x \leq L, \quad \text{(začetna hitrost)} \end{aligned}$$

ima rešitev oblike

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi c t}{L} + B_n \sin\frac{n\pi c t}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{11}$$

Potrebno je določiti koeficiente A_n in B_n. Pri $t = 0$ dobimo

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

zato so A_n Fourierovi koeficiente razvoja funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, L)$ po kosinusih. Ko (11) odvajamo in vstavimo $t = 0$, dobimo

$$u_t|_{t=0} = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c B_n}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = g(x),$$

zato so $\frac{n\pi c B_n}{L}$ Fourierovi koeficienti razvoja funkcije $g(x)$ na intervalu $(0, L)$ po kosinusih.

Če je $g(x) = 0$, je $B_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

- Dirichletovi robni pogoji

  Cauchyjev problem nihanja končne strune

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \qquad \text{(Dirichletovi robni pogoji)} \\ u(x,0) &= f(x),\ 0 \le x \le L, \qquad \text{(začetna oblika)} \\ u_t(x,0) &= g(x),\ 0 \le x \le L, \qquad \text{(začetna hitrost)} \end{aligned}$$

ima rešitev oblike

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{12}$$

Treba je določiti koeficiente A_n in B_n. Pri $t = 0$ imamo

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

zato so A_n Fourierovi koeficiente razvoja funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, L)$ po sinusih. Ko (12) odvajamo in vstavimo $t = 0$, dobimo:

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c B_n}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x),$$

zato so $\frac{n\pi c B_n}{L}$ Fourierovi koeficienti razvoja funkcije $g(x)$ na intervalu $(0, L)$ po sinusih.

Če je $g(x) = 0$, je $B_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

1. Reši Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0,\ t \ge 0, \\ u(x,0) &= 2\sin^2(2\pi x),\ 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) &= 0,\ 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$

Rešitev: Prepoznamo Neumannove robne pogoje. Iz enačbe razberemo, da je $c = 1$ in $L = 1$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)\big) \cos(n\pi x).$$

Če v enačbo vstavimo $t = 0$, izenačimo z začetnim pogojem in upoštevamo, da je $2\sin^2(2\pi x) = 1 - \cos(4\pi x)$, dobimo

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) = 1 - \cos(4\pi x).$$

Torej so od 0 različni samo koeficienti $A_0 = 2$ in $A_4 = -1$. Ker je $g(x) = 0$, so vsi B_n enaki 0. Rešitev valovne enačbe je enaka

$$u(x,t) = 1 - \cos(4\pi t)\cos(4\pi x).$$

2. Reši Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - 36u_{xx} &= 0,\ 0 < x < 3,\ t > 0,\\ u_x(0,t) = u_x(3,t) &= 0,\ t \geq 0,\\ u(x,0) &= 5\cos\frac{4\pi x}{3},\ 0 \leq x \leq 3,\\ u_t(x,0) &= \pi\cos\frac{\pi x}{3} + 8\cos(2\pi x),\ 0 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Rešitev: Prepoznamo Neumannove robne pogoje. Iz enačbe razberemo, da je $c = 6$ in $L = 3$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos(2n\pi t) + B_n \sin(2n\pi t)\big) \cos\frac{n\pi x}{3}.$$

Če v enačbo vstavimo $t = 0$ in izenačimo z začetnim pogojem, dobimo

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{3} = 5\cos\frac{4\pi x}{3}.$$

Torej je od 0 različen samo koeficient $A_4 = 5$. Če $u(x,t)$ parcialno odvajamo po t, dobimo

$$u_t(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(-2n\pi A_n \sin(2n\pi t) + 2n\pi B_n \cos(2n\pi t)\big) \cos\frac{n\pi x}{3}.$$

Vstavimo $t = 0$ in dobimo

$$u_t(x,0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi B_n \cos\frac{n\pi x}{3} = \pi\cos\frac{\pi x}{3} + 8\cos(2\pi x).$$

Torej sta neničelna samo koeficienta $B_1 = \frac{1}{2}$ in $B_6 = \frac{2}{3\pi}$. Rešitev valovne enačbe je enaka

$$u(x,t) = 5\cos(8\pi t)\cos\frac{4\pi x}{3} + \frac{1}{2}\sin(2\pi t)\cos\frac{\pi x}{3} + \frac{2}{3\pi}\sin(12\pi t)\cos(2\pi x).$$

3. Reši Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0,\ 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) &= 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= 3\cos(\pi x) + 4\cos^2(4\pi x),\ 0 \leq x \leq 2, \\ u_t(x,0) &= 5,\ 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Rešitev: Prepoznamo Neumannove robne pogoje. Iz enačbe razberemo, da je $c = 2$ in $L = 2$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)\big) \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

Če v enačbo vstavimo $t = 0$ in izenačimo z začetnim pogojem ter upoštevamo, da je $\cos(4\pi x) = \frac{1+\cos(8\pi x)}{2}$, dobimo

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{2} = 3\cos(\pi x) + 2 + 2\cos(8\pi t).$$

Torej so od 0 različni samo koeficienti $A_0 = 4$, $A_2 = 3$ in $A_{16} = 2$. Če $u(x,t)$ parcialno odvajamo po t, dobimo

$$u_t(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(- n\pi A_n \sin(\pi n t) + n\pi B_n \cos(\pi n t)\big) \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

Vstavimo $t = 0$ in dobimo

$$u_t(x,0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \cos \frac{n\pi x}{2} = 5.$$

Torej je neničelen samo koeficient $B_0 = 10$. Rešitev valovne enačbe je enaka

$$u(x,t) = 2 + 5t + 3\cos(2\pi t)\cos(\pi x) + 2\cos(16\pi t)\cos(8\pi x).$$

4. Reši Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0,\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) &= 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= 3\cos x,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x,0) &= 1 - \cos 4x,\ 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Rešitev: Prepoznamo Neumannove robne pogoje. Iz enačbe razberemo, da je $c = 2$ in $L = \pi$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos(2nt) + B_n \sin(2nt)\big) \cos(nx).$$

Če v enačbo vstavimo $t = 0$, dobimo

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) = 3\cos x.$$

Torej je od 0 različen samo koeficient $A_1 = 3$. Če $u(x,t)$ parcialno odvajamo po t, dobimo

$$u_t(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(-2nA_n \sin(2nt) + 2nB_n \cos(2nt)\big) \cos(nx).$$

Vstavimo $t = 0$ in dobimo

$$u_t(x,0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \cos(nx) = 1 - \cos 4x.$$

Torej sta neničelna samo koeficienta $B_0 = 2$ in $B_4 = -\frac{1}{8}$. Rešitev valovne enačbe je enaka

$$u(x,t) = t + 3\cos 2t \cos x - \frac{1}{8} \sin 8t \cos 4x.$$

5. Reši Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0, \\ u(0,t) = u(2,t) &= 0, \\ u(x,0) &= \frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{2}, \\ u_t(x,0) &= \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Rešitev: Prepoznamo Dirichletove robne pogoje. Iz enačbe razberemo, da je $c = 3$ in $L = 2$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{3n\pi t}{2} + B_n \sin\frac{3n\pi t}{2} \right) \sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Potrebno je določiti koeficiente A_n in B_n. Pri $t = 0$ imamo

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{2}.$$

Torej je od 0 različen samo koeficient $A_3 = \frac{1}{4}$. Če $u(x,t)$ parcialno odvajamo po t, dobimo

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3\pi n}{2} A_n \sin\frac{3\pi nt}{2} + \frac{3\pi n}{2} B_n \cos\frac{3\pi nt}{2} \right) \sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Vstavimo $t = 0$ in dobimo

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\pi n}{2} B_n \sin\frac{n\pi x}{2} = \sin(\pi x).$$

Torej je od 0 različen samo koeficient $B_2 = \frac{1}{3\pi}$. Rešitev valovne enačbe je enaka

$$u(x,t) = A_3 \cos\frac{9\pi t}{2} \sin\frac{3\pi x}{2} + B_2 \sin(3\pi t)\sin(\pi x) = \frac{1}{4}\cos\frac{9\pi t}{2}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{3\pi}\sin(3\pi t)\sin(\pi x).$$

6. Reši Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \\ u(0,t) = u(6,t) &= 0, \\ u(x,0) &= \frac{1}{5}\sin\frac{\pi x}{3} + 4\sin 3\pi x, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev: Prepoznamo Dirichletove robne pogoje. Iz enačbe razberemo, da je $c = 1$ in $L = 6$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n t}{6} + B_n \sin \frac{\pi n t}{6} \right) \sin \frac{n\pi x}{6}.$$

Potrebno je določiti koeficiente A_n in B_n. Pri $t = 0$ imamo

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{6} = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi x}{3} + 4 \sin 3\pi x.$$

Torej sta neničelna samo koeficienta $A_2 = \frac{1}{5}$ in $A_{18} = 4$. Ker je $g(x) = 0$, so vsi $B_n = 0$. Rešitev valovne enačbe je torej enaka

$$u(x,t) = A_2 \cos \frac{\pi t}{3} \sin \frac{\pi x}{3} + A_{18} \cos(3\pi t) \sin(3\pi x) = \frac{1}{5} \cos \frac{\pi t}{3} \sin \frac{\pi x}{3} + 4 \cos(3\pi t) \sin(3\pi x).$$

7. Reši Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, \\ u(x,0) &= \sin^3 x, \\ u_t(x,0) &= \sin 2x. \end{aligned}$$

Rešitev: Prepoznamo Dirichletove robne pogoje. Iz enačbe razberemo, da je $c = 1$ in $L = \pi$. Torej bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) \big) \sin(nx).$$

Potrebno je določiti koeficiente A_n in B_n. Pri $t = 0$ imamo

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

Torej sta neničelna samo koeficienta $A_1 = \frac{3}{4}$ in $A_3 = -\frac{1}{4}$. Če $u(x,t)$ parcialno odvajamo po t, dobimo

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(- nA_n \sin(nt) + nB_n \cos(nt) \big) \sin(nx).$$

Vstavimo $t = 0$ in dobimo

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx) = \sin 2x.$$

Torej je od 0 različen samo koeficient $B_2 = \frac{1}{2}$. Rešitev valovne enačbe je torej

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_1 \cos t \sin x + A_3 \cos 3t \sin 3x + B_2 \sin 2t \sin 2x \\ &= \frac{3}{4} \cos t \sin x - \frac{1}{4} \cos 3t \sin 3x + \frac{1}{2} \sin 2t \sin 2x. \end{aligned}$$

2 Grafi

2.1 Definicije

- Graf je urejen par $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, kjer je
  - $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{G})$ neprazna množica **vozlišč** (**točk**) grafa G,
  - $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{G})$ množica **povezav** grafa G, ki jih zapišemo kot par vozlišč: $\mathbf{e} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \mathbf{uv}$.
- Če je $uv \in E(G)$, rečemo, da sta u in v **sosednji točki**: $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$.
- Povezavo $\mathbf{uu} \in \mathbf{E}$ imenujemo **zanka**.
- **Enostaven graf** je graf brez zank in večkratnih povezav med dvema točkama.
- Pri **usmerjenem grafu** so povezave urejeni pari $\mathbf{e} = (\mathbf{uv}) \neq (\mathbf{vu}) = -\mathbf{e}$.
- **Stopnja točke** $v \in V(G)$ je število povezav, ki imajo v za krajišče: $\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \mathbf{deg}(\mathbf{v})$.
- Točka stopnje 0 je **izolirana točka**.
- Graf je d-**regularen**, če so vsa vozlišča v grafu G stopnje d.
- **Polni graf** je graf, v katerem je vsak par različnih točk povezan z natanko eno povezavo.
- **Prazni graf** je graf brez povezav.
- Graf je **dvodelen**, če lahko njegove točke razvrstimo v dva razreda, tako da točke znotraj istega razreda nimajo nobene medsebojne povezave. **Polni dvodelni graf** je dvodelni graf, če sta poljubni dve točki iz različnih razredov povezani.
- Grafa, ki se razlikujeta le po označbah točk, imenujemo **izomorfna**.
  Dva grafa G_1 in G_2 sta **izomorfna**, če obstaja bijektivna preslikava $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$, za katero velja:
  $$uv \in E(G_1) \equiv \varphi(u)\varphi(v) \in E(G_2).$$
  V tem primeru imenujemo φ **izomorfizem grafov** in označimo $G_1 \cong G_2$.
- Graf H je **podgraf** grafa G, če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(H)$: $H \subseteq G$.
- $H \subseteq G$ je **vpet podgraf** G, če je $V(H) = V(G)$.
- $H \subseteq G$ je **induciran podgraf** G, če za vsako povezavo $uv \in E(G)$ velja: Če sta $u, v \in V(H)$, potem je $uv \in E(H)$.
- Naj bo G enostaven graf z n točkami : $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in povezavami $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$
  - **Matrika sosednosti** $A(G) = A$ je $n \times n$ matrika z elementi $A_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad v_i \sim v_j \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$.
  - **Incidenčna matrika** $I(G) = I$ je $n \times m$ matrika z elementi $I_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad v_i \text{ je krajišče } e_j \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$.
- **Sprehod** S v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje paroma sosednjih točk.

- **Pot** je sprehod, kjer so vse točke različne.

$$S = v_0 v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k = v_0 - v_k, \text{ kjer } v_i v_{i+1} \in E, 0 \leq i \leq k-1.$$

  Dolžina sprehoda S: $|S| = k$.

- **Enostaven sprehod** je sprehod, kjer se iste povezave ne uporabi večkrat.

- **Obhod** je sprehod, kjer se začetna in končna točka ujemata, $v_0 = v_k$.

- **Cikel** je enostaven sprehod, kjer je $k \geq 3$ in $v_0 = v_k$.

- Graf je **povezan**, če med poljubnima $u, v \in V(G)$ obstaja $u - v$ sprehod. Razdalja med $u, v \in V(G)$ je dolžina najkrajše poti med u in v v G in jo označimo $dist(u, v)$. Povezava je **prerezna (most)**, če po njeni odstranitvi graf ni več povezan.

- Povzan graf brez ciklov imenujemo **drevo**.

- **Vpeto drevo** v grafu G je vpet podgraf, ki je drevo.

- Povezan graf je **Eulerjev**, če v njem obstaja enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave grafa. Tak obhod imenujemo **Eulerjev obhod**.

- Povezan graf je **Hamiltonov**, če v njem obstaja cikel, ki vsebuje vse točke grafa. Tak cikel imenujemo **Hamiltonov cikel**.

- **Utežen graf** ali **omrežje** je graf, kjer vsaki povezavi $e_k \in E$ oz. $(v_i, v_j) \in E$ priredimo pozitivno število, ki jo imenujemo utež in jo označimo z w_k oz. w_{ij}.

- **Dolžina** $u - v$ **poti v uteženem grafu** je vsota uteži na povezavah poti.

- **Najkrajša** $u - v$ **pot v uteženem grafu** je takšna pot, da je vsota uteži najmanjša.

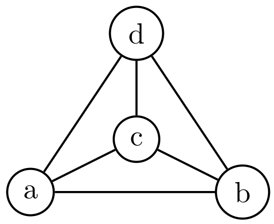
- **Najmanjše vpeto drevo** je vpeto drevo z najmanjšo vsoto uteži.

- **Ravninski graf** je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini tako, da noben par povezav, razen morda skupnega krajišča, nima skupne točke. Vsaka ravninska risba grafa razdeli ravnino na območja, ki jih imenujemo **lica**. **Stopnja lica** je število povezav na enostavnem sprehodu po robu lica.

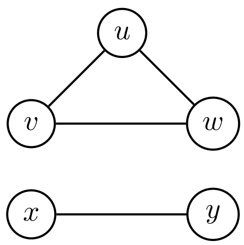
2.2 Osnovno o grafih

1. Zapiši množico točk(vozlišč) $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ ter določi stopnjo točk

   (a)

   (b)

   Rešitev:

   (a) $V(G) = \{a, b, c, d\}$, $E(G) = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$, $deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) = 3$ (3-regularen graf, poln graf)

   (b) $V(G) = \{x, y, u, v, w\}$, $E(G) = \{uv, uw, vw, xy\}$, $deg(u) = deg(v) = deg(w) = 2$, $deg(x) = deg(y) = 1$ (lista)

2. Za grafe iz naloge 1:

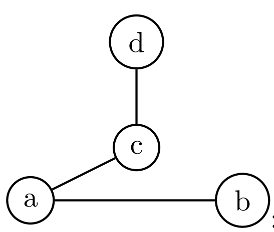
   (a) nariši kak vpet podgraf, ki ima 3 povezave. Koliko je takih vpetih podgrafov?

   (b) nariši kak induciran podgraf, ki ima 3 vozlišča. Koliko je takih induciranih podgrafov?

   Rešitev:

   (a)

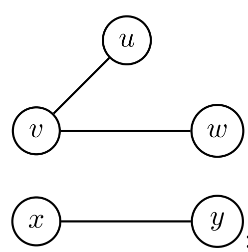
   za graf iz 1(a):

   ;

   20 vpetih podgrafov

   za graf iz 1(b):

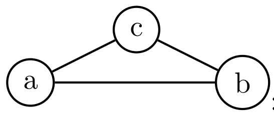
   

   ;

   4 vpeti podgrafi

   (b)

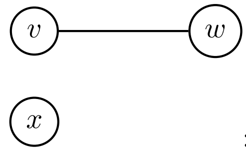
za graf iz 1(a):



;

4 inducirani podgrafi

za graf iz 1(b):

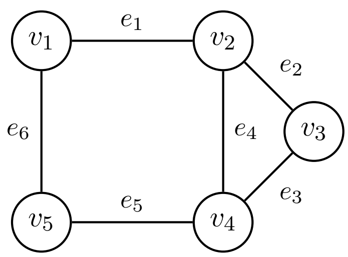


;

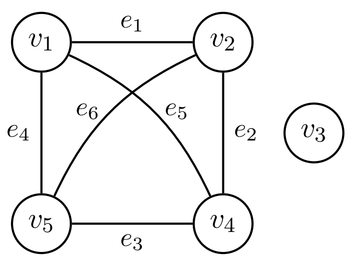
10 induciranih podgrafov

3. Poišči matrike sosednosti A in incidenčne matrike I.

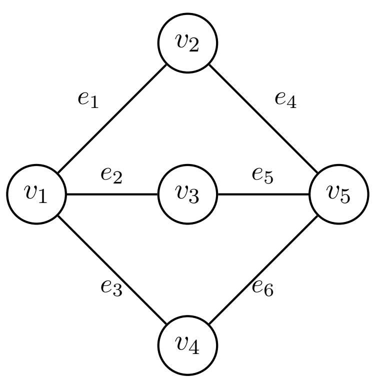
(a)



(b)



(c)



Rešitev:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

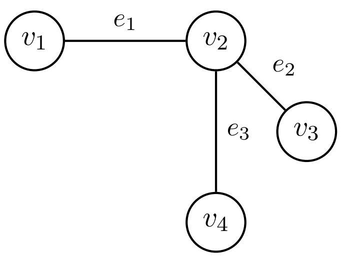
(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Dan je graf



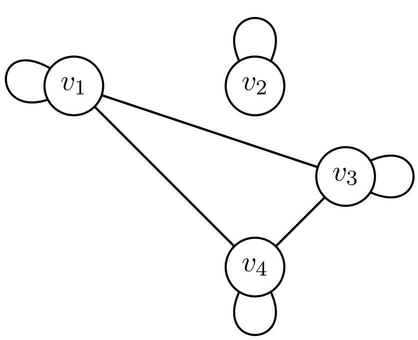
Poišči matriko sosednosti A in nariši tak graf, da je njegova matrika sosednosti enaka
(a) A^2, (b) A^3.
Kaj pomenijo neničelni elementi A^2 in A^3 za originalen graf?

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

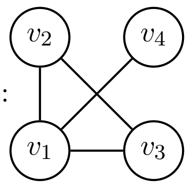
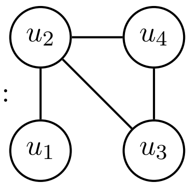
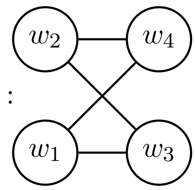
(a)



(b) začetni graf.

Neničelni elementi matrike A^2: $(A^2)_{ij} = m$ pomeni, da v začetnem grafu obstaja m različnih sprehodov med i in j dolžine 2. $(A^3)_{ij} = m$ pomeni, da v začetnem grafu obstaja m različnih sprehodov med i in j dolžine 3. Na primer $(A^2)_{22} = 3$ pomeni, da v začetnem grafu obstajajo 3 sprehodi med v_2 in v_2 dolžine 2.

5. Podani so grafi:

G_1 :  G_2 :  G_3 : 

   (a) Zapiši nijhove matrike sosednosti $A(G_1)$, $A(G_2)$ in $A(G_3)$.
   (b) Pokaži, da sta G_1 in G_2 izomorfna grafa.
   (c) Pokaži, da G_1 in G_3 nista izomorfna grafa.

Rešitev:

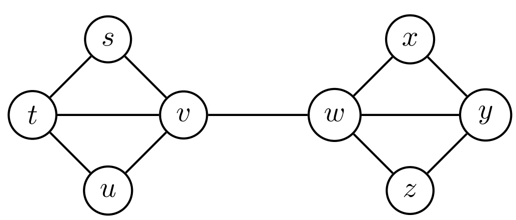
(a)

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ A(G_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) $\varphi\colon v_1 \mapsto u_2, v_2 \mapsto u_4, v_3 \mapsto u_3, v_4 \mapsto u_1$ je izomorfizem med G_1 in G_2.

(c) Graf G_1 ima točko stopnje 3 (točka v_1), graf G_3 pa take točke nima.

6. Poišči vse poti med točko s in točko z v grafu. Poišči primer obhoda, ki je tudi cikel, in primer obhoda, ki ni cikel.



Rešitev: pot dolžine 3: $svwz$; poti dolžine 4: $stvwz$, $svwyz$; poti dolžine 5: $stuvwz$, $stvwyz$ in $svwxyz$; poti dolžine 6: $stuvwyz$, $stvwxyz$; pot dolžine 7: $stuvwxyz$; obhod, ki je tudi cikel: $svuts$; obhod, ki ni cikel: $svtuvs$.

2.3 Eulerjevi in Hamiltonovi grafi

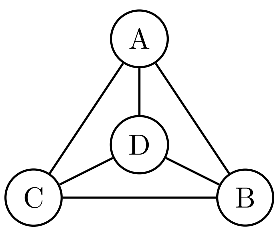
- Izrek: Povezan graf je Eulerjev natanko takrat, ko so vse njegove točke sodih stopenj.

- **Fleuryjev algoritem** za konstrukcijo Eulerjevega obhoda:
  1. Izberi začetno točko.
  2. Prečkaj povezavo, pri čemer izberi prerezno povezavo le, če ni navoljo nobene druge.
  3. Odstrani prehojeno povezavo in vse izolirane točke.
  4. Ponavljaj, dokler so v grafu še povezave, pri čemer moramo končati v začetni točki.

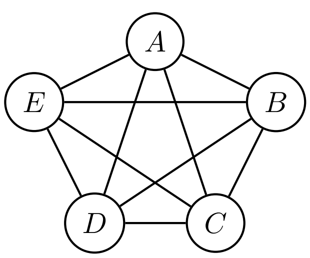
- Diracov zadosten pogoj: Naj bo G graf z $|V(G)| = n \geq 3$. Če za vsako točko $v \in V(G)$ velja, da je $deg(v) \geq \frac{n}{2}$, je G Hamiltonov graf.

1. Kateri od naslednjih grafov so Eulerjevi ali Hamiltonovi in napiši Eulerjev obhod ali Hamiltonov cikel, kjer je mogoče.

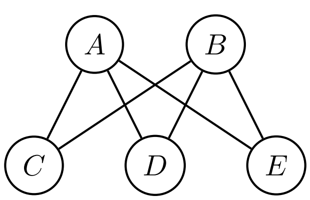
   (a)



   (b)



   (c)

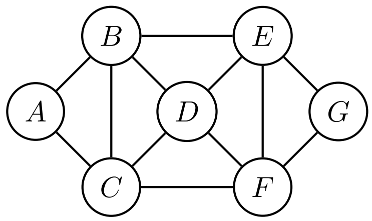


   Rešitev:

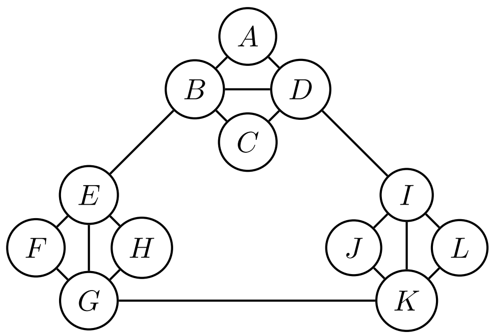
   (a) ni Eulerjev (stopnje niso sode); Hamiltonov cikel: $ABCDA$;
   (b) Eulerjev obhod: $ABCDEACEBDA$; Hamiltonov cikel: $ABCDEA$;
   (c) ni Eulerjev; ni Hamiltonov;

2. Z uporabo Fleuryjevega algoritma poišči Eulerjev obhod z začetkom ABC.

(a)



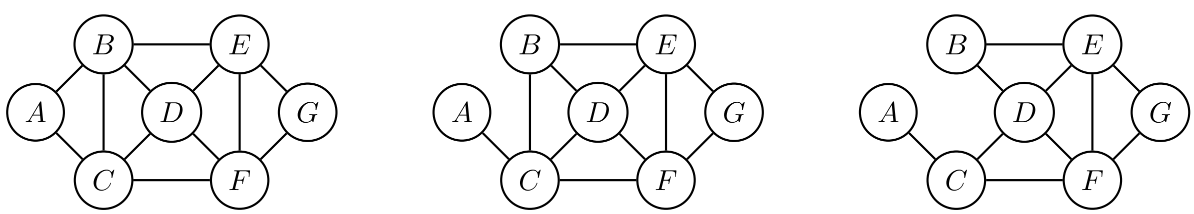
(b)



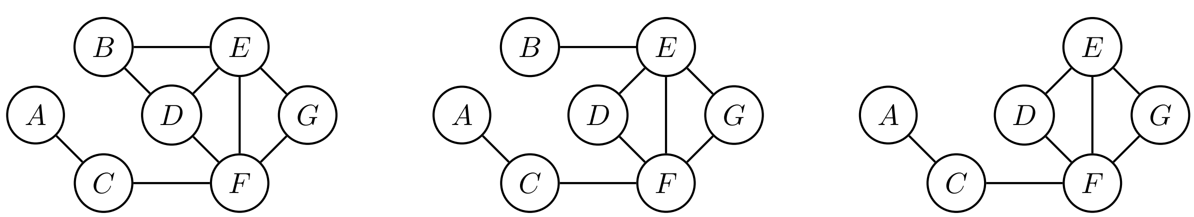
Rešitev:

(a) primer Eulerjevega obhoda: $ABCDEFDEGFCA$

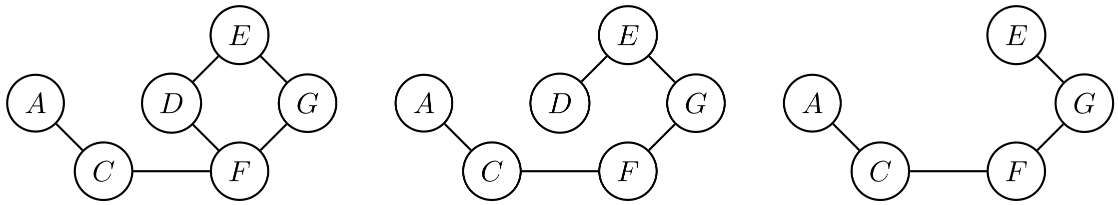
Začnimo s točko A. Izberimo povezavi AB in BC.



Povezave CA ne smemo dodati, ker je most. Izbiramo lahko med povezavo CD in CF. Izberimo povezave CD, DB in BE. Odstranimo B, ker je izolirana točka.

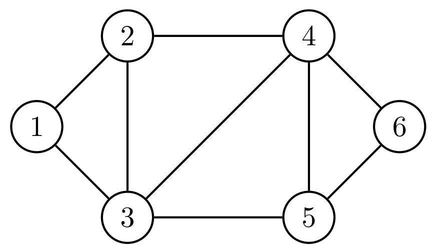


Dodajmo še povezavo EF. Povezave FC ne smemo dodati, ker je most in imamo na razpolago še povezave FD, FE In FD. Če izberemo FD, potem dodamo še povezave DE, EG, GF, FC in CA. Na vsakem koraku odstranimo izolirane točke. Celoten Eulerjev cikel je $ABCDEFDEGFCA$.



(b) primer Eulerjevega obhoda: $ABCDBEFGEHGKIJKLIDA$

3. Dan je graf G



Utemelji, zakaj graf G ni Eulerjev. Grafu G dodaj najmanjše število povezav, da bo novi graf G' Eulerjev. Za novi graf zapiši Eulerjev obhod.

Rešitev: Graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vse njegove točke sodih stopenj. Ker je $deg(1) = deg(6) = 2$, $deg(2) = deg(5) = 3$ in $deg(3) = deg(5) = 4$, je dovolj, če dodamo povezavo med točkama 2 in 5. Eulerjevih obhodov je več. Ena od možnih rešitev je 12342564531.

2.4 Najkrajše poti

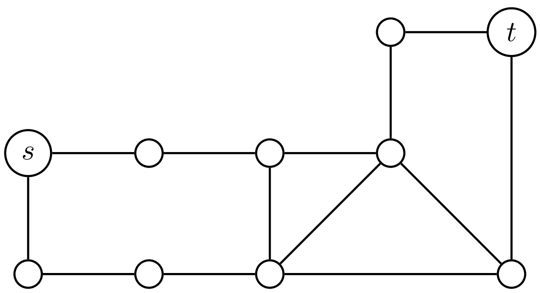
- **Algoritem za iskanje najkrajše poti** med točkama $s, t \in V$ v neuteženem povezanem grafu $G = (V, E)$:

  1. Točko s označi z 0.
  2. $i = 0$
  3. Poišči vse neoznačene sosede točke i in jih označi z $i + 1$ ter smerjo do točke i.
  4. Če je točka $t = k$ (v označena s k), prehodi pot po oznakah $s = k, k-1, \ldots, 1, 0 = t$. sicer povečaj i za 1 (i=i+1) in se vrni na korak 3.

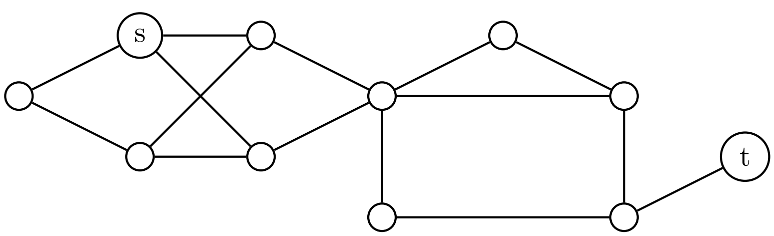
- Opomba: Rezultat algoritma je najkrajša pot med točkama $s, t \in V$, ki pa ni enolična, enolična je le minimalna razdalja.

1. Poišči najkrajšo pot $P : s \to t$

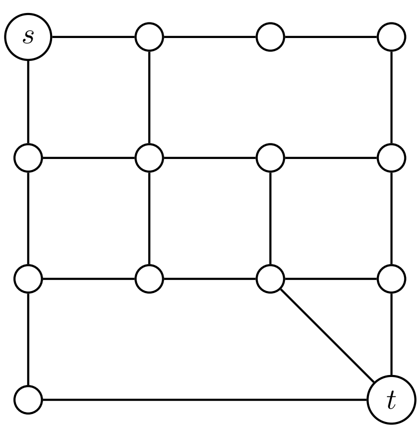
   (a)



   (b)

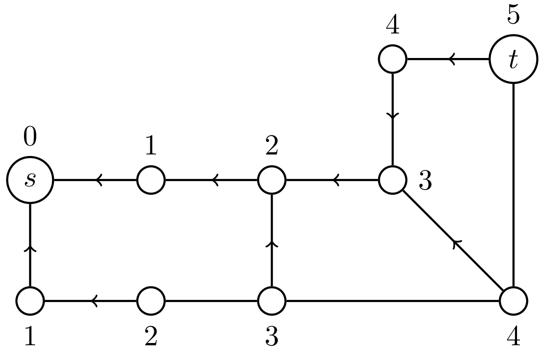


   (c)

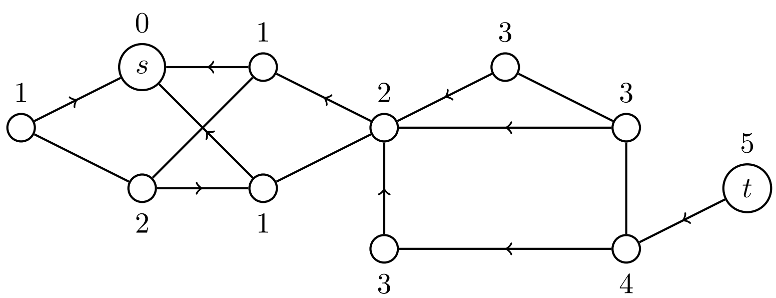


   Rešitev:

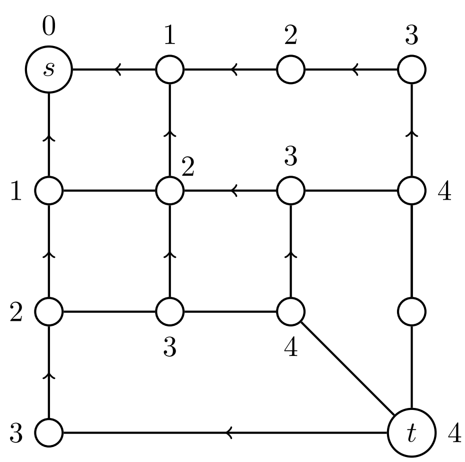
(a)



(b)



(c)



- **Dijkstrov algoritem** za iskanje najkrajše poti od dane točke s do vseh drugih točk v uteženem grafu $G = (V, E)$:

  Naj d_i označuje trenutno razdaljo do točke s (d_i je razdalja na i-tem koraku).

  Postavi $d_1(s) = 0$ in $d_1(v) = \infty$ za vse $v \neq s$.

  Ponavljaj

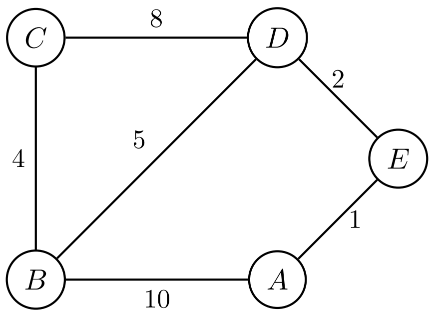
  1. Obišči neobiskano točko $\tilde{v}$ s trenutno najmanjšo razdaljo d_i.
  2. Preglej vse sosede v točke $\tilde{v}$ in izračunaj $\tilde{d}_i(v) = d_i(\tilde{v}) + w_{\tilde{v}v}$.

3. Če je dobljena razdalja $\tilde{d}_i(v) < d_i(v)$, potem $d_i(v) = \tilde{d}_i(v)$ in predhodnica za v postane $\tilde{v}$.
4. Točko $\tilde{v}$ označi kot obiskano.

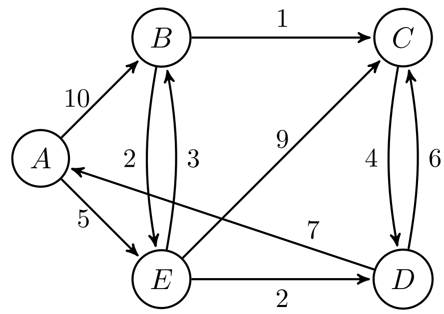
dokler niso vse točke grafa obiskane.

2. Poišči najkrajše poti od vozlišča A do vseh drugih vozlišč grafa z uporabo Dijkstrovega algoritma in nariši drevo najkrajših razdalj

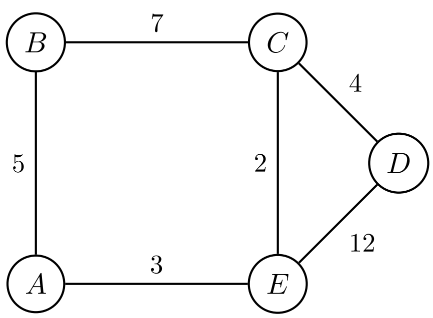
(a)



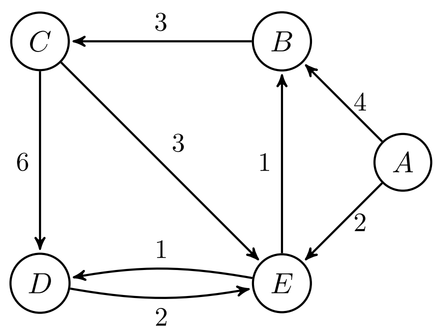
(c)



(b)



(d)



Rešitev:

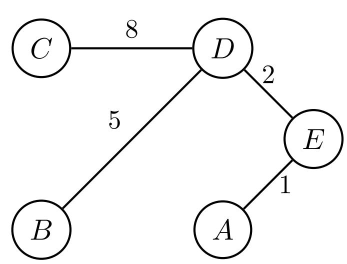
(a)

obisk	točka	dolžina poti	predhodnik
1.	A	$\boxed{0}$	
4.	B	$\cancel{\infty}$ $\cancel{10}$ $\boxed{8}$	$\cancel{A}$ D
5.	C	$\cancel{\infty}$ $\boxed{11}$	D
3.	D	$\cancel{\infty}$ $\boxed{3}$	E
2.	E	$\cancel{\infty}$ $\boxed{1}$	A

Najkrajše poti od točke A do vseh drugih točk:

pot	dolžina poti
$A \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} D \xrightarrow{5} B$	8
$A \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} D \xrightarrow{8} C$	11
$A \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} D$	3
$A \xrightarrow{1} E$	1

Drevo najkrajših razdalj:



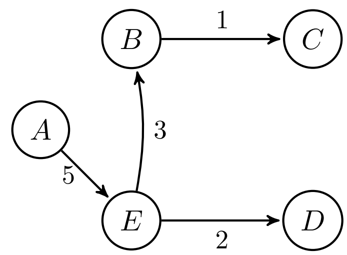
(c)

obisk	točka	dolžina poti	predhodnik
1.	A	$\boxed{0}$	
4.	B	$\cancel{\infty}$ $\cancel{10}$ $\boxed{8}$	$\cancel{A}$ E
5.	C	$\cancel{\infty}$ $\cancel{14}$ $\cancel{13}$ $\boxed{9}$	$\cancel{E}$ $\cancel{D}$ B
3.	D	$\cancel{\infty}$ $\boxed{7}$	E
2.	E	$\cancel{\infty}$ $\boxed{5}$	A

Najkrajše poti od točke A do vseh drugih točk:

pot	dolžina poti
$A \xrightarrow{5} E \xrightarrow{3} B$	8
$A \xrightarrow{5} E \xrightarrow{3} B \xrightarrow{1} C$	9
$A \xrightarrow{5} E \xrightarrow{2} C$	7
$A \xrightarrow{5} E$	5

Drevo najkrajših razdalj:

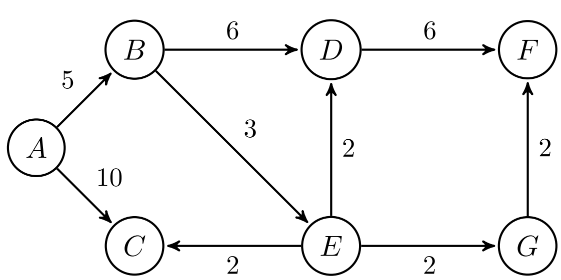


3. Kraji A, B, C, D, E, F in G so povezani z enosmerno železnico. Poišči najcenejše poti od kraja A do vseh drugih krajev, če so cene kart naslednje:

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	5	10	-	-	-	-
B	-	-	-	6	3	-	-
C	-	-	-	-	-	-	-
D	-	-	-	-	-	6	-
E	-	-	2	2	-	-	2
F	-	-	-	-	-	-	-
G	-	-	-	-	-	2	-

Nariši pripadajoč usmerjen graf in razloži vse korake algoritma, ki si jih uporabil.
Najmanj koliko povezav bi morali dodati, da bi bili vsi kraji dosegljivi med seboj? Skiciraj te povezave.

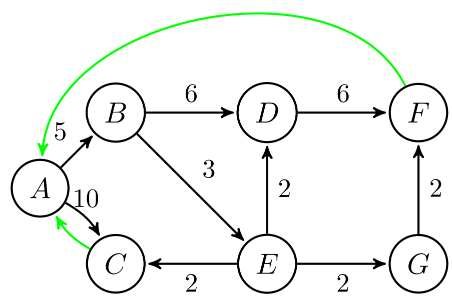
Rešitev:



obisk	točka	dolžina poti	predhodnik
1.	A	$\boxed{0}$	
2.	B	$\cancel{\infty}$ $\boxed{5}$	A
4.	C	$\cancel{\infty}$ $\boxed{10}$	A
5.	D	$\cancel{\infty}$ $\cancel{11}$ $\boxed{10}$	~~B~~ E
3.	E	$\cancel{\infty}$ $\boxed{8}$	B
7.	F	$\cancel{\infty}$ $\cancel{16}$ $\boxed{12}$	~~D~~ G
6.	G	$\cancel{\infty}$ $\boxed{10}$	E

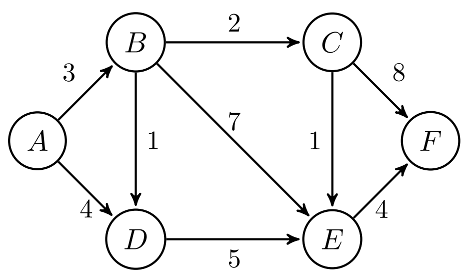
Najkrajše poti od kraja A do vseh drugih krajev (lahko je več enako dolgih poti):

pot	dolžina poti
$A \xrightarrow{5} B$	5
$A \xrightarrow{10} C$	10
$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{2} D$	10
$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} E$	8
$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{2} G \xrightarrow{2} F$	12
$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{2} G$	10



Dodati moramo vsaj še 2 povezavi, npr. $C \to A$ in $F \to A$.

4. Dan je graf G



(a) s pomočjo Dijkstrovega algoritma v grafu G poišči najkrajše poti od točke A do vseh drugih točk in jih zapiši. Nariši drevo najkrajših razdalj.

(b) Najmanj koliko povezav bi morali dodati, da bi bile vse točke dosegljive med seboj? Skiciraj te povezave.

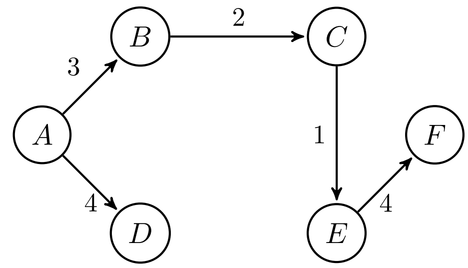
Rešitev:
(a)

obisk	točka	dolžina poti	predhodnik
1.	A	$\boxed{0}$	
2.	B	$\cancel{\infty}$ $\boxed{3}$	A
4.	C	$\cancel{\infty}$ $\boxed{5}$	B
3.	D	$\cancel{\infty}$ $\boxed{4}$	A
5.	E	$\cancel{\infty}$ $\cancel{10}$ $\cancel{9}$ $\boxed{6}$	~~B~~ ~~D~~ C
6.	F	$\cancel{\infty}$ $\cancel{13}$ $\boxed{10}$	~~C~~ E

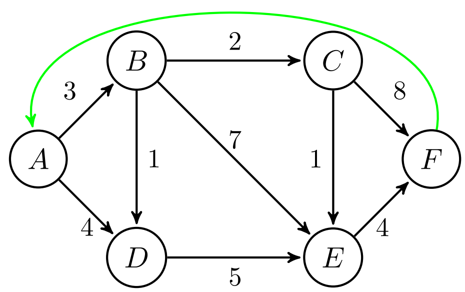
Najkrajše poti od kraja A do vseh drugih krajev (lahko je več enako dolgih poti):

pot	dolžina poti
$A \xrightarrow{3} B$	3
$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} C$	5
$A \xrightarrow{4} D$	4
$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{1} E$	6
$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{1} E \xrightarrow{4} F$	10

Drevo najkrajših razdalj:



(b) Dovolj je dodati povezavo $F \to A$.



- **min-plus** množenje:

$$\begin{aligned} D^{(0)} &= (w_{ij}) = W \ldots \text{utežena matrika sosednosti} \\ D^{(k)} &= \left(d_{ij}^{(k)}\right) \\ D^{(k)} &= D^{(k-1)} \odot D^{(k-1)} \\ d_{ij}^{(k)} &= \min_{m=1,\ldots n} \left\{ d_{im}^{(k-1)} + d_{mj}^{(k-1)} \right\} \end{aligned}$$

- **Floyd-Warshallov algoritem** za iskanje najkrajše poti med poljubnima točkama $u, v \in V$ v uteženem usmerjenem grafu $G = (V, E)$:

  Oštevilčimo točke $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ in vzemimo uteženo matriko sosednosti grafa G z elementi

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i = j \\ \text{utež na povezavi } ij & ; i \neq j, ij \in E, \\ \infty & ; i \neq j, ij \notin E. \end{cases}$$

  Označimo:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ij}^{(k)} &= \text{dolžina najkrajše poti od } i \text{ od } j \text{ z vmesnimi točkami v } \{1, 2, \ldots, n\} \\ &= \begin{cases} w_{ij} & ; \text{če } k = 0, \\ min \left\{ \tilde{d}_{ij}^{(k-1)}, \tilde{d}_{ik}^{(k-1)} + \tilde{d}_{kj}^{(k-1)} \right\} & ; \text{če } k \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

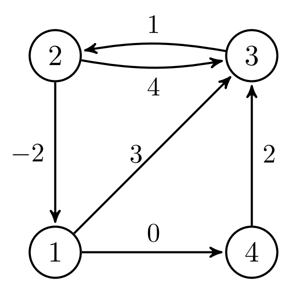
- Če nas zanimajo tudi dejanske najkrajše poti in ne samo razdalje, potem algoritem dopolnimo tako, da si zapisujemo tudi elemente matrike predhodnikov $\Pi^{(k)} = \pi_{ij}^{(k)}$ z vmesnimi točkami iz $\{1, 2, \dots, k\}$. Dobimo jo po rekurzivni formuli

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & ; \text{ če je } i = j \text{ ali } w_{ij} = \infty, \\ i & ; \text{ če je } i \neq j \text{ in } w_{ij} < \infty. \end{cases}$$

  oz. za $k \geq 1$:

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & ; \text{ če je } \tilde{d}_{ij}^{(k)} = \tilde{d}_{ij}^{(k-1)}, \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & ; \text{ sicer }. \end{cases}$$

5. Na spodnji skici je utežen usmerjen graf G.



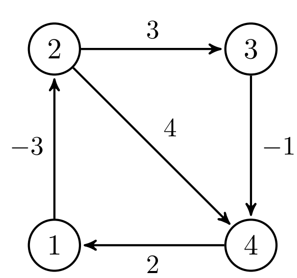
Z **min-plus** množenjem poišči najkrajše razdalje med poljubnima dvema vozliščema.

Rešitev:

$$W = D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(1)} = D^{(0)} \odot D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{(2)} = D^{(1)} \odot D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(3)} = D^{(2)} \odot D^{(2)} = D^{(2)}.$$

6. Na spodnji skici je utežen usmerjen graf G.



Z **min-plus** množenjem poišči najkrajše razdalje med poljubnima dvema vozliščema.

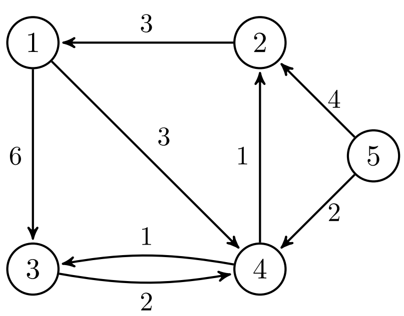
Rešitev:

$$W = D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 0 & -1 \\ 2 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(1)} = D^{(0)} \odot D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & \infty & 0 & -1 \\ 2 & -1 & \infty & 0 \end{bmatrix},$$

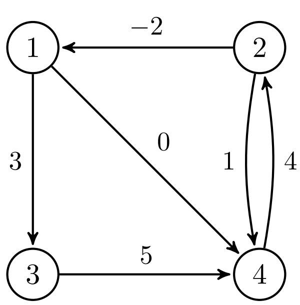
$$D^{(2)} = D^{(1)} \odot D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(3)} = D^{(2)} \odot D^{(2)} = D^{(2)}.$$

7. S pomočjo Floyd-Warshallovega algoritma poišči najkrajše poti med vsemi vozlišči v grafu. Najkrajše razdalje med vsemi vozlišči poišči še z min-plus matričnim množenjem.

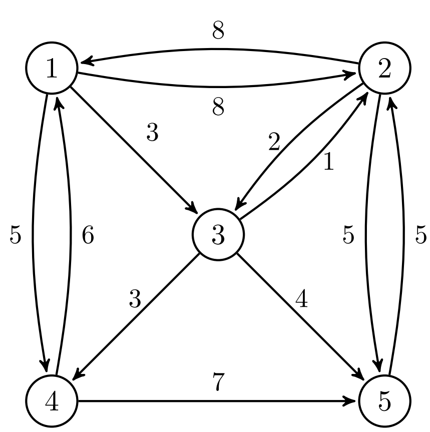
(a)



(b)



(c)



Rešitev:

(a)

$$\tilde{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 6 & 3 & \infty \\ 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 6 & 3 & \infty \\ 3 & 0 & \mathbf{9} & \mathbf{6} & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 6 & 3 & \infty \\ 3 & 0 & 9 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \mathbf{4} & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \mathbf{7} & 4 & \mathbf{13} & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \mathbf{2} & 4 & 4 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 5 & \mathbf{1} & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}^{(3)} = \tilde{D}^{(2)} \qquad \Pi^{(3)} = \Pi^{(2)}$$

$$\tilde{D}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 3 & \infty \\ 3 & 0 & \mathbf{7} & 6 & \infty \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & 0 & 2 & \infty \\ 4 & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{4} & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}^{(5)} = \tilde{D}^{(4)} \qquad \Pi^{(5)} = \Pi^{(4)}$$

$$D^{(0)} = \tilde{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 6 & 3 & \infty \\ 3 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(1)} = D^{(0)} \odot D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & \infty \\ 3 & 0 & 9 & 6 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 2 & \infty \\ 4 & 1 & 1 & 0 & \infty \\ 7 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{(2)} = D^{(2)} \odot D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & \infty \\ 3 & 0 & 7 & 6 & \infty \\ 6 & 3 & 0 & 2 & \infty \\ 4 & 1 & 1 & 0 & \infty \\ 6 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(3)} = D^{(2)}.$$

(b)

$$\tilde{D}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 7 & 9 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Pi^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(2)} = \tilde{D}^{(4)}.$$

(c)

$$\tilde{D}^{(5)} = \tilde{D}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 9 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 10 & 9 & 0 & 7 \\ 13 & 5 & 7 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Pi^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{(2)} = \tilde{D}^{(5)}.$$

2.5 Minimalna vpeta drevesa in ravninski grafi

- **Kruskalov algoritem** za iskanje najmanjšega vpetega drevesa:

  Uredi povezave po utežeh v naraščajočem vrstnem redu.

  $i = 1$, $T = \emptyset$

  Ponavljaj

  1. Če $T \cup \{e_i\}$ ne vsebuje cikla, potem $T = T \cup \{e_i\}$.
  2. $i = i + 1$

  dokler $|E(T)| < n - 1$.

  Vrni T.

- **Primov algoritem** za iskanje najmanjšega vpetega drevesa:

  Vzemi $v \in V(G)$. $V(T) = \{v\}$.

  Ponavljaj

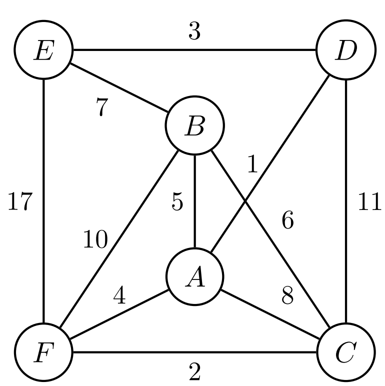
  1. Poišči $e \in E(G)$, ki povezuje neko točko iz $V(T)$ z najmanjšo utežjo.
  2. $T = T \cup \{e_i\}$

  dokler $V(T) = V$.
  Vrni T.

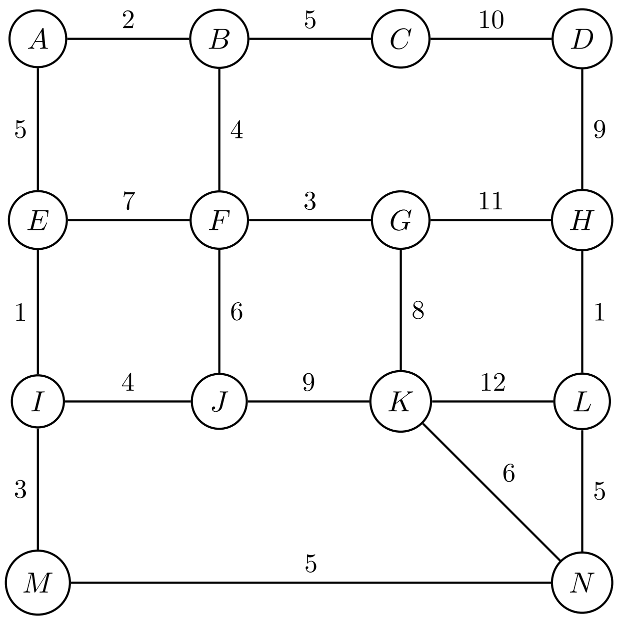
- **Eulerjeva formula:**
  Naj bo $G = (V, E)$ ravninski graf. Označimo z $n = |V(G)|$ število točk, z $m = |E(G)|$ število povezav v grafu in z f število lic ravninske risbe grafa. Potem velja $n - m + f = 2$.

1. Poišči najmanjše vpeto drevo grafa z uporabo Kruskalovega in z uporabo Primovega algoritma.

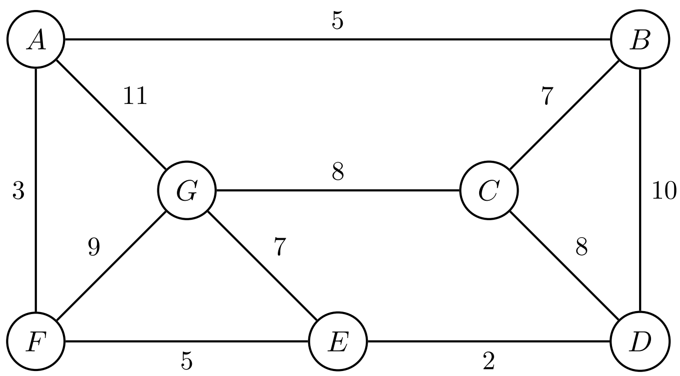
   (a)



(b)

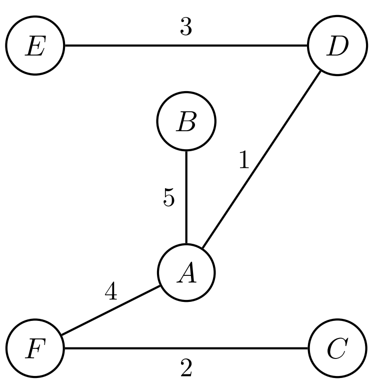


(c)



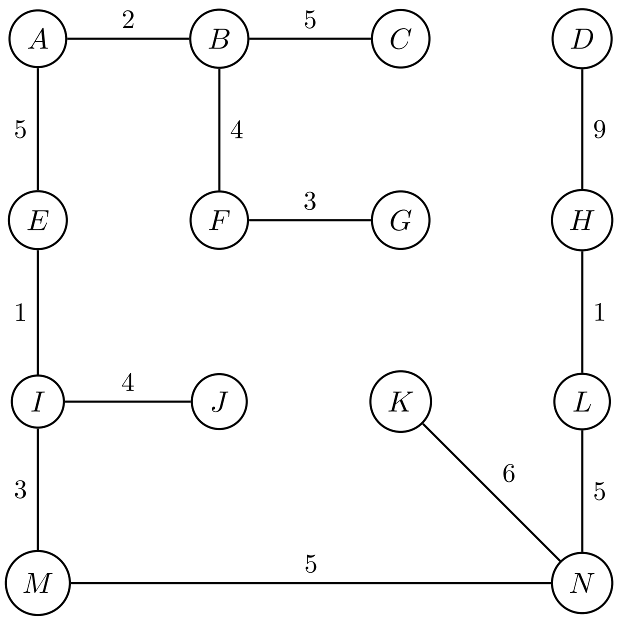
Rešitev:

(a)



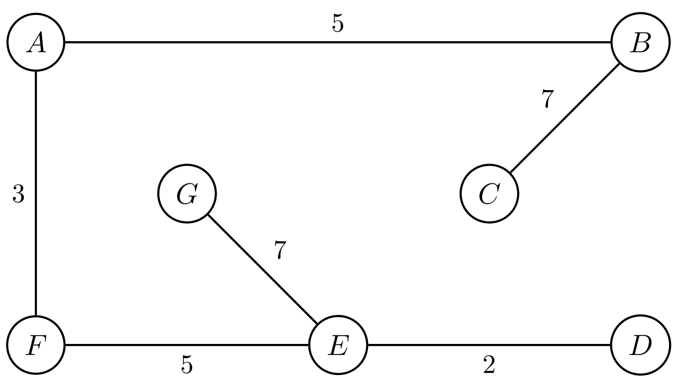
$w(G) = 15$

(b)



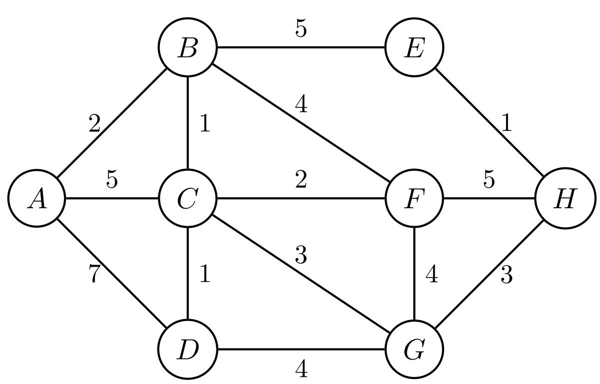
$w(G) = 53$

(c)



$w(G) = 29$

2. Dan je graf G



(a) S pomočjo Dijkstrovega algoritma v grafu G poišči najkrajšo pot od točke A do vseh drugih točk in jih zapiši.

(b) Nariši vsa minimalna vpeta drevesa grafa G.

(c) Ali je graf G Eulerjev? Odgovor utemelji.

(d) Ali je graf G Hamiltonov? Če je, napiši Hamiltonov cikel.

Rešitev:

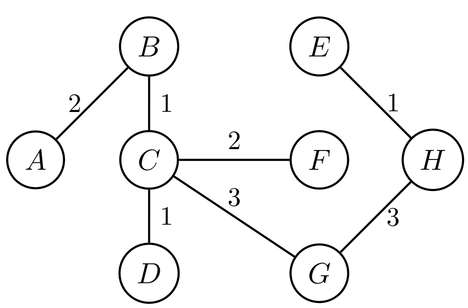
(a)

obisk	točka	dolžina poti	predhodnik
1.	A	$\boxed{0}$	
2.	B	$\cancel{\infty}$ $\boxed{2}$	A
3.	C	$\cancel{\infty}$ $\cancel{5}$ $\boxed{3}$	$\cancel{A}$ B
4.	D	$\cancel{\infty}$ $\cancel{7}$ $\boxed{4}$	$\cancel{A}$ C
7.	E	$\cancel{\infty}$ $\boxed{7}$	B
5.	F	$\cancel{\infty}$ $\cancel{6}$ $\boxed{5}$	$\cancel{B}$ C
6.	F	$\cancel{\infty}$ $\boxed{6}$	C
8.	G	$\cancel{\infty}$ $\cancel{10}$ $\cancel{9}$ $\boxed{8}$	$\cancel{F}$ $\cancel{G}$ E

Najkrajše poti od točke A do vseh drugih točk:

pot	dolžina poti
$A \xrightarrow{2} B$	2
$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} C$	3
$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{1} D$	4
$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{5} E$	7
$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} F$	5
$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{3} G$	6
$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{5} E \xrightarrow{1} H$	8

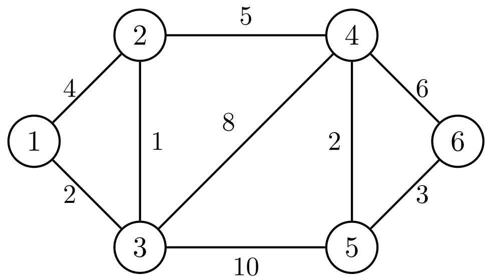
(b) Graf G ima samo eno minimalno vpeto drevo T, $w(T) = 13$.



(c) Graf G ni Eulerjev, ker ima točke lihe stopnje: $deg(A) = deg(D) = deg(H) = 3$ in $deg(C) = 5$.

(d) Graf G je Hamiltonov. Primer Hamiltonovega cikla $ACDGFHEBA$.

3. Dan je graf G



(a) S pomočjo Dijkstrovega algoritma v grafu G poiščite najkrajšo pot od točke 1 do točke 6 in jo zapišite.

(b) Narišite minimalno vpeto drevo grafa G.

(c) Utemeljite, zakaj graf G ni Eulerjev. Grafu G dodajte najmanjše število povezav, da bo novi graf G' Eulerjev. Za novi graf zapišite Eulerjev obhod.

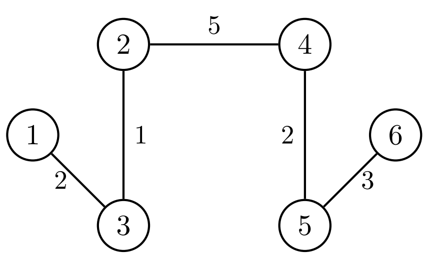
Rešitev:

(a)

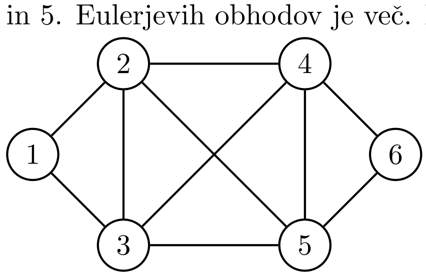
obisk	točka	dolžina poti	predhodnik
1.	1	$\boxed{0}$	
3.	2	$\cancel{\infty}$ $\cancel{4}$ $\boxed{3}$	$\cancel{1}$ 3
2.	3	$\cancel{\infty}$ $\boxed{2}$	1
4.	4	$\cancel{\infty}$ $\cancel{10}$ $\boxed{8}$	$\cancel{3}$ 2
5.	5	$\cancel{\infty}$ $\cancel{12}$ $\boxed{10}$	$\cancel{3}$ 4
6.	6	$\cancel{\infty}$ $\cancel{14}$ $\boxed{13}$	$\cancel{4}$ 5

Najkrajša pot $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$ ima dolžino $d(1,6) = 13$.

(b)



(c) Graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vse njegove točke sodih stopenj. Ker je $deg(1) = deg(6) = 2$, $deg(2) = deg(5) = 3$ in $deg(3) = deg(5) = 4$, je dovolj, če dodamo povezavo med točkama 2 in 5. Eulerjevih obhodov je več. Ena od možnih rešitev je 12342564531.



4. Za ravninske grafe iz naloge 1 preveri Eulerjevo enačbo.

2.6 Ford-Fulkersonov algoritem

- **Omrežje** je povezan usmerjen graf $G = (V, E)$, v katerem ima vsaka povezava $e = (i, j)$ predpisano **prepustnost** ali **kapaciteto** $c_e = c_{ij} > 0$, ter ima 2 posebni točki **izvir** s in **ponor** t. Predpostavimo, da vsako vozlišče v G leži na poti od s do t.

- **Pretok** v omrežju je preslikava $f : E \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto f_{ij}$, ki zadošča naslednjim pogojem

  (i) Za vse $(i, j) \in E$ velja **prepustnostni pogoj**
  $$0 \le f_{ij} \le c_{ij}.$$

  (ii) Za vse $i \in V \setminus \{s, t\}$ velja **ohranitveni pogoj (Kirchoffov zakon)**
  $$f^+(i) = f^-(i),$$
  kjer je $f^+(i) := \sum_{(j,i)\in E} f_{ji}$ **dotok v i** in $f^-(i) := \sum_{(i,k)\in E} f_{ik}$ **odtok iz i**.

- **Vrednost pretoka** f je $|f| := f^-(s)$

- Naj bo $S \subseteq V$, $s \in S$ in $t \notin S$, ter $T = V \setminus S$. **Prerez** (S,T) imenujemo družino vseh povezav , ki imajo eno krajišče v S in drugo v T.

- **Prepustnost (kapaciteta) prereza** (S,T) je
$$C(S, T) = \sum_{i\in S, j\in T, (i,j)\in E} c_{ij}.$$

- **Pretok skozi prerez** (S,T) je
$$f(S, T) := f^-(S) - f^+(S).$$

- **Minimalen prerez** je prerez z minimalno prepustnostjo.

- **Ford-Fulkersonov izrek:** Če je f^* maksimalen $s - t$ pretok, in (S^*, T^*) minimalen prerez v omrežju, potem je
$$|f^*| = C(S^*, T^*).$$

- Za pretok f definirajmo **residualni graf** $R_f = (V, E_f)$, kjer so povezave
  - Če $(i, j) \in E$ in $f_{ij} < c_{ij}$, potem je $(i, j) \in E_f$ in $r_{ij} = c_{ij} - f_{ij}$.
  - Če $(i, j) \in E$ in $f_{ij} > 0$, potem je $(j, i) \in E_f$ in $r_{ji} = f_{ij}$.

- Pri danem pretoku f v omrežju G je **pot povečanja** $\mathcal{P}$ katerakoli pot od s do t v residualnem grafu R_f.

- **Maksimalno povečanje vzdolž** $\mathcal{P}$ definiramo kot
$$\delta_f(\mathcal{P}) = min\{r_{ij} \mid \text{ povezava}(i, j) \in \mathcal{P}\}.$$

- **Ford-Fulkersonov algoritem** za iskanje maksimalnega pretoka:

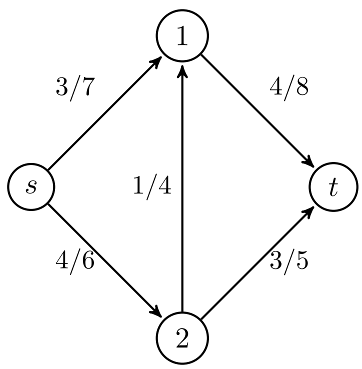
  1. $f(e) = 0$ za vse $e \in E$

2. Naredi R_f.
3. Ponavljaj
    1. $U = \{$točke iz R_f, do katerih lahko pridemo iz $s\}$
    2. Če $t \in U$, potem
        1. poišči pot povečanja $\mathcal{P}$ v R_f,
        2. izračunaj $\delta_f(\mathcal{P}$,
        3. povečaj pretok vzdolž $\mathcal{P}$: za $(i,j) \in \mathcal{P}$ je $f_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \delta_f(\mathcal{P}), & (i,j) \in E \\ f_{ij} - \delta_f(\mathcal{P}), & (j,i) \in E \end{cases}$,
        4. naredi R_f,

       sicer končaj.
4. Vrni f in U.

- Ford-Fulkersonov nam da tudi minimalen prerez $(S,T) = (U, V \setminus U)$.

1. Preverite ohranitvene zakone. Določite propustnost vseh prerezov. Poišči vse poti povečanja.



Ohranitveni zakon: $f^+(1) = 3 + 1 = 4 = f^-(1)$, $f^+(2) = 4 = f^-(2)$.

Propustnost prerezov:

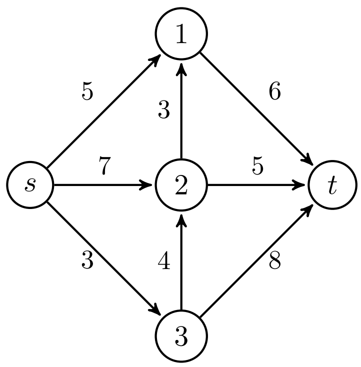
- $S_1 = \{s\}$, $T_1 = \{1, 2, t\}$, $C(S_1, T_1) = 13$, $f(S_1, T_1) = 7$
- $S_2 = \{s, 1\}$, $T_2 = \{2, t\}$, $C(S_2, T_2) = 14$, $f(S_2, T_2) = 8$
- $S_3 = \{s, 2\}$, $T_3 = \{1, t\}$, $C(S_3, T_3) = 16$, $f(S_3, T_3) = 7$
- $S_4 = \{s, 1, 2\}$, $T_4 = \{t\}$, $C(S_4, T_4) = 13$, $f(S_4, T_4) = 7$

Poti povečanja:

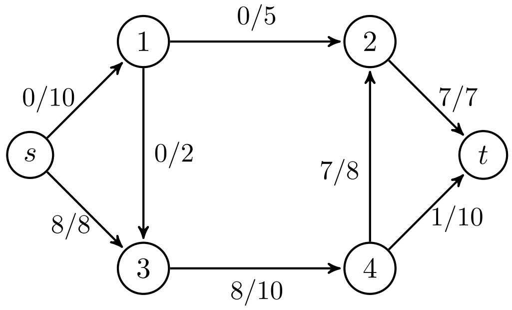
- $\mathcal{P}_1 :\ s \xrightarrow{4} 1 \xrightarrow{4} t$, $\delta(\mathcal{P}_1) = 4$.
- $\mathcal{P}_2 :\ s \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{2} t$, $\delta(\mathcal{P}_2) = 2$.
- $\mathcal{P}_3 :\ s \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{4} t$, $\delta(\mathcal{P}_3) = 2$.

2. Z uporabo Ford-Fulkersonovega algoritma poiščite maksimalne pretoke skozi omrežje.

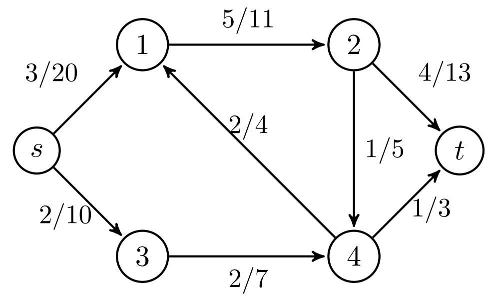
(a)



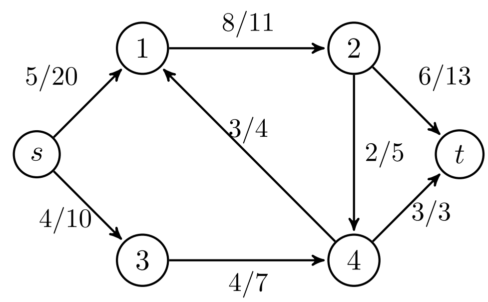
(b)



(c)



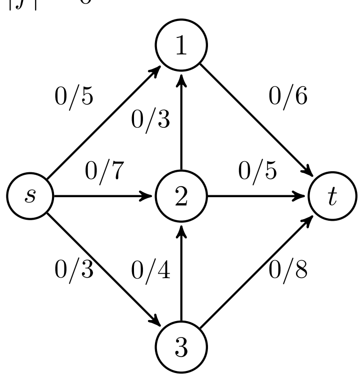
(d)

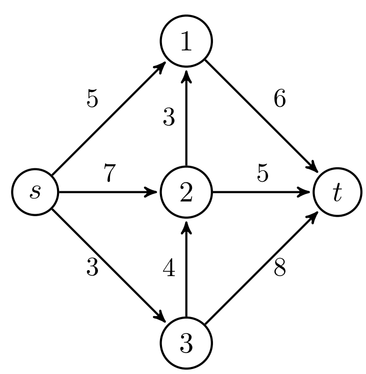


Rešitev:

(a) *Opomba: Možnih rešitev je več, ker lahko izberemo različne poti povečanja.*

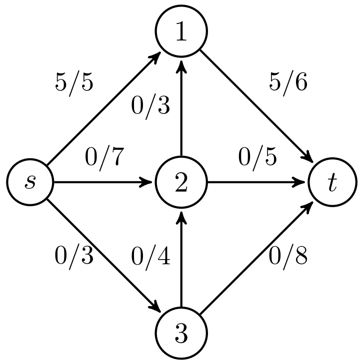
$|f| = 0$

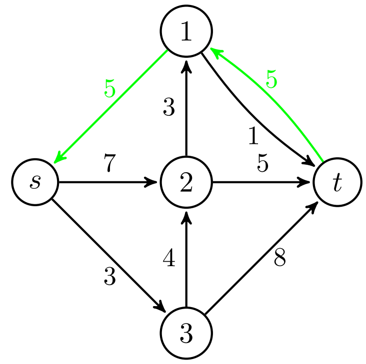




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{5} 1 \xrightarrow{6} t$.

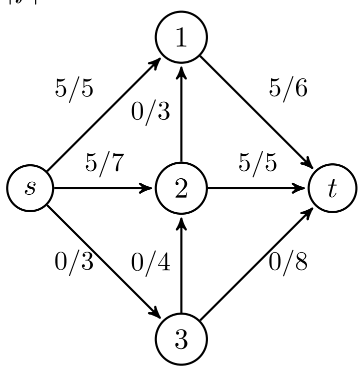
$|f| = 5$

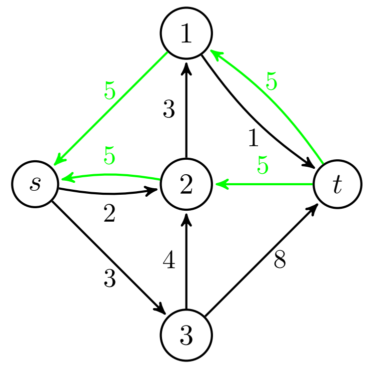




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{7} 2 \xrightarrow{5} t$.

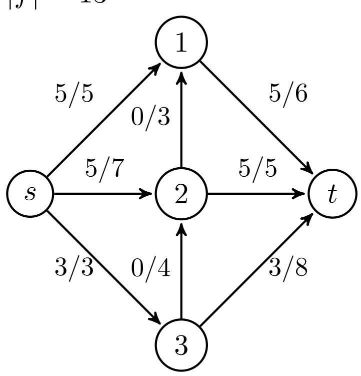
$|f| = 10$

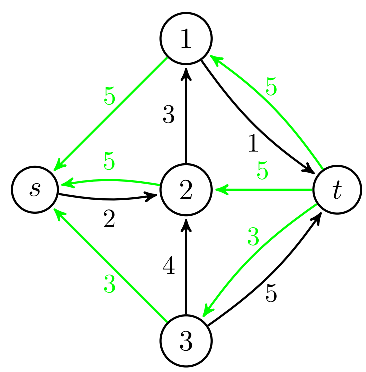




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{8} t$.

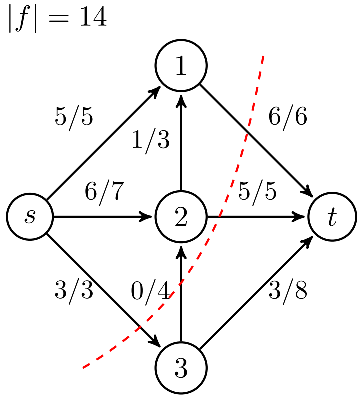
$|f| = 13$

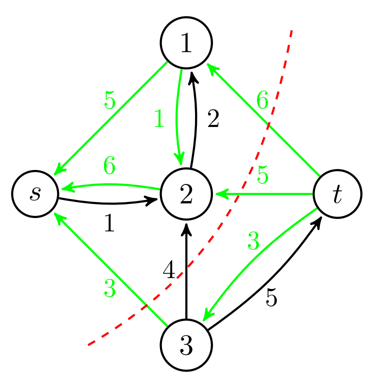




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{1} t$.

$|f| = 14$

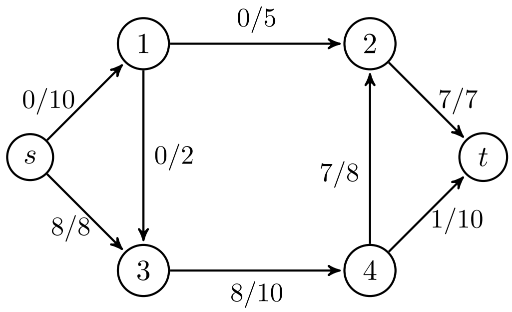


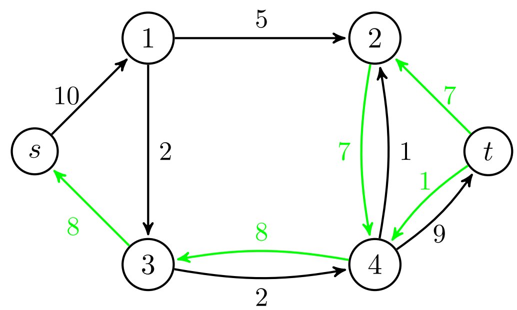


Ni več poti povečanja. Minimalni prerez: $U = \{s, 1, 2\}$ in $T = \{3, t\}$.

(b) *Opomba: Možnih rešitev je več, ker lahko izberemo različne poti povečanja.*

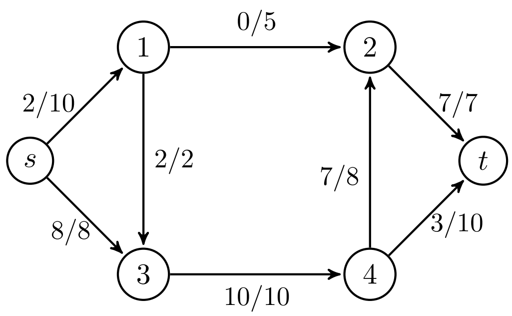
$|f| = 8$

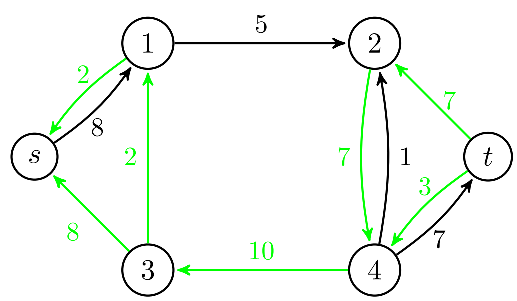




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{10} 1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{9} t$.

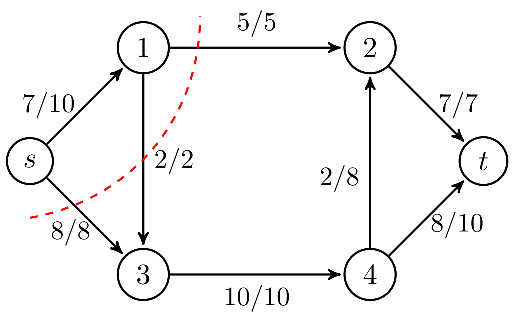
$|f| = 10$

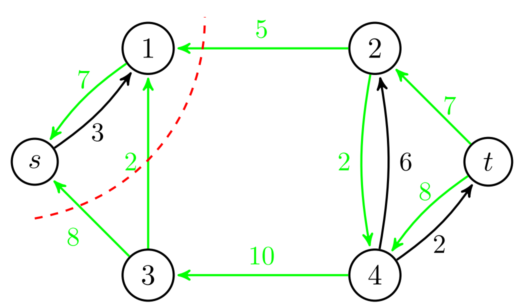




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{8} 1 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{7} 4 \xrightarrow{7} t$.

$|f| = 15$

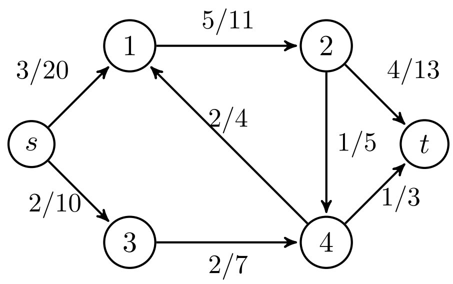


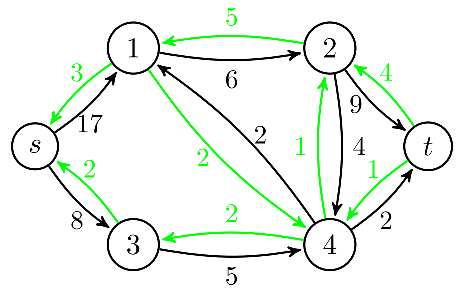


Ni več poti povečanja. Minimalni prerez: $U = \{s, 1\}$ in $T = \{2, 3, 4, t\}$.

(c) *Opomba: Možnih rešitev je več, ker lahko izberemo različne poti povečanja.*

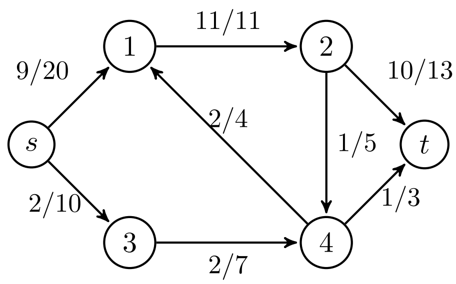
$|f| = 5$

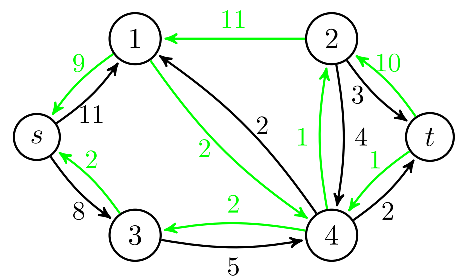




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{17} 1 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{9} t$.

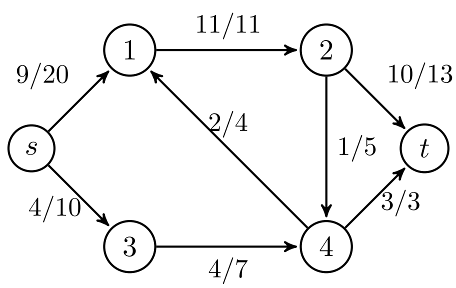
$|f| = 11$

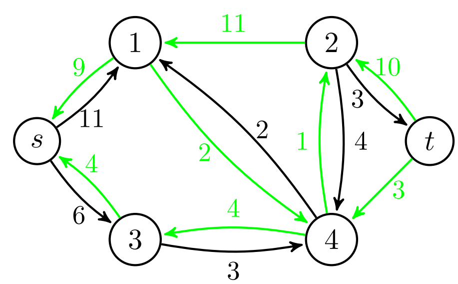




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{8} 3 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{2} t$.

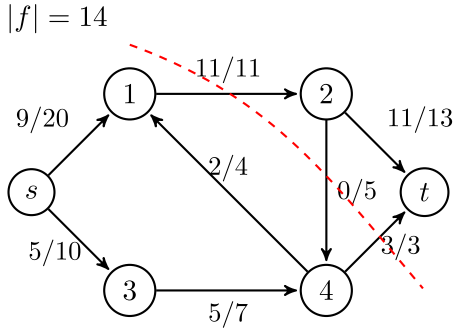
$|f| = 13$

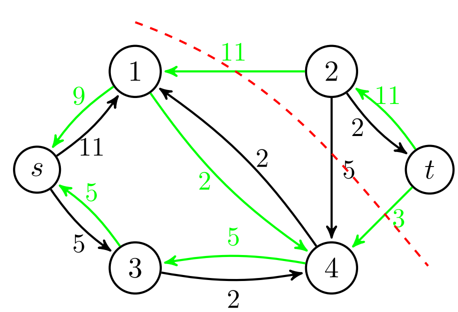




Izberemo pot povečanja: $s \xrightarrow{6} 3 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{3} t$.

$|f| = 14$





Ni več poti povečanja. Minimalni prerez: $U = \{s, 1, 3, 4\}$ in $T = \{2, t\}$.