

Trdnost I

Stane Srpčič

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Stane Srpčič

Trdnost I



STANE SRPČIČ

TRDNOST I

*V spomin na spoštovanega učitelja in dragega prijatelja
Dragoša Jurišiča*

Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*



STANE SRPČIČ
TRDNOST I

LJUBLJANA
2023

TRDNOST I

Univerzitetni učbenik

Avtor: *Stane Srpčič*

Recenzenta: *Igor Planinc, Boris Štok*

Jezikovni pregled: *Milvana Berce*

Oblikovanje in prelom: *Stane Srpčič*

Naslovnica: *Jure Srpčič*

Založnik: *Založba Univerze v Ljubljani (University of Ljubljana Press)*

Za založbo: *Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani*

Izdajatelj: *Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani*

Za izdajatelja: *Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za
gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani*

Ljubljana, 2023

Prva e-izdaja.

Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na: <https://ebooks.uni-lj.si>

DOI: 10.15292/9789612971663

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 164194051

ISBN 978-961-297-166-3 (PDF)



To delo je ponujeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna licenca./ This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 International License.

PREDGOVOR

Naslov učbenika v dveh knjigah, *Trdnost I* in *Trdnost II*, je posnet po naslovu predmeta *Trdnost* na univerzitetnem študiju gradbeništva na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Predmet je nastal po uvedbi bolonjskega študijskega programa z združitvijo in občutnim zmanjšanjem skupnega obsega dotedanjih predmetov *Mehanika trdnih teles* in *Trdnost*. Prvi del učbenika je tako v celoti posvečen vsebinam, ki jih sicer v tehniški literaturi srečamo pod imeni *Mehanika trdnih teles*, *Mehanika kontinuuma*, *Mehanika materialov* in podobno. Šele v drugem delu se dotaknemo vsebin, ki bi jih pogojno lahko označili kot probleme *trdnosti* elementov konstrukcij in metod za njihovo matematično obravnavo.

Tujih učbenikov s področja mehanike trdnih teles in trdnosti je zelo veliko, nekaj primernih bi se našlo tudi v Sloveniji. Zakaj torej nov učbenik? Najprej zato, da bi študenti našli v enem delu zbrane vse tiste vsebine, ki jih predpisuje veljavni učni načrt za predmet *Trdnost* na univerzitetnem študiju gradbeništva. Razen tega učitelji vse preradi pozabimo, da za študente prvi koraki pri študiju mehanike in trdnosti pomenijo srečanje s povsem novimi koncepti in v mnogočem zahtevajo miselni preskok glede na dotedanje navade pri učenju in študiju. K temu lahko prištejemo še neugodno a neizogibno dejstvo, da študij mehanike trdnin že kar na začetku zahteva poznavanje in uporabo razmeroma zahtevnih matematičnih sredstev, ki velikokrat zameglijo dejansko fizikalno in praktično naravo obravnavanih mehanjskih problemov. Pri pisanju me je vodila tudi izkušnja, da si mlade študentske glave sicer zlahka fotografsko zapomnijo še tako zapletene enačbe in izpeljave, hude težave pa nastopijo, ko jih je treba fizikalno in matematično utemeljiti in jih povezati z dogajanjem v naravi. Zato sem

se trudil, da bi okrog suhoparnih matematičnih zapisov, ki jih v tej ali oni obliki najdemo v vsakem spodobnem učbeniku mehanike, napletel čim več komentarjev, lahko bi rekli zgodb, ki po eni strani demistificirajo navidez zapletene teoretične vsebine, po drugi strani pa lahko pozornemu bralcu občutno olajšajo pot do razumevanja sicer zahtevne snovi. Prav tak namen imajo tudi praktični, povečini računski zgledi, ki so dodani vsakemu od šestih poglavij. Od tod tudi dva zajetna dela knjige.

Učbenik je razdeljen na dva dela. Prvi del, *Trdnost I*, ima štiri poglavja, ki v veliki večini povzemajo vsebino prvih štirih poglavij učbenika *Mehanika trdnih teles* iz leta 2003. Prvo poglavje obravnava računski model togega telesa. Vpeljan je pojem napetosti, izpeljane so ravnotežne enačbe ter najpomembnejše transformacijske operacije. Na koncu so izpeljane še enačbe za določanje premikov togega telesa pri majhnih zasukih. V drugem poglavju so na modelu deformabilnega telesa vpeljani pojmi pomikov, deformacij in zasukov, izpeljane so kinematične enačbe pri velikih in majhnih deformacijah. Prikazane so enačbe za določanje pomikov in rotacij pri znanih deformacijah ter kompatibilnostni pogoji, ki to omogočajo. V tretjem poglavju so napetosti in deformacije povezane z materialnimi enačbami. Podrobneje so obravnavane materialne enačbe linearno elastičnih teles ter omejitve elastičnega območja s pogoji plastičnega tečenja. V tem poglavju se tudi prvič srečamo s pojmom *trdnosti materiala* v ožjem pomenu besede. Četrto poglavje je namenjeno pregledu osnovnih mehanskih enačb za linearno elastično izotropno telo pri majhnih deformacijah. Načelno so prikazane rešitve robnega problema po metodi pomikov in po metodi napetosti, s čimer so zaokrožene vsebine, ki jih na obravnavani zahtevnostni stopnji navadno razumemo pod pojmom *mehanika trdnih teles*.

Drugi del, *Trdnost II*, sestavljata peto in šesto poglavje. V petem poglavju je na primeru ravnega linijskega nosilca prikazana uporaba osnovnih enačb pri praktičnih problemih konstrukcijske mehanike. Izpeljane so elementarne enačbe upogiba v območju majhnih defor-

macij, v primeru uklona pa se dotaknemo tudi nelinearnega obnašanja nosilcev. Ločeno je obravnavan primer enakomerne torzije s poudarkom na inženirskih rešitvah tankostenskih nosilcev. Šesto poglavje vpelje bralca v svet variacijskih metod, ki v povezavi z osnovnimi energijskimi principi predstavljajo učinkovito orodje pri reševanju problemov konstrukcijske mehanike.

Razen v četrtem so v vseh poglavjih teoretične vsebine podprte z naborom praktičnih računskih zgledov, ki dodatno pojasnjujejo izpeljane enačbe, obenem pa opozarjajo, da je končni cilj vsakršne mehanske analize vendarle numerično ovrednotenje mehanskih količin.

Zahtevnejši bralec se lahko iz številnih tujih in domačih učbenikov pouči o dodatnih vsebinah s področja osnov mehanike trdih teles, ki sicer niso v učnem načrtu, vendar so pomembne za poglobljen študij in razumevanje teoretičnih izpeljav in praktičnih načinov reševanja mehanskih problemov. V knjigi *Mehanika trdnih teles*[†] so, na primer, dodatno prikazane in z zgledi podprte naslednje vsebine: zapis najpomembnejših mehanskih enačb v cilindričnih in polarnih koordinatah, zveze med napetostmi in deformacijami v plastičnem območju, osnovni in sestavljeni reološki modeli za opis mehanskega obnašanja časovno odvisnih snovi, reševanje ravninskih nalog z uporabo Airyjeve napetostne funkcije in računanje paličnih konstrukcij z metodo pomikov.

Seznam uporabljenih, pregledanih in priporočenih virov je za celotno vsebino dodan na koncu drugega dela učbenika.

Kakor sem zapisal že v predgovoru h knjigi *Mehanika trdnih teles*, tudi z izdajo učbenika *Trdnost* zgolj vračam majhen del dolga do svojega učitelja in prijatelja Dragoša Jurišiča, dolgoletnega profesorja mehanike na ljubljanski gradbeni fakulteti. Velik del vsebine nosi njegov pečat. Tako pri oznakah in izrazju kakor tudi v številnih izpeljavah in zaporedju vsebin sem se trudil ohraniti duha, kakršnega je Dragoš Jurišič

[†] S. Srpčič, *Mehanika trdnih teles*, FGG, Ljubljana (2003, ponatis 2010, digitalizirana verzija 2023)

vpeljal v pouk mehanike po svojem prihodu na gradbeno fakulteto v študijskem letu 1967/68. Predvsem pa sem se ob spominu na njegovo pregovorno doslednost in (samo)kritičnost pogosto odrekel skušnjavi, da bi kak del vsebine skrajšal ali odpravil bolj na hitro in površno. V veliko pomoč so mi bili tudi številni pogovori s sodelavci s Katedre za mehaniko, njihovi predlogi in nasveti. S tem učbenik sledi, tako vsaj upam, osnovnim idejam o pomenu in poučevanju mehanike, ki so se v zadnjih desetletjih utrdile na Katedri za mehaniko.

Če bi se hotel poimensko zahvaliti vsem, ki si to zaslužijo, bi bil seznam predolg, pa še kakšna krivica bi se lahko zgodila. Zato na kratko, a toliko bolj iz srca: hvala vsem, ki ste pomagali, da je ta učbenik prišel med bralce in da je zagotovo boljši, kot bi bil brez vaše pomoči.

V Ljubljani, avgusta 2023

Stane Srpčič

GRŠKA ABECEDA

A, α	alfa	N, ν	ni
B, β	beta	Ξ , ξ	ksi
Γ , γ	gama	O, o	omikron
Δ , δ	delta	Π , π	pi
E, ε , ϵ	epsilon	P, ρ , ϱ	rho
Z, ζ	zeta	Σ , σ , ς	sigma
H, η	eta	T, τ	tau
Θ , ϑ , θ	theta	Υ , υ	ipsilon
I, ι	jota	Φ , ϕ , φ	fi
K, κ	kapa	X, χ	hi
Λ , λ	lambda	Ψ , ψ	psi
M, μ	mi	Ω , ω	omega

VSEBINA

0. UVOD	1
0.1 Nekaj besed o vsebini. Koncept zvezne snovi	1
0.2 Oznake in koordinatni sistemi	4
1. TOGO TELO	6
1.1 Splošno o togem telesu	6
1.2 Geometrijski opis telesa	7
1.3 Zunanja obtežba	21
1.4 Ravnotežje trdnega telesa	26
1.5 Notranje sile in napetosti	27
1.6 Ravnotežni pogoji, izraženi z napetostmi	38
Ravnatežni pogoji na površini telesa	44
1.7 Tenzor napetosti	48
1.8 Transformacija napetosti	54
1.9 Glavne normalne napetosti	58
1.10 Glavne strižne napetosti	71
1.11 Hidrostatični in deviatorični del tenzorja napetosti	80
1.12 Napetosti v oktaedrski ravnini	83
1.13 Ravninsko napetostno stanje (RNS)	86
1.14 Mohrov krog za ravninsko napetostno stanje	96
1.15 Premiki togega telesa	100
1.16 Togo telo - Zgledi	109
2. DEFORMABILNO TELO	160
2.1 Deformabilno telo	160
2.2 Opis deformiranja trdnega telesa	161
2.3 Tenzor velikih deformacij	175

2.4	Geometrijske spremembe pri deformiranju telesa	178
	Specifična sprememba dolžine	178
	Sprememba pravega kota	180
	Sprememba smeri	182
	Razcep matrike prvih parcialnih odvodov pomikov	187
2.5	Poenostavitve pri omejenih deformacijah	189
2.6	Tenzor majhnih deformacij	193
	Transformacija tenzorja majhnih deformacij	195
	Glavne normalne deformacije	195
	Glavne spremembe pravih kotov	196
	Specifična sprememba prostornine	198
	Hidrostatski in deviatorični del tenzorja majhnih deformacij	200
2.7	Tenzor zasukov	202
2.8	Določanje zasukov in pomikov	204
2.9	Kompatibilnostni pogoji	212
	Stokesov integralni izrek	212
	Pogoji za enoličnost zasukov in pomikov	213
2.10	Ravninsko deformacijsko stanje (RDS)	221
	Kompatibilnostni pogoji pri RDS	225
2.11	Deformabilno telo – Zgledi	227

3.	SOVISNOSTI MED NAPETOSTMI IN DEFORMACIJAMI	270
3.1	Splošno o sovisnostih med napetostmi in deformacijami	270
	Struktura materiala	271
	Izotropija in anizotropija	271
	Homogenost in nehomogenost	272
3.2	Idealna telesa – materialni modeli	272
3.3	Eksperimentalni podatki. Enoosni in strižni poskus	274
	Enoosni natezni poskus	275
	Dejanski $\sigma - \varepsilon$ diagram. Logaritemska deformacija	280
	Idealizirani (računski) $\sigma - \varepsilon$ diagrami	284

Linearno elastični del materialnega diagrama. Hookov zakon	287
Zakon superpozicije	288
Elastično–plastični del materialnega diagrama	289
Vpliv časa na zvezo med napetostjo in deformacijo.	
Lezenje in sprostitvev materiala.	291
Vpliv spremenljive temperature na zvezo med napetostjo in deformacijo	293
Strižni poskus	294
3.4 Idealno elastično telo. Posplošeni Hookov zakon	295
Ortotropna snov	300
Izotropna snov	308
3.5 Pogoji za začetek plastičnega tečenja	320
Haigh–Westergaardov napetostni prostor	323
Primerjalna ali ekvivalentna napetost	326
Trescov pogoj plastičnega tečenja	328
Von Misesov pogoj plastičnega tečenja	332
Pogoji porušitve pri hidrostatično občutljivih snoveh	337
Mohr–Coulombov pogoj porušitve	337
Drucker–Pragerjev pogoj porušitve	342
Obremenitev in razbremenitev v napetostnem prostoru	344
3.6 Sovisnosti med napetostmi in deformacijami – Zgledi	350
4. OSNOVNE ENAČBE TRDNEGA TELESA.	
ROBNI PROBLEM	408
4.1 Osnovne enačbe trdnega telesa	408
4.2 Metoda pomikov. Navier–Laméjeve enačbe	414
4.3 Metoda napetosti. Beltrami–Michellove enačbe	418

*Polje mehanike je paradiž matematične znanosti,
kajti tukaj v resnici pobiramo sadove matematike.*

Leonardo da Vinci

*italijanski renesančni arhitekt, izumitelj, inženir, kipar in slikar,
1452-1519*

0.

UVOD

0.1 Nekaj besed o vsebini. Koncept zvezne snovi

V prvem delu učbenika *Trdnost* so v matematični obliki predstavljeni fizikalni temelji in zakoni tako imenovane *mehanike trdnih teles*. Gre torej za opis obnašanja trdnih teles, na katera delujejo mehanski vplivi. S trdnimi telesi imamo venomer opraviti v vsakdanjem življenju; lahko bi našteli neznansko množico teles, ki se med seboj občutno razlikujejo po namenu, velikosti, obliki, kemijskih in fizikalnih lastnostih. V tej knjigi obravnavamo pretežno taka trdna telesa, ki nastopajo kot deli ali sklopi inženirskih konstrukcij.

Kot vemo, je vsaka snov sestavljena iz molekul, ki so zgrajene in medsebojno povezane na najrazličnejše načine. Opis mehanskega obnašanja teles, pri katerem bi izhajali iz njihove molekularne zgradbe, bi bil za namene tega učbenika preveč zapleten. Pa tudi sicer bi morali zaradi raznolikosti snovi glede na lastnosti njihovih molekul za vsako snov vpeljati posebne postopke in metode mehanske analize. Zato se je v mehaniki uveljavil tako imenovani *koncept zvezne snovi*, pri katerem vzamemo, da je snov enakomerno porazdeljena po območju, ki ga telo zavzema v prostoru, in da ima ta snov povprečne lastnosti množice molekul, ki jo sestavljajo. Koncept zvezne snovi je mogoče privzeti za večino snovi, s katerimi imamo opraviti v tehniki, in predstavlja osnovni postulat *mehanike zvezne snovi*[†]. V okvir koncepta zveznih teles sodijo trije glavni fizikalni modeli snovi: *trdna telesa, kapljevine in plini*.

[†] V svetovni tehniški literaturi je za ta del mehanike najpogosteje uporabljen angleški izraz 'Continuum Mechanics'.

Trdno telo je torej eden od osnovnih fizikalnih modelov snovi. Za lažje razumevanje pozabimo na dejansko atomsko oziroma molekularno zgradbo snovi in si predstavljajmo, da je trdno telo zgrajeno iz namišljenih neskončno majhnih materialnih delcev, ki so med seboj povezani z namišljenimi vezmi. Za razliko od kapljev in plinov, pri katerih molekule venomer spreminjajo svojo medsebojno lego in naključno potujejo po prostoru, so materialni delci trdnega telesa ves čas povezani z istimi sosednimi delci in ohranjajo kompaktno naravo telesa.

Materialni delec z infinitezimalno majhno maso je torej osnovni element zvezne snovi in ga ne smemo zamenjati s pojmom delca s končno veliko maso, s kakršnim se srečamo v kinematiki in dinamiki skupine diskretnih masnih delcev.

Koncept zvezne snovi občutno poenostavlja matematično formulacijo vrste fizikalnih problemov in omogoča vpeljavo osnovnih enačb mehanike zvezne snovi z uporabo diferencialnega in integralnega računa.

S smiselno kombinacijo načel mehanike zveznih teles in posebnih dodatnih enačb je mogoče uspešno reševati tudi take mehanske naloge, pri katerih vpeljava koncepta zvezne snovi fizikalno ni povsem upravičena, na primer v *mehaniki loma*, kjer obravnavamo nastanek in širjenje razpok v trdni snovi.

Če na trdno telo delujejo zunanje sile, se v vezeh med materialnimi delci sprožijo notranje sile, ki ovirajo spremembo medsebojne lege materialnih delcev, s tem pa tudi spremembo dimenzij, prostornine in oblike trdnega telesa kot celote. Koncept zvezne snovi omogoča, da sile v vezeh med materialnimi delci predstavimo z zvezno površinsko obtežbo poljubne ploskve, s katero navidezno prerežemo obravnavano telo. Tovrstne notranje obtežbe imenujemo *napetosti*. Od narave snovi in geometrijskih lastnosti telesa, kakor tudi od načina podpiranja ter od vrste, velikosti in načina delovanja zunanjih sil je odvisno, kolikšne bodo pri tem omenjene geometrijske spremembe, ki jih na kratko imenujemo *deformacije telesa*.

Vseh naštetih lastnosti in vplivov pri mehanski analizi trdnih teles seveda ni mogoče upoštevati v vsej njihovi raznolikosti. Pomagamo si tako, da vpeljemo tako imenovana *idealna telesa* ali *računske modele*, ki jim pripišemo značilnosti skupine teles z enakimi ali podobnimi geometrijskimi oziroma materialnimi lastnostmi. Prav tako vpeljemo ustrezne računske modele za različne vrste in načine delovanja zunanje obtežbe, na primer *točkovne sile* in *točkovne dvojice*, ki smo jih že dodobra spoznali in koristno uporabili pri študiju *fizike* in *statike tega telesa*.

Pri tem gre praviloma za večje ali manjše poenostavitve, tako v pogledu geometrijske predstavitve realnih teles, kakor tudi v pogledu matematične predstavitve delujočih sil in formulacije zvez med notranjimi silami in deformacijami. Od tod nujno izvirajo določene napake, ki pa so toliko manjše, kolikor bolj verno nam uspe z vpeljanim računskim modelom in s teorijo, ki ga podpira, zadeti dejansko fizikalno obnašanje obravnavanega telesa.

Ob tem moramo poudariti tudi pomen eksperimentalnega dela v zvezi z analitičnimi in numeričnimi metodami v konstrukcijski mehaniki, in sicer vsaj z dveh zornih kotov. Eksperimentalno dobljeni podatki o mehanskem odzivu snovi pod vplivom delovanja zunanjih sil so osnova za matematično modeliranje mehanskih lastnosti snovi, torej za določitev zvez med napetostmi in deformacijami. Razen tega pa je mogoče s premišljenimi in skrbno izpeljanimi poskusi oceniti tudi primernost vpeljanih računskih modelov in teorij ter točnost računskih rezultatov.

Nesluteni razvoj računalniške tehnike in s tem povezanih numeričnih metod v zadnjih desetletjih je pripeljal do velikih sprememb tudi na področju mehanike trdnih teles in trdnosti. Številne probleme, ki so bili teoretično zastavljeni že v osemnajstem in devetnajstem stoletju, nekateri pa celo že v antični dobi, in za katere je veljalo, da so numerično nerešljivi, je danes mogoče rešiti z uporabo visoko zmogljivih računalnikov in ustreznih numeričnih algoritmov. Na razpolago je tudi

vse več programskih paketov za kompleksno analizo najrazličnejših mehanskih problemov. Seveda pa bi bilo hudo zmotno mišljenje, da bodo odslej mehanske probleme reševali računalniki; nasprotno, sodobna računalniška in programska orodja uporabnike kar silijo v poglobljen študij mehanike in razvoj novih znanj, teorij, metod in algoritmov za reševanje vedno novih in vedno bolj zahtevnih problemov. Tudi pri uporabi najbolj izpopolnjenih in uporabniško prijaznih programskih paketov je namreč nepogrešljiva vloga uporabnika. Njegove osnovne naloge pri tem so: fizikalna formulacija problema, izbira ustreznega računskega modela, določitev osnovnih parametrov, določitev območja veljavnosti privzete teorije in numerične metode, določitev potrebne natančnosti računanja in, morda kot najpomembnejše, kritična ocena rezultatov. Za vse to pa je seveda potrebno obsežno in poglobljeno znanje mehanike, trdnosti in osnovnih matematičnih disciplin.

0.2 Oznake in koordinatni sistemi

Pri pisanju pričujočega učbenika me je vseskozi vodila želja, da bi razmeroma težko snov *mehanike trdnih teles* in *trdnosti* na kar najbolj enostaven in razumljiv, obenem pa strokovno korekten način predstavil študentom, ki jim je učbenik namenjen. Sodobni učbeniki so sicer pretežno napisani z uporabo simbolnega ali indeksnega zapisa in pravil *tenzorskega računa*, kar občutno skrajša zapise in izpeljave. Prepričan sem, da bi tudi naši študentje zmogli osvojiti potrebne veščine vsaj za uporabo tistega dela tenzorskega računa, ki je omejen na kartezijski koordinatni sistem, a sem se vendarle odločil za nekoliko staromodni način zapisovanja nastopajočih količin in enačb pretežno v eksplicitni obliki.

Kjer je to le mogoče, je uporabljen vektorski zapis, zaradi nazornosti pa so vektorske količine pogosto razvite tudi v skalarno obliko. Kot os-

nova komponentnega zapisa nastopajočih vektorjev je praviloma privzet kartezijski koordinatni sistem s koordinatami x, y, z in s pripadajočimi enotskimi baznimi vektorji $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Če je potrebno, so vpeljani še drugi kartezijski koordinatni sistemi, na primer koordinatni sistem s koordinatami ξ, η, ζ in enotskimi baznimi vektorji $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$. V poglavju o deformabilnem telesu so na kratko predstavljeni tudi krivočrtni koordinatni sistemi.

Skalarji so dosledno zapisani v navadnem, vektorji pa v krepkem tisku. Nekateri strukturirani obsežnejši izrazi so razen v razviti obliki zapisani tudi z ustreznimi vsotami oziroma v matrični obliki. Različni načini zapisa sicer navadno ne povedo nič novega o vsebini obravnavanega izraza, a so kljub temu prikazani zaradi primerjave z drugimi učbeniki in kot možnosti za čim enostavnejšo izpeljavo in predstavitev obravnavanih enačb.

TOGO TELO

1.1 Splošno o togem telesu

Iz izkušenj vemo, da se pod vplivom zunanjih sil vsako fizično telo deformira. Že v uvodu smo omenili, da sta intenziteta in način deformiranja odvisna od lastnosti snovi, geometrijske oblike in načina podpiranja telesa ter od velikosti in načina delovanja zunanjih sil. V večini primerov so deformacije tako majhne, da jih s prostim očesom niti ne opazimo. To zlasti velja za elemente in sklope inženirskih konstrukcij, pri katerih morajo biti deformacije omejene iz funkcionalnih in estetskih razlogov. V tem poglavju se omejimo na trdna telesa, katerih dimenzije, oblika in lega v prostoru se med delovanjem zunanjih sil le malo spremenijo v primerjavi z njihovimi siceršnjimi razsežnostmi. Kot osnovo za mehansko analizo takih teles lahko vpeljemo zelo enostaven matematični model, ki ga imenujemo *togo* ali *nedeformabilno telo*. Za ta hipotetični model je značilno, da se med delovanjem zunanjih sil spreminja le njegova lega v prostoru, njegova velikost in oblika, kakor tudi medsebojne lege posameznih delcev pa ostanejo nespremenjene.

Model togega telesa je sicer v očitnem nasprotju z v uvodu omenjenim razumevanjem mehanizma trdne snovi, po katerem se sile v vezeh med materialnimi delci pojavijo šele med deformiranjem telesa. Po tej logiki namreč v togem telesu ne bi bilo napetosti. Zato se moramo pri uporabi matematičnega modela togega telesa zavedati, da gre v resnici za deformabilno telo, le da lahko njegove deformacije pri izpeljavi nekaterih osnovnih enačb trdnega telesa zanemarimo, ne da bi pri tem naredili omembe vredno napako. Togo telo je torej najenostavnejši možni matematični model za mehansko analizo trdnega telesa in smo

ga že spoznali v elementarni statiki togega telesa.

Preden začnemo s proučevanjem mehanskega stanja togega telesa, se moramo seznaniti z dvema skupinama osnovnih podatkov. Prvo skupino sestavljajo podatki o tem, kakšni sta oblika in velikost obravnavanega telesa ter kakšna je njegova lega v prostoru glede na izbrani koordinatni sistem oziroma glede na druga telesa. Te podatke navadno razberemo iz načrta in jih na kratko imenujemo *geometrijski opis telesa*. Druga skupina osnovnih podatkov govori o velikostih, smereh in načinu delovanja zunanjih sil in jih zberemo pod naslovom *zunanja obtežba*.

1.2 Geometrijski opis telesa

V geometrijskem smislu definiramo trdno telo kot množico medsebojno povezanih infinitezimalno majhnih delcev, ki ustrezajo konceptu zvezne snovi. To množico imenujemo telo \mathcal{B} . V obravnavanem času t_0 zavzema telo \mathcal{B} v trirazsežnem (3–D) prostoru neko lego, ki je definirana z območjem \mathcal{V} in njegovim robom \mathcal{S} . V geometrijskem pogledu je torej trdno telo določeno s sklenjeno (zaprto) mejno ploskvijo \mathcal{S} , ki omejuje območje \mathcal{V} (slika 1.1). Površino mejne ploskve \mathcal{S} označujemo s S , prostornino območja \mathcal{V} pa z V .

Včasih vpeljemo še dodatno oznako \mathbf{B} , s katero želimo povedati, da se telo \mathcal{B} v času t_0 nahaja v stanju (legi, konfiguraciji) \mathbf{B} . V nekem kasnejšem času $t > t_0$ bo isto telo \mathcal{B} prešlo v novo, na primer premaknjeno lego \mathbf{B}' ali v novo, deformirano stanje \mathbf{B}' .

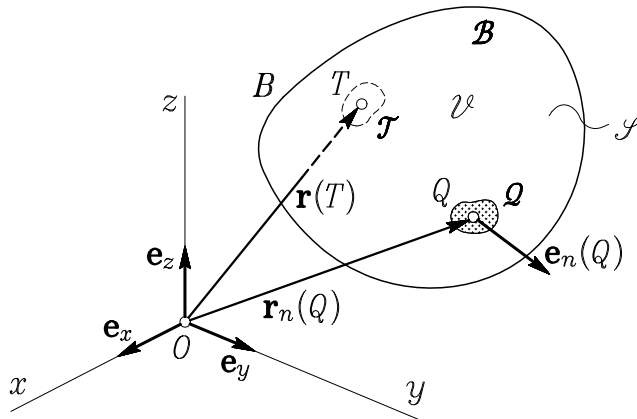
Opazujmo dva delca, od katerih delec \mathcal{T} leži znotraj območja \mathcal{V} , delec \mathcal{Q} pa na mejni ploskvi \mathcal{S} ! Ker gre za neskončno majhna delca, lahko njuni legi v prostoru določimo s točkama T in Q . Zaradi preglednosti navadno z isto črko označimo točko kot geometrijski element prostora kakor tudi delec kot fizični element telesa. Upoštevajoč ta dogovor v nadaljevanju izpuščamo oznake za delce in jih predstavljamo kar s pripadajočimi točkami v prostoru. Oznaka T na primer pomeni, da se

delec \mathcal{T} v času t_0 nahaja v točki T . Z oznako T' pa povemo, da se delec \mathcal{T} v času $t > t_0$ nahaja v točki T' .

Lego poljubne točke in s tem lego pripadajočega delca v prostoru opišemo s krajevnim vektorjem \mathbf{r} glede na neko nepomično točko prostora, na primer glede na točko O . Če izberemo za opis telesa kartezijski[†] koordinatni sistem z izhodiščem O in s koordinatami x, y, z , ki se nanašajo na ortonormalno bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, lahko krajevni vektor točke $T(x, y, z)$ zapišemo kot funkcijo kartezijskih koordinat

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = \mathbf{r}(x, y, z). \quad (1.1)$$

Pri tem se moramo zavedati, da je krajevni vektor \mathbf{r} točke T znotraj telesa funkcija treh neodvisnih koordinat, krajevni vektor točke Q na mejni ploskvi \mathcal{S} pa določa trojica koordinat, ki so medsebojno povezane z enačbo ploskve \mathcal{S} , kar poudarimo z oznako \mathbf{r}_n .



Slika 1.1

Zapise vektorjev in drugih količin, s katerimi imamo opraviti v tem učbeniku, lahko občutno skrajšamo z uvedbo znaka za vsoto

[†] Po Reneju Descartesu - Chartesiusu, francoskem matematiku in filozofu, 1596–1650.

$$\mathbf{r} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_j x_j \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.2)$$

Zaradi enostavnejšega pisanja smo vpeljali splošno oznako x_i ($i = x, y, z$) za kartezijske koordinate obravnavane točke, tako da je

$$x_i = \begin{cases} x & \text{pri } i = x \\ y & \text{pri } i = y \\ z & \text{pri } i = z \end{cases}. \quad (1.3)$$

V enačbi (1.2) smo poudarili, da lahko pri zapisu vsote poljubno izberemo seštevalne (*sumacijske*) indekse, na primer i, j, k, l, \dots

Pomudimo se še pri kartezijski koordinatni bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Bazni vektorji $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ so enotski

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (1.4)$$

in paroma pravokotni med seboj

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0. \quad (1.5)$$

V tej knjigi dosledno uporabljamo desnosučno koordinatno bazo, za katero velja

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x &= -\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y &= -\mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Enačbe (1.4) in (1.5) lahko zapišemo zelo na kratko

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.7)$$

V ta namen smo vpeljali *Kroneckerjev*[†] simbol δ_{ij} , ki ima v skalarnem zapisu nekaterih vektorskih enačb vlogo enotske matrike

[†] Leopold Kronecker, nemški matematik, 1823–1891.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pri } i \neq j \\ 1 & \text{pri } i = j \end{cases} \quad (i, j = x, y, z), \quad (1.8)$$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Hitro se prepričamo, da lahko enačbo (1.7) zapišemo tudi takole

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.10)$$

Podobno lahko na kratko zapišemo enačbe (1.6)

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k e_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (i, j, k = x, y, z). \quad (1.11)$$

Pri tem smo z e_{ijk} označili *permutacijski simbol*, za katerega velja

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pri } ijk = xyz, yzx, zxy \\ -1 & \text{pri } ijk = yxz, zyx, xzy \\ 0 & \text{pri } ijk = xxx, yyy, zzz, xxy, xyy, xxz, xzz, \dots \end{cases} \quad (1.12)$$

Permutacijski simbol e_{ijk} ima torej vrednost 1 pri sodih permutacijah indeksov, vrednost -1 pri lihah permutacijah indeksov in vrednost 0, če ni permutacije (če sta vsaj dva od indeksov enaka).

Če se dogovorimo, da latinski indeksi i, j, k, l, \dots zavzamejo vrednosti x, y, z , lahko v nadaljevanju opustimo navajanje zaloge vrednosti indeksov. Navajamo jih le v primerih, ko želimo posebej poudariti, katere vrednosti lahko zavzamejo posamezni indeksi.

Vrnimo se k geometrijskemu opisu trdnega telesa v času t_0 , ko se telo \mathcal{B} nahaja v stanju \mathbf{B} ! Orientacija mejne ploskve \mathcal{S} je v vsaki njeni točki Q določena z enotskim vektorjem zunanje normale $\mathbf{e}_n(Q)$. V kartezijskih koordinatah je

$$\mathbf{e}_n = e_{nx} \mathbf{e}_x + e_{ny} \mathbf{e}_y + e_{nz} \mathbf{e}_z = \sum_i e_{ni} \mathbf{e}_i. \quad (1.13)$$

Iz zahteve, da je \mathbf{e}_n enotski vektor

$$|\mathbf{e}_n| \equiv e_n = \sqrt{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n} = 1, \quad (1.14)$$

sledi

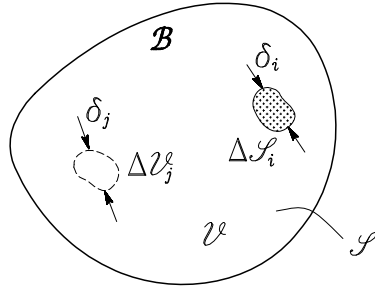
$$e_{nx}^2 + e_{ny}^2 + e_{nz}^2 = \sum_i e_{ni} e_{ni} = 1. \quad (1.15)$$

Komponente e_{nx} , e_{ny} , e_{nz} enotskega vektorja \mathbf{e}_n imenujemo tudi smer-
ni kosinusi vektorja \mathbf{e}_n v bazi $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, saj velja

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_x &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_x) = e_{nx} \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_y &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_y) = e_{ny} \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_z &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_z) = e_{nz}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Zaradi komutativnosti skalarnega produkta je tudi

$$e_{nx} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_n = e_{xn}, \quad e_{ny} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_n = e_{yn}, \quad e_{nz} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_n = e_{zn}. \quad (1.17)$$



Slika 1.2

Glede na obliko mejne ploskve \mathcal{S} in njeno lego v izbranem koordinatnem sistemu se smer enotskega vektorja normale spreminja od točke do točke. Gre torej za vektorsko funkcijo koordinat točke Q

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n(x, y, z).$$

Če razdelimo mejno ploskev \mathcal{S} na končno število m elementarnih delov $\Delta\mathcal{S}_i$ s ploščinami ΔS_i (slika 1.2), izračunamo njeno površino S takole

$$S = \sum_{i=1}^m \Delta S_i. \quad (1.18)$$

Na sliki 1.2 smo z δ_i označili mero za velikost ΔS_i elementarne ploskvice $\Delta\mathcal{S}_i$. Za δ_i praviloma vzamemo značilno dimenzijo, ki določa velikostni red ploskvice. Če manjšamo mero velikosti δ_i proti nič, lahko površino S mejne ploskve \mathcal{S} izračunamo s ploskovnim integralom

$$S = \lim_{\substack{\delta_i \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^m \Delta S_i = \oint_{\mathcal{S}} dS. \quad (1.19)$$

Pri tem smo s posebnim simbolom \oint označili, da je ploskev \mathcal{S} sklenjena. Če mejna ploskev \mathcal{S} ni gladka, jo razdelimo na kose $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots$, na katerih se zunanja normala \mathbf{e}_n zvezno spreminja, in enačba (1.18) preide v naslednjo obliko

$$S = \int_{\mathcal{S}_1} dS + \int_{\mathcal{S}_2} dS + \int_{\mathcal{S}_3} dS + \dots \quad (1.20)$$

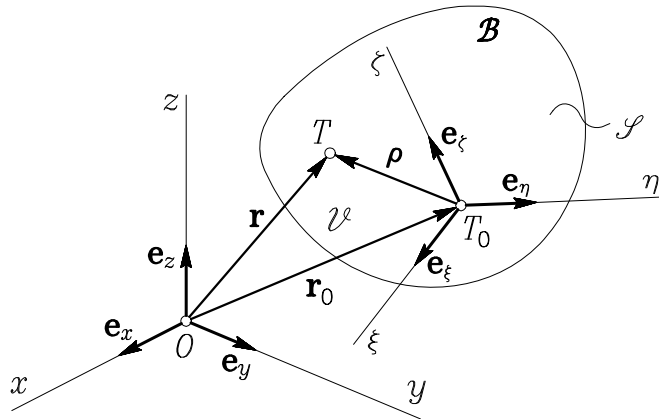
V primeru, da ima telo votline, ima razen zunanje sklenjene mejne ploskve \mathcal{S}_1 tudi notranje sklenjene mejne ploskve $\mathcal{S}_2^{(n)}, \mathcal{S}_3^{(n)}, \dots$ in je skupna površina mejne ploskve določena takole

$$S = \oint_{\mathcal{S}_1} dS + \oint_{\mathcal{S}_2^{(n)}} dS + \oint_{\mathcal{S}_3^{(n)}} dS + \dots \quad (1.21)$$

Podobno lahko izračunamo tudi prostornino V telesa \mathcal{B} , če ga razdelimo na n elementarnih delov $\Delta\mathcal{V}_j$ s prostorninami ΔV_j in vzamemo, da gre mera velikosti δ_j teh delov proti nič

$$V = \lim_{\substack{\delta_j \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^m \Delta V_j = \int_{\mathcal{V}} dV. \quad (1.22)$$

Prikazani geometrijski opis telesa je poseben primer bolj splošnega opisa, pri katerem razen nepomičnega prostorskega kartezijskega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ vpeljemo še telesni koordinatni sistem, ki ga v poljubno izbrani točki T_0 togo pritrdimo na obravnavano telo. V splošnem bi lahko za telesni koordinatni sistem izbrali kateregakoli od znanih 3-D sistemov. Običajno, in tako tudi v tem učbeniku, se odločimo kar za kartezijski koordinatni sistem s koordinatami ξ, η, ζ , ki se nanašajo na ortonormalno desnosučno bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ (slika 1.3). V splošnem je baza telesnega koordinatnega sistema poljubno zasukana glede na prostorski koordinatni sistem.



Slika 1.3

Sedaj lahko lego obravnavanega delca \mathcal{T} v telesnem koordinatnem sistemu izrazimo s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{\rho}$

$$\boldsymbol{\rho} = \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta + \zeta \mathbf{e}_\zeta. \quad (1.23)$$

Če podobno kot v (1.3) za kartezijske koordinate v telesnem koordinatnem sistemu vpeljemo simbolično oznako x_α ($\alpha = \xi, \eta, \zeta$)

$$x_\alpha = \begin{cases} \xi & \text{pri } \alpha = \xi \\ \eta & \text{pri } \alpha = \eta \\ \zeta & \text{pri } \alpha = \zeta, \end{cases} \quad (1.24)$$

lahko tudi krajevni vektor $\boldsymbol{\rho}$ zapišemo z vsoto

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\beta} x_{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \quad (\alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta). \quad (1.25)$$

V našem primeru gre za geometrijski opis togega telesa, zato se lega delca \mathcal{T} glede na telesni koordinatni sistem nič ne spremeni, četudi se telo premika v prostoru. To pomeni, da je krajevni vektor $\boldsymbol{\rho}$ delca \mathcal{T} ves čas enak. Seveda pa se pri tem spreminja krajevni vektor \mathbf{r} , ki določa lego delca \mathcal{T} glede na nepomični prostorski koordinatni sistem. Če označimo krajevni vektor telesnega koordinatnega izhodišča T_0 z \mathbf{r}_0

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z = \sum_i x_{0i} \mathbf{e}_i, \quad (1.26)$$

je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}. \quad (1.27)$$

Ob upoštevanju enačb (1.23) in (1.26) je tako

$$\mathbf{r} = (x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z) + (\xi \mathbf{e}_{\xi} + \eta \mathbf{e}_{\eta} + \zeta \mathbf{e}_{\zeta}). \quad (1.28)$$

Da bi lahko enovito izrazili krajevni vektor \mathbf{r} v enem ali drugem od obeh koordinatnih sistemov, moramo torej poiskati zvezo med baznimi vektorji \mathbf{e}_{ξ} , \mathbf{e}_{η} , \mathbf{e}_{ζ} in \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Najpreprosteje je, če izrazimo bazne vektorje telesne baze \mathbf{e}_{ξ} , \mathbf{e}_{η} , \mathbf{e}_{ζ} z njihovimi komponentami glede na bazo nepomičnega prostorskega koordinatnega sistema \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\xi} &= e_{\xi x} \mathbf{e}_x + e_{\xi y} \mathbf{e}_y + e_{\xi z} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{\eta} &= e_{\eta x} \mathbf{e}_x + e_{\eta y} \mathbf{e}_y + e_{\eta z} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{\zeta} &= e_{\zeta x} \mathbf{e}_x + e_{\zeta y} \mathbf{e}_y + e_{\zeta z} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Primerjava z enačbami (1.13) in (1.16) pove, da so komponente baznih vektorjev \mathbf{e}_{ξ} , \mathbf{e}_{η} , \mathbf{e}_{ζ} glede na bazo \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z po vrsti enake smernim kosinusom smeri ξ , η , ζ glede na smeri x , y , z

$$\begin{aligned} e_{\xi x} &= \cos(\xi, x) & e_{\eta x} &= \cos(\eta, x) & e_{\zeta x} &= \cos(\zeta, x) \\ e_{\xi y} &= \cos(\xi, y) & e_{\eta y} &= \cos(\eta, y) & e_{\zeta y} &= \cos(\zeta, y) \\ e_{\xi z} &= \cos(\xi, z) & e_{\eta z} &= \cos(\eta, z) & e_{\zeta z} &= \cos(\zeta, z). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Enačbe (1.29) pogosto zapišemo v matrični obliki

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

ali simbolično

$$\{\mathbf{e}_\alpha\} = [e_{\alpha i}]\{\mathbf{e}_i\}. \quad (1.32)$$

Enačbe (1.29) lahko zapišemo tudi z uporabo znaka za vsoto

$$\mathbf{e}_\alpha = \sum_i e_{\alpha i} \mathbf{e}_i \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta; i = x, y, z). \quad (1.33)$$

Matrika

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

predstavlja linearno transformacijo koordinat x, y, z v koordinate ξ, η, ζ . Imenujemo jo *transformacijska matrika*. Zaradi komutativnosti skalarnega produkta je

$$e_{\alpha i} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\alpha = e_{i\alpha}. \quad (1.35)$$

Ker so tudi bazni vektorji $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ enotski in medsebojno pravokotni, velja

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi &= e_{\xi x}^2 + e_{\xi y}^2 + e_{\xi z}^2 = 1 \\ \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\eta &= e_{\eta x}^2 + e_{\eta y}^2 + e_{\eta z}^2 = 1 \\ \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_\zeta &= e_{\zeta x}^2 + e_{\zeta y}^2 + e_{\zeta z}^2 = 1 \\ \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta &= e_{\xi x}e_{\eta x} + e_{\xi y}e_{\eta y} + e_{\xi z}e_{\eta z} = 0 \\ \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\zeta &= e_{\eta x}e_{\zeta x} + e_{\eta y}e_{\zeta y} + e_{\eta z}e_{\zeta z} = 0 \\ \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_\xi &= e_{\zeta x}e_{\xi x} + e_{\zeta y}e_{\xi y} + e_{\zeta z}e_{\xi z} = 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Transformacijska matrika $[e_{\alpha i}]$ je določena z devetimi smernimi kosinusi, ki pa morajo ustrezati šestim enačbam (1.36). To pomeni, da so

med devetimi smernimi kosinusi le trije neodvisni. Ugodno bi bilo, če bi lahko odvisne koeficiente transformacijske matrike izločili in preslikavo (1.31) izrazili le s tremi neodvisnimi koeficienti. Zaradi nelinearnosti zvez (1.36) to ni mogoče; vendar se izkaže, da lahko s transformacijsko matriko v obliki (1.34) uspešno rešimo celo vrsto nalog. Če želimo preslikavo (1.31) izraziti le s tremi neodvisnimi koeficienti, moramo za opis transformacije uporabiti druge parametre, na primer *Eulerjeve*[†] *kote*[‡].

Bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ in $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ sta v matematičnem pogledu popolnoma enakovredni, zato lahko, podobno kot v enačbi (1.29), tudi bazne vektorje prostorskega koordinatnega sistema $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ izrazimo glede na telesno bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{x\xi} & e_{x\eta} & e_{x\zeta} \\ e_{y\xi} & e_{y\eta} & e_{y\zeta} \\ e_{z\xi} & e_{z\eta} & e_{z\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

oziroma simbolično

$$\{\mathbf{e}_i\} = [e_{i\alpha}]\{\mathbf{e}_\alpha\}. \quad (1.38)$$

Matrika $[e_{i\alpha}]$ je očitno transponirana transformacijska matrika

$$[e_{i\alpha}] = [e_{\alpha i}]^T, \quad (1.39)$$

saj jo ob upoštevanju enačbe (1.35) dobimo tako, da v matriki $[e_{\alpha i}]$ zamenjamo vrstice s stolpci ali narobe. Če enačbo (1.32) pomnožimo z leve strani z inverzno transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]^{-1}$

$$[e_{\alpha i}]^{-1}\{\mathbf{e}_\alpha\} = [e_{\alpha i}]^{-1}[e_{\alpha i}]\{\mathbf{e}_i\} = [I]\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_i\}, \quad (1.40)$$

primerjava z enačbama (1.38) in (1.39) pokaže, da je inverzna transformacijska matrika enaka transponirani transformacijski matriki

$$[e_{\alpha i}]^{-1} = [e_{\alpha i}]^T. \quad (1.41)$$

[†] Leonhard Euler, švicarski matematik, 1707–1783.

[‡] Glej n. pr. knjigo: M. Saje, Kinematika in dinamika, FGG, Ljubljana (1994).

Zato je

$$[e_{\alpha i}][e_{\alpha i}]^T = [e_{\alpha i}]^T[e_{\alpha i}] = [I], \quad (1.42)$$

kjer smo z $[I]$ označili enotsko matriko

$$[I] = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

Hitro se tudi lahko prepričamo, da je determinanta $|e_{\alpha i}|$ transformacijske matrike $[e_{\alpha i}]$ enaka $+1$

$$\det [e_{\alpha i}] = |e_{\alpha i}| = \begin{vmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot (\mathbf{e}_{\eta} \times \mathbf{e}_{\zeta}) = +1. \quad (1.44)$$

Pri tem smo upoštevali, da je mešani produkt baznih vektorjev desnosučne ortonormalne baze enak $+1$.

Transformacijsko matriko, ki ustreza navedenim zahtevam, imenujemo *ortogonalna matrika*, transformacijo, ki jo opisuje, pa *ortogonalna transformacija*. Najpomembnejše lastnosti ortogonalne transformacijske matrike lahko torej strnemo v naslednjih ugotovitvah:

- Vsota kvadratov elementov vrstice ali stolpca transformacijske matrike je 1

$$\sum_i e_{\alpha i} e_{\alpha i} = 1 \quad (i = x, y, z), \quad (1.45)$$

$$\sum_{\alpha} e_{i\alpha} e_{i\alpha} = 1 \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta). \quad (1.46)$$

- Vrednost skalarnega produkta dveh različnih vrstic ali dveh različnih stolpcev je 0

$$\sum_i e_{\alpha i} e_{\beta i} = 0 \quad (\alpha \neq \beta; i = x, y, z), \quad (1.47)$$

$$\sum_{\alpha} e_{i\alpha} e_{j\alpha} = 0 \quad (i \neq j; \alpha = \xi, \eta, \zeta). \quad (1.48)$$

Z uporabo Kroneckerjevega simbola lahko enačbe (1.45) do (1.48) zapišemo še krajše

$$\begin{aligned} \sum_i e_{\alpha i} e_{\beta i} &= \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_{\alpha} e_{i\alpha} e_{j\alpha} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta). \quad (1.49)$$

- Inverzna transformacijska matrika je enaka transponirani transformacijski matriki

$$[e_{\alpha i}]^{-1} = [e_{\alpha i}]^T, \quad (1.50)$$

$$[e_{\alpha i}][e_{\alpha i}]^T = [e_{\alpha i}]^T[e_{\alpha i}] = [I]. \quad (1.51)$$

- Determinanta transformacijske matrike je enaka +1

$$\det [e_{\alpha i}] = |e_{\alpha i}| = 1. \quad (1.52)$$

Končno zapišimo še enačbo (1.27) za krajevni vektor \mathbf{r} delca \mathcal{T} , vendar glede na prostorski koordinatni sistem z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$! Upoštevajoč enačbe (1.2), (1.25) in (1.26) se enačba (1.27) glasi

$$\sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i x_{0i} \mathbf{e}_i + \sum_{\alpha} x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}. \quad (1.53)$$

Če bazne vektorje \mathbf{e}_{α} izrazimo s transformacijskim pravilom (1.33), lahko enačbo (1.53) zapišemo takole

$$\sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i \left(x_{0i} + \sum_{\alpha} x_{\alpha} e_{\alpha i} \right) \mathbf{e}_i. \quad (1.54)$$

Kartezijske komponente x_i krajevnega vektorja \mathbf{r} v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ lahko torej izrazimo na naslednji način

$$x_i = x_{0i} + \sum_{\alpha} x_{\alpha} e_{\alpha i}. \quad (1.55)$$

Oglejmo si še poseben primer, pri katerem izhodišči prostorskega in telesnega koordinatnega sistema sovpadeta v isti točki T_0 . Tedaj je $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ oziroma $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ in enačba (1.54) se glasi

$$x_i = \sum_{\alpha} x_{\alpha} e_{\alpha i} \quad (1.56)$$

oziroma v matričnem zapisu

$$\{x_i\} = [e_{i\alpha}]\{x_{\alpha}\}. \quad (1.57)$$

Z obratom gornje enačbe dobimo

$$\{x_{\alpha}\} = [e_{\alpha i}]\{x_i\} \quad (1.58)$$

oziroma v komponentni obliki

$$x_{\alpha} = \sum_i x_i e_{\alpha i}. \quad (1.59)$$

Z enačbami (1.56) do (1.59) smo torej predstavili pravilo za transformacijo koordinat krajevnega vektorja pri preslikavi med dvema kartezijskima koordinatnima sistemoma s skupnim izhodiščem. Pravilo lahko splošimo na transformacijo komponent poljubnega drugega vektorja. Kot primer vzemimo vektor \mathbf{v} , ki je v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ podan s komponentami v_i

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \sum_i v_i \mathbf{e}_i. \quad (1.60)$$

Njegove komponente v_{α} v novi bazi $\mathbf{e}_{\xi}, \mathbf{e}_{\eta}, \mathbf{e}_{\zeta}$ določimo na enak način kot komponente krajevnega vektorja z enačbami

$$v_{\alpha} = \sum_i v_i e_{\alpha i} \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta; i = x, y, z) \quad (1.61)$$

ali matrično

$$\{v_{\alpha}\} = [e_{\alpha i}]\{v_i\}. \quad (1.62)$$

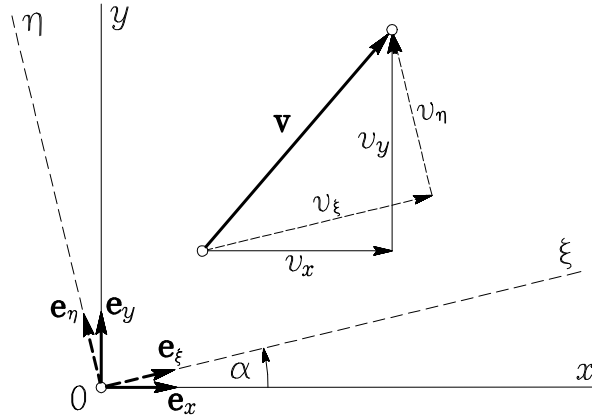
Zapišimo enačbo (1.62) še v razviti obliki

$$\begin{Bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}. \quad (1.63)$$

Do enakega rezultata pridemo, če vektor \mathbf{v} zapišemo v obeh bazah

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = v_\xi \mathbf{e}_\xi + v_\eta \mathbf{e}_\eta + v_\zeta \mathbf{e}_\zeta, \quad (1.64)$$

dobljeno enakost po vrsti pomnožimo z baznimi vektorji \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ in upoštevamo komutativnost skalarnega produkta ($e_{i\alpha} = e_{\alpha i}$).



Slika 1.4

Za ilustracijo si oglejmo ravninski primer, pri katerem je vektor \mathbf{v} glede na koordinatno bazo \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z podan s komponentama v_x in v_y ($v_z = 0$)

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y. \quad (1.65)$$

V isto izhodišče O postavimo še drug kartezijski koordinatni sistem z bazo \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ , ki ga dobimo tako, da prvotno bazo zasučemo okoli osi z za kot α (slika 1.4). Transformacijska matrika, ki določa lego novega koordinatnega sistema glede na prvotnega, je tedaj

$$\begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.66)$$

Komponente vektorja \mathbf{v} v novi bazi \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ dobimo z enačbo (1.63)

$$\begin{Bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha \\ -v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.67)$$

Rezultat pove, da vsako od novih komponent izračunamo kot vsoto projekcij starih komponent na nove koordinatne smeri. Dobljene zveze med komponentami vektorja \mathbf{v} v obeh koordinatnih sistemih lahko brez težav preverimo na *sliki 1.4*.

V literaturi je transformacijska matrika pogosto označena s $[T]^T$

$$[e_{\alpha i}] = [T]^T. \quad (1.68)$$

Zaradi enačb (1.39) do (1.44) je tedaj

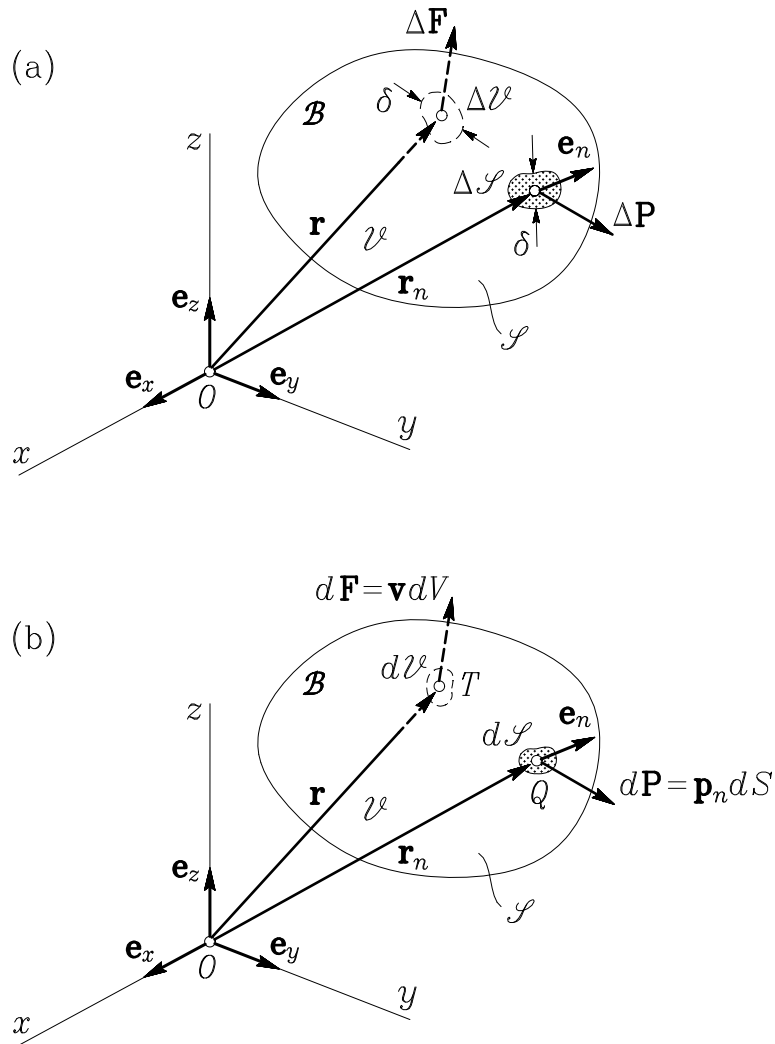
$$[e_{i\alpha}] = [e_{\alpha i}]^T = ([T]^T)^T = [T], \quad (1.69)$$

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad \rightarrow \quad [T]^T [T] = [T][T]^T = [I], \quad (1.70)$$

$$\det [T] = |T| = 1. \quad (1.71)$$

1.3 Zunanja obtežba

V fiziki so sile vpeljane kot količine, s katerimi opišemo medsebojne mehanske vplive teles. Pri trdnih telesih gre bodisi za neposredni stik prek mejnih ploskev dveh ali več teles, bodisi za sile, ki s poljubne razdalje delujejo na mase oziroma prostornine teles.



Slika 1.5

Vse sile, ki delujejo na obravnavano trdno telo, zajamemo s skupnim pojmom *zunanja obtežba*. V okviru koncepta zveznih teles vpeljemo za sile, ki se prenašajo prek mejne ploskve telesa, pojem *specifične površinske obtežbe* (sila na enoto ploščine, na primer N/m^2), za sile,

ki delujejo na maso oziroma prostornino telesa, pa pojem *specifične prostorninske obtežbe* (sila na prostorninsko enoto, na primer N/m^3).

Pogosti so primeri, da specifična površinska obtežba deluje na del površine telesa, ki je zelo majhen v primerjavi s celotno površino. Tovrstno obtežbo navadno nadomestimo s točkovnimi silami in dvojicami, ki smo jih že spoznali v statiki togih teles.

Naj bo $\Delta\mathbf{P}$ rezultanta vseh površinskih (kontaktnih) sil, ki delujejo na končno velikem elementu $\Delta\mathcal{S}$ mejne ploskve \mathcal{S} (slika 1.5-a). Če označimo z δ mero velikosti elementarne ploskvice $\Delta\mathcal{S}$, lahko ugotovimo, da sta ploščina ΔS elementarne ploskvice $\Delta\mathcal{S}$ in s tem tudi sila ΔP velikostnega reda δ^2 . Zato z limitnim procesom, pri katerem gre δ proti nič, dobimo

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{P}}{dS} = \mathbf{p}_n(Q). \quad (1.72)$$

Pri tem je \mathbf{p}_n vektor, ki določa specifično površinsko obtežbo. Vektor specifične površinske obtežbe \mathbf{p}_n ima v splošnem v vsaki točki Q mejne ploskve \mathcal{S} drugačno smer in velikost (slika 1.5-b), ki je na določenih področjih lahko tudi nič. Gre torej za vektorsko funkcijo točke Q ; v kartezijskih koordinatah je na primer

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(x, y, z) = p_{nx}(x, y, z) \mathbf{e}_x + p_{ny}(x, y, z) \mathbf{e}_y + p_{nz}(x, y, z) \mathbf{e}_z, \quad (1.73)$$

kar lahko na kratko zapišemo z vsoto

$$\mathbf{p}_n = \sum_j p_{nj} \mathbf{e}_j \quad (j = x, y, z). \quad (1.74)$$

Na podoben način definiramo tudi prostorninsko obtežbo. Če je $\Delta\mathbf{F}$ rezultanta prostorninskih sil, ki delujejo na elementarni del telesa $\Delta\mathcal{V}$, dobimo z limitnim procesom, pri katerem gre prostornina ΔV tega elementarnega dela proti nič

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \mathbf{v}(T). \quad (1.75)$$

Pri tem je \mathbf{v} vektor, ki določa specifično prostorninsko obtežbo kot vektorsko funkcijo točke T . V kartezijskih koordinatah je tako

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + v_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + v_z(x, y, z) \mathbf{e}_z \quad (1.76)$$

oziroma

$$\mathbf{v} = \sum_j v_j \mathbf{e}_j \quad (j = x, y, z). \quad (1.77)$$

Specifično prostorninsko obtežbo \mathbf{v} lahko izrazimo tudi s pripadajočo *specifično masno obtežbo* \mathbf{f} . V ta namen se najprej spomnimo definicije gostote snovi v obravnavani točki telesa. Če označimo z Δm maso, ki pripada elementarnemu delu telesa $\Delta \mathcal{V}$ s prostornino ΔV , je gostota ρ definirana kot specifična masa, saj jo merimo v $[\text{kg}/\text{m}^3]$

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (1.78)$$

Specifično masno silo vpeljemo z enačbo

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta m} = \frac{d\mathbf{F}}{dm}. \quad (1.79)$$

Pri tem je \mathbf{f} vektor, ki določa specifično masno silo, to je zunanjo silo na enoto mase (na primer N/kg). S tem sledi iz enačb (1.75), (1.78) in (1.79) zveza med specifično prostorninsko in specifično masno obtežbo

$$\mathbf{v} = \rho \mathbf{f}. \quad (1.80)$$

Najbolj znan primer specifične masne sile je gravitacijska sila Zemlje ($|\mathbf{f}| = g \cong 9.81 \text{ ms}^{-2}$). V tem primeru je specifična prostorninska obtežba \mathbf{v} po velikosti enaka specifični teži snovi

$$|\mathbf{v}| = \rho g = \gamma_s \quad (1.81)$$

in je usmerjena proti središču Zemlje.

Specifične masne in prostorninske sile so torej *vektorske funkcije*, definirane znotraj območja telesa \mathcal{V} ; v kartezijskih koordinatah je na primer

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + f_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + f_z(x, y, z) \mathbf{e}_z \quad (1.82)$$

ali na kratko

$$\mathbf{f} = \sum_j f_j \mathbf{e}_j \quad (j = x, y, z). \quad (1.83)$$

To pomeni, da imata sicer kolinearna vektorja \mathbf{f} in \mathbf{v} v vsaki točki znotraj telesa drugačno smer in drugačno velikost. Podobno velja za gostoto ρ , le da gre v tem primeru za *skalarno* funkcijo, ki se spreminja od točke do točke znotraj telesa

$$\rho(T) = \rho(x, y, z). \quad (1.84)$$

Gostota je primer *skalarnega polja*, specifična masna in prostorninska sila pa sta primera *vektorskih polj* nad obsegom realnih števil.

Težnostni pospešek Zemlje \mathbf{g} ima sicer smer proti središču Zemlje in se torej po smeri spreminja v odvisnosti od lege točke telesa na Zemljinem površju. Ker pa so izmere inženirskih konstrukcij, ki nas zanimajo, praviloma zelo majhne v primerjavi z velikostjo Zemlje, lahko vzamemo, da ima težnostni pospešek konstantno smer in konstantno velikost 9.81 ms^{-2} . Če je material homogen, ima tudi gostota konstantno vrednost. V tem primeru ima specifična prostorninska obtežba v vsaki točki telesa isto smer in isto velikost; specifična teža homogene snovi je primer konstantnega vektorskega polja.

Če obravnavamo zunanjo obtežbo s stališča inženirske oziroma konstrukcijske mehanike, kjer imamo pretežno opraviti z mirujočimi telesi (konstrukcijami), lahko zunanjo obtežbo opredelimo še podrobneje. Če naj konstrukcija miruje, mora biti na ustrezen način podprta, torej pritrjena na podlago. Kot primer vzemimo nosilno voziščno ploščo mostu. Plošča je podprta s krajnimi in vmesnimi oporniki, ti pa se

spet s temelji opirajo na naravna tla. Zunanjo obtežbo takih konstrukcij lahko razdelimo na aktivno in pasivno. Aktivno obtežbo mostne konstrukcije predstavljata na primer stalna obtežba, ki je sestavljena iz lastne teže konstrukcije, asfaltne prevleke, ograje in instalacij, ter prometna obtežba vozil in pešcev na mostu. K aktivni obtežbi štejemo tudi vpliv snega, vetra ali potresa na konstrukcijo, udarce ledu ob opornike in druge vrste obtežb, ki neodvisno vplivajo na konstrukcijo. Pasivno obtežbo pa predstavljajo sile, ki se prenašajo na konstrukcijo v podporah in jih običajno imenujemo *reakcije*. Za pasivno obtežbo je značilno, da se pojavi na podprtih delih mejne ploskve in se spreminja v odvisnosti od aktivne zunanje obtežbe tako, da je vseskozi zagotovljeno mirovanje konstrukcije.

Mirujoče trdno telo je praviloma podprto na določenem delu zunanje mejne ploskve. Sile, s katerimi podpore delujejo na telo, prištevamo torej med površinsko obtežbo. Če ni posebej poudarjeno drugače, so v zunanji specifični površinski obtežbi \mathbf{p}_n zajete tako aktivna zunanja obtežba kakor tudi reakcijske sile v podporah.

1.4 Ravnotežje trdnega telesa

Kakor je znano iz *statike*, se pogoj za mirovanje trdnega telesa izraža z zahtevo, da mora biti telo v ravnotežju. To pomeni, da morata biti rezultanta \mathbf{R} vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, in njihov rezultirajoči moment \mathbf{M} , izračunan glede na poljubno izbrano točko v prostoru, enaka nič.

Vpliv zunanjih sil na telo smo zajeli s specifično površinsko in specifično prostorninsko zunanjo obtežbo, ki sta v splošnem na poljuben način porazdeljeni po mejni ploskvi \mathcal{S} in po zaprtem območju \mathcal{V} (*slika 1.5-b*). Zato lahko pogoja za ravnotežje trdnega telesa zapišemo na naslednji način

$$\mathbf{R} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} dV = \mathbf{0} \quad (1.85)$$

$$\mathbf{M} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (1.86)$$

Enačbi (1.85) in (1.86) izražata ravnotežna pogoja, ki jima mora zadoščati zunanja obtežba na mirujočem telesu. To sta osnovni enačbi statike togega telesa. Zunanjo obtežbo, ki zadošča ravnotežnima pogojema (1.85) in (1.86), imenujemo *uravnorežena* ali *statično dopustna zunanja obtežba*.

1.5 Notranje sile in napetosti

Z enačbama (1.85) in (1.86) smo opredelili statično dopustno zunanjo obtežbo trdnega telesa. Ničesar pa omenjeni enačbi ne povesta o tem, kakšne sile se med delovanjem uravnorežene zunanje obtežbe pojavijo znotraj telesa.

Da bi lahko določili tudi sile, ki delujejo na poljuben materialni delec \mathcal{T} , si zamislimo, da prerežemo telo s poljubno ravnino Π_n , ki gre skozi obravnavani delec oziroma skozi točko T , s katero je določena lega tega delca v prostoru (*slika 1.6*). S tem razdelimo telo \mathcal{B} na dve telesi \mathcal{B}_1 in \mathcal{B}_2 , območje telesa \mathcal{V} s prostornino V pa na območji \mathcal{V}_1 in \mathcal{V}_2 s prostorninama V_1 in V_2 in mejno ploskev \mathcal{S} s ploščino S na ploskvi \mathcal{S}_1 in \mathcal{S}_2 s ploščinama S_1 in S_2

$$\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}, \quad V = V_1 + V_2 \quad (1.87)$$

$$\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}, \quad S = S_1 + S_2. \quad (1.88)$$

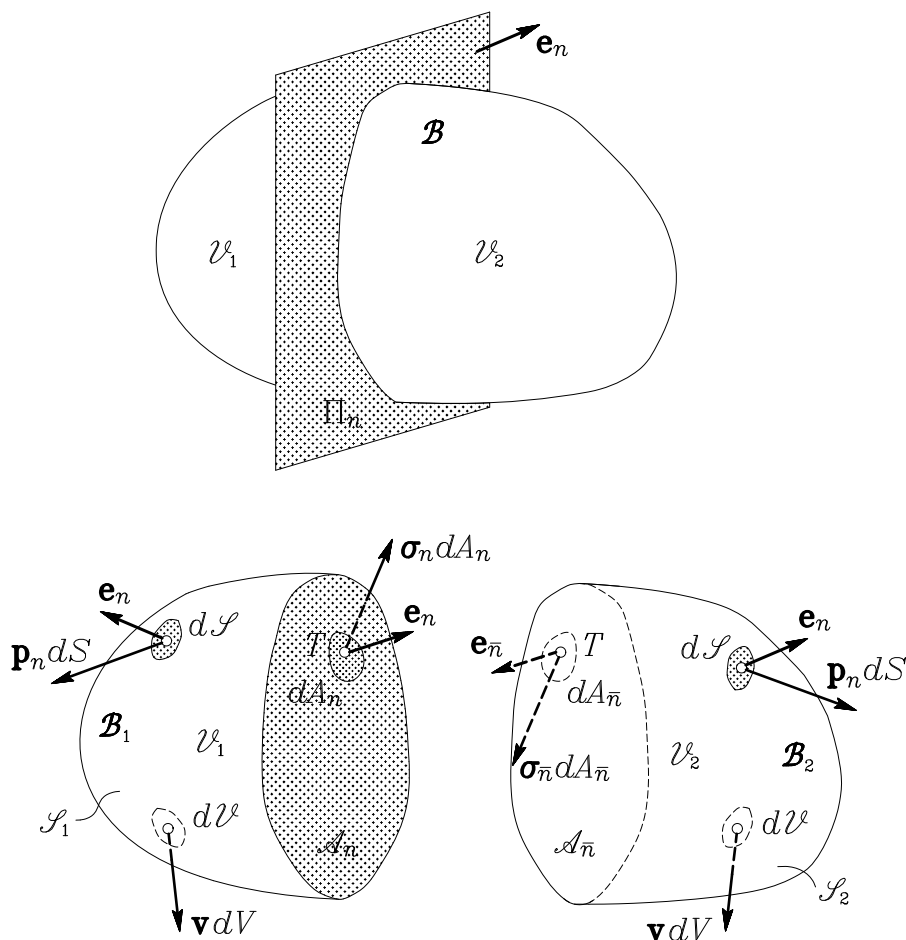
Območje \mathcal{V}_1 je omejeno s ploskvijo \mathcal{S}_1 in z ravninskim prerezom \mathcal{A}_n z zunanjo normalo \mathbf{e}_n , medtem ko je območje \mathcal{V}_2 omejeno s ploskvijo \mathcal{S}_2 in ravninskim prerezom $\mathcal{A}_{\bar{n}}$, ki ima nasprotno usmerjeno zunanjo normalo $\mathbf{e}_{\bar{n}}$

$$\mathbf{e}_{\bar{n}} = -\mathbf{e}_n. \quad (1.89)$$

Pri prerezih $\mathcal{A}_{\bar{n}}$ in \mathcal{A}_n gre seveda za isti presek telesa \mathcal{B} z ravnino Π_n , le da ga enkrat opazujemo z ene, drugič pa z druge strani. Zato za

ploščini $A_{\bar{n}}$ in A_n velja

$$A_{\bar{n}} = \int_{\mathcal{A}_{\bar{n}}} dA_{\bar{n}} = \int_{\mathcal{A}_n} dA_n = A_n. \quad (1.90)$$



Slika 1.6

Ker morata biti telesi \mathcal{B}_1 in \mathcal{B}_2 vsako zase v ravnotežju, sklepamo, da morajo v ravninskih prerezih \mathcal{A}_n in $\mathcal{A}_{\bar{n}}$ delovati notranje specifične površinske sile, ki nadomeščajo mehanski vpliv drugega dela telesa. Te površinske sile imenujemo *napetosti*. Če obravnavamo delec \mathcal{T} kot

element prereza \mathcal{A}_n , pripada temu delcu napetost $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki v točki T nadomešča vpliv telesa \mathcal{B}_2 na telo \mathcal{B}_1 . Če pa obravnavamo isti delec \mathcal{T} kot element prereza $\mathcal{A}_{\bar{n}}$, mu pripada napetost $\boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}$, ki v točki T nadomešča vpliv telesa \mathcal{B}_1 na telo \mathcal{B}_2 . V fizikalnem pogledu je vektor napetosti $\boldsymbol{\sigma}_n$ povsem enakovreden vektorju specifične površinske obtežbe \mathbf{p}_n , le da ta deluje na zunanjo mejno ploskev telesa, vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ pa na namišljeno prerezno ploskev \mathcal{A}_n znotraj telesa.

V splošnem primeru pripadajo različnim točkam prerezne ploskve \mathcal{A}_n napetostni vektorji, ki so po velikosti in po smeri različni med seboj. Vektorsko polje $\boldsymbol{\sigma}_n(x, y, z)$ torej opisuje porazdelitev notranjih sil po izbranem prečnem prerezu.

Zvezo med vektorjema $\boldsymbol{\sigma}$ in $\boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}$ poiščemo tako, da zapišemo ravnotežna pogoja za vsak del telesa posebej

Telo \mathcal{B}_1 :

$$\int_{\mathcal{A}_n} \boldsymbol{\sigma}_n dA_n + \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{v} dV = \mathbf{0} \quad (1.91)$$

$$\int_{\mathcal{A}_n} \mathbf{r}_n \times \boldsymbol{\sigma}_n dA_n + \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (1.92)$$

Telo \mathcal{B}_2 :

$$\int_{\mathcal{A}_{\bar{n}}} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}} dA_{\bar{n}} + \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_2} \mathbf{v} dV = \mathbf{0} \quad (1.93)$$

$$\int_{\mathcal{A}_{\bar{n}}} \mathbf{r}_n \times \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}} dA_{\bar{n}} + \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (1.94)$$

Če seštejemo enačbi (1.91) in (1.93) oziroma (1.92) in (1.94), dobimo

$$\int_{\mathcal{A}_n} (\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}) dA_n + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} dV = \mathbf{0} \quad (1.95)$$

$$\int_{\mathcal{A}_n} \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}) dA_n + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (1.96)$$

V drugem in tretjem členu gornjih enačb prepoznamo levi strani ravnotežnih enačb (1.85) in (1.86) za zunanjo obtežbo telesa kot celote. Ob upoštevanju enačb (1.85) in (1.86) je zato

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_n} (\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}) dA_n &= \mathbf{0} \\ \int_{\mathcal{A}_n} \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}) dA_n &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Gornji enačbi sta zagotovo izpolnjeni, če je v poljubni točki prereza \mathcal{A}_n izpolnjen pogoj

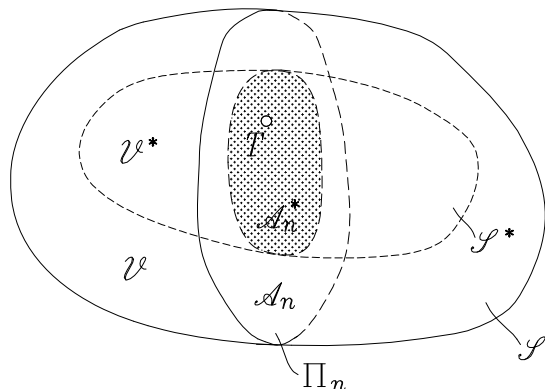
$$\boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}} = -\boldsymbol{\sigma}_n. \quad (1.98)$$

To je znani zakon akcije in reakcije, izražen z napetostmi.

Da je to tudi edina rešitev enačb (1.97), se lahko prepričamo z naslednjim razmislekom. Vzemimo, da iz območja \mathcal{V} obravnavanega telesa izrežemo poljubno podobmočje \mathcal{V}^* , omejeno s sklenjeno ploskvijo \mathcal{S}^* , in sicer tako, da to podobmočje vsebuje obravnavani materialni delec T (slika 1.7). Prerez podobmočja \mathcal{V}^* z ravnino Π_n je omejena ploskev \mathcal{A}_n^* . Na mejno ploskev \mathcal{S}^* delujejo napetosti, ki predstavljajo vpliv preostalega dela telesa \mathcal{V} na podobmočje \mathcal{V}^* in zadoščajo ravnotežnim pogojem. Zato na podoben način kot za celotno prerezno ploskev \mathcal{A}_n dobimo za del prerezne ploskve \mathcal{A}_n^* naslednja ravnotežna pogoja

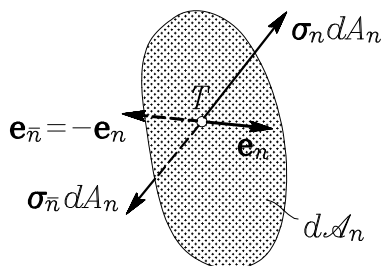
$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_n^*} (\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}) dA_n &= \mathbf{0} \\ \int_{\mathcal{A}_n^*} \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}) dA_n &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Ker smo podobmočje \mathcal{V}^* in s tem tudi delno prerezno ploskev \mathcal{S}_n^* poljubno izbrali, je pogojema (1.99) zadoščeno le, če je izpolnjena enačba (1.98).



Slika 1.7

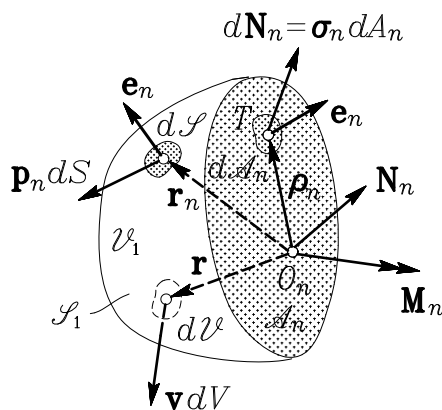
Enačbi (1.97) si lahko predstavljamo tudi kot ravnotežna pogoja za ravninski prerez \mathcal{A}_n kot samostojno “telo”, ki nima debeline in zato tudi ne prostorninskih sil (slika 1.8). Tako “telo” ima dve zunanji normali \mathbf{e}_n in $\mathbf{e}_{\bar{n}} = -\mathbf{e}_n$, ki sta vzporedni, a nasprotno usmerjeni.



Slika 1.8

Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ v poljubni točki T znotraj telesa torej pripada ravninskemu prerezu \mathcal{A}_n skozi točko T z zunanjo normalo \mathbf{e}_n . Če prerežemo telo skozi točko T z neko drugo ravnino Π_α z normalo \mathbf{e}_α , dobimo nov prerez \mathcal{A}_α , ki mu v isti točki T pripada drug napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$. Napetostni vektor, ki pripada točki T , je torej odvisen od orientacije ravnine, s katero navidezno prerežemo telo skozi točko T .

Zato lahko napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n(T)$ opredelimo kot notranjo specifično površinsko silo, ki v točki T pripada ravnini z zunanjo normalo $\mathbf{e}_n(T)$. To pomeni, da moramo pri opisu napetostnega stanja obravnavanega delca razen velikosti in smeri napetostnega vektorja podati tudi zunanjo normalo ravnine, ki ji ta napetostni vektor pripada.



Slika 1.9

V splošnem ne poznamo niti velikosti niti smeri napetostnih vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki pripadajo različnim točkam prereza \mathcal{A}_n . Kakor pokažemo v nadaljevanju, pa lahko iz ravnotežnih pogojev za enega od obeh delov telesa določimo rezultanto in rezultirajoči statični moment napetosti glede na poljubno izbrano točko prereza. Na *sliki 1.9* smo z $d\mathbf{N}_n$ označili *elementarno površinsko silo*, ki predstavlja rezultanto specifične površinske sile $\boldsymbol{\sigma}_n$ na infinitezimalni ploskvici $d\mathcal{A}_n$ okrog obravnavane točke T . Rezultanto \mathbf{N}_n vseh elementarnih površinskih sil in s tem vseh napetostnih vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_n$ v prerezu \mathcal{A}_n imenujemo *notranja sila*, njihov rezultirajoči moment \mathbf{M}_n glede na poljubno izbrano referenčno točko $O_n \in \mathcal{A}_n$ pa *notranji moment* prereza \mathcal{A}_n

$$\mathbf{N}_n = \int_{\mathcal{A}_n} \boldsymbol{\sigma}_n dA_n \quad (1.100)$$

$$\mathbf{M}_n = \int_{\mathcal{A}_n} \boldsymbol{\rho}_n \times \boldsymbol{\sigma}_n dA_n. \quad (1.101)$$

Pri tem je $\boldsymbol{\rho}_n$ krajevni vektor, ki določa lego točke T glede na izbrano referenčno točko O_n , kar pomeni, da leži v ravnini prečnega prereza \mathcal{A}_n in ima začetek v točki O_n (slika 1.9). Če izberemo točko O_n tudi za izhodišče krajevnih vektorjev \mathbf{r} v enačbah (1.92) in (1.94), izpeljemo iz enačb (1.91) do (1.94), (1.98) ter (1.100) in (1.101) naslednje zveze

$$\mathbf{N}_n = \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_2} \mathbf{v} dV \quad (1.102)$$

$$\mathbf{M}_n = \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV \quad (1.103)$$

$$\mathbf{N}_{\bar{n}} = \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{v} dV \quad (1.104)$$

$$\mathbf{M}_{\bar{n}} = \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS + \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV. \quad (1.105)$$

Notranja sila \mathbf{N}_n in notranji moment \mathbf{M}_n , ki pripadata delu telesa \mathcal{V}_1 , torej nadomeščata vpliv zunanje obtežbe, ki deluje na del telesa \mathcal{V}_2 in obrnjeno: notranja sila $\mathbf{N}_{\bar{n}}$ in notranji moment $\mathbf{M}_{\bar{n}}$, ki pripadata delu telesa \mathcal{V}_2 , nadomeščata vpliv zunanje obtežbe, ki deluje na del telesa \mathcal{V}_1 . V obeh primerih gre torej za fiktivni sili in momenta, s katerimi nadomestimo medsebojni vpliv obeh delov telesa, ne da bi pri tem poznali dejanski potek napetosti v prerezni ploskvi.

Ob upoštevanju enačbe (1.98) v enačbah (1.100) in (1.101) lahko ugotovimo, da sta notranji sili \mathbf{N}_n in $\mathbf{N}_{\bar{n}}$ po velikosti enaki, imata pa nasprotni smeri. Prav tako sta po velikosti enaka, po smeri pa različna notranja momenta \mathbf{M}_n in $\mathbf{M}_{\bar{n}}$.

$$\mathbf{N}_{\bar{n}} = -\mathbf{N}_n \quad (1.106)$$

$$\mathbf{M}_{\bar{n}} = -\mathbf{M}_n. \quad (1.107)$$

V ravnotežnih enačbah (1.102) do (1.105) poznamo integracijska območja \mathcal{V}_1 , \mathcal{V}_2 , \mathcal{S}_1 in \mathcal{S}_2 , kakor tudi zunanjo obtežbo \mathbf{p}_n in \mathbf{v} . S temi podatki lahko torej določimo notranjo silo in notranji moment, s katerima navidezno ločena dela telesa v prerezu \mathcal{A}_n delujeta drug na

drugega. Če v enačbah (1.104) in (1.105) upoštevamo zvezi (1.106) in (1.107), dobimo

$$\mathbf{N}_n = - \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{p}_n dS - \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{v} dV \quad (1.108)$$

$$\mathbf{M}_n = - \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS - \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV. \quad (1.109)$$

Primerjava z enačbama (1.91) in (1.92) ob upoštevanju oznak (1.100) in (1.101) pove, da smo notranjo silo \mathbf{N}_n in notranji moment \mathbf{M}_n dejansko izračunali iz ravnotežnega pogoja za del telesa \mathcal{V}_1 . Podobno bi notranjo silo $\mathbf{N}_{\bar{n}}$ in notranji moment $\mathbf{M}_{\bar{n}}$ izračunali iz ravnotežnih pogojev za del telesa \mathcal{V}_2 [†].

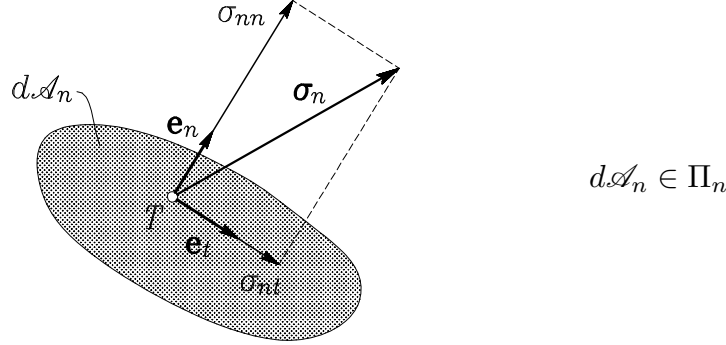
V nadaljevanju se bomo posvetili nalogi, da napetosti $\boldsymbol{\sigma}_n$ določimo tako, da bosta izpolnjeni enačbi (1.100) in (1.101). Z drugimi besedami to pomeni, da moramo z napetostmi $\boldsymbol{\sigma}_n$ "pokriti" notranje sile v izbranem prerezu telesa, ki smo jih sicer določili iz ravnotežnih pogojev. Opisani pristop dejansko predstavlja temeljno vodilo pri reševanju vsakovrstnih praktičnih problemov konstrukcijske mehanike.

V tem poglavju smo torej vpeljali pojem napetosti. Napetost $\boldsymbol{\sigma}_n$ smo v izbrani točki telesa definirali kot specifično notranjo površinsko silo v prerezu telesa z ravnino z normalo \mathbf{e}_n . V prerezu \mathcal{A}_n se napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ spreminja od točke do točke; v izbrani točki T pa sta velikost in smer napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$ odvisni od izbire ravnine skozi to točko. Še enkrat poudarimo, da je napetostno stanje v točki T odvisno le od zunanje obtežbe ter geometrijskih in materialnih lastnosti telesa; napetostni vektor, ki to stanje opisuje, pa je odvisen od izbire ravnine, s katero navidezno prerežemo telo skozi točko T .

[†] Ta pristop smo že s pridom izkoristili pri statiki statično določenih linijskih nosilcev, kjer se prečni prerez dejanskega trirazsežnega linijskega elementa reducira v eno samo točko, v kateri je vpliv sosednega dela nosilca nadomeščen s točkovno notranjo silo in s točkovnim notranjim momentom.

Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki v točki T pripada ravnini Π_n z normalo \mathbf{e}_n , lahko razstavimo v njegovo *normalno komponento* σ_{nn} in *strižno ali tangencialno komponento* σ_{nt} (slika 1.10)

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nn} \mathbf{e}_n + \sigma_{nt} \mathbf{e}_t. \quad (1.110)$$



Slika 1.10

Pri tem je smernica enotskega vektorja \mathbf{e}_t določena s presečnico ravnine Π_n z ravnino, ki jo določata vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$ in \mathbf{e}_n . Enotska vektorja \mathbf{e}_n in \mathbf{e}_t sta torej med seboj pravokotna

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = 1 \quad \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = 1 \quad \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_t = 0. \quad (1.111)$$

Normalno in strižno komponento napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$ določimo kot projekciji tega vektorja na smernici enotskih vektorjev \mathbf{e}_n in \mathbf{e}_t

$$\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_n \quad (1.112)$$

$$\sigma_{nt} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_t. \quad (1.113)$$

Oglejmo si še, kako je z napetostmi v ravnini z “negativno normalo” $\mathbf{e}_{\bar{n}} = -\mathbf{e}_n$ (slika 1.11). Iz enačbe (1.98) vemo, da je

$$\boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}} = -\boldsymbol{\sigma}_n.$$

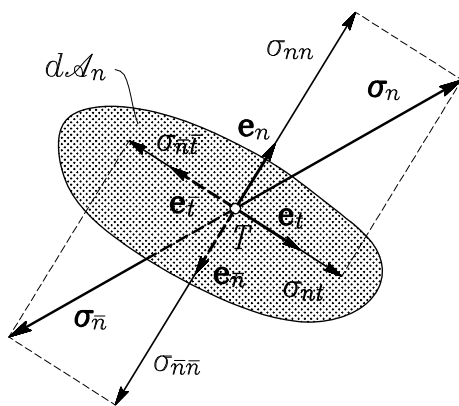
V ravnini z negativno normalo $\mathbf{e}_{\bar{n}} = -\mathbf{e}_n$ dobimo normalno napetost kot projekcijo napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}}$ na normalo $\mathbf{e}_{\bar{n}}$

$$\sigma_{\bar{n}\bar{n}} = \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{n}} = (-\boldsymbol{\sigma}_n) \cdot (-\mathbf{e}_n) = \sigma_{nn}, \quad (1.114)$$

strižno napetost pa kot projekcijo na enotski tangencialni vektor $\mathbf{e}_{\bar{t}}$

$$\sigma_{\bar{n}\bar{t}} = \boldsymbol{\sigma}_{\bar{n}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{t}} = (-\boldsymbol{\sigma}_n) \cdot (-\mathbf{e}_t) = \sigma_{nt}. \quad (1.115)$$

Pri tem smo tudi enotskemu tangencialnemu vektorju \mathbf{e}_t spremenili smer v $\mathbf{e}_{\bar{t}} = -\mathbf{e}_t$ (slika 1.11).

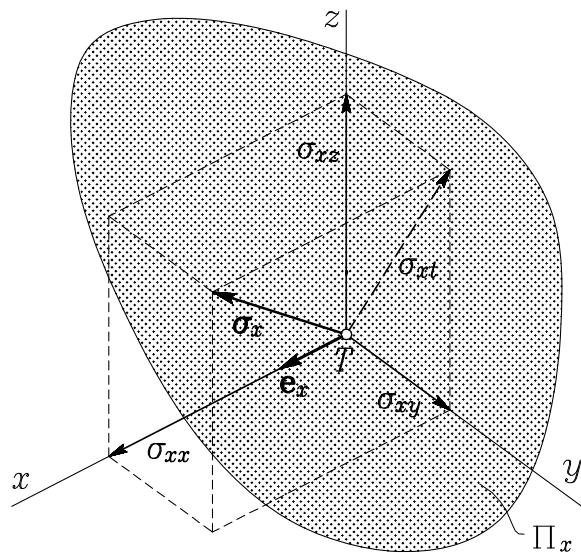


Slika 1.11

Enačbi (1.114) in (1.115) kažeta, da so skalarne vrednosti napetosti, ki delujejo na obravnavani delec, enake, ne glede na to, ali opazujemo delec s “pozitivne” ali “negativne” strani. Če na primer na delec deluje natezna normalna napetost $\sigma_{nn} = q$ v smeri pozitivne normale \mathbf{e}_n , potem deluje v smeri negativne normale $\mathbf{e}_{\bar{n}}$ prav tako natezna normalna napetost $\sigma_{\bar{n}\bar{n}} = q$.

Če obravnavamo napetostno stanje v kartezijskih koordinatah, je posebno zanimiv primer, da v opazovani točki T prerežemo telo s katero od koordinatnih ravnin izbranega koordinatnega sistema. Oglejmo si

primer, da prerežemo telo z ravnino Π_x z normalo \mathbf{e}_x (slika 1.12).



Slika 1.12

Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_x$, ki v točki T pripada ravnini Π_x z normalo \mathbf{e}_x , razstavimo v smereh enotskih vektorjev \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y in \mathbf{e}_z

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{xy} \mathbf{e}_y + \sigma_{xz} \mathbf{e}_z. \quad (1.116)$$

Komponento σ_{xx} imenujemo *normalna napetost* v ravnini z normalo \mathbf{e}_x , komponenti σ_{xy} in σ_{xz} pa sta *tangencialni* ali *strižni napetosti* v smereh y in z .

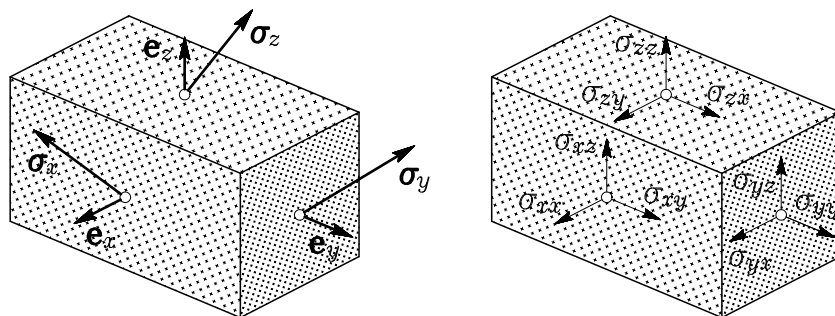
Če bi v točki T prerezali telo z ravnino Π_y z normalo \mathbf{e}_y , oziroma z ravnino Π_z z normalo \mathbf{e}_z , bi analogno dobili

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \sigma_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{yz} \mathbf{e}_z \quad (1.117)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zx} \mathbf{e}_x + \sigma_{zy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z. \quad (1.118)$$

Da bi lahko napetosti, ki v točki T pripadajo vsem trem koordinatnim ravninam, prikazali na eni sami sliki, izrežemo iz neposredne okolice

točke T infinitezimalno majhen kvader, čigar stranske ploskve so vzporedne koordinatnim ravninam, in narišemo napetosti, ki delujejo v teh ploskvah (slika 1.13).



Slika 1.13

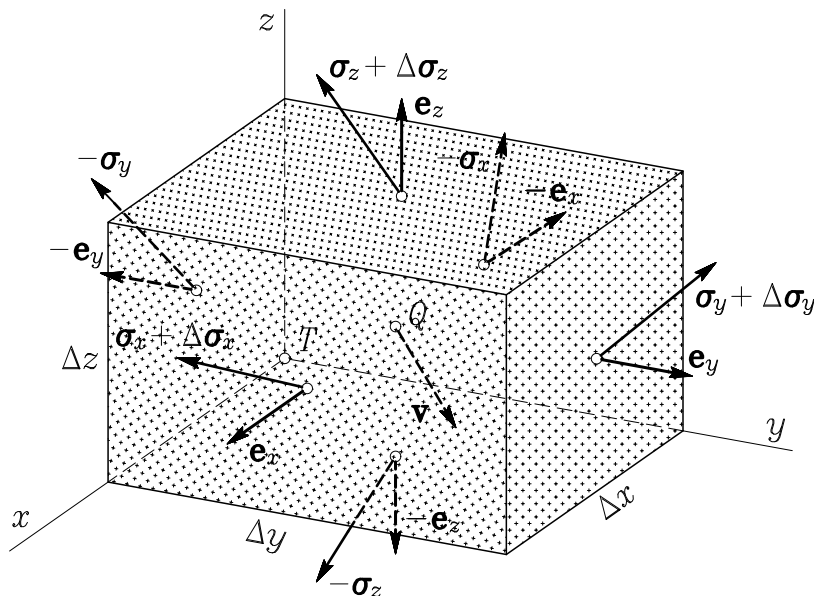
Pri tem se moramo zavedati, da vse prikazane napetosti dejansko pripadajo točki T in smo jih na elementarnem kvadru narisali le zaradi preglednosti.

1.6 Ravnotežni pogoji, izraženi z napetostmi

V razdelku 1.4 smo z enačbama (1.85) in (1.86) zapisali pogoje, ki jim mora ustrezati zunanja obtežba, da je obravnavano togo telo kot celota v ravnotežju. Seveda pa mora biti v ravnotežju tudi vsak, še tako majhen element in s tem tudi vsak materialni delec v notranjosti ali na površini telesa. V razdelku 1.5 smo pokazali, da je napetostno stanje poljubno izbranega delca opisano z napetostnimi vektorji, in sicer glede na izbrane ravnine skozi obravnavani delec. Pokazali smo tudi, da lahko skupni vpliv napetosti v poljubnem namišljenem prerezu telesa nadomestimo s statično enakovredno notranjo silo \mathbf{N}_n in statično enakovrednim notranjim momentom \mathbf{M}_n , ki ju izračunamo iz ravnotežnih pogojev za enega od odrezanih delov telesa. To pomeni, da lahko iz ravnotežnih pogojev za del telesa z enačbami (1.108) in (1.109) oziroma (1.102) in (1.103) določimo le rezultanto in rezultirajoči mo-

ment napetosti σ_n v prerezu \mathcal{A}_n , ne moremo pa ugotoviti, kako so te napetosti razporejene po prerezu \mathcal{A}_n . Iz ravnotežnih pogojev za del telesa torej ne moremo določiti specifične notranje površinske sile σ_n , ki pripada poljubno izbrani točki T prereza \mathcal{A}_n .

Za določitev napetosti σ_n so potrebne dodatne enačbe. Najprej izpeljemo enačbe, ki zahtevajo, da je vsak delec iz območja \mathcal{V} v ravnotežju. V ta namen iz okolice obravnavanega materialnega delca, ki leži v točki T , navidezno izrežemo elementarni kvader s končnimi stranicami Δx , Δy , Δz , tako da so stranske ploskve paroma vzporedne koordinatnim ravninam (slika 1.14).



Slika 1.14

Stranska ploskev kvadra, ki gre skozi obravnavano točko $T(x, y, z)$ in je vzporedna koordinatni ravnini $x = 0$, ima v izbranem kartezijskem koordinatnem sistemu zunanjo normalo $\mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_x$. Napetosti v tej ploskvi predstavimo z vektorjem $-\sigma_x$ v njenem težišču. Nasprotna mejna ploskev, ki je vzporedna pravkar omenjeni na razdalji Δx , ima pozitivno zunanjo normalo \mathbf{e}_x , napetostni vektor v njenem težišču pa je

$\sigma_x + \Delta\sigma_x$. Pri tem smo z $\Delta\sigma_x$ označili spremembo napetostnega vektorja σ_x na razdalji Δx . Podobno dobimo v težiščih stranskih ploskev, ki gresta skozi točko T in sta vzporedni s koordinatnima ravninama $y = 0$ in $z = 0$, napetostna vektorja $-\sigma_y$ oziroma $-\sigma_z$, v težiščih ustreznih nasprotnih stranskih ploskev pa napetostna vektorja $\sigma_y + \Delta\sigma_y$ oziroma $\sigma_z + \Delta\sigma_z$. Specifično prostorninsko obtežbo elementarnega kvadra predstavimo z vektorjem \mathbf{v} v njegovem geometrijskem središču $Q(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2})$.

Zapišimo sedaj ravnotežni enačbi (1.85) in (1.86) za obravnavani elementarni kvader končnih dimenzij, in sicer tako, kakor da bi v vsaki od stranskih ploskev kvadra vladalo homogeno napetostno stanje in da bi bila specifična prostorninska obtežba konstantna. Ravnotežni pogoj (1.85), ki zahteva, da je vektorska vsota vseh sil, ki delujejo na kvader, enaka nič, lahko izrazimo z rezultantami napetosti na stranskih ploskvah kvadra in z rezultanto specifične prostorninske obtežbe

$$\begin{aligned} & -\sigma_x \Delta y \Delta z + (\sigma_x + \Delta\sigma_x) \Delta y \Delta z - \\ & -\sigma_y \Delta z \Delta x + (\sigma_y + \Delta\sigma_y) \Delta z \Delta x - \\ & -\sigma_z \Delta x \Delta y + (\sigma_z + \Delta\sigma_z) \Delta x \Delta y + \mathbf{v} \Delta x \Delta y \Delta z = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Ker so dolžine stranic končno velike in različne od nič, lahko gornjo enačbo delimo z njihovim produktom $\Delta x \Delta y \Delta z$ in po ureditvi dobimo

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} + \frac{\Delta\sigma_y}{\Delta y} + \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta z} + \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (1.120)$$

Pri zapisu ravnotežnega pogoja (1.120) smo s predpostavko, da gre za homogeno napetostno stanje na mejnih ploskvah in enakomerno prostorninsko obtežbo znotraj končno velikega kvadra, naredili določeno napako, saj vemo, da se napetosti in specifična prostorninska obtežba v splošnem spreminjajo od točke do točke. "Točno" ravnotežno enačbo materialnega delca \mathcal{T} dobimo torej z limitnim procesom, pri katerem gredo dolžine stranic Δx , Δy , Δz proti nič, seveda tako, da točka T

vseskozi ostaja oglišče kvadra

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta \sigma_x}{\Delta x} + \frac{\Delta \sigma_y}{\Delta y} + \frac{\Delta \sigma_z}{\Delta z} + \mathbf{v} \right) = \mathbf{0}. \quad (1.121)$$

Ker so napetostni vektorji σ_x , σ_y in σ_z funkcije treh spremenljivk x , y , z , sledi iz gornje enačbe ravnotežni pogoj v diferencialni obliki

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1.122)$$

ali zapisano z vsoto

$$\mathcal{V} : \quad \sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z). \quad (1.123)$$

Vsota parcialnih odvodov napetostnih vektorjev v koordinatnih ravninah predstavlja v matematičnem pogledu *divergenco tenzorja napetosti* $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})$ (o tenzorju napetosti bo govor v razdelku 1.7)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (1.124)$$

Enačba (1.122) se s tem glasi

$$\mathcal{V} : \quad \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (1.125)$$

Ravnotežni pogoj (1.125) za poljuben materialni delec znotraj območja telesa \mathcal{V} torej zahteva, da mora biti vektorska vsota specifične zunanje prostorninske obtežbe \mathbf{v} in specifične notranje sile $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})$ enaka $\mathbf{0}$ v vsaki točki znotraj telesa.

Zapišimo sedaj še momentni ravnotežni pogoj in ga izrazimo z zahtevo, naj bo vektorska vsota statičnih momentov vseh nastopajočih sil glede na težišče Q obravnavanega elementarnega kvadra enaka $\mathbf{0}$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\Delta x}{2} \mathbf{e}_x \times (-\boldsymbol{\sigma}_x) + \frac{\Delta x}{2} \mathbf{e}_x \times (\boldsymbol{\sigma}_x + \Delta\boldsymbol{\sigma}_x) \right] \Delta y \Delta z + \\ & \left[-\frac{\Delta y}{2} \mathbf{e}_y \times (-\boldsymbol{\sigma}_y) + \frac{\Delta y}{2} \mathbf{e}_y \times (\boldsymbol{\sigma}_y + \Delta\boldsymbol{\sigma}_y) \right] \Delta z \Delta x + \\ & \left[-\frac{\Delta z}{2} \mathbf{e}_z \times (-\boldsymbol{\sigma}_z) + \frac{\Delta z}{2} \mathbf{e}_z \times (\boldsymbol{\sigma}_z + \Delta\boldsymbol{\sigma}_z) \right] \Delta x \Delta y = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Podobno kakor zgoraj tudi enačbo (1.126) delimo z elementarno prostornino $\Delta x \Delta y \Delta z$ in po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{e}_y \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\sigma}_z + \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \times \Delta\boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{e}_y \times \Delta\boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{e}_z \times \Delta\boldsymbol{\sigma}_z) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.127)$$

V limitnem procesu, pri katerem gredo dolžine stranic Δx , Δy , Δz proti nič, gredo proti nič tudi spremembe napetostnih vektorjev v koordinatnih ravninah

$$\begin{aligned} \Delta x \rightarrow 0 & & \Delta\boldsymbol{\sigma}_x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 & \Rightarrow & \Delta\boldsymbol{\sigma}_y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0 & & \Delta\boldsymbol{\sigma}_z \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.128)$$

Momentni ravnotežni pogoj za delec znotraj telesa se s tem glasi

$$\mathcal{V} : \quad \mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{e}_y \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{0} \quad (1.129)$$

oziroma

$$\mathcal{V} : \quad \sum_i \mathbf{e}_i \times \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z). \quad (1.130)$$

Enačbi (1.122) in (1.129) torej povesta, v kakšni medsebojni zvezi morajo biti napetosti v koordinatnih ravninah izbranega kartezijskega koordinatnega sistema in zunanja specifična prostorninska obtežba, da bo vsak delec znotraj telesa v ravnotežju.

V kartezijskem koordinatnem sistemu s koordinatami x , y , z predstavlja vektorska ravnotežna enačba (1.122) tri skalarne enačbe, ki morajo veljati povsod znotraj območja, ki ga zavzema telo \mathcal{B} v prostoru

$$\mathcal{V} : \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + v_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + v_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + v_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Na kratko lahko ravnotežne enačbe (1.131) zapišemo takole

$$\mathcal{V} : \quad \sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + v_j = 0 \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.132)$$

Če vektorske produkte, ki nastopajo v enačbi (1.129), zapišemo kot determinante, dobimo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Po izvrednotenju determinant in ureditvi lahko enačbo (1.129) zapišemo takole

$$(\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) \mathbf{e}_x + (\sigma_{zx} - \sigma_{xz}) \mathbf{e}_y + (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad (1.133)$$

Ker so bazni vektorji linearno neodvisni, je gornja enačba izpolnjena le tedaj, če velja

$$\mathcal{V} : \quad \begin{aligned} \sigma_{zy} &= \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} & \cdots & \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \\ \sigma_{yx} &= \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (1.134)$$

Momentni ravnotežni pogoj torej zahteva, da morajo biti strižne napetosti v medsebojno pravokotnih ravninah simetrične. To je posledica dejstva, da smo ravnotežne pogoje zapisali na nedeformiranem elementarnem delu telesa (privzeli smo model togega telesa) in dobljene napetostne vektorje razcepili v smereh baznih vektorjev mirujočega kartezijskega koordinatnega sistema. V primeru, da bi

upoštevali spremembo oblike in dimenzij telesa med deformiranjem, dobljene napetostne vektorje pa bi prav tako izrazili glede na prvotno koordinatno bazo nedeformiranega telesa, strižne napetosti ne bi bile simetrične[†].

Enačbe (1.131) in (1.134) tvorijo sistem šestih enačb, v katerih nastopa 9 neznanih neodvisnih napetosti ($\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}$). Enačbe (1.134) so algebrajske in jih zlahka rešimo; upoštevati moramo le simetrijo napetostnih komponent. S tem so enačbe (1.134) identično izpolnjene in sistem šestih enačb skrčimo na sistem treh enačb (1.131) za šest neodvisnih napetostnih komponent. Gre torej za sistem treh linearnih parcialnih diferencialnih enačb prvega reda za šest neznanih funkcij treh spremenljivk

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, z), \quad \sigma_{yy}(x, y, z), \quad \sigma_{zz}(x, y, z), \\ \sigma_{xy}(x, y, z), \quad \sigma_{yz}(x, y, z), \quad \sigma_{zx}(x, y, z). \end{aligned}$$

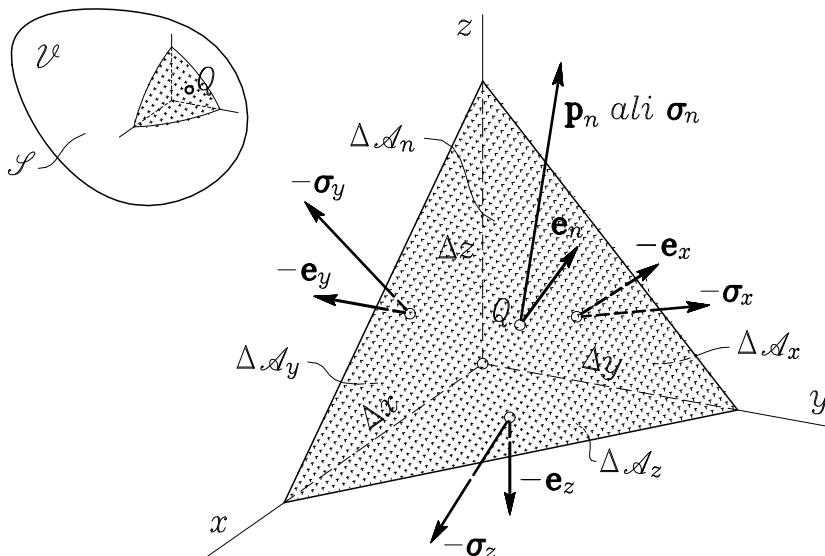
V enačbah (1.131) nastopajo le komponente specifične zunanje prostorninske obtežbe \mathbf{v} . Očitno je, da morajo biti napetosti odvisne tudi od zunanje specifične površinske obtežbe \mathbf{p}_n . To odvisnost opisujejo *robni pogoji*. Robni pogoji k diferencialnim enačbam (1.131) so ravnotežni pogoji na površini telesa \mathcal{S} . Z njimi povežemo napetosti z zunanjo, od specifične prostorninske obtežbe \mathbf{v} neodvisno specifično površinsko obtežbo \mathbf{p}_n .

Ravnotežni pogoji na površini telesa

Opazujmo poljuben delec \mathcal{Q} , ki je določen s točko Q na zunanji mejni ploskvi telesa \mathcal{S} . V njeni bližnji okolici izrežemo iz telesa elementarni del in ga nadomestimo s pravokotno piramido tako, da tri od njenih mejnih ploskev ležijo v koordinatnih ravninah, četrta mejna ploskev pa je tista, ki jo koordinatne ravnine odrežejo iz tangencialne ravnine na

[†] Glej na primer knjigo: Saje, Srpcič, Osnove nelinearne mehanike trdnih teles, Ljubljana 1993.

mejno površino telesa v točki Q (slika 1.15). Piramido določajo končni odseki na koordinatnih oseh Δx , Δy , Δz .



Slika 1.15

Legla tangencialne ravnine je določena z enotskim vektorjem zunanje normale \mathbf{e}_n v točki Q

$$\mathbf{e}_n = e_{nx} \mathbf{e}_x + e_{ny} \mathbf{e}_y + e_{nz} \mathbf{e}_z .$$

Če označimo elementarno ploščino poševne mejne ploskve skozi točko Q z ΔA_n , elementarne ploščine koordinatnih mejnih ploskev pa po vrsti z ΔA_x , ΔA_y , ΔA_z , velja, kakor vemo iz analitične geometrije,

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= e_{nx} \Delta A_n \\ \Delta A_y &= e_{ny} \Delta A_n \\ \Delta A_z &= e_{nz} \Delta A_n . \end{aligned} \tag{1.135}$$

Elementarne ploskve s ploščinami ΔA_x , ΔA_y , ΔA_z imajo negativne normale $-\mathbf{e}_x$, $-\mathbf{e}_y$, $-\mathbf{e}_z$ in jim zato pripadajo koordinatni napetostni vektorji $-\boldsymbol{\sigma}_x$, $-\boldsymbol{\sigma}_y$, $-\boldsymbol{\sigma}_z$. Elementarni ploskvi ΔA_n pa v točki Q pripada vektor specifične zunanje površinske obtežbe \mathbf{p}_n , če leži točka Q

na zunanji mejni ploskvi telesa, oziroma napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$, če leži točka Q na namišljenem prerezu telesa z ravnino z normalo \mathbf{e}_n . Razen tega deluje na elementarno piramido s prostornino $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z / 6$ še specifična zunanja prostorninska obtežba \mathbf{v} .

Ravnotežni pogoj (1.85) za elementarno piramido je

$$-\boldsymbol{\sigma}_x \Delta A_x - \boldsymbol{\sigma}_y \Delta A_y - \boldsymbol{\sigma}_z \Delta A_z + \mathbf{p}_n \Delta A_n + \mathbf{v} \Delta V = \mathbf{0}, \quad (1.136)$$

pri čemer člen $\mathbf{v} \Delta V$ predstavlja rezultanto specifične prostorninske obtežbe na območju prikazane elementarne piramide s prostornino ΔV . Po deljenju gornje enačbe z ΔA_n dobimo

$$-\boldsymbol{\sigma}_x \frac{\Delta A_x}{\Delta A_n} - \boldsymbol{\sigma}_y \frac{\Delta A_y}{\Delta A_n} - \boldsymbol{\sigma}_z \frac{\Delta A_z}{\Delta A_n} + \mathbf{p}_n + \mathbf{v} \frac{\Delta V}{\Delta A_n} = \mathbf{0}. \quad (1.137)$$

Ravnotežni pogoj za delec, ki ga na površini telesa določa točka Q , dobimo z limitnim procesom, pri katerem gredo dolžine Δx , Δy , Δz proti nič. Pri tem je elementarna ploščina ΔA_n količina drugega, elementarna prostornina ΔV pa količina tretjega reda, zato gre količnik $\frac{\Delta V}{\Delta A_n}$ proti nič in ob upoštevanju zvez (1.135) sledi

$$\mathcal{S} : \quad \mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_x e_{nx} + \boldsymbol{\sigma}_y e_{ny} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{nz} \quad (1.138)$$

ali zapisano z vsoto

$$\mathcal{S} : \quad \mathbf{p}_n = \sum_j \boldsymbol{\sigma}_j e_{nj} \quad (j = x, y, z). \quad (1.139)$$

Tako smo izpeljali ravnotežni pogoj na površini telesa, ki mora biti izpolnjen v vsaki točki Q zunanje mejne ploskve \mathcal{S} in predstavlja *statični robni pogoj* k diferencialni enačbi (1.122). V skalarni obliki dobimo

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_{xx} e_{nx} + \sigma_{yx} e_{ny} + \sigma_{zx} e_{nz} \\ \mathcal{S} : \quad p_{ny} &= \sigma_{xy} e_{nx} + \sigma_{yy} e_{ny} + \sigma_{zy} e_{nz} \\ p_{nz} &= \sigma_{xz} e_{nx} + \sigma_{yz} e_{ny} + \sigma_{zz} e_{nz} \end{aligned} \quad (1.140)$$

oziroma

$$\mathcal{S} : \quad p_{ni} = \sum_j \sigma_{ji} e_{nj} \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.141)$$

Momentni ravnotežni pogoj izpolnimo tako, da tudi na površini telesa upoštevamo simetrijo napetostnih komponent v skladu z enačbami (1.134).

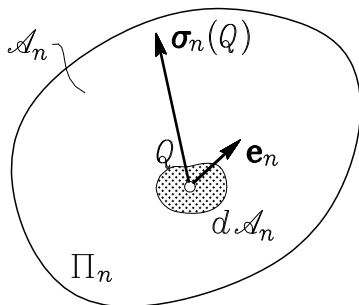
Tako smo z ravnotežnima pogojema (1.122) in (1.129) ter z robnim pogojem (1.138) povezali napetostne vektorje σ_x , σ_y , σ_z koordinatnih ravnin z zunanjima obtežbama \mathbf{p}_n in \mathbf{v} . Ob tem se moramo zavedati, da smo pri zapisu ravnotežnih pogojev dejansko deformabilno trdno telo nadomestili z modelom togega telesa. To pomeni, da smo zane-marili vpliv spremembe velikosti in oblike telesa na smer, velikost in medsebojne odnose zunanje obtežbe in napetosti. O upravičenosti take poenostavitve in pogojih, ki jih morajo izpolnjevati pomiki in zasuki telesa, da bi jo lahko vpeljali, bomo podrobneje govorili v drugem in četrtem poglavju.

V enačbah (1.108) in (1.109) smo ravnotežna pogoja za poljuben del telesa izrazili z zunanjo obtežbo ter z notranjo silo \mathbf{N}_n in notranjim momentom \mathbf{M}_n . Telesa, pri katerih je celotna zunanja obtežba znana in uravnotežena, imenujemo *statično določena telesa*. Pri statično določenih telesih lahko torej z ravnotežnima enačbama (1.108) in (1.109) enolično določimo notranjo silo \mathbf{N}_n in notranji moment \mathbf{M}_n .

Če izrazimo ravnotežne pogoje poljubnega materialnega delca z napetostmi, pa v treh ravnotežnih enačbah (1.131) in pripadajočih robnih pogojih (1.140) nastopa šest neodvisnih napetosti. Naloga je očitno nedoločena, ne glede na to, ali je telo sicer statično določeno ali ne. To pomeni, da računski model togega telesa v splošnem ne omogoča enolične določitve napetosti. Manjkajoče enačbe bomo v nadaljevanju poiskali ob upoštevanju deformabilnostnih lastnosti obravnavanega telesa.

1.7 Tenzor napetosti

Enačba (1.138), ki smo jo izpeljali v prejšnjem razdelku, predstavlja zvezo med koordinatnimi napetostnimi vektorji σ_x , σ_y , σ_z in specifično površinsko obtežbo \mathbf{p}_n v točki Q zunanje mejne ploskve telesa.



Slika 1.16

V primeru, da točka Q ne leži na zunanji mejni ploskvi, temveč znotraj telesa, in položimo skozi jo poljubno ravnino Π_n z normalo \mathbf{e}_n , prevzame vlogo vektorja specifične zunanje površinske obtežbe \mathbf{p}_n napetostni vektor σ_n (slika 1.16)

$$\sigma_n = \sigma_x e_{nx} + \sigma_y e_{ny} + \sigma_z e_{nz} = \sum_i \sigma_i e_{ni}. \quad (1.142)$$

Kartezijske komponente napetostnega vektorja dobimo po vzoru enačb (1.140)

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx} e_{nx} + \sigma_{yx} e_{ny} + \sigma_{zx} e_{nz} \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy} e_{nx} + \sigma_{yy} e_{ny} + \sigma_{zy} e_{nz} \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz} e_{nx} + \sigma_{yz} e_{ny} + \sigma_{zz} e_{nz} \end{aligned} \quad (1.143)$$

ali na kratko

$$\sigma_{ni} = \sum_j \sigma_{ji} e_{nj} \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.144)$$

Zveza (1.142) je znana kot *Cauchyjeva[†] enačba*. Velja za eno najpomembnejših enačb v mehaniki trdnih teles, saj omogoča določitev vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki v obravnavani točki telesa pripada poljubni ravnini z normalo \mathbf{e}_n , če le poznamo napetostne vektorje $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$, ki v obravnavani točki pripadajo koordinatnim ravninam izbranega kartezijskega koordinatnega sistema.

To ugotovitev lahko še posplošimo: če poznamo vektorje napetosti v treh poljubnih nevzporednih ravninah skozi obravnavano točko T , lahko ob upoštevanju enačbe (1.142) izpeljemo izraze za vektorje napetosti, ki pripadajo katerikoli drugi ravnini iz neskončne množice ravnin, ki jih lahko položimo skozi točko T .

Napetostno stanje v točki T je torej enolično določeno s tremi koordinatnimi napetostnimi vektorji

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_x &= \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{xy} \mathbf{e}_y + \sigma_{xz} \mathbf{e}_z = \sum_j \sigma_{xj} \mathbf{e}_j \\ \boldsymbol{\sigma}_y &= \sigma_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{yz} \mathbf{e}_z = \sum_j \sigma_{yj} \mathbf{e}_j \\ \boldsymbol{\sigma}_z &= \sigma_{zx} \mathbf{e}_x + \sigma_{zy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z = \sum_j \sigma_{zj} \mathbf{e}_j,\end{aligned}\tag{1.145}$$

kar lahko zapišemo še krajše

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z).\tag{1.146}$$

Koordinatne napetostne vektorje določa devet skalarnih vrednosti napetosti, od katerih pa jih je zaradi simetrije strižnih napetosti le šest medsebojno neodvisnih. Enačbe (1.145) lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\sigma}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{Bmatrix}\tag{1.147}$$

[†] Augustin Louis Cauchy, francoski fizik, 1789–1857.

ali na kratko

$$\{\boldsymbol{\sigma}_i\} = [\sigma_{ij}] \{\mathbf{e}_j\}. \quad (1.148)$$

Pri tem smo s $[\sigma_{ij}]$ označili matriko napetostnih komponent, ki jo navadno imenujemo *matrika napetosti*

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.148)$$

Tudi komponente napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nx} \mathbf{e}_x + \sigma_{ny} \mathbf{e}_y + \sigma_{nz} \mathbf{e}_z = \sum_k \sigma_{nk} \mathbf{e}_k \quad (1.149)$$

pri praktičnem računanju običajno določamo v matrični obliki, ki sledi neposredno iz zapisa (1.143)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{nx} \\ e_{ny} \\ e_{nz} \end{Bmatrix}. \quad (1.150)$$

Kvadratna matrika 3×3 na desni strani enačbe (1.150) je očitno transponirana matrika napetosti $[\sigma_{ij}]$. Zaradi simetrije napetostnih komponent velja

$$[\sigma_{ij}]^T = [\sigma_{ji}] = [\sigma_{ij}] \quad (1.151)$$

in enačbo (1.150) lahko na kratko zapišemo takole

$$\{\sigma_{ni}\} = [\sigma_{ij}] \{e_{nj}\}. \quad (1.152)$$

Velikost normalne komponente σ_{nn} napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$ je določena z enačbo (1.112). V matrični obliki jo zapišemo takole

$$\sigma_{nn} = \begin{Bmatrix} e_{nx} \\ e_{ny} \\ e_{nz} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \{e_{ni}\}^T \{\sigma_{ni}\}. \quad (1.153)$$

Ob upoštevanju enačbe (1.152) dobimo

$$\sigma_{nn} = \{e_{ni}\}^T [\sigma_{ij}] \{e_{nj}\} = \begin{Bmatrix} e_{nx} \\ e_{ny} \\ e_{nz} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{nx} \\ e_{ny} \\ e_{nz} \end{Bmatrix}. \quad (1.154)$$

Z uporabo dvojne vsote lahko pišemo

$$\sigma_{nn} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} e_{ni} e_{nj} \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.155)$$

Pri analizi napetosti v obravnavani točki telesa je torej osnovni podatek matrika $[\sigma_{ij}]$, v kateri so, kakor sledi iz enačbe (1.147), po vrsticah in stolpcih urejene komponente napetostnih vektorjev v koordinatnih ravninah. Matriko $[\sigma_{ij}]$ torej lahko razumemo kot urejeno dvorazsežno shemo vrednosti, s katerimi opisujemo napetostno stanje v izbrani točki območja \mathcal{V} . Tako smo prišli do nove matematične količine, ki jo določajo trije vektorji oziroma devet skalarnih komponent. Imenujemo jo *tenzor 2. reda*, ker pač njeni elementi tvorijo dvorazsežno shemo števil. V našem primeru gre za opis napetostnega stanja, zato vpeljemo pojem *tenzor napetosti* in ga označimo s $\boldsymbol{\sigma}(2)$.

V splošnem so tenzorji abstraktne matematične količine, ki so neodvisne od privzetega koordinatnega sistema. Tenzorji so opisani s komponentami, ki imajo bistveno lastnost, da se pri zamenjavi koordinatnega sistema obnašajo v skladu z določenimi pravili. Omenili smo že, da je napetostno stanje materialnega delca odvisno od oblike in velikosti telesa, načina podpiranja, lastnosti materiala in zunanje obtežbe; izbira koordinatnega sistema pa na napetostno stanje ne vpliva. Seveda pa imajo vektorji napetosti, s katerimi opišemo napetostno stanje, v različnih koordinatnih sistemih različne komponente. Torej ima tudi tenzor napetosti v različnih koordinatnih sistemih različne komponente. Mimogrede omenimo, da ime tenzor izvira ravno iz latinske besede za napetost (lat.: *tensio* – napetost, angl.: *tension* – nateg, napetost).

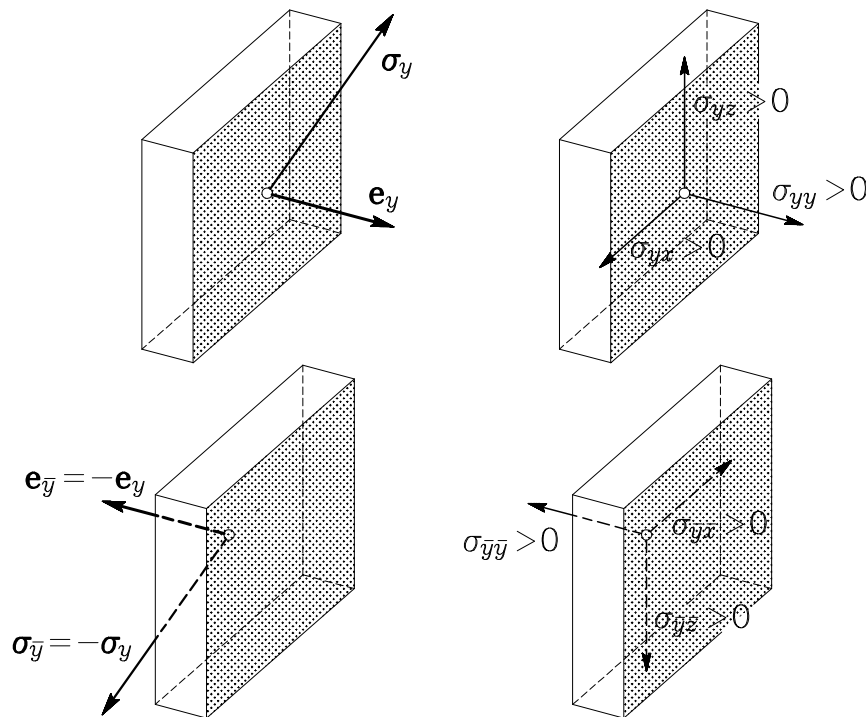
Za boljše razumevanje si oglejmo še nekaj primerov tenzorjev. Skalarno polje temperature v prostoru, na primer, je v vsaki točki prostora določeno z enim samim podatkom, ki pove, kolikšna je temperatura v tisti točki, in ki seveda ni odvisen od tega, kakšen koordinatni sistem smo izbrali za določitev lege točke v prostoru. Zato lahko rečemo, da je *tenzor ničtega reda*. Podobno je na primer vektor hitrosti gibajočega se delca v trirazsežnem prostoru opisan s tremi komponentami. Če za opis gibanja delca izberemo kak drug koordinatni sistem, se komponente vektorja hitrosti spremenijo, njegova velikost in smer v prostoru pa ostaneta nespremenjeni, saj se fizikalno stanje delca s tem ni prav nič spremenilo. Vektor hitrosti je torej *tenzor prvega reda*. Napetostno stanje delca je opisano s tremi koordinatnimi vektorji napetosti, katerih devet komponent je razvrščenih v dvorazsežno shemo. Ta shema predstavlja *tenzor drugega reda* v izbranem koordinatnem sistemu. V nadaljevanju bomo spoznali še nekatere tenzorje višjih redov, ki se ravnaajo po enakih pravilih, njihov red pa je odvisen od potrebnega števila podatkov za opis obravnavanih količin.

Najpomembnejša lastnost tenzorjev je torej *invariantnost*. *Invariante* so količine, ki se pri spremembi koordinatnega sistema ne spremenijo. Še enkrat pa moramo opozoriti, da vsaka urejena shema števil še ni nujno tenzor, temveč morajo ta števila izpolnjevati določene pogoje. Z lastnostmi tenzorjev in z računanjem z njimi se ukvarja posebna veja matematike, *tenzorski račun*[†].

Vrnimo se k tenzorju napetosti, ki je v kartezijskem koordinatnem sistemu s koordinatno bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ opisan s komponentami matrike $[\sigma_{ij}]$. Kakor kaže enačba (1.150), je tedaj mogoče določiti komponente napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki pripada poljubni ravnini z normalo \mathbf{e}_n . Zato vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ pogosto imenujemo tudi *vrednost tenzorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}$ v smeri \mathbf{e}_n* .

[†] Glej na primer knjigo: Saje, Srpčič, Osnove nelinearne mehanike trdnih teles I, Ljubljana (1993).

Vrstice matrice $[\sigma_{ij}]$ (zaradi simetrije strižnih napetosti pa tudi stolpci) vsebujejo kartezijske komponente napetostnih vektorjev $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, ki po vrsti pripadajo ravninam z normalami $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Skalarne komponente σ_{ij} napetostnega tenzorja $\sigma(2)$ imenujemo *napetosti*. Pri tem prvi indeks vedno določa smer zunanje normale na ravnino, ki ji napetost pripada, drugi indeks pa določa smer koordinatne osi, vzdolž katere je usmerjena komponenta. Če ima napetost oba indeksa enaka, jo imenujemo *normalna napetost*, ker ima smer normale na obravnavano ravnino. Tako so $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ po vrsti normalne napetosti v ravninah z normalami $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Pozitiven predznak normalne napetosti pomeni, da gre za *natezno*, negativen pa, da gre za *tlačno* normalno napetost.



Slika 1.17

Predznaki so pri podajanju normalnih napetosti zelo pomembni, saj je znano, da se nekatere snovi (posebej značilno je to za beton, malto,

opeko, mavec, ...) zelo različno obnašajo pri natezni oziroma tlačni obremenitvi.

Komponente, ki imajo različna indeksa, predstavljajo strižne napetosti. Tako je σ_{xy} strižna napetost v ravnini z normalo \mathbf{e}_x , in sicer v smeri baznega vektorja \mathbf{e}_y , σ_{yx} pa je strižna napetost v ravnini z normalo \mathbf{e}_y , vendar v smeri baznega vektorja \mathbf{e}_x . Iz momentnega ravnotežnega pogoja (1.134) vemo, da sta ti dve strižni napetosti enaki. Podobno velja za strižne napetosti v preostalih dveh koordinatnih ravninah. Negativen predznak strižne napetosti pomeni, da je strižna napetost usmerjena v nasprotni smeri ustreznega baznega vektorja. Ob upoštevanju enačb (1.98), (1.114) in (1.115) lahko s predznaki napetostnih komponent opravimo na kratko:

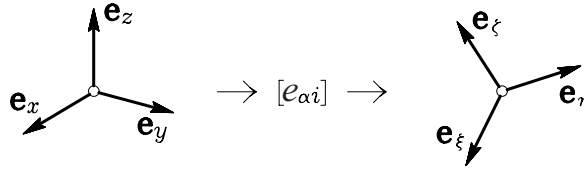
Če ima zunanja normala smer katerega od baznih vektorjev $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, imajo pozitivne komponente ustreznih napetostnih vektorjev smeri $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, negativne komponente pa nasprotne smeri $(-\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_z)$. Če pa ima zunanja normala smer $-\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y$ ali $-\mathbf{e}_z$, velja ravno obratno: pozitivne komponente imajo smeri $-\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_z$, negativne pa $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ (slika 1.17). S tem je zagotovljeno, da so pozitivne normalne napetosti *natezne*, negativne pa *tlačne*.

1.8 Transformacija napetosti

Pri reševanju praktičnih nalog konstrukcijske mehanike se pogosto zgodi, da poznamo napetosti v koordinatnih ravninah izbranega koordinatnega sistema, določiti pa želimo napetosti, ki pri istem napetostnem stanju pripadajo koordinatnim ravninam kakega drugega koordinatnega sistema. Kakor smo poudarili v prejšnjem razdelku, je namreč isto napetostno stanje v različnih koordinatnih sistemih opisano z različnimi komponentami pripadajočega tenzorja napetosti.

Oglejmo si primer, da je napetostno stanje v obravnavani točki telesa opisano s komponentami σ_{ij} simetričnega tenzorja napetosti glede na

izbrani kartezijski koordinatni sistem z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.



Slika 1.18

V isti točki si zamislimo še nov kartezijski koordinatni sistem, katerega bazo tvorijo trije paroma pravokotni enotski vektorji $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ (slika 1.18). Ker obe koordinatni bazi pripadata isti točki prostora, si lahko predstavljamo, da novo bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ dobimo s primernim zasukom prvotne baze $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Lega novih baznih vektorjev glede na prvotno bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ je podana z njihovimi smernimi kosinusi. V matrični obliki dobimo

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{Bmatrix} \quad (1.156)$$

oziroma v simboličnem zapisu

$$\{\mathbf{e}_\alpha\} = [e_{\alpha i}]\{\mathbf{e}_i\}. \quad (1.157)$$

Z enakimi enačbami (1.31) oziroma (1.32) smo v razdelku **1.2** zapisali zveze med baznimi vektorji mirujoče in telesne koordinatne baze. Matriko smernih kosinusov $[e_{\alpha i}]$ smo imenovali *transformacijska matrika* in opisali njene lastnosti. Pri izpeljavi pravila za transformacijo komponent tenzorja napetosti pri zamenjavi koordinatne baze se bomo zato sklicevali na enačbe (1.29) do (1.71), ki smo jih spoznali v razdelku **1.2**.

Napetostne vektorje v koordinatnih ravninah novega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ izračunamo z enačbo (1.142), ki jo na kratko zapišemo takole

$$\sigma_n = \sum_i \sigma_i e_{ni} \quad (i = x, y, z). \quad (1.158)$$

Če splošni indeks normale n zamenjamo z α ($\alpha = \xi, \eta, \zeta$), dobimo

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \sum_i e_{\alpha i} \boldsymbol{\sigma}_i \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta; i = x, y, z). \quad (1.159)$$

Koordinatne vektorje napetosti $\boldsymbol{\sigma}_i$ izrazimo z enačbo (1.146) in vstavimo v enačbo (1.159)

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \sum_i \sum_j e_{\alpha i} \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta; i, j = x, y, z). \quad (1.160)$$

Komponente napetostnih vektorjev v koordinatnih ravninah novega koordinatnega sistema dobimo s skalarnim množenjem teh vektorjev z baznimi vektorji $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \quad (\alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta). \quad (1.161)$$

Ker je

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\beta = e_{j\beta}, \quad (1.162)$$

sledi ob upoštevanju enačbe (1.160) končni zapis poljubne komponente $\sigma_{\alpha\beta}$ obravnavanega tenzorja napetosti v koordinatni bazi $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \sum_i \sum_j e_{\alpha i} \sigma_{ij} e_{j\beta} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j} \\ &(\alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta; i, j = x, y, z). \end{aligned} \quad (1.163)$$

Poudarili smo, da pri zapisu transformacijske enačbe z dvojno vsoto vrstni red množencev ni pomemben. Gornja enačba je ugodna, kadar je treba določiti le posamezne komponente tenzorja napetosti v zasukanem koordinatnem sistemu. Kot zgled določimo komponenti $\sigma_{\eta\eta}$ in $\sigma_{\eta\zeta}$. Ob upoštevanju simetrije zunajdiagonalnih komponent napetostnega tenzorja dobimo

$$\alpha = \beta = \eta :$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{xx} e_{\eta x}^2 + \sigma_{yy} e_{\eta y}^2 + \sigma_{zz} e_{\eta z}^2 + \\ &2\sigma_{xy} e_{\eta x} e_{\eta y} + 2\sigma_{yz} e_{\eta y} e_{\eta z} + 2\sigma_{zx} e_{\eta z} e_{\eta x}, \end{aligned}$$

$$\alpha = \eta, \beta = \zeta :$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\zeta} &= \sigma_{xx} e_{\eta x} e_{\zeta x} + \sigma_{yy} e_{\eta y} e_{\zeta y} + \sigma_{zz} e_{\eta z} e_{\zeta z} + \sigma_{xy} (e_{\eta x} e_{\zeta y} + e_{\eta y} e_{\zeta x}) + \\ &\sigma_{yz} (e_{\eta y} e_{\zeta z} + e_{\eta z} e_{\zeta y}) + \sigma_{zx} (e_{\eta z} e_{\zeta x} + e_{\eta x} e_{\zeta z}). \end{aligned}$$

V primeru, da želimo izračunati vse komponente tenzorja napetosti v zasukanem koordinatnem sistemu, je ugodneje zapisati enačbo (1.163) v matrični obliki

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [e_{\alpha i}][\sigma_{ij}][e_{j\beta}]. \quad (1.164)$$

Upoštevajoč oznako (1.67) lahko tudi pišemo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T[\sigma_{ij}][T]. \quad (1.165)$$

Ker je $|e_{i\alpha}| = |T| = 1$, je transformacijska formula vedno obrnljiva. Tako lahko tudi v primeru, da poznamo komponente napetosti $\sigma_{\alpha\beta}$ v zasukanem koordinatnem sistemu $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, določimo komponente istega napetostnega tenzorja v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Enačbo (1.165) pomnožimo z leve s $[T]$ in z desne s $[T]^T$, upoštevamo enačbo (1.70) in dobimo

$$[\sigma_{ij}] = [T][\sigma_{\alpha\beta}][T]^T \quad (1.166)$$

oziroma

$$[\sigma_{ij}] = [e_{i\alpha}][\sigma_{\alpha\beta}][e_{\beta j}]. \quad (1.167)$$

Zapišimo enačbo (1.167) še z dvojno vsoto

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} e_{i\alpha} \sigma_{\alpha\beta} e_{\beta j} \quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta). \quad (1.168)$$

Enačbi (1.163) oziroma (1.168) lahko splošimo v pravilo za transformacijo kartezijskih tenzorjev višjih redov. Kot primer zapišimo transformacijsko pravilo za kartezijski tenzor $\mathbf{C}(4)$, ki ima v koordinatah x, y, z komponente C_{ijkl} , v koordinatah ξ, η, ζ pa komponente $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l C_{ijkl} e_{\alpha i} e_{\beta j} e_{\gamma k} e_{\delta l} \quad (1.169)$$

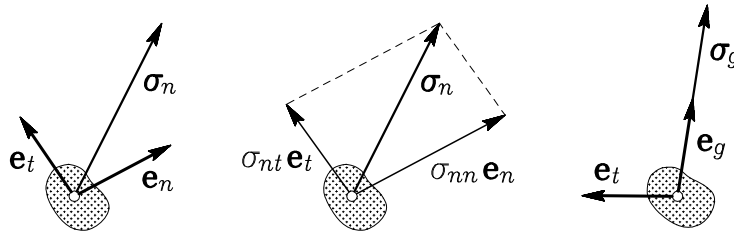
$$(i, j, k, l = x, y, z; \alpha, \beta, \gamma, \delta = \xi, \eta, \zeta).$$

1.9 Glavne normalne napetosti

V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da izbranemu delcu telesa v namišljeni prerezni ploskvi z normalo \mathbf{e}_n pripada napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$. Pri obravnavanem mehanskem stanju telesa in izbranem materialnem delcu sta torej velikost in smer napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$ odvisna od orientacije prerezne ploskve, ki je podana z enotskim vektorjem njene normale \mathbf{e}_n . Vektor \mathbf{e}_n je določen s tremi smernimi kosinusi e_{nx} , e_{ny} , e_{nz} . Če v smislu enačbe (1.1) predpišemo vrednosti koordinat (x, y, z) in s tem "izberemo" delec telesa, lahko torej rečemo, da je napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ izbranega delca funkcija treh spremenljivk e_{nx} , e_{ny} , e_{nz} . Te spremenljivke niso neodvisne med seboj, saj morajo ustrezati pogoju, da je \mathbf{e}_n enotski vektor

$$e_{nx}^2 + e_{ny}^2 + e_{nz}^2 = 1. \quad (1.170)$$

Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ razstavimo v normalno in strižno komponento. Normalna komponenta σ_{nn} pripada smeri enotskega vektorja normale \mathbf{e}_n , strižna komponenta σ_{nt} pa smeri tangentnega vektorja na izbrano prerezno ploskev \mathbf{e}_t , ki je določen s presečnico ravnine vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_n$ in \mathbf{e}_n s tangencialno ravnino prerezne ploskve (slika 1.19).



Slika 1.19

Pri tem je

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nn} \mathbf{e}_n + \sigma_{nt} \mathbf{e}_t \quad (1.171)$$

$$\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_n = e_{tx}e_{nx} + e_{ty}e_{ny} + e_{tz}e_{nz} = 0, \quad (1.172)$$

saj sta vektorja \mathbf{e}_n in \mathbf{e}_t medsebojno pravokotna. Sedaj se lahko vprašamo, ali obstaja takšna ravnina skozi izbrani delec, da je pri-

padajoči napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ vzporeden s smernico zunanje normale na to ravnino. Če označimo enotsko zunanjo normalo take ravnine z \mathbf{e}_g , lahko pripadajoči napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_g$ zapišemo takole

$$\boldsymbol{\sigma}_g = \sigma_{gg} \mathbf{e}_g. \quad (1.173)$$

V tem primeru ima napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_g$ samo normalno komponento σ_{gg} , medtem ko je strižna komponenta enaka nič

$$\boldsymbol{\sigma}_g \cdot \mathbf{e}_t = \sigma_{gt} = 0 \quad (\mathbf{e}_t \perp \mathbf{e}_g). \quad (1.174)$$

Normalno napetost σ_{gg} imenujemo *glavna normalna napetost* ali kar *glavna napetost*, smer zunanje normale \mathbf{e}_g pa *glavna smer* ali *glavni vektor*. Ugotoviti torej moramo, ali obstaja glavna smer

$$\mathbf{e}_g = e_{gx} \mathbf{e}_x + e_{gy} \mathbf{e}_y + e_{gz} \mathbf{e}_z, \quad (1.175)$$

za katero lahko v skladu z enačbama (1.142) in (1.173) izrazimo napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_g$ na dva načina

$$\boldsymbol{\sigma}_g = \boldsymbol{\sigma}_x e_{gx} + \boldsymbol{\sigma}_y e_{gy} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{gz} = \sigma_{gg} \mathbf{e}_g. \quad (1.176)$$

V komponentni obliki dobimo

$$\begin{aligned} \sigma_{gx} &= \sigma_{xx} e_{gx} + \sigma_{yx} e_{gy} + \sigma_{zx} e_{gz} = \sigma_{gg} e_{gx} \\ \sigma_{gy} &= \sigma_{xy} e_{gx} + \sigma_{yy} e_{gy} + \sigma_{zy} e_{gz} = \sigma_{gg} e_{gy} \\ \sigma_{gz} &= \sigma_{xz} e_{gx} + \sigma_{yz} e_{gy} + \sigma_{zz} e_{gz} = \sigma_{gg} e_{gz}. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Pri tem je napetostno stanje izbranega delca opisano s šestimi znanimi neodvisnimi komponentami napetostnega tenzorja $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}$ glede na koordinatni sistem (x, y, z) . Kot neznanke pa v sistemu enačb (1.177) nastopajo trije smerni kosinusi e_{gx}, e_{gy}, e_{gz} ter glavna napetost σ_{gg} . Skupaj s pogojem (1.170) imamo torej štiri enačbe za štiri neznanke. Enačbe (1.177) obravnavamo kot sistem treh homogenih linearnih algebrskih enačb za tri smerne kosinuse e_{gx}, e_{gy}, e_{gz} . Če te enačbe zapišemo v matrični obliki, dobimo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{gx} \\ e_{gy} \\ e_{gz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.178)$$

Trivialna rešitev $e_{gx} = e_{gy} = e_{gz} = 0$ ne pride v poštev zaradi pogoja (1.170), netrivialne rešitve pa je mogoče dobiti le, če je matrika koeficientov sistema linearnih enačb (1.178) singularna. To pomeni, da mora biti njena determinanta enaka nič

$$|[\sigma_{ij}] - \sigma_{gg}[I]| = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{gg} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.179)$$

kjer je $[I]$ enotska matrika

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.180)$$

Če razvijemo determinanto in jo uredimo po neznaniki σ_{gg} , dobimo kubično enačbo

$$P(\sigma_{gg}) = -\sigma_{gg}^3 + I_1^\sigma \sigma_{gg}^2 - I_2^\sigma \sigma_{gg} + I_3^\sigma = 0. \quad (1.181)$$

V matematiki je naloga, ki jo zastavlja enačba (1.178), znana pod imenom *problem lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrik*. Pri tem oznake I_1^σ , I_2^σ in I_3^σ pomenijo

$$I_1^\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{Tr}([\sigma_{ij}]) \quad (1.182)$$

$$I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \quad (1.183)$$

$$I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = |\sigma_{ij}| = \det[\sigma_{ij}]. \quad (1.184)$$

Za količine I_1^σ , I_2^σ , I_3^σ je mogoče dokazati (zglede 1.2), da se njihove vrednosti ne spremenijo, če opišemo napetostno stanje v kakem drugem koordinatnem sistemu, na primer v kartezijskem sistemu z bazo \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ

$$I_1^\sigma = \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta} = \text{Tr}([\sigma_{\alpha\beta}]) \quad (1.185)$$

$$I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} \end{vmatrix} \quad (1.186)$$

$$I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{vmatrix} = |\sigma_{\alpha\beta}| = \det[\sigma_{\alpha\beta}]. \quad (1.187)$$

Enačbe (1.182) do (1.187) lahko z uporabo znaka za vsoto ter Kroneckerjevega simbola δ_{ij} in permutacijskega simbola e_{ijk} , ki smo ju vpeljali v razdelku 1.2, zapišemo tudi na kratko

$$I_1^\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \delta_{ij} = \sum_i \sigma_{ii} = \sum_\alpha \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \sigma_{\alpha\alpha} \quad (1.188)$$

$$I_2^\sigma = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta (\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta\alpha}) \quad (1.189)$$

$$I_3^\sigma = \sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk} \sigma_{xi}\sigma_{yj}\sigma_{zk} = \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma e_{\alpha\beta\gamma} \sigma_{\xi\alpha}\sigma_{\eta\beta}\sigma_{\zeta\gamma} \quad (1.190)$$

$(i, j, k = x, y, z; \alpha, \beta, \gamma = \xi, \eta, \zeta).$

Količine I_1^σ , I_2^σ , I_3^σ so torej neodvisne od izbire koordinatnega sistema. Zato jih imenujemo *osnovne invariante napetostnega tenzorja*

I_1^σ je prva ali linearna invarianta,

I_2^σ je druga ali kvadratna invarianta,

I_3^σ je tretja ali kubična invarianta.

Kubično enačbo (1.181) imenujemo *lastna* ali *karakteristična* enačba napetostnega tenzorja, njene korene

$$\sigma_{gg} = \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$$

pa *lastne* ali *karakteristične* vrednosti napetostnega tenzorja. Ker so koeficienti enačbe (1.181) neodvisni od izbire koordinatnega sistema, so take, torej invariantne, tudi rešitve σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} .

Glede na to, da so komponente napetostnega tenzorja, ki opisujejo napetostno stanje delca, realna števila, je umestno pričakovati, da so tudi glavne normalne napetosti realne vrednosti. O tem se lahko prepričamo takole:

Leva stran karakteristične enačbe (1.181) je kubični polinom. Ker nastopajo kompleksne ničle polinomov v parih, ima kubični polinom vedno vsaj eno realno ničlo. Vzemimo, da smo to ničlo že določili in jo označili s σ_{11} kot prvo od glavnih normalnih napetosti. Tej glavni normalni napetosti naj pripada glavna smer \mathbf{e}_1 . Razen tega vzemimo, da smo kartezijsko bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ izbrali tako, da se smer \mathbf{e}_x ujema z glavno smerjo \mathbf{e}_1 . Tedaj je zaradi zveze (1.174) $\sigma_{1y} = \sigma_{1z} = 0$ in enačbo (1.179) lahko zapišemo takole

$$P(\sigma_{gg}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{gg} & 0 & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{gg} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.191)$$

Determinanto razvijemo po elementih prve vrstice in dobimo

$$(\sigma_{11} - \sigma_{gg}) [\sigma_{gg}^2 - (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma_{gg} + (\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{yz}\sigma_{zy})] = 0. \quad (1.192)$$

Rešitvi σ_{22} in σ_{33} sta ničli kvadratnega polinoma v oglatem oklepaju na levi strani enačbe (1.192). Diskriminanta D ustrezne kvadratne enačbe

$$\sigma_{gg}^2 - (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma_{gg} + (\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{yz}\sigma_{zy}) = 0$$

je pozitivna, saj je tenzor napetosti simetričen ($\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$)

$$D = (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 - 4(\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{yz}\sigma_{zy}) = (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{yz}^2 \geq 0. \quad (1.193)$$

Ker je diskriminanta pozitivna, so vsi trije koreni realni. Lahko so pozitivni, negativni ali enaki nič.

Z določitvijo glavnih normalnih napetosti $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ iz karakteristične enačbe napetostnega stanja smo zagotovili obstoj netrivialnih rešitev sistema homogenih enačb (1.178) za smerne kosinuse pripadajočih glavnih smeri $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Izračunane glavne napetosti zaporedoma vstavimo v sistem (1.178) in ga za vsako od njih rešimo po kateri od metod za reševanje homogenega sistema linearnih enačb. Tako dobljene rešitve moramo še normirati, da dobimo enotske vektorje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Oglejmo si primer določitve smernih kosinusov glavnih smeri \mathbf{e}_g ($g = 1, 2, 3$) z uporabo Cramerjevega[†] pravila.

Vsaj eden od smernih kosinusov mora biti različen od nič; naj bo to na primer e_{gz} . Enačbe (1.178) delimo z e_{gz}

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_{gg}) \frac{e_{gx}}{e_{gz}} + \sigma_{yx} \frac{e_{gy}}{e_{gz}} &= -\sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \frac{e_{gx}}{e_{gz}} + (\sigma_{yy} - \sigma_{gg}) \frac{e_{gy}}{e_{gz}} &= -\sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} \frac{e_{gx}}{e_{gz}} + \sigma_{yz} \frac{e_{gy}}{e_{gz}} &= -(\sigma_{zz} - \sigma_{gg}). \end{aligned} \quad (1.194)$$

Dobili smo torej tri enačbe za dva neznanata količnika med smernimi kosinusi. Ker smo glavno normalno napetost σ_{gg} določili kot koren karakteristične enačbe, bo rešitev enolična, ne glede na to, kateri dve od enačb (1.194) izberemo za določitev obeh neznanek. Iz prvih dveh, na primer, po Cramerjevem pravilu dobimo

$$\frac{e_{gx}}{e_{gz}} = \frac{\begin{vmatrix} -\sigma_{zx} & \sigma_{yx} \\ -\sigma_{zy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} \end{vmatrix}} = \frac{K_{zx}}{K_{zz}} \quad (1.195)$$

[†] Gabriel Cramer, švicarski matematik, 1704–1752.

$$\frac{e_{gy}}{e_{gz}} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & -\sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & -\sigma_{zy} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} \end{vmatrix}} = \frac{K_{zy}}{K_{zz}}. \quad (1.196)$$

Pri tem smo s K_{zx} , K_{zy} , K_{zz} označili ustrezne kofaktorje k členom tretje vrstice determinante (1.179), izračunane pri glavni vrednosti σ_{gg}

$$\begin{aligned} K_{zx} &= \begin{vmatrix} \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{gg} & \sigma_{zy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sigma_{zx} & \sigma_{yx} \\ -\sigma_{zy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} \end{vmatrix} \\ K_{zy} &= - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{zy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & -\sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & -\sigma_{zy} \end{vmatrix} \\ K_{zz} &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{gg} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{gg} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.197)$$

Upoštevajoč enačbo (1.170) dobimo

$$e_{gx}^2 + e_{gy}^2 + e_{gz}^2 = \frac{K_{zx}^2}{K_{zz}^2} e_{gz}^2 + \frac{K_{zy}^2}{K_{zz}^2} e_{gz}^2 + e_{gz}^2 = 1, \quad (1.198)$$

od koder sledi

$$e_{gz} = \pm \frac{K_{zz}}{\sqrt{K_{zx}^2 + K_{zy}^2 + K_{zz}^2}}. \quad (1.199)$$

Če vpeljemo oznako k_z za normo kofaktorjev k členom tretje vrstice determinante (1.179)

$$k_z = \pm \sqrt{K_{zx}^2 + K_{zy}^2 + K_{zz}^2}, \quad (1.200)$$

lahko ob upoštevanju enačb (1.195), (1.196) in (1.199) pišemo

$$e_{gx} = \frac{K_{zx}}{k_z} \quad e_{gy} = \frac{K_{zy}}{k_z} \quad e_{gz} = \frac{K_{zz}}{k_z}. \quad (1.201)$$

Kakor vidimo, so smerni kosinusi e_{gx} , e_{gy} , e_{gz} glavne smeri \mathbf{e}_g premosorazmerni kofaktorjem tretje vrstice determinante (1.179), pač zato, ker smo pri reševanju sistema enačb za smerne kosinuse te enačbe delili s smernim kosinusom e_{gz} . Ugotovitev lahko posplošimo: *Smerni kosinusi glavne smeri so premosorazmerni kofaktorjem ene od vrstic ali enega od stolpcev determinante matrike koeficientov homogenega sistema enačb (1.178).*

V splošnem primeru, ko imamo tri med seboj različne vrednosti glavnih normalnih napetosti (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33}), moramo poiskati tri trojice smernih kosinusov kot rešitve sistema enačb (1.178) pri vrednostih glavnih normalnih napetosti $\sigma_{gg} = \sigma_{11}$, σ_{22} , σ_{33} . Tako določimo smerne kosinuse vseh treh glavnih smeri. Z enačbami (1.201) je določena smernica glavnega vektorja \mathbf{e}_g . Njegovo smer pa določimo z izbiro predznaka norme kofaktorjev. Pri določevanju dveh od glavnih vektorjev lahko ta predznak poljubno izberemo, pri določevanju tretjega pa ga določimo iz pogoja, da glavni vektorji \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 tvorijo desnosučno bazo. V nadaljevanju bomo pokazali, da so glavni vektorji paroma pravokotni med seboj, zato je najenostavneje, če najprej po opisanem postopku določimo, na primer, glavna vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 , tretjega pa izračunamo kot vektorski produkt prvih dveh

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 . \quad (1.202)$$

Ugotoviti moramo še, kakšna je medsebojna lega glavnih vektorjev \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 . Označimo dva izmed njih z \mathbf{e}_a in \mathbf{e}_b in zapišimo pripadajoča vektorja napetosti v skladu z enačbo (1.176)

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \sigma_x e_{ax} + \sigma_y e_{ay} + \sigma_z e_{az} = \sigma_{aa} \mathbf{e}_a \quad (1.203)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \sigma_x e_{bx} + \sigma_y e_{by} + \sigma_z e_{bz} = \sigma_{bb} \mathbf{e}_b . \quad (1.204)$$

Enačbo (1.203) skalarno pomnožimo z \mathbf{e}_b , enačbo (1.204) pa z \mathbf{e}_a , nakar enačbo (1.204) odštejemo od enačbe (1.203) in dobimo

$$(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = 0 . \quad (1.205)$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{e}_b = \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a$ (enakost izpeljemo v zgledu 1.3), in če je $\sigma_{aa} \neq \sigma_{bb}$, dobimo

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = 0. \quad (1.206)$$

Če sta dve glavni normalni napetosti različni ($\sigma_{aa} \neq \sigma_{bb}$), sta torej pripadajoča glavna vektorja \mathbf{e}_a in \mathbf{e}_b med seboj pravokotna ($\mathbf{e}_a \perp \mathbf{e}_b$).

V splošnem so možni trije primeri:

1. Vse tri glavne normalne napetosti so med seboj različne ($\sigma_{11} \neq \sigma_{22} \neq \sigma_{33}$) (slika 1.22). V tem primeru dobimo tri glavne smeri $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, za katere iz ugotovitve (1.206) sledi

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (1.207)$$

2. Dve glavni normalni napetosti sta enaki in različni od tretje (na primer $\sigma_{11} = \sigma_{22} \neq \sigma_{33}$). Iz enačbe (1.206) lahko sklepamo, da je

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (1.208)$$

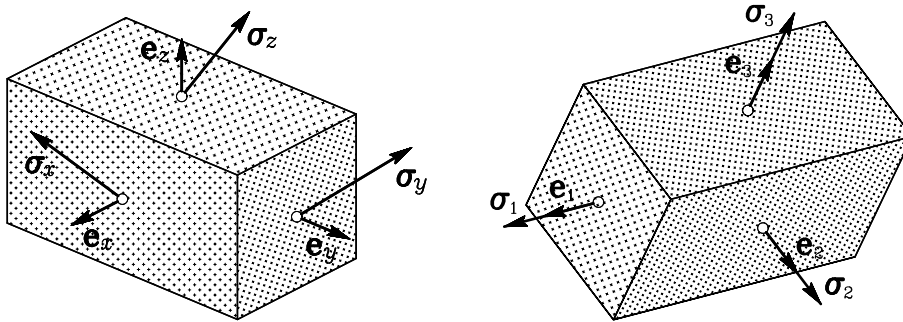
V tem primeru imamo le eno glavno smer \mathbf{e}_3 in glavno ravnino, ki je pravokotna na \mathbf{e}_3 . V tej ravnini so vse smeri enakopravne (vsi enotski vektorji v ravnini z normalo \mathbf{e}_3 so glavni vektorji obravnavanega napetostnega stanja). Tak primer napetostnega stanja je znan kot *osnosimetrično* oziroma *rotacijsko simetrično napetostno stanje*.

3. Vse tri glavne normalne napetosti so enake med seboj ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$). Tedaj so vse smeri skozi obravnavani delec enakopravne. Napetostno stanje je *izotropno*: v vseh ravninah imamo enake normalne napetosti, strižnih napetosti ni. Primer takšnega napetostnega stanja je hidrostatični tlak ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$). Podoben primer je prikazan v zgledu 1.8.

V splošnem primeru ima napetostni tenzor $[\sigma_{ij}]$ tri različne glavne normalne napetosti $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, ki jim pripadajo tri med seboj pravokotne

smeri $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. To so glavne smeri, ki se ujemajo s smermi rezultirajočih napetostnih vektorjev v glavnih ravninah (slika 1.20)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_1 &= \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 &= \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_3 &= \sigma_{33} \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{1.209}$$



Slika 1.20

V ravninah glavnih normalnih napetosti so strižne napetosti enake nič

$$\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0.\tag{1.210}$$

Glede na kartezijsko bazo, ki jo tvorijo glavni vektorji $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, ima napetostni tenzor diagonalno matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.\tag{1.211}$$

Komponente glavnih vektorjev $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sestavljajo transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$, ki z enačbo (1.164) *diagonalizira* matriko napetosti. Problem določitve velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti lahko torej razumemo tudi kot nalogo, poiskati tako transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$, ki preslika splošno matriko napetosti $[\sigma_{ij}]$ v diagonalno obliko $[\sigma_{\alpha\beta}]$.

Če poznamo glavne vektorje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in pripadajoče glavne napetostne vektorje (enačbe 1.209), je s tem napetostni tenzor povsem določen. Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki pripada ravnini z zunanjo normalo \mathbf{e}_n , določimo z enačbo (1.142)

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_1 e_{n1} \mathbf{e}_1 + \sigma_2 e_{n2} \mathbf{e}_2 + \sigma_3 e_{n3} \mathbf{e}_3 \quad (1.212)$$

in če v gornji enačbi upoštevamo še zveze (1.209), dobimo

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{11} e_{n1} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} e_{n2} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} e_{n3} \mathbf{e}_3. \quad (1.213)$$

Komponente napetostnega tenzorja v poljubnem kartezijskem koordinatnem sistemu z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ določimo z enačbo (1.168), ki se občutno poenostavi

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} e_{i\alpha} e_{j\beta} & (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = 1, 2, 3) \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{11} e_{i1} e_{j1} + \sigma_{22} e_{i2} e_{j2} + \sigma_{33} e_{i3} e_{j3}. \end{aligned} \quad (1.214)$$

Glavne normalne napetosti $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ in vektorji glavnih smeri $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ niso odvisni od izbire koordinatnega sistema (na primer z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$), temveč le od zunanje obtežbe $(\mathbf{p}_n, \mathbf{v})$, oblike telesa, načina podpiranja in izbire delca, ki ga opazujemo. Zato jih imenujemo tudi lastne ali karakteristične vrednosti oziroma lastne ali karakteristične smeri napetostnega tenzorja. Podobno imenujemo napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ vrednost napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\sigma}(2)$ v smeri \mathbf{e}_n , čeprav sta smeri vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_n$ in \mathbf{e}_n različni (slika 1.17). Pri podprtem telesu z določenimi geometrijskimi in materialnimi lastnostmi je napetostni vektor, ki v obravnavani točki telesa pripada ravnini z normalo \mathbf{e}_n , odvisen le od zunanje obtežbe $(\mathbf{p}_n, \mathbf{v})$ in od izbrane smeri \mathbf{e}_n .

Z enačbami (1.188) do (1.190), v katerih vzamemo $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, lahko osnovne invariante napetostnega tenzorja izrazimo z glavnimi normalnimi napetostmi

$$\begin{aligned} I_1^\sigma &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2^\sigma &= \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22} \\ I_3^\sigma &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}. \end{aligned} \quad (1.215)$$

Iz povedanega sledi, da so tudi glavne normalne napetosti $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ in glavni vektorji $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ invariante napetostnega tenzorja z matriko $[\sigma_{ij}]$ in da torej niso odvisni od izbire koordinatnega sistema.

V tem razdelku smo vpeljali pojem glavnih normalnih napetosti. Pomagali smo si s fizikalnim razmislekom o določitvi takih ravnin skozi obravnavano točko telesa, v katerih ni strižnih napetosti. Hitro lahko tudi pokažemo, da tako določene glavne normalne napetosti predstavljajo *ekstremne vrednosti normalne napetosti* v obravnavani točki telesa.

Kakor smo že večkrat poudarili, je pri znanem napetostnem stanju in v izbrani točki telesa napetostni vektor (in s tem tudi njegova normalna komponenta) odvisen le od izbire ravnine, ki ji ta napetostni vektor pripada. Velikost normalne napetosti smo v razdelku **1.7** določili z enačbo (1.155), ki jo tokrat zapišemo v razviti obliki

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}(e_{nx}, e_{ny}, e_{nz}) = & \sigma_{xx}e_{nx}^2 + \sigma_{yy}e_{ny}^2 + \sigma_{zz}e_{nz}^2 + \\ & 2\sigma_{xy}e_{nx}e_{ny} + 2\sigma_{yz}e_{ny}e_{nz} + 2\sigma_{zx}e_{nz}e_{nx}. \end{aligned} \quad (1.216)$$

Pri znanih vrednostih napetosti $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{zx}$ je torej normalna napetost σ_{nn} funkcija treh spremenljivk e_{nx}, e_{ny}, e_{nz} , ki pa niso neodvisne med seboj, saj so povezane s pogojem (1.170), ki pove, da gre za komponente enotskega vektorja

$$\Phi(e_{nx}, e_{ny}, e_{nz}) = 1 - \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = 1 - e_{nx}^2 - e_{ny}^2 - e_{nz}^2 = 0. \quad (1.217)$$

V matematičnem pogledu imamo torej opraviti s problemom *vezanega ekstrema funkcije treh spremenljivk*. Rešimo ga z *metodo Lagrangevih[†] množiteljev*. V skladu s to metodo sestavimo funkcijo

$$F(e_{nx}, e_{ny}, e_{nz}, \lambda) = \sigma_{nn}(e_{nx}, e_{ny}, e_{nz}) + \lambda \Phi(e_{nx}, e_{ny}, e_{nz}), \quad (1.218)$$

kjer je λ nova neznanica spremenljivka.

[†] Joseph Louis Lagrange, italijansko-francoski fizik in matematik, 1736–1813.

Pogoje za nastop ekstrema zapišemo sedaj tako, kakor da gre za funkcijo štirih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial e_{nx}} &= \frac{\partial}{\partial e_{nx}}(\sigma_{nn} + \lambda\Phi) = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial e_{ny}} &= \frac{\partial}{\partial e_{ny}}(\sigma_{nn} + \lambda\Phi) = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial e_{nz}} &= \frac{\partial}{\partial e_{nz}}(\sigma_{nn} + \lambda\Phi) = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(\sigma_{nn} + \lambda\Phi) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.219}$$

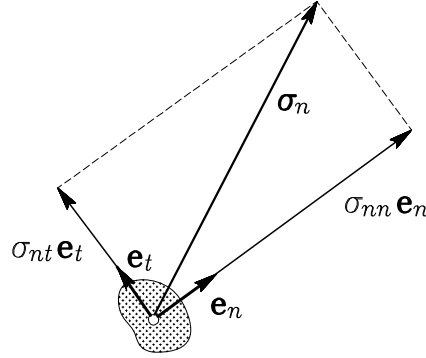
Ob upoštevanju enačb (1.216) in (1.217) lahko sistem pogojev (1.219) zapišemo takole

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{xx} - \lambda)e_{nx} + \sigma_{yx}e_{ny} + \sigma_{zx}e_{nz} &= 0 \\
 \sigma_{xy}e_{nx} + (\sigma_{yy} - \lambda)e_{ny} + \sigma_{zy}e_{nz} &= 0 \\
 \sigma_{xz}e_{nx} + \sigma_{yz}e_{ny} + (\sigma_{zz} - \lambda)e_{nz} &= 0 \\
 \Phi(e_{nx}, e_{ny}, e_{nz}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.220}$$

Primerjava dobljenega sistema enačb z matrično enačbo (1.178) kaže, da se pogoji za nastop ekstremov normalne napetosti ujemajo z enačbami za določitev glavnih vektorjev napetostnega stanja, pri čemer Lagrangevi množitelji prevzamejo vlogo glavnih normalnih napetosti. Rešitve enačb (1.219) predstavljajo točke v prostoru s koordinatami e_{nx} , e_{ny} , e_{nz} , v katerih ima funkcija $\sigma_{nn}(e_{nx}, e_{ny}, e_{nz})$ stacionarno vrednost. Funkcija σ_{nn} ima v taki točki lahko lokalni ekstrem ali sedlo. Za kakšno stacionarno vrednost gre v posameznih točkah, bi lahko ugotovili s podrobnejšim proučevanjem drugih in višjih odvodov funkcije F . Tej analizi se v tem učbeniku odpovedujemo in se zadovoljimo z nekoliko ohlapno ugotovitvijo, da so glavne normalne napetosti σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} lokalni ekstremi funkcije σ_{nn} glede na spremenljivke e_{nx} , e_{ny} , e_{nz} .

1.10 Glavne strižne napetosti

Ugotovili smo, da so glavne normalne napetosti σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} enake lastnim vrednostim napetostnega tenzorja $[\sigma_{ij}]$ in da pripadajo koordinatnim ravninam desnosučne kartezijske baze, ki jo tvorijo pripadajoči glavni vektorji \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . V teh ravninah ni strižnih napetosti (slika 1.20), normalne napetosti pa zavzamejo stacionarne vrednosti. Podobno imenujemo stacionarne vrednosti strižnih napetosti *glavne strižne napetosti*. Zaradi enostavnejših zapisov izberemo pri določanju teh napetosti za referenčno bazo kar vektorje glavnih smeri \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 .



Slika 1.21

Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki pripada ravnini s poljubno normalo \mathbf{e}_n

$$\mathbf{e}_n = e_{n1} \mathbf{e}_1 + e_{n2} \mathbf{e}_2 + e_{n3} \mathbf{e}_3, \quad (1.221)$$

lahko zapišemo v skladu z enačbama (1.212) in (1.213)

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_1 e_{n1} + \sigma_2 e_{n2} + \sigma_3 e_{n3} \quad (1.222)$$

oziroma

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{11} e_{n1} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} e_{n2} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} e_{n3} \mathbf{e}_3. \quad (1.223)$$

Razstavimo ga v normalno in strižno komponento po enačbi (1.171) (slika 1.21)

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nn} \mathbf{e}_n + \sigma_{nt} \mathbf{e}_t. \quad (1.224)$$

Kvadrat velikosti strižne komponente σ_{nt} določimo s *Pitagorovim*[†] izrekom, tako da enačbo (1.224) skalarno pomnožimo s $\boldsymbol{\sigma}_n$

$$\sigma_{nt}^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2. \quad (1.225)$$

Pri tem je σ_n velikost napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$. Iz enačbe (1.223) sledi

$$\sigma_n^2 = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{11}^2 e_{n1}^2 + \sigma_{22}^2 e_{n2}^2 + \sigma_{33}^2 e_{n3}^2. \quad (1.226)$$

σ_{nn} je velikost normalne komponente napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$. Ob upoštevanju enačb (1.223) in (1.221) dobimo

$$\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_n = \sigma_{11} e_{n1}^2 + \sigma_{22} e_{n2}^2 + \sigma_{33} e_{n3}^2. \quad (1.227)$$

Ugotoviti moramo, v kateri ravnini z zunanjo normalo \mathbf{e}_n zavzame strižna napetost σ_{nt} stacionarno vrednost. Pri tem so smerni kosinusi e_{ni} normale \mathbf{e}_n vezani z dodatnim pogojem o njeni enotski dolžini

$$\Phi(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}) = 1 - e_{n1}^2 - e_{n2}^2 - e_{n3}^2 = 0. \quad (1.228)$$

Vezani ekstrem strižne napetosti σ_{nt} spet poiščemo z metodo Lagrangevih množiteljev, pri čemer moramo določiti ekstreme funkcije

$$F(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}, \lambda) = \sigma_{nt}(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}) + \lambda \Phi(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}). \quad (1.229)$$

Pogoji za nastop ekstrema funkcije F so

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial e_{n1}} &= \frac{\partial}{\partial e_{n1}}(\sigma_{nt} + \lambda \Phi) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial e_{n2}} &= \frac{\partial}{\partial e_{n2}}(\sigma_{nt} + \lambda \Phi) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial e_{n3}} &= \frac{\partial}{\partial e_{n3}}(\sigma_{nt} + \lambda \Phi) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(\sigma_{nt} + \lambda \Phi) = 0. \end{aligned} \quad (1.230)$$

[†] Pitagora (Pythagoras), grški matematik, 569–475 p. n. š.

Oglejmo si prvega od gornjih pogojev. S parcialnim odvajanjem enačbe (1.225) po e_{n1} dobimo

$$2\sigma_{nt} \frac{\partial \sigma_{nt}}{\partial e_{n1}} = \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial e_{n1}} - 2\sigma_{nn} \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial e_{n1}}. \quad (1.231)$$

Ob upoštevanju enačb (1.226) in (1.227) sledi

$$\frac{\partial \sigma_{nt}}{\partial e_{n1}} = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{nt}} (\sigma_{11} - 2\sigma_{nn}) e_{n1}. \quad (1.232)$$

Četrty izmed pogojev (1.230) izraža zahtevo, da je izpolnjena enačba (1.228) $\Phi = 0$. S parcialnim odvajanjem te enačbe dobimo še

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e_{n1}} = -2e_{n1}. \quad (1.233)$$

S tem preide prvi od pogojev (1.230) v naslednjo obliko

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{nt}} (\sigma_{11} - 2\sigma_{nn}) e_{n1} = 2\lambda e_{n1}. \quad (1.234)$$

Podobno zapišemo še preostala dva od pogojev (1.230)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{nt}} (\sigma_{22} - 2\sigma_{nn}) e_{n2} &= 2\lambda e_{n2} \\ \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{nt}} (\sigma_{33} - 2\sigma_{nn}) e_{n3} &= 2\lambda e_{n3}. \end{aligned} \quad (1.235)$$

Vsaj dva od smernih kosinusov e_{n1} , e_{n2} , e_{n3} sta različna od nič. Če bi bila namreč dva od njih enaka nič, bi to pomenilo, da je ravnina z normalo \mathbf{e}_n ena od glavnih ravnin obravnavanega napetostnega stanja. Kakor smo ugotovili, nastopa v glavni ravnini ekstremna normalna napetost, strižna napetost pa je nič. Zato vzemimo, da sta smerna kosinusa e_{n2} in e_{n3} različna od nič. Tedaj lahko prvo od enačb (1.235) krajšamo z e_{n2} , drugo pa z e_{n3} in ju zapišemo takole

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^2 - 2\sigma_{22}\sigma_{nn} &= 2\lambda\sigma_{nt} \\ \sigma_{33}^2 - 2\sigma_{33}\sigma_{nn} &= 2\lambda\sigma_{nt}.\end{aligned}\tag{1.236}$$

Enačbi odštejemo med seboj in dobimo

$$\sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2 = 2(\sigma_{22} - \sigma_{33})\sigma_{nn}\tag{1.237}$$

oziroma

$$\sigma_{nn} = \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}).\tag{1.238}$$

Primerjava dobljene zveze z enačbo (1.227) pove, v kateri ravnini je izpolnjen pogoj za nastop stacionarne vrednosti strižne napetosti. Označimo normalo te ravnine z \mathbf{e}_I in ker so glavne normalne napetosti neodvisne med seboj, dobimo

$$e_{I1} = 0 \qquad e_{I2} = e_{I3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.\tag{1.239}$$

Če si podobno kakor zgoraj ogledamo še preostali dve možnosti, da sta od nič različna smerna kosinusa e_{n3} in e_{n1} oziroma e_{n1} in e_{n2} , najdemo še dve ravnini glavnih strižnih napetosti in njuni enotski normali po vrsti označimo z \mathbf{e}_{II} in \mathbf{e}_{III} . Z enačbama (1.114) in (1.115) smo pokazali, da skalarne vrednosti napetosti niso odvisne od tega, s katere strani opazujemo obravnavano ravnino, zato tako za vektor \mathbf{e}_I kakor tudi za vektorja \mathbf{e}_{II} in \mathbf{e}_{III} izberemo kar pozitivne predznake smernih kosinusov. Tako dobimo enotske normale treh ravnin, v katerih zavzamejo strižne napetosti stacionarne vrednosti

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_I &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}_{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}_{III} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).\end{aligned}\tag{1.240}$$

Kakor vidimo, ležijo normale ravnin glavnih strižnih napetosti na simetralah koordinatnih ravnin glavne baze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Napetostne vektorje v teh ravninah določimo v skladu z enačbo (1.142)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}_I &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3) \\
 \boldsymbol{\sigma}_{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\boldsymbol{\sigma}_3 + \boldsymbol{\sigma}_1) \\
 \boldsymbol{\sigma}_{III} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2).
 \end{aligned} \tag{1.241}$$

Ob upoštevanju medsebojne pravokotnosti glavnih vektorjev \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 lahko s skalarnim množenjem napetostnih vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_I$, $\boldsymbol{\sigma}_{II}$, $\boldsymbol{\sigma}_{III}$ samih s seboj izračunamo kvadrate njihovih absolutnih vrednosti

$$\begin{aligned}
 \sigma_I^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) \\
 \sigma_{II}^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_{33}^2 + \sigma_{11}^2) \\
 \sigma_{III}^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2).
 \end{aligned} \tag{1.242}$$

Velikosti pripadajočih normalnih komponent v ravninah stacionarnih strižnih napetosti so določene po vzorcu enačbe (1.238), oziroma kot projekcije napetostnih vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_I$, $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ in $\boldsymbol{\sigma}_{III}$ na enotske normale \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} in \mathbf{e}_{III}

$$\begin{aligned}
 \sigma_{In} = \sigma_{II} &= \boldsymbol{\sigma}_I \cdot \mathbf{e}_I = \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\
 \sigma_{II n} = \sigma_{III} &= \boldsymbol{\sigma}_{II} \cdot \mathbf{e}_{II} = \frac{1}{2} (\sigma_{33} + \sigma_{11}) \\
 \sigma_{III n} = \sigma_{III} &= \boldsymbol{\sigma}_{III} \cdot \mathbf{e}_{III} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}).
 \end{aligned} \tag{1.243}$$

Z zaporednim vstavljanjem zvez (1.242) in (1.243) v enačbo (1.225) dobimo končno tudi velikosti glavnih strižnih napetosti

$$\begin{aligned}
 \sigma_{It} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \\
 \sigma_{II t} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_{33} - \sigma_{11}) \\
 \sigma_{III t} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}).
 \end{aligned} \tag{1.244}$$

Pri tem smo glavne normalne napetosti označili po zaporedju njihovih vrednosti

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}. \quad (1.245)$$

Podobno kakor pri glavnih normalnih napetostih lahko tudi pri glavnih strižnih napetostih ugotovimo, da smerni kosinusi normal \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} predstavljajo točke, v katerih ima funkcija $F(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}; \lambda)$ stacionarno vrednost. S podrobnejšim preučevanjem drugih odvodov funkcije F , česar pa tu ne navajamo, lahko ugotovimo, da sta $\sigma_{II t}$ in $\sigma_{III t}$ ekstremni vrednosti. V ravnini z normalo \mathbf{e}_I ima strižna napetost $\sigma_{I t}$ stacionarno vrednost, tip te stacionarne točke pa ni ekstrem, temveč sedlo[†].

Omenili smo že, da je pri določanju normalnih napetosti pomembno vedeti, ali gre za natezne ali tlačne napetosti. Pri računanju strižnih napetosti je njihov predznak pomemben le v primerih, da seštevamo strižne napetosti, ki pripadajo različnim obtežnim primerom[‡]. Glavne strižne napetosti smo izračunali iz kvadratne zveze (1.225), zato lahko določimo le njihove velikosti, ne pa tudi predznaka. Ena od možnosti, kako določiti tudi smeri delovanja glavnih strižnih napetosti, sledi iz naslednjega razmisleka:

Enačbe (1.240) kažejo, da, na primer, normalni enotski vektor \mathbf{e}_I leži v ravnini, ki jo določata glavni smeri \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 . Iz enačb (1.209) in (1.241) pa sledi, da v isti ravnini leži tudi napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_I$. Če vpeljemo tangentni enotski vektor \mathbf{t}_I , ki prav tako leži v ravnini $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ in je pravokoten na smer \mathbf{e}_I (slika 1.22)

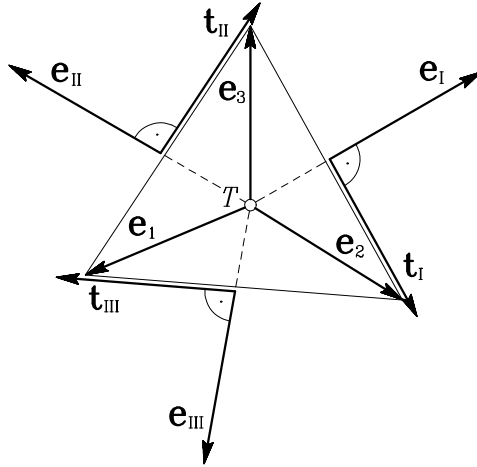
$$\mathbf{t}_I = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \quad (1.246)$$

[†] Glej n. pr. knjigo M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, FGG, Ljubljana, (1998).

[‡] Seštevanje vplivov različnih obtežnih primerov je možno le, če velja zakon superpozicije (glej poglavje 3).

lahko ugotovimo, da projekcija napetostnega vektorja σ_{I} v smeri enotskega vektorja \mathbf{t}_{I} ustreza pozitivnemu predznaku glavne strižne napetosti $\sigma_{\text{I}t}$ v ravnini z normalo \mathbf{e}_{I}

$$\sigma_{\text{I}} \cdot \mathbf{t}_{\text{I}} = \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) = \sigma_{\text{I}t}. \quad (1.247)$$



Slika 1.22

Podobno vpeljemo še tangentna enotska vektorja \mathbf{t}_{II} v ravnini $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$, pravokotno na smer \mathbf{e}_{II} , in \mathbf{t}_{III} v ravnini $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, pravokotno na smer \mathbf{e}_{III}

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\text{II}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{t}_{\text{III}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (1.248)$$

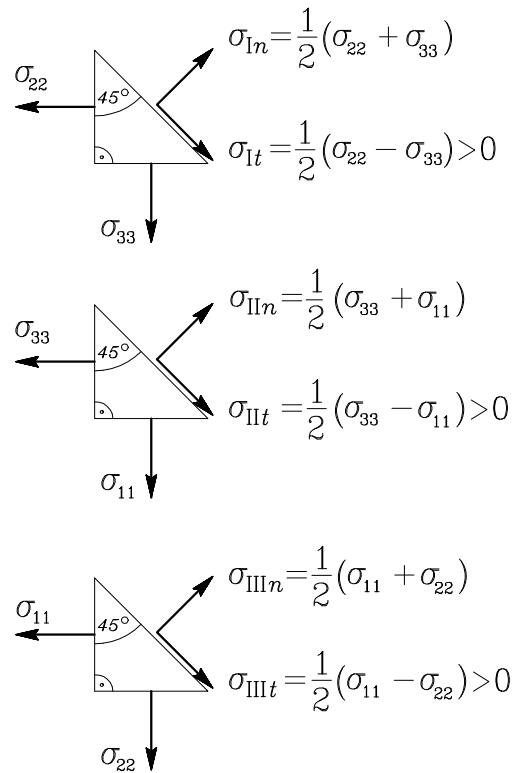
V smereh enotskih vektorjev \mathbf{t}_{II} in \mathbf{t}_{III} dobimo pozitivne predznake glavnih strižnih napetosti v ravninah z normalama \mathbf{e}_{II} in \mathbf{e}_{III}

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{II}} \cdot \mathbf{t}_{\text{II}} &= \frac{1}{2} (\sigma_{33} - \sigma_{11}) = \sigma_{\text{II}t} \\ \sigma_{\text{III}} \cdot \mathbf{t}_{\text{III}} &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \sigma_{\text{III}t}. \end{aligned} \quad (1.249)$$

Ugotovitev lahko obrnemo tudi takole: če za desne strani v enačbah (1.244) izberemo pozitivne predznake, imajo pozitivne glavne strižne napetosti σ_{It} , $\sigma_{II t}$, $\sigma_{III t}$ po vrsti smeri enotskih vektorjev \mathbf{t}_I , \mathbf{t}_{II} , \mathbf{t}_{III} , negativne pa nasprotne smeri.

Tako smo definirali smeri pozitivnih glavnih strižnih napetosti v njihovih ravninah. Pri praktičnih nalogah se o pravilnosti predznakov in vrednosti izračunanih napetosti lahko prepričamo tudi s kontrolo ravnotežja elementarnih delov telesa v okolici obravnavanega delca, kar je podrobneje prikazano v zgledu 1.7.

Na *sliki 1.23* so prikazane ravnine glavnih strižnih napetosti in označene smeri delovanja pozitivnih normalnih in strižnih napetosti v teh ravninah.

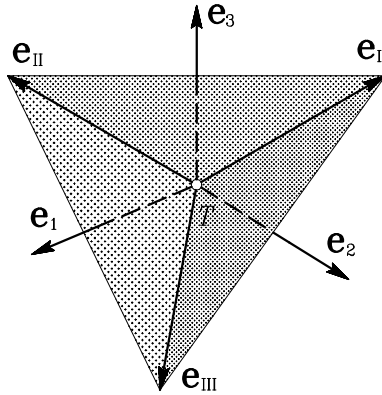


Slika 1.23

Na koncu si še oglejmo, kakšne medsebojne lege zavzamejo ravnine ekstremnih strižnih napetosti v obravnavani točki telesa. Z medsebojnim skalarnim množenjem enotskih vektorjev \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} ugotovimo, da ti trije vektorji niso pravokotni med seboj, temveč oklepajo drug z drugim kote 60°

$$\mathbf{e}_{II} \cdot \mathbf{e}_{III} = \mathbf{e}_{III} \cdot \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_{II} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ. \quad (1.250)$$

Enotski vektorji \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} torej določajo robove tetraedra, to je tristrane piramide, ki jo tvorijo štirje enakostranični trikotniki (slika 1.24).



Slika 1.24

V nekaterih učbenikih so strižne napetosti označene z grško črko τ

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \tau_{xy} & \sigma_{It} &= \tau_I \\ \sigma_{yz} &= \tau_{yz} & \sigma_{II t} &= \tau_{II} \\ \sigma_{zx} &= \tau_{zx} & \sigma_{III t} &= \tau_{III}, \end{aligned} \quad (1.251)$$

normalne napetosti pa z grško črko σ , ki ji pripišemo en sam indeks

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_x & \sigma_{In} &= \sigma_I \\ \sigma_{yy} &= \sigma_y & \sigma_{II n} &= \sigma_{II} \\ \sigma_{zz} &= \sigma_z & \sigma_{III n} &= \sigma_{III}. \end{aligned} \quad (1.252)$$

1.11 Hidrostatsični in deviatorični del tenzorja napetosti

V nekaterih posebnih primerih mehanske analize zveznih teles, posebej v teoriji plastičnosti, je ugodno razdeliti tenzor napetosti na njegov *hidrostatsični* in *deviatorični del*. Za hidrostatsični del napetosti sta v rabi tudi izraza *sferične* ali *volumetrične napetosti*, za deviatorični del pa *distorzijske napetosti*. Za opis plastičnega deformiranja teles namreč ponavadi vpeljemo predpostavko o nestisljivosti snovi, pri čemer je pomemben le deviatorični del napetostnega tenzorja.

Pri obravnavani razstavitvi napetosti ima pomembno vlogo *hidrostatsična napetost* σ^H , ki je vpeljana kot aritmetična sredina normalnih napetosti

$$\sigma^H = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{I_1^\sigma}{3}. \quad (1.253)$$

Pri simbolu za prvo invarianto napetostnega tenzorja smo z zgornjim indeksom “. σ ” poudarili, da gre za invarianto napetosti. Kakor vidimo, je hidrostatsična napetost invarianta napetostnega stanja in pove, kako je materialni delec “v povprečju” obtežen: če je hidrostatsična napetost pozitivna, je delec v povprečju obremenjen natezno, če je negativna, pa tlačno.

Poljubno komponento σ_{ij} tenzorja napetosti razstavimo na njen hidrostatsični del σ_{ij}^H in deviatorični del σ_{ij}^D

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^H + \sigma_{ij}^D. \quad (1.254)$$

Zaradi preglednejšega pisanja za deviatorične napetosti običajno vpeljemo krajšo oznako $s_{ij} \equiv \sigma_{ij}^D$ in dobimo

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^H + s_{ij}. \quad (1.255)$$

Pri tem je hidrostatsični del σ_{ij}^H definiran z enačbo

$$\sigma_{ij}^H = \delta_{ij}\sigma^H = \frac{1}{3}\delta_{ij}I_1^\sigma \quad (1.256)$$

oziroma v matrični obliki

$$[\sigma_{ij}^H] = \begin{bmatrix} \sigma^H & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^H & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^H \end{bmatrix} = \frac{I_1^\sigma}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.257)$$

Preostali del tenzorja napetosti je definiran kot deviatorični, tako da je

$$s_{ij} \equiv \sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^H \quad \rightarrow \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma^H. \quad (1.258)$$

V kartezijskih koordinatah x, y, z tako dobimo

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma^H & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma^H & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma^H \end{bmatrix}. \quad (1.259)$$

Kakor vidimo, sta tako hidrostatsični kakor tudi deviatorični del simetrična tenzorja drugega reda.

Ob upoštevanju enačb (1.182), (1.253) in (1.258) je mogoče hitro ugotoviti, da je prva invarianta deviatoričnega dela tenzorja napetosti I_1^s enaka nič

$$I_1^s = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - 3\sigma^H = 0. \quad (1.260)$$

Preostali dve invarianti deviatoričnega tenzorja napetosti izračunamo z enačbama (1.183) in (1.184) in po krajšem urejanju dobimo

$$I_2^s = I_2^\sigma - \frac{(I_1^\sigma)^2}{3} \quad (1.261)$$

$$I_3^s = I_3^\sigma - \frac{I_1^\sigma I_2^\sigma}{3} + \frac{2(I_1^\sigma)^3}{27}. \quad (1.262)$$

V primeru, da je napetostno stanje opisano z glavnimi normalnimi napetostmi $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, ima tudi deviatorični del napetostnega tenzorja diagonalno obliko

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma^H & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \sigma^H & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} - \sigma^H \end{bmatrix}. \quad (1.263)$$

Ob upoštevanju enačb (1.215) in (1.261) lahko drugo invarianto deviatoričnega dela napetosti izrazimo z glavnimi normalnimi napetostmi z enačbo

$$I_2^s = -\frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] . \quad (1.264)$$

Iz enačbe (1.257) sledi, da je hidrostatično napetostno stanje izotropno, saj so vse tri glavne normalne napetosti tega stanja enake hidrostatični napetosti σ^H

$$\sigma_{11}^H = \sigma_{22}^H = \sigma_{33}^H = \sigma^H . \quad (1.265)$$

To pomeni, da hidrostatično napetostno stanje nima posebnih glavnih smeri, temveč so vse smeri v prostoru enakovredne.

Glavne deviatorične normalne napetosti s_{11} , s_{22} , s_{33} dobimo neposredno iz enačbe (1.258)

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11} - \sigma^H \\ s_{22} &= \sigma_{22} - \sigma^H \\ s_{33} &= \sigma_{33} - \sigma^H . \end{aligned} \quad (1.266)$$

Za glavne smeri deviatoričnega napetostnega stanja lahko hitro dokažemo, da se ujemajo z glavnimi smermi celotnega napetostnega stanja \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 . Po vzorcu enačbe (1.179) bi namreč smerne kosinuse glavne smeri \mathbf{e}_g^s določili iz enačbe

$$[s_{ij} - \delta_{ij}s_{gg}] \{e_{gj}^s\} = \{0\} . \quad (1.267)$$

Ob upoštevanju enačbe (1.258) sledi

$$[\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma^H - \delta_{ij}(\sigma_{gg} - \sigma^H)] \{e_{gj}^s\} = \{0\} \quad (1.268)$$

in po ureditvi

$$[\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{gg}] \{e_{gj}^s\} = \{0\} . \quad (1.269)$$

Dobili smo torej enak sistem enačb kakor za določitev glavnih smeri celotnega napetostnega stanja. Do enake ugotovitve pridemo tudi z

naslednjim sklepanjem: hidrostatično napetostno stanje je izotropno, zato so glavne smeri celotnega napetostnega stanja določene z glavnimi smermi deviatoričnega dela napetostnega tenzorja.

Končno še pokažimo, kako so invariante deviatoričnega dela napetostnega tenzorja izražene z glavnimi deviatoričnimi normalnimi napetostmi s_{11} , s_{22} , s_{33} . Upoštevajoč enačbe (1.215), (1.253) in (1.266) dobimo

$$\begin{aligned} I_1^s &= s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \\ I_2^s &= s_{11}s_{22} + s_{22}s_{33} + s_{33}s_{11} = -\frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) \\ I_3^s &= s_{11}s_{22}s_{33}. \end{aligned} \quad (1.270)$$

1.12 Napetosti v oktaedrski ravnini

V tem razdelku obravnavamo primer, da je napetostno stanje delca T podano z glavnimi normalnimi napetostmi σ_{11} , σ_{22} in σ_{33} in želimo določiti napetosti v ravnini, katere normala oklepa enake kote s smermi glavnih normalnih napetosti \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 (slika 1.27).

Enotski vektor normale iskane ravnine skozi delec T označimo z \mathbf{e}_o

$$\mathbf{e}_o = e_{o1} \mathbf{e}_1 + e_{o2} \mathbf{e}_2 + e_{o3} \mathbf{e}_3. \quad (1.271)$$

Pri tem so smerni kosinusi glede na smeri \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 enaki med seboj

$$|e_{o1}| = |e_{o2}| = |e_{o3}| \quad (1.272)$$

in iz pogoja, da je \mathbf{e}_o enotski vektor, sledi

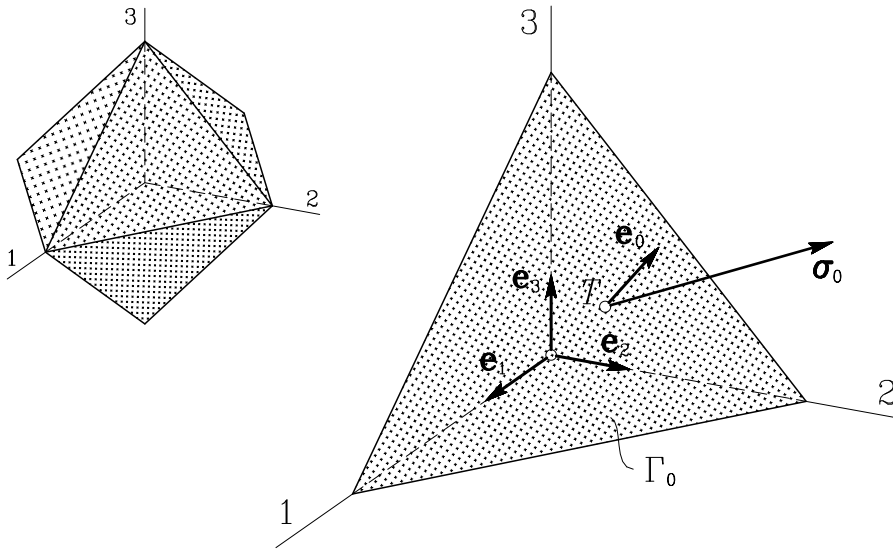
$$e_{o1}^2 + e_{o2}^2 + e_{o3}^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 3e_{o1}^2 = 1. \quad (1.273)$$

Zato je

$$e_{o1} = e_{o2} = e_{o3} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (1.274)$$

Možnih je osem različnih kombinacij glede na predznake smernih kosinusov. To pomeni, da gre za osem enotskih normal, od katerih po dve in dve ležita na isti premici skozi delec T , vendar imata nasprotni smeri. Te normale torej določajo štiri ravnine, ki so vzporedne mejnim ploskvam pravilnega oktaedra in jih zato imenujemo *oktaedrske ravnine*. V našem primeru vzemimo kar pozitivne predznake smernih kosinusov, tako da leži normala \mathbf{e}_o obravnavane oktaedrske ravnine v I. oktantu (slika 1.25)

$$\mathbf{e}_o = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \quad (1.275)$$



Slika 1.25

Vektor napetosti $\boldsymbol{\sigma}_o$, ki v točki T pripada oktaedrski ravnini, dobimo z enačbo (1.142)

$$\boldsymbol{\sigma}_o = \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{e}_{o1} + \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_{o2} + \boldsymbol{\sigma}_3 \mathbf{e}_{o3}. \quad (1.276)$$

Ker je

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \sigma_{11} \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \sigma_{22} \mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \sigma_{33} \mathbf{e}_3, \quad (1.277)$$

sledi

$$\boldsymbol{\sigma}_o = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3). \quad (1.278)$$

Normalna komponenta σ_{oo} vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_o$ je

$$\sigma_{oo} = \boldsymbol{\sigma}_o \cdot \mathbf{e}_o \quad \rightarrow \quad \sigma_{oo} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (1.279)$$

Iz primerjave z enačbo (1.253) sledi, da je normalna napetost σ_{oo} v oktaedrski ravnini enaka hidrostatični napetosti σ^H

$$\sigma_{oo} = \frac{1}{3} I_1^\sigma = \sigma^H. \quad (1.280)$$

Določimo še kvadrat velikosti vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_o$

$$\sigma_o^2 = \boldsymbol{\sigma}_o \cdot \boldsymbol{\sigma}_o = \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2). \quad (1.281)$$

Za strižno napetost v oktaedrski ravnini je splošno uveljavljena oznaka $\tau_o \equiv \sigma_{ot}$. Kvadrat te napetosti izračunamo s Pitagorovim izrekom

$$\begin{aligned} \tau_o^2 &= \boldsymbol{\sigma}_o \cdot \boldsymbol{\sigma}_o - \sigma_{oo}^2 = \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{1}{9} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2. \end{aligned} \quad (1.282)$$

Po ureditvi in korenjenju sledi

$$\tau_o = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}. \quad (1.283)$$

Primerjava z enačbo (1.264) pokaže, da je izraz pod korenem sorazmeren z drugo invarianto deviatoričnega dela tenzorja napetosti

$$\tau_o = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} I_2^s}. \quad (1.284)$$

Zaradi enačb (1.261) in (1.270) lahko strižno napetost τ_o v oktaedrski ravnini zapišemo tudi na naslednji način

$$\tau_o = \pm \frac{1}{3} \sqrt{2 [(I_1^\sigma)^2 - 3I_2^\sigma]} = \pm \sqrt{\frac{1}{3} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2)}. \quad (1.285)$$

Podobno kakor zgoraj lahko določimo napetostne vektorje ter njihove normalne in strižne komponente v katerikoli od preostalih treh oktaedrijskih ravnin. Rezultat je nekoliko presenetljiv, saj se izkaže, da so normalne in strižne napetosti enake v vseh štirih oktaedrijskih ravninah. Bralcu prepuščamo, da se o tem sam prepriča.

1.13 Ravninsko napetostno stanje (RNS)

Prostorsko napetostno stanje, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, je najbolj splošen primer napetostnega stanja. Pri praktičnem delu v mehaniki pa večkrat naletimo na primere, pri katerih zaradi posebnih geometrijskih in materialnih lastnosti telesa ter načina podpiranja in obtežbe vsi napetostni vektorji, ki pripadajo obravnavanemu delcu telesa, ležijo v isti ravnini. To pomeni, da so vse napetostne komponente v smeri normale na to ravnino enake nič. Takemu mehanskemu stanju materialnega delca pravimo *ravninsko napetostno stanje (RNS)*.

Kot primer lahko navedemo pokončno prizmo, katere višina oziroma debelina t je zelo majhna v primerjavi z izmerami osnovne ploskve (*slika 1.26*). Če je zunanja obtežba takega telesa pravokotna na normalo osnovne ploskve, ga imenujemo *stena*. V *sliki 1.26* smo vzeli, da se normala osnovne ploskve ujema s koordinatno osjo z kartezijskega koordinatnega sistema. Presek prizme s koordinatno ravnino $z = 0$ imenujemo *srednja ploskev* ali *srednja ravnina stene*. Srednja ploskev predstavlja računski model stene pri ravninskem napetostnem stanju, ki je v našem primeru definirano z zahtevo, da so vse komponente napetosti v smeri z enake nič

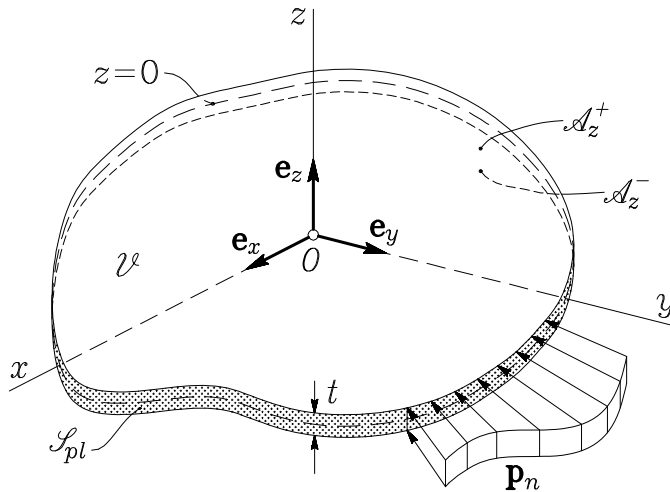
$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0. \quad (1.286)$$

Matrika napetosti ima v tem primeru naslednjo obliko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (1.287)$$

Sklenjeno ploskev \mathcal{S} , ki omejuje obravnavano steno (območje \mathcal{V} v prostoru), razdelimo na tri kose: “zgorjnjo” osnovno ploskev \mathcal{A}_z^+ , “spodnjo” osnovno ploskev \mathcal{A}_z^- in plašč \mathcal{S}_{pl} . Zunanja normala zgornje osnovne ploskve \mathcal{A}_z^+ je enaka baznemu vektorju \mathbf{e}_z , zunanja normala spodnje osnovne ploskve \mathcal{A}_z^- pa je $-\mathbf{e}_z$. Zato je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_z^+ \dots \left(z = \frac{t}{2} \right) : \quad & e_{nx} = e_{ny} = 0, \quad e_{nz} = 1 \\ \mathcal{A}_z^- \dots \left(z = -\frac{t}{2} \right) : \quad & e_{nx} = e_{ny} = 0, \quad e_{nz} = -1. \end{aligned} \quad (1.288)$$



Slika 1.26

Zapis ravnotežnih pogojev (1.140) na obravnavanih ploskvah hitro pokaže, da morata biti obe osnovni ploskvi neobteženi

$$\left. \begin{aligned} z = \frac{t}{2} \\ z = -\frac{t}{2} \end{aligned} \right\} p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{0}. \quad (1.289)$$

Do te ugotovitve bi lahko prišli tudi z logičnim sklepanjem: če bi bili osnovni ploskvi stene obteženi, se stena v smeri normale ne bi mogla

prosto deformirati in v njej bi se pojavile tudi od nič različne napetosti σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} .

Normala \mathbf{e}_n v poljubni točki plašča \mathcal{S}_{pl} obravnavane stene je odvisna od oblike roba, sicer pa je pravokotna na smer z ($e_{nz} = 0$)

$$\mathcal{S}_{pl} : \quad \mathbf{e}_n = e_{nx} \mathbf{e}_x + e_{ny} \mathbf{e}_y . \quad (1.290)$$

Ravnotežni pogoji (1.140) pripeljejo do že omenjene zahteve, da mora biti zunanja specifična površinska obtežba plašča vzporedna s srednjo ravnino stene

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{pl} : \quad p_{nx} &= \sigma_{xx} e_{nx} + \sigma_{yx} e_{ny} \\ p_{ny} &= \sigma_{xy} e_{nx} + \sigma_{yy} e_{ny} \end{aligned} \quad (1.291)$$

in zato

$$\mathcal{S}_{pl} : \quad \mathbf{p}_n = p_{nx} \mathbf{e}_x + p_{ny} \mathbf{e}_y . \quad (1.292)$$

Zunanja obtežba se v splošnem lahko spreminja po debelini stene. Ker je stena tanka, je umestno namesto spremenljive obtežbe upoštevati kar njeno povprečno vrednost glede na debelino stene. Zato običajno vzamemo, da sta tako zunanja površinska obtežba \mathbf{p}_n , kakor tudi zunanja prostorninska obtežba \mathbf{v} enakomerni v smeri normale na ravnino stene, v našem primeru torej neodvisni od koordinate z

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(x, y) \quad \text{in} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) . \quad (1.293)$$

Oglejmo si še ravnotežne pogoje za delec znotraj stene. Enačbe (1.131) se v obravnavanem primeru ravninskega napetostnega stanja glasijo

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + v_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + v_y &= 0 \\ v_z &= 0 , \end{aligned} \quad (1.294)$$

kar pomeni, da mora biti tudi specifična prostorninska zunanja obtežba vzporedna s srednjo ravnino stene

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y. \quad (1.295)$$

Upoštevajoč dosedanje ugotovitve lahko upravičeno predpostavimo, da so tudi od nič različne komponente napetosti enakomerne po debelini stene

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y). \quad (1.296)$$

Napetostni vektorji v koordinatnih ravninah kartezijskega koordinatnega sistema (x, y, z) so tedaj

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_x &= \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{xy} \mathbf{e}_y \\ \boldsymbol{\sigma}_y &= \sigma_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y \\ \boldsymbol{\sigma}_z &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.297)$$

Vzemimo, da je z napetostno matriko (1.287) opisano ravninsko napetostno stanje poljubnega delca \mathcal{T} obravnavane stene, in sicer glede na koordinatni sistem (x, y) . To pomeni, da v ravnini Π_x z normalo \mathbf{e}_x deluje napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_x$ s komponentama σ_{xx} in σ_{xy} , v ravnini Π_y z normalo \mathbf{e}_y pa napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_y$ s komponentama σ_{yx} in σ_{yy} (slika 1.27).

Zamislimo si sedaj poljubno novo ravnino Π_ξ , katere normala \mathbf{e}_ξ je za kot α nagnjena glede na os x in tvori skupaj s tangencialnim enotskim vektorjem \mathbf{e}_η novo pravokotno koordinatno bazo (slika 1.28)

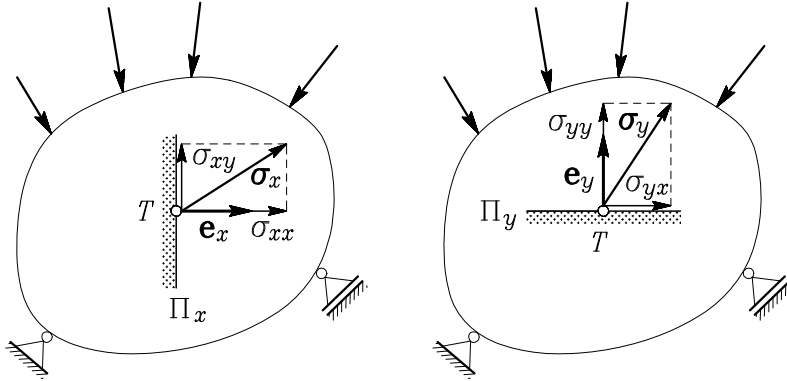
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= e_{\xi x} \mathbf{e}_x + e_{\xi y} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\eta &= e_{\eta x} \mathbf{e}_x + e_{\eta y} \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (1.298)$$

Smerne kosinuse obeh baznih vektorjev lahko izrazimo kar s kotom α

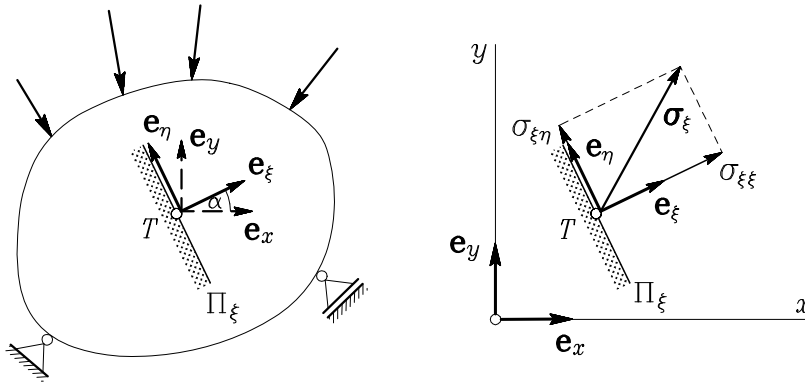
$$\begin{aligned} e_{\xi x} &= \cos \alpha & e_{\xi y} &= \sin \alpha & e_{\xi z} &= 0 \\ e_{\eta x} &= -\sin \alpha & e_{\eta y} &= \cos \alpha & e_{\eta z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.299)$$

zato lahko pišemo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\eta &= -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (1.300)$$



Slika 1.27



Slika 1.28

Delcu \mathcal{T} pripada v ravnini Π_ξ napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_\xi$ z normalno komponento $\sigma_{\xi\xi}$ in strižno komponento $\sigma_{\xi\eta}$. Določimo ga z enačbo (1.142) in ker je $\boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{0}$, dobimo

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = \sigma_x e_{\xi x} + \sigma_y e_{\xi y}. \quad (1.301)$$

Enačba (1.301) je tedaj

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = \sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha . \quad (1.302)$$

Ob upoštevanju enačb (1.297) dobimo

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = (\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{yx} \sin \alpha) \mathbf{e}_x + (\sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha) \mathbf{e}_y . \quad (1.303)$$

Normalno in strižno napetost v ravnini Π_ξ lahko ob upoštevanju simetrije strižnih napetosti zapišemo kakor sledi

$$\sigma_{\xi\xi} = \boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha \quad (1.304)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\eta} &= \boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta = \\ &= -\sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{yy} \sin \alpha \cos \alpha . \end{aligned} \quad (1.305)$$

Gornji enačbi lahko z uporabo dvojnih kotov zapišemo tudi takole

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha \quad (1.306)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha . \quad (1.307)$$

Pri znanih napetostih σ_{xx} , σ_{yy} in σ_{xy} sta torej normalna in strižna napetost v poljubni ravnini Π_ξ z normalo \mathbf{e}_ξ funkciji ene same spremenljivke α .

Ta ugotovitev omogoča enostavnejšo določitev ravnin in velikosti ekstremnih normalnih in strižnih napetosti. Naklonski kot α_σ , ki določa normalo ravnine, v kateri nastopa ekstremna normalna napetost, izračunamo iz pogoja za ekstrem funkcije $\sigma_{\xi\xi}$

$$\left. \frac{d\sigma_{\xi\xi}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_\sigma} = 0 . \quad (1.308)$$

Z odvajanjem enačbe (1.306) po α dobimo

$$-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha_\sigma + 2\sigma_{xy} \cos 2\alpha_\sigma = 0 \quad (1.309)$$

oziroma

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}. \quad (1.310)$$

Ker je $\operatorname{tg}\alpha$ periodična funkcija s periodo π , dobimo neskončno veliko rešitev

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \pm \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.311)$$

Zanimivi sta rešitvi pri $k = 0$ in $k = 1$, saj nadaljnje (pri $k \geq 2$) ne povedo nič novega

$$\begin{aligned} \alpha_\sigma^{k=0} &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \\ \alpha_\sigma^{k=1} &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.312)$$

Ob upoštevanju enačb (1.312) lahko označimo $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma^{k=0}$ in dobimo dve med seboj pravokotni ravnini z normalama

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \alpha_\sigma \mathbf{e}_x + \sin \alpha_\sigma \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \alpha_\sigma \mathbf{e}_x + \cos \alpha_\sigma \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (1.313)$$

Glavni normalni napetosti, ki nastopata v omenjenih ravninah, dobimo po nekoliko daljši, vendar enostavni izpeljavi ob upoštevanju znanih trigonometričnih zvez

$$\sin 2\alpha_\sigma = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_\sigma}} \quad \text{in} \quad \cos 2\alpha_\sigma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_\sigma}}.$$

Z vstavitvijo v enačbo (1.306) dobimo ekstremni normalni napetosti

$$\sigma_{11,22} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (1.314)$$

Pri uporabi enačbe (1.314) je potrebna previdnost, saj zaradi kvadratnih zvez, ki nastopajo v izpeljavi, ni mogoče vnaprej vedeti, kateri

od smeri \mathbf{e}_1 oziroma \mathbf{e}_2 pripada katera od obeh dobljenih ekstremnih normalnih napetosti. Tej dvoumnosti se najlaže izognemo tako, da izračunamo glavni normalni napetosti z neposrednim vstavljanjem numeričnih rešitev enačbe (1.310) v enačbo (1.306). Zaradi lažjega zapisa spet označimo $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma^{k=0}$. Tedaj je $2\alpha_\sigma^{k=1} = 2\alpha_\sigma + \pi$ in ob upoštevanju znanih trigonometrijskih obrazcev dobimo

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{\xi\xi}(\alpha_\sigma^{k=0}) = \\ & \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha_\sigma + \sigma_{xy} \sin 2\alpha_\sigma \\ \sigma_{22} &= \sigma_{\xi\xi}(\alpha_\sigma^{k=1}) = \\ & \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha_\sigma - \sigma_{xy} \sin 2\alpha_\sigma.\end{aligned}\tag{1.315}$$

Pri tem smo se izjemoma odpovedali razvrstitvi glavnih normalnih napetosti po velikosti, kakršno smo vpeljali z enačbo (1.245).

S primerjavo enačb (1.307) in (1.309) se lahko tudi prepričamo, da je strižna napetost v ravnini glavne normalne napetosti enaka nič

$$\sigma_{\xi\eta}(\alpha_\sigma) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha_\sigma + \sigma_{xy} \cos 2\alpha_\sigma = 0.\tag{1.316}$$

Vse naloge v zvezi z RNS bi seveda lahko rešili tudi tako, da bi dosledno sledili postopkom, ki smo jih za transformacije napetosti in za določitev ravnin in velikosti glavnih normalnih napetosti izpeljali pri prostorskem napetostnem stanju, pri čemer bi upoštevali posebno “ravninsko” obliko matrike napetosti (glej zgled 1.10). Vendar v tem razdelku namenoma prikažemo enačbe, ki jih za RNS navajajo klasični učbeniki, da bi se izognili njihovi dvoumni ali napačni uporabi.

Podobno ravnamo tudi pri določitvi ravnin in velikosti glavnih strižnih napetosti in prikažemo kombiniran pristop, pri katerem iz pogoja za ekstrem strižne napetosti $\sigma_{\xi\eta}$

$$\left. \frac{d\sigma_{\xi\eta}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_\tau} = 0\tag{1.317}$$

izračunamo naklonski kot α_τ , ki določa normalo ustrezne ravnine. Z odvajanjem enačbe (1.307) po α dobimo

$$-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha_\tau - 2\sigma_{xy} \sin 2\alpha_\tau = 0 \quad (1.318)$$

in dalje

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}}. \quad (1.319)$$

Rešitve so

$$\alpha_\tau = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}} \pm \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.320)$$

Primerjava enačbe (1.319) z enačbo (1.310) pove, da je kot $\alpha_\tau^{k=0}$ za $\frac{\pi}{4}$ večji od kota $\alpha_\sigma^{k=0}$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau^{k=0} = -\operatorname{ctg} 2\alpha_\sigma^{k=0} \quad \rightarrow \quad \alpha_\tau^{k=0} = \alpha_\sigma^{k=0} + \frac{\pi}{4}. \quad (1.321)$$

S kotom $\alpha_\tau^{k=0}$ je torej določen enotski vektor, ki smo ga v razdelku **1.10** označili z \mathbf{e}_τ . Pri ravninskem napetostnem stanju uporabimo za ta vektor oznako \mathbf{e}_τ

$$\mathbf{e}_\tau \equiv \mathbf{e}_\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2). \quad (1.322)$$

Po zgledu druge od enačb (1.248) vpeljemo še enotski vektor \mathbf{t}_τ oziroma \mathbf{t}_τ

$$\mathbf{t}_\tau \equiv \mathbf{t}_\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2). \quad (1.323)$$

Hitro se lahko prepričamo, da vektor \mathbf{t}_τ ustreza rešitvi enačbe (1.320), v kateri *odštejemo* periodo pri $k = 1$. Enotska vektorja \mathbf{e}_τ in \mathbf{t}_τ določata dve med seboj pravokotni ravnini, v katerih nastopa glavna strižna napetost $\sigma_{\tau t} \equiv \tau_\tau$, ki jo pri RNS običajno označimo kar s τ . Z drugo od enačb (1.249) in ob upoštevanju enačbe (1.314) dobimo

$$\tau_\tau \equiv \tau = \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (1.324)$$

Gornje ugotovitve lahko strnemo tudi takole: V ravnini z normalo \mathbf{e}_τ nastopa glavna strižna napetost τ ; če to napetost izračunamo z enačbo (1.324) in dobimo pozitivno vrednost, je njena smer določena z enotskim vektorjem \mathbf{t}_τ . Če je vrednost negativna, pa deluje v nasprotni smeri vektorja \mathbf{t}_τ . Podobno ima pozitivna strižna napetost v ravnini z normalo \mathbf{t}_τ smer enotskega vektorja \mathbf{e}_τ . Zapišimo oba enotska vektorja še z rešitvijo enačbe (1.320) pri $k = 0$ ($\alpha_\tau = \alpha_\tau^{k=0}$)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\tau &= \cos \alpha_\tau \mathbf{e}_x + \sin \alpha_\tau \mathbf{e}_y \\ \mathbf{t}_\tau &= \sin \alpha_\tau \mathbf{e}_x - \cos \alpha_\tau \mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{1.325}$$

Normalno napetost $\sigma_{\text{III}} \equiv \sigma_\tau$ v ravnini z normalo \mathbf{e}_τ lahko izračunamo s tretjo od enačb (1.243) ali pa z vstavljanjem kota α_τ v enačbo (1.306)

$$\sigma_{\text{III}} \equiv \sigma_\tau = \sigma_{\xi\xi}(\alpha_\tau) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).\tag{1.326}$$

Podobno kakor pri prostorskem lahko tudi pri ravninskem napetostnem stanju najdemo še dve ravnini glavnih strižnih napetosti z normalama \mathbf{e}_I in \mathbf{e}_II . Ker je pri obravnavanem ravninskem napetostnem stanju $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z$ in $\sigma_{33} \equiv \sigma_{zz} = 0$, iz enačb (1.240), (1.244) in (1.243) sledi

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\text{I} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_z) & \tau_\text{I} &= \sigma_\text{II} = \frac{\sigma_{22}}{2} \\ & \rightarrow & & \\ \mathbf{e}_\text{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_1) & \tau_\text{II} &= -\sigma_\text{III} = -\frac{\sigma_{11}}{2}.\end{aligned}\tag{1.327}$$

Smeri glavnih strižnih napetosti τ_I in τ_II sta določeni s pomožnima tangencialnima enotskima vektorjema \mathbf{t}_I in \mathbf{t}_II

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_\text{I} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{t}_\text{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_1).\end{aligned}\tag{1.328}$$

Dokaz, da napetostna vektorja $\boldsymbol{\sigma}_\text{I}$ in $\boldsymbol{\sigma}_\text{II}$, ki nastopata v ravninah z normalama \mathbf{e}_I in \mathbf{e}_II , ležita v ravnini (x, y) in torej nimata komponent v smeri z , prepuščamo skrbnemu bralcu.

1.14 Mohrov[†] krog za ravninsko napetostno stanje

V razdelku **1.13** smo pokazali, da je pri ravninskem napetostnem stanju napetostni vektor σ_ξ , ki pripada obravnavanemu materialnemu delcu \mathcal{T} glede na poljubno ravnino Π_ξ , določen z normalno ($\sigma_{\xi\xi}$) in strižno ($\sigma_{\xi\eta}$) komponento. Omenjeni komponenti napetosti sta podani z enačbama (1.306) in (1.307). Zapišimo ti dve enačbi nekoliko drugače

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= \frac{1}{2} \cos 2\alpha (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + \sigma_{xy} \sin 2\alpha \\ \sigma_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + \sigma_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Če enačbi kvadriramo in seštejemo, dobimo

$$\left[\sigma_{\xi\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right]^2 + \sigma_{\xi\eta}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2. \quad (1.329)$$

Napetostno stanje obravnavanega delca \mathcal{T} je določeno s podanimi napetostnimi komponentami σ_{xx} , σ_{yy} in σ_{xy} , komponenti $\sigma_{\xi\xi}$ in $\sigma_{\xi\eta}$ pa se spreminjata v odvisnosti od orientacije ravnine Π_ξ .

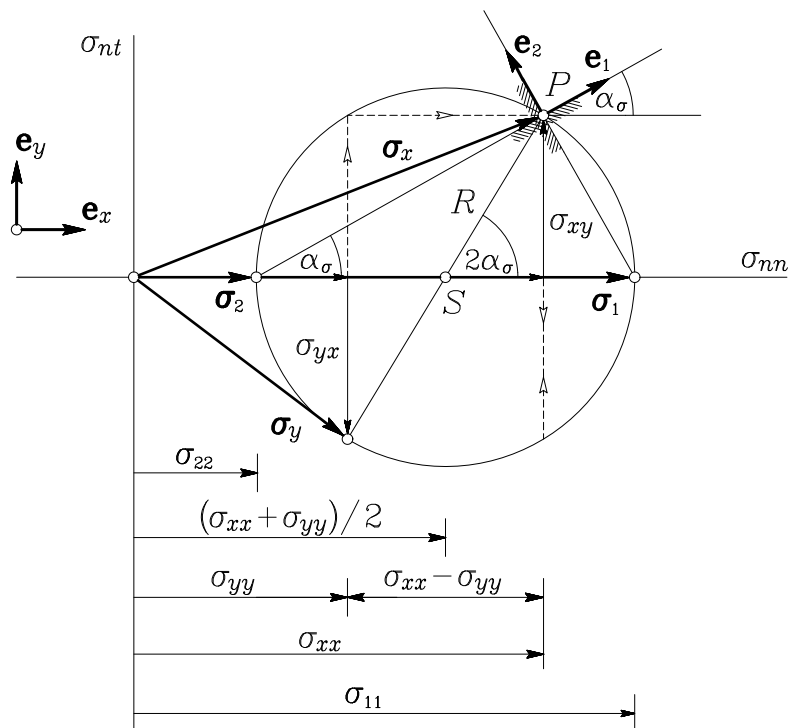
Sestavimo pravokotni napetostni koordinatni sistem tako, da na abscisno os nanašamo normalne, na ordinatno os pa strižne napetosti. V tem koordinatnem sistemu predstavlja enačba (1.329) krožnico s središčem $S[\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), 0]$ in s polmerom

$$R = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (1.330)$$

Z enačbama (1.306) in (1.307) smo določili normalno in strižno komponento vektorja napetosti v odvisnosti od kota α , ki opisuje lego obravnavane ravnine Π_ξ skozi opazovani delec. Z različnimi izbirami kota α lahko torej določimo napetostne vektorje v vseh možnih ravninah skozi

[†] Otto Mohr, nemški inženir, 1835–1918.

delec \mathcal{T} . Normalna in strižna komponenta $\sigma_{\xi\xi}$ in $\sigma_{\xi\eta}$ vsakega od teh vektorjev zadoščata enačbi krožnice (1.329). Na tej krožnici torej ležijo vrhovi vseh napetostnih vektorjev, ki bi jih v točki T dobili z izbiranjem različnih leg ravnine Π_ξ . Z njo je določen znani Mohrov krog za ravninsko napetostno stanje (slika 1.29). Ta krog predstavlja grafično upodobitev transformacijskih pravil, ki smo jih sicer analitično izpeljali za ravninsko napetostno stanje.



Slika 1.29

Konstruirati je mogoče tudi Mohrove kroge za prostorsko napetostno stanje, vendar se bomo temu zaradi nepreglednosti in daleč enostavnejših analitičnih postopkov odpovedali.

Izhajajoč iz geometrijskih zvez lahko v Mohrovem krogu rešujemo različne ravninske napetostne naloge. V ta namen moramo najprej določiti značilno točko, imenovano *pol Mohrovega kroga*.

Vrh podanega oziroma obravnavanega napetostnega vektorja (to je lahko tudi vektor, ki pripada eni od koordinatnih ravnin, na primer σ_x ali σ_y) projiciramo v smeri ordinate na nasprotno stran Mohrovega kroga. Skozi dobljeno točko narišemo smer ravnine, na katero deluje podani vektor napetosti (na primer ravnina z normalo \mathbf{e}_x ali \mathbf{e}_y). Točka, v kateri ta smer preseka Mohrov krog, je pol Mohrovega kroga (P).

Ko poznamo pol P Mohrovega kroga, lahko določimo vektorje napetosti, ki pripadajo poljubno izbranim ravninam skozi točko T . Smer izbrane ravnine narišemo skozi pol Mohrovega kroga, presečišče te smeri z Mohrovim krogom projiciramo na nasprotno stran in tako dobimo vrh iskanega napetostnega vektorja. Analogno, le v obrnjeni smeri, postopamo, če poznamo vektor napetosti in želimo določiti ravnino, ki ji ta vektor pripada.

Uporabo Mohrovega kroga si oglejmo na primeru določitve velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti pri ravninskem napetostnem stanju. Mohrov krog narišemo ob upoštevanju podatkov o napetostnem stanju delca \mathcal{T} , ki je določeno z napetostmi σ_{xx} , σ_{yy} in σ_{xy} . Pri tem so smeri koordinatnih ravnin določene z enotskima vektorjema \mathbf{e}_x in \mathbf{e}_y (slika 1.29).

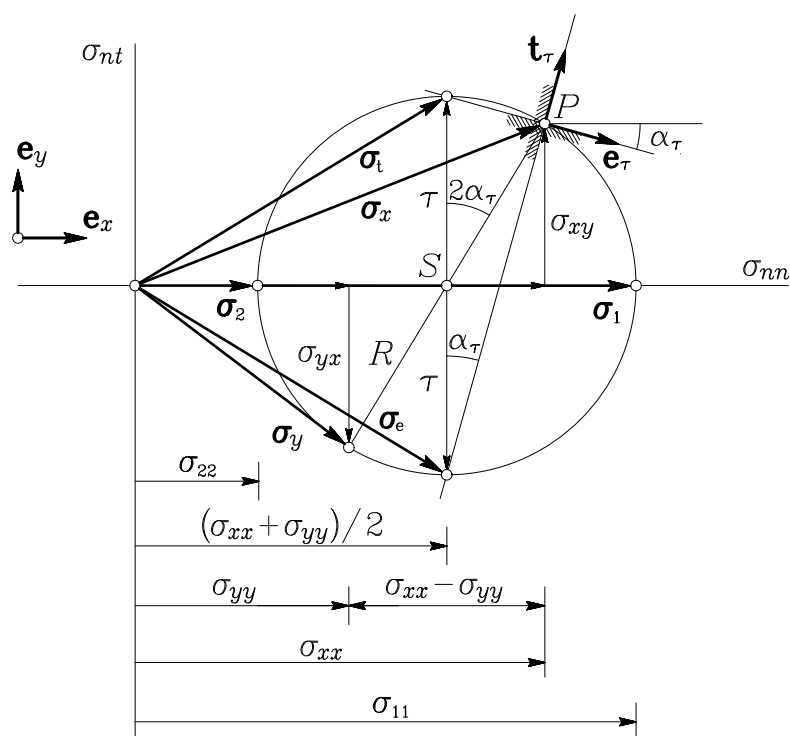
Velikosti glavnih normalnih napetosti sta določeni s presečiščema Mohrovega kroga z abscisno osjo. Iz slike 1.29 sledi

$$\sigma_{11,22} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2},$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_\sigma = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}},$$

kar se ujema z enačbama (1.314) in (1.310), ki smo ju v razdelku **1.13** analitično izpeljali za ravninsko napetostno stanje v ravnini (x, y) .

V Mohrovem krogu lahko določimo tudi ekstremne strižne napetosti ter ravnine, ki jim te napetosti pripadajo (slika 1.30).



Slika 1.30

Iz slike 1.30 lahko razberemo

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}},$$

kar se prav tako ujema z analitičnimi ugotovitvami.

1.15 Premiki togega telesa

Gibanje togega telesa v prostoru je poseben primer gibanja trdnega telesa, pri katerem se telo iz začetne lege \mathbf{B} premakne v novo lego \mathbf{B}' , njegova velikost, oblika in medsebojne lege delcev pa pri tem ostanejo nespremenjene.

Premik telesa je opisan z vektorskim poljem pomikov \mathbf{u} . To vektorsko polje vsakemu delcu \mathcal{T} , ki je v začetni legi \mathbf{B} določen s krajevnim vektorjem \mathbf{r} glede na izbrano nepomično točko prostora O , priredi novi krajevni vektor \mathbf{r}' v končni legi \mathbf{B}' (slika 1.31-a)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}. \quad (1.331)$$

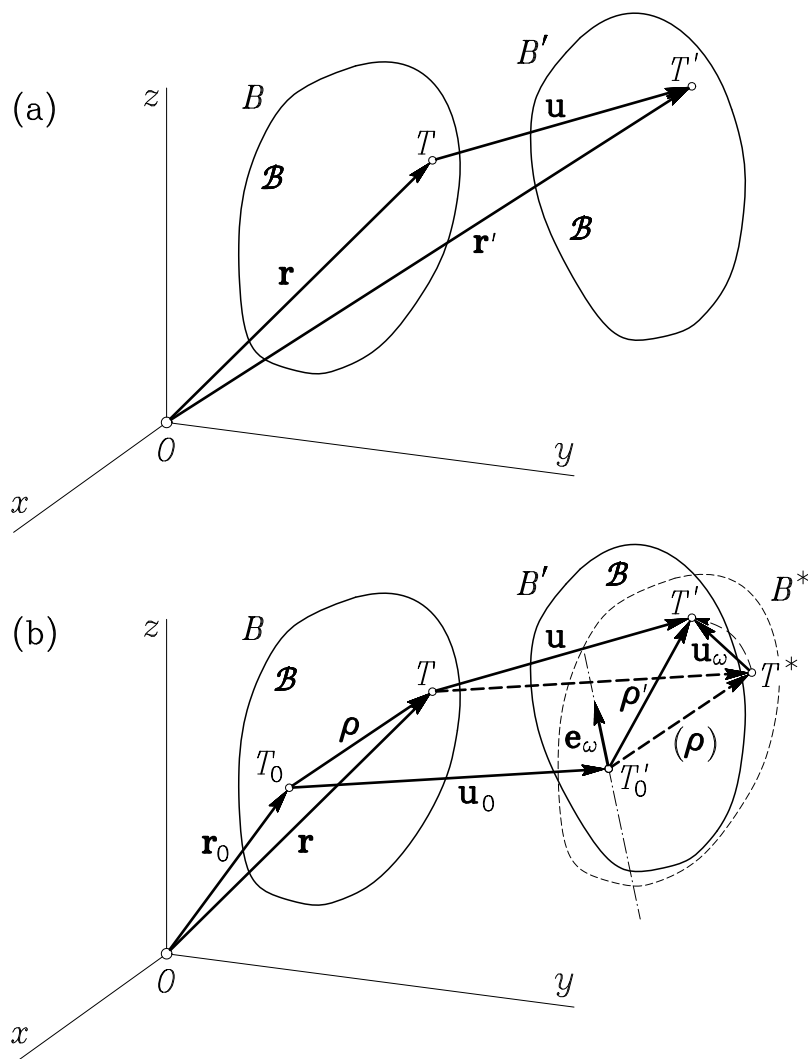
V skladu s *Chaslesovim*[†] *teoremom* si lahko premik togega telesa iz ene lege v drugo tudi v primeru najbolj splošnega gibanja predstavimo takole (slika 1.31-b): telo najprej vzporedno (translatorno) premaknemo tako, da so pomiki vseh delcev telesa enaki pomiku \mathbf{u}_0 poljubno izbranega referenčnega delca \mathcal{T}_0 , ki je v legi \mathbf{B} določen s točko T_0 . Tako dobimo vmesno lego \mathbf{B}^* , v kateri je referenčni delec \mathcal{T}_0 določen s točko T'_0 , delec \mathcal{T} pa s točko T^* . Nato telo zasučemo (zarotiramo) okrog nepomične referenčne točke T'_0 v končno lego \mathbf{B}' .

Za referenčno točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ lahko izberemo katerokoli točko telesa in jo določimo z njenim krajevnim vektorjem \mathbf{r}_0 . Običajno za referenčno točko izberemo katero od podpor ali kako drugo točko telesa, za katero poznamo posamezne ali vse komponente pomika in zasuka. Lega poljubnega delca \mathcal{T} , ki ga v stanju \mathbf{B} določa točka $T(x, y, z)$ s krajevnim vektorjem \mathbf{r} , je glede na referenčno točko T_0 določena z relativnim krajevnim vektorjem $\boldsymbol{\varrho}$

$$\boldsymbol{\varrho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{e}_x + (y - y_0)\mathbf{e}_y + (z - z_0)\mathbf{e}_z. \quad (1.332)$$

[†] Michel Chasles, francoski matematik in astronom, 1793–1880.

V slikah 1.31 in 1.32 so zaradi preglednosti označene le točke, ki določajo delca \mathcal{T}_0 in \mathcal{T} v legah \mathcal{B} , \mathcal{B}^* in \mathcal{B}' .

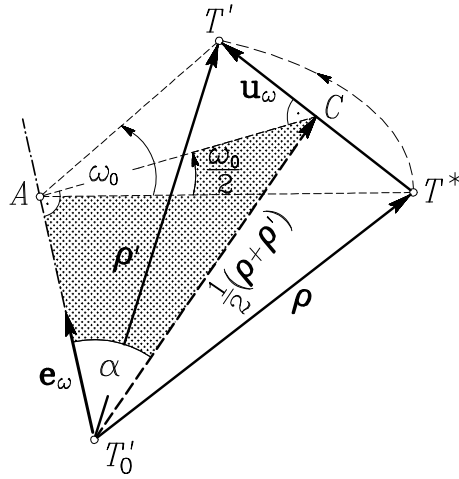


Slika 1.31

Če označimo z \mathbf{u}_ω tisti del pomika točke T , ki je posledica zasuka togega telesa okrog referenčne točke T'_0 , dobimo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\omega . \quad (1.333)$$

Zasuk okoli referenčne točke definiramo s smerjo *osi zasuka* in njegovo velikostjo. Smer osi zasuka določimo z njenim enotskim vektorjem \mathbf{e}_ω . Skozi točko T^* položimo ravnino Π_ω pravokotno na \mathbf{e}_ω (slika 1.32) in označimo prebodišče s točko A . Kot ω_0 , ki ga v ravnini Π_ω opiše daljica $\overline{AT^*}$ pri zasuku telesa okoli osi zasuka, imenujemo *velikost zasuka*. Ta je pozitivna, če se točka T^* giblje v nasprotni smeri urnega kazalca, oziroma negativna, če se giblje v sourni smeri. Brez izgube na splošnosti lahko vzamemo $0 \leq |\omega_0| \leq 2\pi$, saj točka T^* potuje ves čas po isti krožnici.



Slika 1.32

Ena od možnosti, kako izrazimo pomik \mathbf{u}_ω v splošnem primeru, je prikazana v nadaljevanju. S pomočjo slike 1.32 najprej določimo njegovo velikost, nato pa še njegovo smer. Iz pravokotnega trikotnika $(T_0'AC)$ sledi

$$\overline{AC} = \overline{T_0'C} \sin \alpha = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'| \sin \alpha, \quad (1.334)$$

iz pravokotnega trikotnika (ACT') pa ob upoštevanju enačbe (1.334) dobimo

$$\overline{CT'} = \overline{AC} \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'| \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2}. \quad (1.335)$$

Ker je $\overline{CT'} = \frac{1}{2} \overline{T^*T'} = \frac{1}{2} |\mathbf{u}_\omega|$, sledi

$$|\mathbf{u}_\omega| = \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} |\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}'| \sin \alpha. \quad (1.336)$$

Tako smo dobili absolutno vrednost vektorja \mathbf{u}_ω . Ker je ta vektor pravokoten na ravnino T'_0AC , dobimo enotski vektor njegove smeri z vektorskim produktom vektorjev \mathbf{e}_ω in $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}')$, tako da je

$$\mathbf{u}_\omega = |\mathbf{u}_\omega| \frac{\mathbf{e}_\omega \times \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}')}{|\mathbf{e}_\omega \times \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}')|}. \quad (1.337)$$

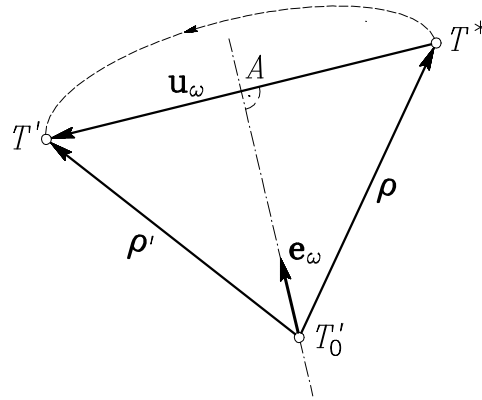
Ker je $|\mathbf{e}_\omega \times \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}')| = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}'| \sin \alpha$, dobimo ob upoštevanju enačbe (1.336)

$$\mathbf{u}_\omega = \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} \mathbf{e}_\omega \times (\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}'). \quad (1.338)$$

S tem preide enačba (1.333) v naslednjo obliko

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} \mathbf{e}_\omega \times (\boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\varrho}'). \quad (1.339)$$

To je znani *Rodriguesov*[†] obrazec, ki opisuje gibanje togega telesa pri poljubno velikih pomikih in zasukih.



slika 1.33

[†] Benjamin Olinde Rodrigues, francoski matematik, 1794–1851.

Izjema je primer $\omega_0 = \pi$. Tedaj bi namreč dobili $\operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} = \infty$, kar očitno ni pravi rezultat. V tem primeru določimo pomik \mathbf{u}_ω s formulo

$$\mathbf{u}_\omega = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho} = 2 [(\mathbf{e}_\omega \cdot \boldsymbol{\rho}) \mathbf{e}_\omega - \boldsymbol{\rho}] , \quad (1.340)$$

ki jo brez težav izpeljemo ob upoštevanju *slike 1.33*.

V konstrukcijski mehaniki imamo pogosto opraviti s primeri, ko so zasuki teles zelo majhni. V takih primerih lahko opis gibanja togega telesa občutno poenostavimo. Enačbo (1.339), ki določa premik togega telesa pri neomejenih pomikih in zasukih, zapišimo nekoliko drugače

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{2}{\omega_0} \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} \omega_0 \mathbf{e}_\omega \times \frac{1}{2} (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}') . \quad (1.341)$$

Če je zasuk majhen ($|\omega_0| \ll 1$), se relativna krajevna vektorja $\boldsymbol{\rho}$ in $\boldsymbol{\rho}'$, ki sta že sicer enaka po velikosti, tudi po smeri le malo razlikujeta, zato lahko pišemo

$$|\omega_0| \ll 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\rho}' \approx \boldsymbol{\rho} \quad \text{in} \quad \frac{1}{2} (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}') \approx \boldsymbol{\rho} \approx \boldsymbol{\rho}' . \quad (1.342)$$

Razen tega lahko pri majhnem zasuku ω_0 vzamemo

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} \approx \frac{\omega_0}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\omega_0} \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} \approx 1 \quad (1.343)$$

in dobimo Rodriguesovo enačbo (1.339) v poenostavljeni obliki

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}' . \quad (1.344)$$

Pri tem smo z oznako $\boldsymbol{\omega}_0$ vpeljali *vektor zasuka* oziroma *vektor rotacije*

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}_\omega . \quad (1.345)$$

Pomik \mathbf{u} lahko torej izrazimo s katerikoli od relativnih krajevnih vektorjev $\boldsymbol{\rho}$ ali $\boldsymbol{\rho}'$, pač v odvisnosti od tega, ali poznamo začetno ali končno

lego togega telesa; v obeh primerih naredimo napako istega velikostnega reda, ki je zanemarljiva, če je le zasuk ω_0 zadosti majhen.

Za občutek in oceno napake pri privzetih poenostavitvah so v preglednici 1.1 prikazane vrednosti $\frac{2}{\omega_0} \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2}$ za nekatere velikosti zasuka ω_0

Preglednica 1.1

ω_0	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
	0.57°	5.73°	11.45°	17.19°	22.92°	28.65°
$\frac{2}{\omega_0} \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2}$	1.000	1.001	1.003	1.008	1.014	1.021

V večini primerov, s katerimi se srečamo v tej knjigi, poznamo začetno lego telesa, velikosti zasukov pa so omejene tako, da lahko pomike togega telesa določamo s poenostavljeno Rodriguesovo enačbo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.346)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0. \quad (1.347)$$

Pri tem smo poudarili, da imajo vse točke togega telesa enak zasuk ω_0 .[†]

Iz enačb (1.339) oziroma (1.346) vidimo, da je pomik poljubne točke togega telesa odvisen od dveh vektorjev (\mathbf{u}_0 in $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}_\omega$). Zato ima togo telo v trirazsežnem prostoru šest prostostnih stopenj (šest neodvisnih možnosti gibanja), ki jih določajo komponente vektorjev \mathbf{u}_0 in $\boldsymbol{\omega}_0$. V kartezijskih koordinatah dobimo

$$\begin{aligned} u_x &= u_{0x} + (z - z_0) \omega_{0y} - (y - y_0) \omega_{0z} \\ u_y &= u_{0y} + (x - x_0) \omega_{0z} - (z - z_0) \omega_{0x} \\ u_z &= u_{0z} + (y - y_0) \omega_{0x} - (x - x_0) \omega_{0y} \end{aligned} \quad (1.348)$$

[†] Glej na primer dokaz v knjigi M. Stanek, G. Turk, Statika I, FGG, Ljubljana (1996).

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{0x} \\ \omega_y &= \omega_{0y} \\ \omega_z &= \omega_{0z}.\end{aligned}\tag{1.349}$$

Vse dosedanje ugotovitve o gibanju togega telesa lahko torej strnemo v naslednjo trditev: Če predpišemo translacijo \mathbf{u}_0 in zasuk $\boldsymbol{\omega}_0$ v neki poljubno izbrani točki T_0 , smo s tem predpisali tudi pomik \mathbf{u} in zasuk $\boldsymbol{\omega}$ katere koli druge točke T togega telesa.

Oglejmo si še primer, da je gibanje togega telesa vezano na določeno ravnino v prostoru. Brez izgube na splošnosti lahko za to ravnino izberemo kar katero od koordinatnih ravnin, na primer ravnino (x, y) . Teda j mora biti pomik poljubne točke T togega telesa v smeri z enak nič

$$u_z(T) = 0.\tag{1.350}$$

Iz tretje od enačb (1.348) sledi, da je gornji pogoj izpolnjen pri poljubni izbiri koordinat x, y, z točke T le, če velja

$$u_{0z} = 0, \quad \omega_{0x} = \omega_{0y} = 0.\tag{1.351}$$

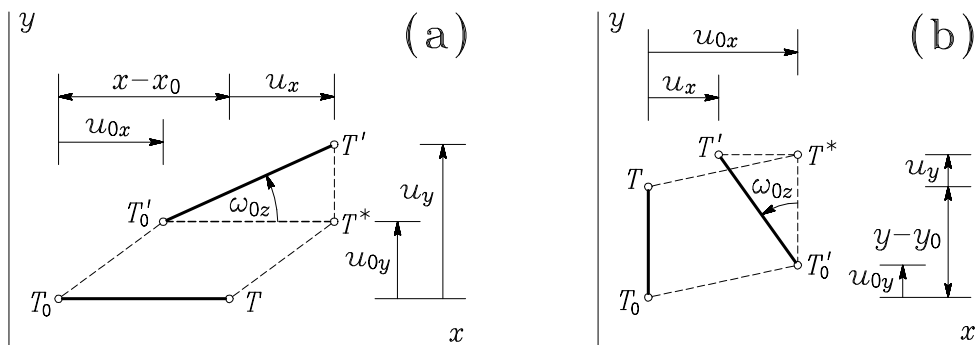
Preostale enačbe (1.348) in (1.349) so sedaj

$$\begin{aligned}u_x &= u_{0x} - (y - y_0) \omega_{0z} \\ u_y &= u_{0y} + (x - x_0) \omega_{0z}\end{aligned}\tag{1.352}$$

$$\begin{aligned}\omega_x &= 0 \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= \omega_{0z}.\end{aligned}\tag{1.353}$$

To pomeni, da ima togo telo pri gibanju v ravnini (x, y) tri neodvisne prostostne stopnje $(u_{0x}, u_{0y}, \omega_{0z})$. Podobno lahko ugotovimo, da je gibanje togega telesa v ravnini (y, z) določeno s prostostnimi stopnjami $u_{0y}, u_{0z}, \omega_{0x}$, v ravnini (z, x) pa s prostostnimi stopnjami $u_{0z}, u_{0x}, \omega_{0y}$.

Kot zgled si oglejmo še dva posebna primera izbire točk T_0 in T pri gibanju togega telesa v ravnini (x, y) (slika 1.34).



Slika 1.34

V primeru (a) je $y = y_0$ in iz enačb (1.352) sledi

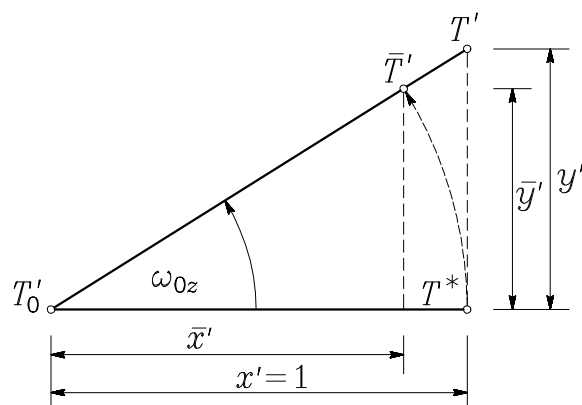
$$\begin{aligned} u_x &= u_{0x} \\ u_y &= u_{0y} + (x - x_0) \omega_{0z}. \end{aligned} \quad (1.354)$$

V primeru (b) pa je $x = x_0$ in dobimo

$$\begin{aligned} u_x &= u_{0x} - (y - y_0) \omega_{0z} \\ u_y &= u_{0y}. \end{aligned} \quad (1.355)$$

Dobljeni rezultati nas skupaj s skicama na *sliki 1.34* spet opozorijo, da smemo pomike togega telesa določati s poenostavljeno Rodriguesovo enačbo (1.344) le tedaj, ko je zasuk ω_{0z} dovolj majhen.

Končno si na primeru (a), ki je nekoliko podrobneje predstavljen na *sliki 1.35*, še oglejmo, kolikšno napako naredimo pri različnih vrednostih ω_0 , če pomike zaradi zasuka izračunamo s poenostavljenim namesto s točnim Rodriguesovim obrazcem (*preglednica 1.2*).



Slika 1.35

Preglednica 1.2

ω_{0z}	0.01	0.05	0.10	0.20	0.50	1.00
	0.57°	2.86°	5.73°	11.45°	28.65°	57.30°
x'	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
\bar{x}'	1.0000	0.9988	0.9950	0.9801	0.8776	0.5403
napaka %	0.0	0.1	0.5	2.0	14.0	85.1
y'	0.0100	0.0500	0.1003	0.2027	0.5463	1.5574
\bar{y}'	0.0100	0.0500	0.0998	0.1987	0.4794	0.8415
napaka %	0.0	0.1	0.5	2.0	14.0	85.1

V preglednici 1.2 so primerjane koordinate točke T po izvršenem zasuku, pri čemer smo zaradi enostavnosti vzeli $T_0(0, 0)$ in $T(1, 0)$. Napake so izračunane glede na točne vrednosti koordinat, pri čemer se brez težav prepričamo, da sta napaki pri obeh koordinatah enaki:

$$\text{napaka \%} = 100 \frac{x' - \bar{x}'}{\bar{x}'} = 100 \frac{y' - \bar{y}'}{\bar{y}'} = 100 \left(\frac{1}{\cos \omega_{0z}} - 1 \right). \quad (1.356)$$

Rezultati kažejo, da pri večini primerov praktične statike, kjer so pričakovani zasuki manjši od 0.1 rad (5.73°), pri določanju pomikov s poenostavljeno Rodriguesovo enačbo ne naredimo omembe vredne napake. Pri omenjeni vrednosti zasuka je napaka zgolj 0.5 %. Običajno pa so zasuki elementov gradbenih konstrukcij še veliko manjši od 0.1 rad, kar pomeni, da so napake dejansko zanemarljive. Navedena ugotovitev se seveda nanaša na primer, da je togo telo predstavljeno z daljico $\overline{T_0T}$, ki je vzporedna z “vodoravno” osjo x .

1.16 Togo telo - Zgledi

Zgled 1.1

Zapiši enačbe (1.85), (1.86), (1.100) in (1.101) v komponentni obliki!

Enačbi (1.85) in (1.86):

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z = \sum_i R_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z = \sum_i M_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z)$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$$

$$\begin{aligned}
 R_x &= \oint_{\mathcal{S}} p_{nx} dS + \int_{\mathcal{V}} v_x dV = 0 \\
 R_y &= \oint_{\mathcal{S}} p_{ny} dS + \int_{\mathcal{V}} v_y dV = 0 \\
 R_z &= \oint_{\mathcal{S}} p_{nz} dS + \int_{\mathcal{V}} v_z dV = 0 \\
 M_x &= \oint_{\mathcal{S}} (y p_{nz} - z p_{ny}) dS + \int_{\mathcal{V}} (y v_z - z v_y) dV = 0 \\
 M_y &= \oint_{\mathcal{S}} (z p_{nx} - x p_{nz}) dS + \int_{\mathcal{V}} (z v_x - x v_z) dV = 0 \\
 M_z &= \oint_{\mathcal{S}} (x p_{ny} - y p_{nx}) dS + \int_{\mathcal{V}} (x v_y - y v_x) dV = 0.
 \end{aligned}$$

Enačbi (1.100) in (1.101):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_n &= N_{nx} \mathbf{e}_x + N_{ny} \mathbf{e}_y + N_{nz} \mathbf{e}_z = \sum_i N_{ni} \mathbf{e}_i \\
 \mathbf{M}_n &= M_{nx} \mathbf{e}_x + M_{ny} \mathbf{e}_y + M_{nz} \mathbf{e}_z = \sum_i M_{ni} \mathbf{e}_i
 \end{aligned}
 \quad (i = x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
 N_{nx} &= \int_{\mathcal{A}_n} \sigma_{nx} dA_n \\
 N_{ny} &= \int_{\mathcal{A}_n} \sigma_{ny} dA_n \\
 N_{nz} &= \int_{\mathcal{A}_n} \sigma_{nz} dA_n \\
 M_{nx} &= \int_{\mathcal{A}_n} (y \sigma_{nz} - z \sigma_{ny}) dA_n \\
 M_{ny} &= \int_{\mathcal{A}_n} (z \sigma_{nx} - x \sigma_{nz}) dA_n \\
 M_{nz} &= \int_{\mathcal{A}_n} (x \sigma_{ny} - y \sigma_{nx}) dA_n.
 \end{aligned}$$

Zgled 1.2

Dokaži, da so količine I_1^σ , I_2^σ , I_3^σ neodvisne od izbire koordinatnega sistema, torej invariantne!

Za dokaz invariantnosti količine I_1^σ jo najprej izračunamo v koordinatnem sistemu (x, y, z) in jo označimo z $I_1^\sigma(x_i)$

$$I_1^\sigma(x_i) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sum_i \sigma_{ii}. \quad (a)$$

V koordinatah (ξ, η, ζ) pa dobimo

$$I_1^\sigma(x_\alpha) = \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta} = \sum_\alpha \sigma_{\alpha\alpha}. \quad (b)$$

Komponente $\sigma_{\alpha\beta}$ obravnavanega tenzorja napetosti v koordinatah (ξ, η, ζ) določimo s transformacijsko enačbo (1.163)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j}. \quad (c)$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{xx} e_{\xi x}^2 + \sigma_{yy} e_{\xi y}^2 + \sigma_{zz} e_{\xi z}^2 + \\ &\quad 2\sigma_{xy} e_{\xi x} e_{\xi y} + 2\sigma_{yz} e_{\xi y} e_{\xi z} + 2\sigma_{zx} e_{\xi z} e_{\xi x} \\ \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{xx} e_{\eta x}^2 + \sigma_{yy} e_{\eta y}^2 + \sigma_{zz} e_{\eta z}^2 + \\ &\quad 2\sigma_{xy} e_{\eta x} e_{\eta y} + 2\sigma_{yz} e_{\eta y} e_{\eta z} + 2\sigma_{zx} e_{\eta z} e_{\eta x} \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= \sigma_{xx} e_{\zeta x}^2 + \sigma_{yy} e_{\zeta y}^2 + \sigma_{zz} e_{\zeta z}^2 + \\ &\quad 2\sigma_{xy} e_{\zeta x} e_{\zeta y} + 2\sigma_{yz} e_{\zeta y} e_{\zeta z} + 2\sigma_{zx} e_{\zeta z} e_{\zeta x}. \end{aligned} \quad (\check{c})$$

Dobljene izraze za napetosti vstavimo v enačbo (b) in po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} I_1^\sigma(x_\alpha) &= \sigma_{xx}(e_{\xi x}^2 + e_{\eta x}^2 + e_{\zeta x}^2) + \\ &\quad \sigma_{yy}(e_{\xi y}^2 + e_{\eta y}^2 + e_{\zeta y}^2) + \\ &\quad \sigma_{zz}(e_{\xi z}^2 + e_{\eta z}^2 + e_{\zeta z}^2) + \\ &\quad 2\sigma_{xy}(e_{\xi x} e_{\xi y} + e_{\eta x} e_{\eta y} + e_{\zeta x} e_{\zeta y}) + \\ &\quad 2\sigma_{yz}(e_{\xi y} e_{\xi z} + e_{\eta y} e_{\eta z} + e_{\zeta y} e_{\zeta z}) + \\ &\quad 2\sigma_{zx}(e_{\xi z} e_{\xi x} + e_{\eta z} e_{\eta x} + e_{\zeta z} e_{\zeta x}). \end{aligned} \quad (d)$$

Zaradi znanih lastnosti transformacijske matrike $[e_{\alpha i}]$ imajo prvi trije izrazi v oklepajih na desni strani enačbe (d) vrednost 1, drugi trije pa so nič. Tako dobimo enakost

$$I_1^\sigma(x_\alpha) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = I_1^\sigma(x_i), \quad (e)$$

kar dokazuje, da je I_1^σ res invarianta glede na zamenjavo koordinatnega sistema.

Z zgoščenim zapisom nastopajočih količin lahko dokaz občutno skrajšamo

$$I_1^\sigma(x_\alpha) = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} e_{\alpha i} e_{\alpha j}. \quad (f)$$

Ker je

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} = \delta_{ij} \quad \text{in} \quad \sum_j \sigma_{ij} \delta_{ij} = \sigma_{ii}, \quad (g)$$

preide enačba (f) v iskano enakost

$$I_1^\sigma(x_\alpha) = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} = \sum_i \sigma_{ii} = I_1^\sigma(x_i).$$

Podobno, vendar le v zgoščenem zapisu, dokažemo invariantnost količine I_2^σ . V koordinatah (x, y, z) je v skladu z enačbo (1.189)

$$I_2^\sigma(x_i) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\sigma_{ii} \sigma_{kk} - \sigma_{ik} \sigma_{ki}), \quad (h)$$

v koordinatah (ξ, η, ζ) pa

$$I_2^\sigma(x_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (\sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\alpha}). \quad (i)$$

V enačbi (i) izrazimo napetosti s transformacijsko formulo (c) in po ureditvi dobimo

$$I_2^\sigma(x_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sigma_{ij} \sigma_{kl} (e_{\alpha i} e_{\alpha j} e_{\beta k} e_{\beta l} - e_{\alpha i} e_{\beta j} e_{\beta k} e_{\alpha l}). \quad (j)$$

Ob upoštevanju enačb (1.49) se desna stran nekoliko skrajša

$$I_2^\sigma(x_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sigma_{ij} \sigma_{kl} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (k)$$

Ker je

$$\begin{aligned} \sum_j \sigma_{ij} \delta_{ij} &= \sigma_{ii} & \sum_j \sigma_{ij} \delta_{jk} &= \sigma_{ik} \\ \sum_l \sigma_{kl} \delta_{kl} &= \sigma_{kk} & \sum_l \sigma_{kl} \delta_{il} &= \sigma_{ki} , \end{aligned} \quad (l)$$

preide enačba (k) v iskano enakost

$$I_2^\sigma(x_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\sigma_{ii} \sigma_{kk} - \sigma_{ik} \sigma_{ki}) = I_2^\sigma(x_i) . \quad (m)$$

Dokaz invariantnosti količine I_3^σ je najlaže izpeljati v matričnem zapisu. V koordinatah (x, y, z) je namreč

$$I_3^\sigma(x_i) = \det [\sigma_{ij}] , \quad (n)$$

v koordinatah (ξ, η, ζ) pa

$$I_3^\sigma(x_\alpha) = \det [\sigma_{\alpha\beta}] . \quad (o)$$

Uporabimo transformacijsko enačbo (1.165) in dobimo

$$I_3^\sigma(x_\alpha) = \det ([T]^T [\sigma_{ij}] [T]) . \quad (p)$$

Determinanta produkta je enaka produktu determinant, zato je

$$I_3^\sigma(x_\alpha) = \det [T]^T \det [\sigma_{ij}] \det [T] . \quad (r)$$

Zaradi znanih lastnosti transformacijske matrike je

$$\det [T]^T = 1 \quad \text{in} \quad \det [T] = 1 \quad (s)$$

in enačba (r) pokaže iskano enakost

$$I_3^\sigma(x_\alpha) = \det[\sigma_{ij}] = I_3^\sigma(x_i). \quad (\text{š})$$

Bralcu prepuščamo, da to enakost dokaže neposredno iz zapisa (1.190).

Zgled 1.3

Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z) . Skozi točko P položimo dve nekomplanarni ravnini: Γ_a z enotsko normalo \mathbf{e}_a in Γ_b z enotsko normalo \mathbf{e}_b . Določi vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$, ki v točki P pripadata ravninama Γ_a in Γ_b ! Dokaži, da je projekcija napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ na smer \mathbf{e}_b po velikosti enaka projekciji napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_b$ na smer \mathbf{e}_a !

Enotska vektorja normal na ravnini Γ_a in Γ_b sta

$$\Gamma_a : \quad \mathbf{e}_a = e_{ax} \mathbf{e}_x + e_{ay} \mathbf{e}_y + e_{az} \mathbf{e}_z \quad (a)$$

$$\Gamma_b : \quad \mathbf{e}_b = e_{bx} \mathbf{e}_x + e_{by} \mathbf{e}_y + e_{bz} \mathbf{e}_z. \quad (b)$$

Napetostna vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$, ki v točki P pripadata ravninama Γ_a in Γ_b , določimo z enačbo (1.158)

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \sigma_x e_{ax} + \sigma_y e_{ay} + \sigma_z e_{az} \quad (c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \sigma_x e_{bx} + \sigma_y e_{by} + \sigma_z e_{bz}. \quad (\check{c})$$

Če zapišemo napetostne vektorje $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$ in $\boldsymbol{\sigma}_z$ z njihovimi komponentami σ_{ij} v izbranem koordinatnem sistemu (x, y, z)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_x &= \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{xy} \mathbf{e}_y + \sigma_{xz} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_y &= \sigma_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{yz} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (d)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zx} \mathbf{e}_x + \sigma_{zy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z,$$

dobimo po množenju in ureditvi enačb (c) in (č)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_a &= (\sigma_{xx} e_{ax} + \sigma_{yx} e_{ay} + \sigma_{zx} e_{az}) \mathbf{e}_x + \\ &\quad (\sigma_{xy} e_{ax} + \sigma_{yy} e_{ay} + \sigma_{zy} e_{az}) \mathbf{e}_y + \\ &\quad (\sigma_{xz} e_{ax} + \sigma_{yz} e_{ay} + \sigma_{zz} e_{az}) \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (e)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_b &= (\sigma_{xx} e_{bx} + \sigma_{yx} e_{by} + \sigma_{zx} e_{bz}) \mathbf{e}_x + \\ &\quad (\sigma_{xy} e_{bx} + \sigma_{yy} e_{by} + \sigma_{zy} e_{bz}) \mathbf{e}_y + \\ &\quad (\sigma_{xz} e_{bx} + \sigma_{yz} e_{by} + \sigma_{zz} e_{bz}) \mathbf{e}_z.\end{aligned}\quad (f)$$

Projekcijo napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ na smer \mathbf{e}_b izračunamo kot skalarni produkt vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_a$ in \mathbf{e}_b ; ob upoštevanju simetrije napetostnega tenzorja dobimo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{e}_b &= \sigma_{xx} e_{ax} e_{bx} + \sigma_{yy} e_{ay} e_{by} + \sigma_{zz} e_{az} e_{bz} + \\ &\quad \sigma_{xy} (e_{ax} e_{by} + e_{ay} e_{bx}) + \\ &\quad \sigma_{yz} (e_{ay} e_{bz} + e_{az} e_{by}) + \\ &\quad \sigma_{zx} (e_{az} e_{bx} + e_{ax} e_{bz}).\end{aligned}\quad (g)$$

Podobno določimo projekcijo napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_b$ na smer \mathbf{e}_a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a &= \sigma_{xx} e_{bx} e_{ax} + \sigma_{yy} e_{by} e_{ay} + \sigma_{zz} e_{bz} e_{az} + \\ &\quad \sigma_{xy} (e_{bx} e_{ay} + e_{by} e_{ax}) + \\ &\quad \sigma_{yz} (e_{by} e_{az} + e_{bz} e_{ay}) + \\ &\quad \sigma_{zx} (e_{bz} e_{ax} + e_{bx} e_{az}).\end{aligned}\quad (h)$$

Iz primerjave enačb (g) in (h) sledi

$$\boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{e}_b = \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a$$

in dokaz je končan.

Nalogo lahko rešimo tudi po krajši poti, če nastopajoče količine zapišemo z vsotami ($i, j = x, y, z$)

$$(d) \quad : \quad \boldsymbol{\sigma}_i = \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i)$$

$$(c), (d) \quad : \quad \boldsymbol{\sigma}_a = \sum_i e_{ai} \boldsymbol{\sigma}_i = \sum_i \sum_j e_{ai} \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (j)$$

$$(\check{c}), (d) \quad : \quad \boldsymbol{\sigma}_b = \sum_i e_{bi} \boldsymbol{\sigma}_i = \sum_i \sum_j e_{bi} \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (k)$$

in ker je

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_b = e_{jb} = e_{bj} \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_a = e_{ja} = e_{aj},$$

sledi po skalarnem množenju enačbe (j) z \mathbf{e}_b in enačbe (k) z \mathbf{e}_a

$$\boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{e}_b = \sum_i \sum_j e_{ai} \sigma_{ij} e_{bj} \quad (l)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a = \sum_i \sum_j e_{bi} \sigma_{ij} e_{aj}. \quad (m)$$

V enačbi (m) ničesar ne spremenimo, če zamenjamo seštevalna indeksa i in j . Tako dobimo

$$\boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a = \sum_i \sum_j e_{bj} \sigma_{ji} e_{ai}. \quad (n)$$

Ker je tenzor napetosti simetričen ($\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$), sledi

$$\boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a = \sum_i \sum_j e_{bj} \sigma_{ij} e_{ai}. \quad (o)$$

S primerjavo enačb (l) in (o) spet dobimo

$$\boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{e}_b = \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a. \quad (p)$$

To je znani izrek o konjugiranosti napetostnih vektorjev v nekomplanarnih ravninah.

V primeru, da sta ravnini Γ_a in Γ_b pravokotni med seboj, predstavljata skalarna produkta $\boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{e}_b$ in $\boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a$ strižni napetosti v teh ravninah

$$\boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{e}_b = \sigma_{ab} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_a = \sigma_{ba}. \quad (r)$$

Izrek (p) se v tem primeru ujema z momentnim ravnotežnim pogojem (1.134), ki zahteva, da so strižne napetosti v medsebojno pravokotnih ravninah enake (simetrične)

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba}. \quad (s)$$

Zgled 1.4

Izhajajoč iz Gaussovega integralskega izreka izpelji ravnotežne pogoje za delec trdnega telesa, izražene z napetostmi v kartezijskih koordinatah! Upoštevaj, da je zunanja obtežba telesa v ravnotežju!

Gaussov integralski izrek * (imenovan tudi izrek Gaussa † – Ostrogradskega ‡) je eden od osnovnih in najmočnejših izrekov matematične analize. V elementarnih matematičnih učbenikih ga navadno najdemo zapisanega v naslednji obliki

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{P} dV \quad (a)$$

oziroma v kartezijskih koordinatah x, y, z

* Glej na primer: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlig, Matematični priročnik (1997), str. 522.

† Johann Carl Friedrich Gauss, nemški matematik, 1777-1855.

‡ Mihail Vasiljevič Ostrogradski, ukrajinski matematik, 1801–1861.

$$\oint_{\mathcal{S}} (P_x e_{nx} + P_y e_{ny} + P_z e_{nz}) dS = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dV. \quad (b)$$

Pri tem so $P_x(x, y, z)$, $P_y(x, y, z)$, $P_z(x, y, z)$ zvezne funkcije z zveznimi prvimi parcialnimi odvodi, definirane na območju \mathcal{V} in na njegovi mejni ploskvi \mathcal{S} , ki je orientirana z enotsko zunanjo normalo \mathbf{e}_n . V tem učbeniku uporabljamo Gaussov izrek v posplošeni obliki

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{P}_x e_{nx} + \mathbf{P}_y e_{ny} + \mathbf{P}_z e_{nz}) dS = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) dV, \quad (c)$$

kjer so \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y , \mathbf{P}_z vektorske funkcije podobnih lastnosti kakor P_x , P_y , P_z v izreku (b). Gaussov izrek lahko torej razumemo tudi takole: Če sta vektorski polji \mathbf{A} in \mathbf{B} povezani z enačbo

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} dS = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} dV, \quad (\check{c})$$

potem obstajajo tri take vektorske funkcije \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y , \mathbf{P}_z , da velja

$$\text{na območju } \mathcal{V} : \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z}, \quad (d)$$

$$\text{na mejni ploskvi } \mathcal{S} : \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}_x e_{nx} + \mathbf{P}_y e_{ny} + \mathbf{P}_z e_{nz}. \quad (e)$$

Ravnotežne pogoje za zunanjo obtežbo telesa kot celote smo izrazili z enačbama (1.85) in (1.86), ki ju tokrat zapišemo malo drugače

$$(1.85) \dots \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n dS = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} dV \quad (f)$$

$$(1.86) \dots \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n dS = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV. \quad (g)$$

Podobno kakor zgoraj lahko torej sklepamo, da sta integranda na levi in desni strani enačbe (f) povezana med seboj s tremi vektorskimi funkcijami, ki jih tokrat označimo s $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ in ki so z zunanjo obtežbo \mathbf{p}_n in \mathbf{v} povezane v smislu enačb (d) in (e)

$$\text{na območju } \mathcal{V} : \quad -\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z}, \quad (h)$$

$$\text{na mejni ploskvi } \mathcal{S} : \quad \mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_x e_{nx} + \boldsymbol{\sigma}_y e_{ny} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{nz}. \quad (i)$$

S preureditvijo enačbe (h) dobimo ravnotežni pogoj (1.122), enačba (i) pa predstavlja robni pogoj (1.138).

Z vstavitvijo enačbe (i) v enačbo (g) dobimo

$$\oint_{\mathcal{S}} [(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_x) e_{nx} + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_y) e_{ny} + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_z) e_{nz}] dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (j)$$

Prvi integral na levi strani gornje enačbe prevedemo z Gaussovimi izreki v trojni integral po območju \mathcal{V} in rezultat nekoliko preuredimo

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z} + \mathbf{v} \right) dV + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{e}_y \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\sigma}_z) dV = \mathbf{0}. \quad (k)$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{e}_x, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z. \quad (l)$$

Zaradi enačbe (h) je prvi člen na levi strani enačbe (k) enak nič, o drugem pa sklepamo takole: Ravnotežna pogoja (f) in (g) bi lahko zapisali tudi za poljubno podobmočje \mathcal{V}^* , ki bi ga v mislih “izrezali” iz območja \mathcal{V} , le da bi v tem primeru namesto specifične zunanje

površinske obtežbe \mathbf{p}_n nastopale napetosti $\boldsymbol{\sigma}_n$. Ker mora biti tudi podobmočje \mathcal{V}^* v ravnotežju, bi z analognim izvajanjem kakor zgoraj dobili

$$\int_{\mathcal{V}^*} (\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{e}_y \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\sigma}_z) dV = \mathbf{0}. \quad (m)$$

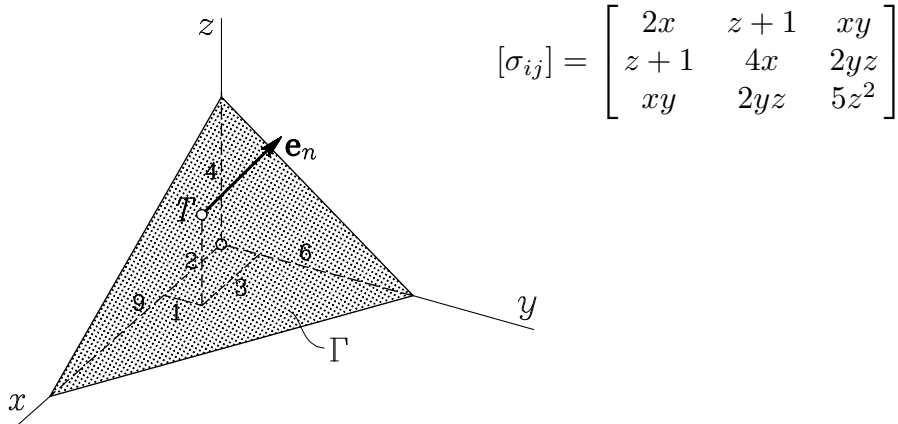
Ker smo podobmočje \mathcal{V}^* poljubno izbrali, je pogoj (m) izpolnjen le tedaj, če na celotnem območju \mathcal{V} velja

$$\mathbf{e}_x \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{e}_y \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{0}. \quad (n)$$

Tako smo z napetostmi izrazili tudi momentni ravnotežni pogoj.

Zgled 1.5

Napetostno stanje telesa je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z) . Določi vektor napetosti ter njegovo normalno in strižno komponento v ravnini Γ , ki je podana z odseki na koordinatnih oseh (slika Z-1.5), in sicer v točki $T(3, 1, z)$, ($T \in \Gamma$)! Določi vektorsko polje specifične prostorninske obtežbe \mathbf{v} tako, da bodo izpolnjeni ravnotežni pogoji v vsaki točki telesa! Enota dolžin je m, enota napetosti pa kN/cm^2 .



$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2x & z+1 & xy \\ z+1 & 4x & 2yz \\ xy & 2yz & 5z^2 \end{bmatrix}$$

Slika Z-1.5

Zapišimo najprej enačbo ravnine Γ v segmentni in nato še v splošni obliki

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} = 1 \quad \rightarrow \quad \Phi = 4x + 6y + 9z - 36 = 0.$$

Normalo ravnine Γ določimo kot gradient skalarne polja Φ

$$\mathbf{n} = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = 4\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 9\mathbf{e}_z,$$

njena dolžina pa je

$$n = |\mathbf{n}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{133} = 11.53.$$

Enotski vektor normale ravnine Γ je tako

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{n}}{n} = 0.347 \mathbf{e}_x + 0.520 \mathbf{e}_y + 0.780 \mathbf{e}_z.$$

Določimo še koordinato z točke T tako, da bo ta točka zares ležala v ravnini Γ

$$T : x = 3, \quad y = 1 \quad \dots \quad \Phi = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 9z - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad z = 2.$$

Napetostno stanje v točki $T(3, 1, 2)$ je sedaj podano z naslednjo matriko komponent napetosti

$$[\sigma_{ij}]_T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 4 \\ 3 & 4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Komponente vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_n$, ki v točki T pripada ravnini Γ , dobimo z enačbo (1.150)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 4 \\ 3 & 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.347 \\ 0.520 \\ 0.780 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.983 \\ 10.405 \\ 18.730 \end{Bmatrix},$$

tako da je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_n &= \sigma_{nx} \mathbf{e}_x + \sigma_{ny} \mathbf{e}_y + \sigma_{nz} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= 5.983 \mathbf{e}_x + 10.405 \mathbf{e}_y + 18.730 \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Normalno komponento σ_{nn} napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$ dobimo kot projekcijo tega vektorja na smer normale

$$\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 5.983 \\ 10.405 \\ 18.730 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.347 \\ 0.520 \\ 0.780 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_{nn} = 22.105 \text{ kN/cm}^2.$$

Določimo še velikost $\sigma_n = |\boldsymbol{\sigma}_n|$ napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_n = 5.983^2 + 10.406^2 + 18.730^2 \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_n = 494.865 \\ \sigma_n &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_n} = 22.246 \text{ kN/cm}^2.\end{aligned}$$

Strižno napetost v točki T ravnine Γ izračunamo po Pitagorovem izreku

$$\begin{aligned}\sigma_{nt} &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_n - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{494.865 - 22.105^2} \\ \sigma_{nt} &= 2.494 \text{ kN/cm}^2.\end{aligned}$$

Drugi del naloge zahteva določitev komponent specifične prostorninske obtežbe, ki ustreza ravnotežnemu stanju telesa. V vsaki točki telesa morajo biti torej izpolnjene ravnotežne enačbe (1.131)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + v_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + v_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + v_z &= 0.\end{aligned}$$

Po vstavitvi parcialnih odvodov funkcij napetosti sledi

$$v_x = -2, \quad v_y = -2y, \quad v_z = -(y + 12z),$$

tako da je

$$\mathbf{v} = -2 \mathbf{e}_x - 2y \mathbf{e}_y - (y + 12z) \mathbf{e}_z .$$

Zgled 1.6

Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} .$$

Določiti:

- a. normalno in strižno komponento ter velikost vektorja napetosti, ki v točki P pripada ravnini z normalo

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_z ;$$

- b. komponente podanega tenzorja napetosti v desnosučnem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ) , ki ga tvori dana smer \mathbf{e}_ξ z dvema pravokotnima smerema:

$$\mathbf{e}_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_y + e_{\eta z} \mathbf{e}_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_\zeta ;$$

- c. velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti;
 č. velikosti in ravnine ekstremnih strižnih napetosti ter pripadajoče normalne napetosti v teh ravninah;
 d. sferični in deviatorični del tenzorja napetosti ter velikosti in smeri glavnih deviatoričnih napetosti;
 e. normalno in strižno napetost v oktaedrski ravnini skozi točko P .
-

a. Komponente vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_\xi$, ki v točki P pripada ravnini z normalo \mathbf{e}_ξ , dobimo z enačbo (1.150)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\xi x} \\ \sigma_{\xi y} \\ \sigma_{\xi z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.379 \\ 4.914 \\ -3.328 \end{Bmatrix},$$

tako da je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\xi &= \sigma_{\xi x} \mathbf{e}_x + \sigma_{\xi y} \mathbf{e}_y + \sigma_{\xi z} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_\xi &= 4.379 \mathbf{e}_x + 4.914 \mathbf{e}_y - 3.328 \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Normalno komponento $\sigma_{\xi\xi}$ napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_\xi$ dobimo kot projekcijo tega vektorja na smer normale

$$\sigma_{\xi\xi} = \boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi = \begin{Bmatrix} 4.379 \\ 4.914 \\ -3.328 \end{Bmatrix}^T \cdot \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \rightarrow \sigma_{\xi\xi} = 2.293.$$

Določimo še kvadrat velikosti $\sigma_\xi = |\boldsymbol{\sigma}_\xi|$ napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_\xi$

$$\sigma_\xi^2 = \boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \boldsymbol{\sigma}_\xi = 4.379^2 + 4.914^2 + 3.328^2 \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \boldsymbol{\sigma}_\xi = 54.401.$$

Strižno napetost $\sigma_{\xi t}$ v točki P ravnine z normalo \mathbf{e}_ξ izračunamo po Pitagorovem izreku

$$\sigma_{\xi t} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \boldsymbol{\sigma}_\xi - \sigma_{\xi\xi}^2} = \sqrt{54.401 - 2.293^2} \rightarrow \sigma_{\xi t} = 7.010.$$

b. Če naj vektorji \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ tvorijo ortonormalno bazo, velja

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e_{\eta z} = 0;$$

zato mora biti $e_{\eta z} = 0$ in bazni vektor \mathbf{e}_η je

$$\mathbf{e}_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_y.$$

Tretji bazni vektor \mathbf{e}_ζ določimo kot vektorski produkt vektorjev \mathbf{e}_ξ in \mathbf{e}_η tako, da skupaj z njima tvori desnosučno ortonormalno bazo

$$\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{e}_\zeta = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z.$$

Komponente baznih vektorjev $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ glede na koordinatno bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ tvorijo transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$, ki določa transformacijo komponent tenzorja napetosti pri prehodu iz koordinatnega sistema (x, y, z) v koordinatni sistem (ξ, η, ζ)

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.500 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.500 & -0.500 & 0.707 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo ulomke zaradi lažjega zapisa nadomestili z decimalnimi števili.

Matriko napetosti

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix},$$

ki pripada obravnavanemu napetostnemu stanju točke P v koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ) , določimo po enačbi (1.164)

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [e_{\alpha i}][\sigma_{ij}][e_{j\beta}].$$

Po prvem množenju dobimo

$$[e_{\alpha i}][\sigma_{ij}] = [\sigma_{\alpha j}] = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.500 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.500 & -0.500 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$[\sigma_{\alpha j}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi x} & \sigma_{\xi y} & \sigma_{\xi z} \\ \sigma_{\eta x} & \sigma_{\eta y} & \sigma_{\eta z} \\ \sigma_{\zeta x} & \sigma_{\zeta y} & \sigma_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.379 & 4.914 & -3.328 \\ -2.121 & -2.121 & 3.536 \\ -8.621 & -2.086 & -2.328 \end{bmatrix}.$$

V prvi vrstici dobljene matrike prepoznamo komponente napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_\xi$ v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, ki smo jih določili pod točko a). V drugi in tretji vrstici so zapisane komponente napetostnih vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_\eta$ in $\boldsymbol{\sigma}_\zeta$ v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Gre torej za napetostne vektorje, ki pripadajo koordinatnim ravninam “novega” koordinatnega sistema (ξ, η, ζ) , razcepljeni pa so v smereh baznih vektorjev $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Zato matrika napetosti $[\sigma_{\alpha j}]$ ni simetrična.

Opravimo sedaj še drugo množenje!

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 4.379 & 4.914 & -3.328 \\ -2.121 & -2.121 & 3.536 \\ -8.621 & -2.086 & -2.328 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.500 & -0.707 & -0.500 \\ 0.500 & 0.707 & -0.500 \\ 0.707 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}.$$

Tako dobimo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.293 & 0.379 & -7.000 \\ 0.379 & 0.000 & 4.621 \\ -7.000 & 4.621 & 3.707 \end{bmatrix}.$$

V vrsticah oziroma stolpcih dobljene matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$ so zapisane komponente istih treh napetostnih vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_\xi, \boldsymbol{\sigma}_\eta$ in $\boldsymbol{\sigma}_\zeta$ kot v matriki $[\sigma_{\alpha j}]$, le da so ti vektorji sedaj razcepljeni v bazi $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$. Zato je matrika napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$ simetrična.

c. Za določitev glavnih normalnih napetosti moramo najprej določiti invariante napetostnega tenzorja

$$\begin{aligned} I_1^\sigma &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 8 + 2 - 4 = 6 \\ I_2^\sigma &= \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -62 \\ I_3^\sigma &= \det [\sigma_{ij}] = |\sigma_{ij}| = -74. \end{aligned}$$

(Kontrola: določi invariante napetosti še iz matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$!)

Karakteristična enačba obravnavanega tenzorja napetosti je torej

$$\Phi(\sigma) = \sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = \sigma^3 - 6\sigma^2 - 62\sigma + 74 = 0.$$

Kakor vemo, ima ta enačba tri realne korene. Poiščemo jih z *Newtonovo*[†] (*tangentno*) *iteracijsko metodo*, pri kateri je približek rešitve v r -tem iteracijskem koraku določen z enačbo

$$\sigma^{(r)} = \sigma^{(r-1)} - \frac{\Phi(\sigma^{(r-1)})}{\Phi'(\sigma^{(r-1)})},$$

kjer je

$$\Phi'(\sigma) = \frac{d\Phi}{d\sigma} = 3\sigma^2 - 12\sigma - 62.$$

Pri računanju korenov nelinearnih enačb po Newtonovi metodi je zelo pomembna izbira začetnih približkov. Začetne približke lahko določimo grafično, tako da približno skiciramo potek funkcije Φ , lahko jih uganemo ali si pomagamo kako drugače. V našem primeru vsekakor lahko pričakujemo, da bo velikostni red rešitev enak velikostnemu redu komponent tenzorja napetosti, to je ± 10 . Zato za začetne približke izberemo naslednje vrednosti

$$\sigma_{11}^{(0)} = 10, \quad \sigma_{22}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(0)} = -10.$$

Začnimo z Newtonovim iteracijskim postopkom za določitev prve glavne normalne napetosti σ_{11} . Ob začetnem približku $\sigma_{11}^{(0)} = 10$ dobimo

$$\Phi(10) = -146, \quad \Phi'(10) = 118.$$

Prvi izboljšani približek za σ_{11} je

$$\sigma_{11}^{(1)} = 10 - \frac{-146}{118} = 11.237.$$

[†] Sir Isaac Newton, angleški fizik in matematik, 1643–1727.

Postopek ponovimo z novim približkom

$$\Phi(11.237) = 38.635, \quad \Phi'(11.237) = 181.982.$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = 11.237 - \frac{38.635}{181.982} = 11.025.$$

$$\Phi(11.025) = 1.239, \quad \Phi'(11.025) = 170.351.$$

$$\sigma_{11}^{(3)} = 11.025 - \frac{1.239}{170.351} = 11.018.$$

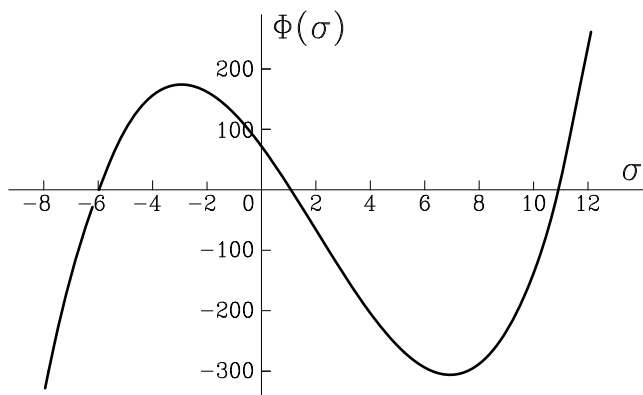
$$\Phi(11.018) = 0.0014, \quad \Phi'(11.018) = 169.957.$$

$$\sigma_{11}^{(4)} = 11.018 - \frac{0.0014}{169.957} = 11.018.$$

Če se odločimo, da bomo iteracijski postopek končali tedaj, ko se vrednosti dveh zaporednih približkov na tretjem decimalnem mestu ne bosta razlikovali, pridemo torej v četrti iteraciji do prvega korena karakteristične enačbe obravnavanega napetostnega stanja: $\sigma_{11} = 11.018$. Prav tako bi določili še preostala dva korena. Približki so prikazani v naslednji preglednici

r	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}
0	10	0	-10
1	11.237	1.194	-7.469
2	11.025	1.099	-6.370
3	11.018	1.098	-6.128
4	11.018	1.098	-6.116
5			-6.116

Boljše začetne približke bi, kakor smo omenili, dobili tako, da bi narisali približen potek funkcije $\Phi(\sigma)$ (slika Z-1.6 a) in odmerili njene ničle.



Slika Z-1.6 a

Določiti moramo še enotske vektorje \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 glavnih smeri obravnavanega napetostnega stanja, tako da bo za napetostne vektorje $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ in $\boldsymbol{\sigma}_3$, ki pripadajo ravninam z normalami \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 , veljalo

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \sigma_{11} \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \sigma_{22} \mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \sigma_{33} \mathbf{e}_3.$$

Smerne kosinuse e_{1x} , e_{1y} in e_{1z} glavne smeri \mathbf{e}_1 izračunamo kot rešitve enačbe (1.178), kjer vzamemo $\sigma_{gg} = \sigma_{11}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{11} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{11} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

V našem primeru dobimo

$$\begin{bmatrix} -3.018 & 5 & -3 \\ 5 & -9.018 & 2 \\ -3 & 2 & -15.018 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Ker smo vrednost σ_{11} določili iz pogoja, da mora biti matrika koeficientov gornjega homogenega sistema enačb singularna, ima sistem netrivialno rešitev. Kakor smo ugotovili v razdelku **1.9**, so smerni kosinusi glavnega vektorja \mathbf{e}_1 sorazmerni kofaktorjem členov poljubne vrstice

ali stolpca matrike koeficientov. V našem primeru si pomagamo kar s kofaktorji k členom prve vrstice

$$K_{xx}^{(1)} = \begin{vmatrix} -9.018 & 2 \\ 2 & -15.018 \end{vmatrix} = 131.432$$

$$K_{xy}^{(1)} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -15.018 \end{vmatrix} = 69.090$$

$$K_{xz}^{(1)} = \begin{vmatrix} 5 & -9.018 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -17.054.$$

Dobljene vrednosti normiramo tako, da bo \mathbf{e}_1 enotski vektor

$$k_x^{(1)} = \pm \sqrt{131.432^2 + 69.090^2 + 17.054^2} = \pm 149.461.$$

Če privzamemo kar pozitivno vrednost norme $k_x^{(1)}$, dobimo

$$e_{1x} = \frac{K_{xx}^{(1)}}{k_x^{(1)}} = \frac{131.432}{149.461} = 0.879$$

$$e_{1y} = \frac{K_{xy}^{(1)}}{k_x^{(1)}} = \frac{69.090}{149.461} = 0.462$$

$$e_{1z} = \frac{K_{xz}^{(1)}}{k_x^{(1)}} = \frac{-17.054}{149.461} = -0.114.$$

Smerne kosinuse e_{2x} , e_{2y} in e_{2z} glavne smeri \mathbf{e}_2 dobimo iz enačbe

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{22} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{22} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

oziroma v našem primeru

$$\begin{bmatrix} 6.902 & 5 & -3 \\ 5 & 0.902 & 2 \\ -3 & 2 & -5.098 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Tokrat si za šalo pomagajmo s kofaktorji k členom druge vrstice

$$K_{yx}^{(2)} = - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -5.098 \end{vmatrix} = 19.490$$

$$K_{yy}^{(2)} = \begin{vmatrix} 6.902 & -3 \\ -3 & -5.098 \end{vmatrix} = -44.186$$

$$K_{yz}^{(2)} = - \begin{vmatrix} 6.902 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -28.804$$

$$k_y^{(2)} = \pm \sqrt{19.490^2 + 44.186^2 + 28.804^2} = \pm 56.231.$$

Spet privzamemo pozitivno vrednost norme $k_y^{(2)}$ in dobimo

$$e_{2x} = \frac{K_{yx}^{(2)}}{k_y^{(2)}} = \frac{19.490}{56.231} = 0.347$$

$$e_{2y} = \frac{K_{yy}^{(2)}}{k_y^{(2)}} = \frac{-44.186}{56.231} = -0.786$$

$$e_{2z} = \frac{K_{yz}^{(2)}}{k_y^{(2)}} = \frac{-28.804}{56.231} = -0.512.$$

Podobno bi lahko določili tudi smerne kosinuse glavnega vektorja \mathbf{e}_3 , le pri izbiri predznaka norme kofaktorjev k členom izbrane vrstice ali stolpca matrike koeficientov bi morali biti pazljivi, da bi dobljeni vektor \mathbf{e}_3 z vektorjema \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 tvoril desnosučno koordinatno bazo. Zato je najenostavneje, če tretji glavni vektor \mathbf{e}_3 določimo kot vektorski produkt vektorjev \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0.879 & 0.462 & -0.114 \\ 0.347 & -0.786 & -0.512 \end{vmatrix} = -0.326 \mathbf{e}_x + 0.411 \mathbf{e}_y - 0.852 \mathbf{e}_z.$$

Tako smo določili glavne vektorje obravnavanega napetostnega stanja v točki P

$$\mathbf{e}_1 = 0.879 \mathbf{e}_x + 0.462 \mathbf{e}_y - 0.114 \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_2 = 0.347 \mathbf{e}_x - 0.786 \mathbf{e}_y - 0.512 \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_3 = -0.326 \mathbf{e}_x + 0.411 \mathbf{e}_y - 0.852 \mathbf{e}_z.$$

Komponente vektorjev \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 tvorijo transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$ ($\alpha = 1, 2, 3; i = x, y, z$), ki opisuje zasuk izbrane koordinatne baze $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ v novo lego $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.879 & 0.462 & -0.114 \\ 0.347 & -0.786 & -0.512 \\ -0.326 & 0.411 & -0.852 \end{bmatrix}.$$

V novi bazi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ima matrika napetosti diagonalno obliko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.018 & 0 & 0 \\ 0 & 1.098 & 0 \\ 0 & 0 & -6.116 \end{bmatrix}.$$

(Kontrola: določi komponente tenzorja napetosti v bazi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ z enačbo (1.164), podobno kot v točki b. !)

č. Enotske vektorje normal tistih ravnin, v katerih nastopajo glavne strižne napetosti, označimo z $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}$ in \mathbf{e}_{III} in jih izrazimo z glavnimi vektorji napetostnega stanja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}_{II} &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}_{III} &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I &= 0.014 \mathbf{e}_x - 0.265 \mathbf{e}_y - 0.964 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{II} &= 0.391 \mathbf{e}_x + 0.617 \mathbf{e}_y - 0.683 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{III} &= 0.867 \mathbf{e}_x - 0.229 \mathbf{e}_y - 0.443 \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Pri tem smo v enačbah za enotske vektorje normal ravnin glavnih strižnih napetosti privzeli pozitivne predznake. Napetostni vektorji v

teh ravninah so

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{I}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{\text{II}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \\ \sigma_{\text{III}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_1 + \sigma_2).\end{aligned}$$

Ker velja

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 &\rightarrow \sigma_1 = 9.689 \mathbf{e}_x + 5.093 \mathbf{e}_y - 1.257 \mathbf{e}_z \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \mathbf{e}_2 &\rightarrow \sigma_2 = 0.381 \mathbf{e}_x - 0.863 \mathbf{e}_y - 0.563 \mathbf{e}_z \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \mathbf{e}_3 &\rightarrow \sigma_3 = 1.997 \mathbf{e}_x - 2.513 \mathbf{e}_y + 5.206 \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{I}} &= 1.681 \mathbf{e}_x - 2.387 \mathbf{e}_y + 3.283 \mathbf{e}_z \\ \sigma_{\text{II}} &= 8.263 \mathbf{e}_x + 1.824 \mathbf{e}_y + 2.792 \mathbf{e}_z \\ \sigma_{\text{III}} &= 7.120 \mathbf{e}_x + 2.991 \mathbf{e}_y - 1.287 \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Strižne komponente teh napetostnih vektorjev so glavne strižne napetosti obravnavanega napetostnega stanja. Z vrednostmi glavnih normalnih napetosti jih izrazimo takole

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{It}} \equiv \tau_{\text{I}} &= \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \rightarrow \sigma_{\text{It}} = 3.607 \\ \sigma_{\text{II}t} \equiv \tau_{\text{II}} &= \frac{1}{2} (\sigma_{33} - \sigma_{11}) \rightarrow \sigma_{\text{II}t} = -8.567 \\ \sigma_{\text{III}t} \equiv \tau_{\text{III}} &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \rightarrow \sigma_{\text{III}t} = 4.960.\end{aligned}$$

Pripadajoče normalne napetosti so

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{II}} \equiv \sigma_{\text{In}} &= \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \rightarrow \sigma_{\text{In}} = -2.509 \\ \sigma_{\text{III}} \equiv \sigma_{\text{II}n} &= \frac{1}{2} (\sigma_{33} + \sigma_{11}) \rightarrow \sigma_{\text{II}n} = 2.451 \\ \sigma_{\text{III}} \equiv \sigma_{\text{III}n} &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \rightarrow \sigma_{\text{III}n} = 6.058.\end{aligned}$$

Kontrola:

Ko poznamo enotske vektorje normal na ravnine glavnih strižnih napetosti \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} glede na koordinatno bazo \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , lahko pridemo do enakih rezultatov tudi z neposredno določitvijo napetostnih vektorjev v teh ravninah. Kakor smo ugotovili v točki b., dobimo komponente napetostnih vektorjev v ravninah z normalami \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} z matričnim množenjem ustrezne matrike smernih kosinusov in matrike napetosti v bazi \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{Ix} & \sigma_{Iy} & \sigma_{Iz} \\ \sigma_{IIx} & \sigma_{IIy} & \sigma_{IIz} \\ \sigma_{IIIx} & \sigma_{IIIy} & \sigma_{IIIz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_{Ix} & e_{Iy} & e_{Iz} \\ e_{IIx} & e_{IIy} & e_{IIz} \\ e_{IIIx} & e_{IIIy} & e_{IIIz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.014 & -0.265 & -0.964 \\ 0.391 & 0.617 & -0.683 \\ 0.867 & -0.229 & -0.443 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Ix} & \sigma_{Iy} & \sigma_{Iz} \\ \sigma_{IIx} & \sigma_{IIy} & \sigma_{IIz} \\ \sigma_{IIIx} & \sigma_{IIIy} & \sigma_{IIIz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.681 & -2.387 & 3.283 \\ 8.263 & 1.824 & 2.792 \\ 7.120 & 2.991 & -1.287 \end{bmatrix}.$$

(Primerjaj komponente dobljene matrike s komponentami napetostnih vektorjev $\boldsymbol{\sigma}_I$, $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ in $\boldsymbol{\sigma}_{III}$!)

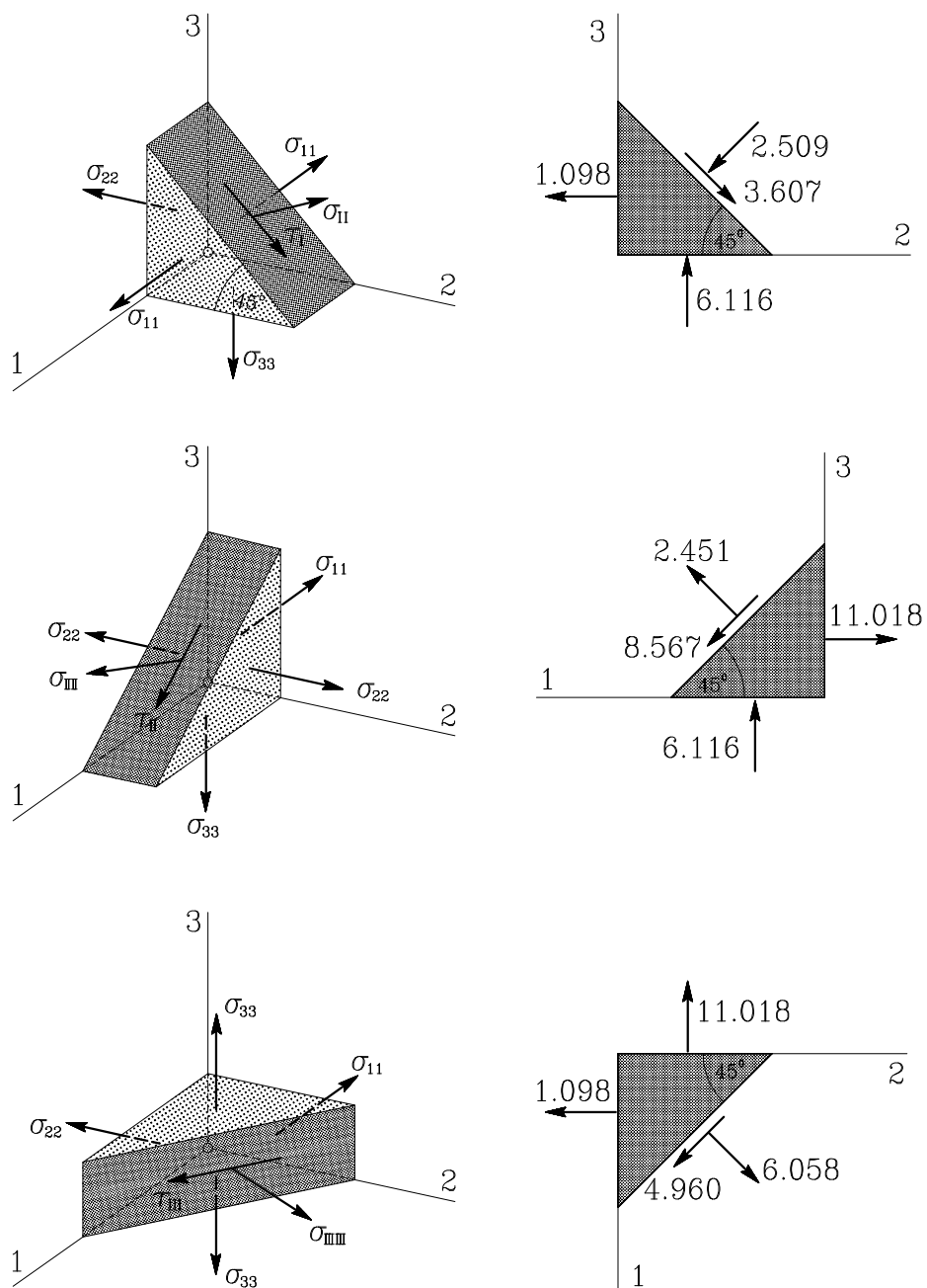
Normalne napetosti v ravninah glavnih strižnih napetosti izračunamo kot projekcije napetostnih vektorjev v teh ravninah na smeri normal \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III}

$$\sigma_{II} = \boldsymbol{\sigma}_I \cdot \mathbf{e}_I = -2.509$$

$$\sigma_{III} = \boldsymbol{\sigma}_{II} \cdot \mathbf{e}_{II} = 2.451$$

$$\sigma_{III} = \boldsymbol{\sigma}_{III} \cdot \mathbf{e}_{III} = 6.058.$$

Glavne strižne napetosti pa sedaj izračunamo s Pitagorovim izrekom



Slika Z-1.6 b

$$\sigma_{It} = \sqrt{\sigma_I \cdot \sigma_I - \sigma_{II}^2} = 3.607$$

$$\sigma_{II t} = \sqrt{\sigma_{II} \cdot \sigma_{II} - \sigma_{III}^2} = 8.567$$

$$\sigma_{III t} = \sqrt{\sigma_{III} \cdot \sigma_{III} - \sigma_{III}^2} = 4.960.$$

Ravnine glavnih strižnih napetosti ter smeri delovanja teh napetosti in pripadajočih normalnih napetosti lahko simbolično prikažemo na elementarnih prizmah, “izrezanih” iz telesa v okolici obravnavane točke P (slika Z-1.6 b).

(Kontroliraj ravnotežje prikazanih elementarnih prizem!)

d. Hidrostatsično napetost σ^H smo definirali z enačbo (1.253)

$$\sigma^H = \frac{I_1^\sigma}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

in hidrostatsični del $[\sigma_{ij}^H]$ napetostnega tenzorja je

$$[\sigma_{ij}^H] = \sigma^H \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [\sigma_{ij}^H] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Deviatorični del $[s_{ij}]$ dobimo kot razliko med celotnim in hidrostatsičnim delom

$$[s_{ij}] = [\sigma_{ij}] - [\sigma_{ij}^H] \rightarrow [s_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Glavne deviatorične normalne vrednosti izračunamo z enačbami (1.266)

$$s_{11} = \sigma_{11} - \sigma^H = 11.018 - 2 = 9.018$$

$$s_{22} = \sigma_{22} - \sigma^H = 1.098 - 2 = -0.902$$

$$s_{33} = \sigma_{33} - \sigma^H = -6.116 - 2 = -8.116.$$

Prepričajmo se, da so dobljene vrednosti ničle karakteristične enačbe deviatoričnega dela tenzorja napetosti! Invariante deviatorja so

$$\begin{aligned}
 I_1^s &= s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 6 - 6 = 0 \\
 I_2^s &= \begin{vmatrix} s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zy} & s_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xz} \\ s_{zx} & s_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{yx} & s_{yy} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -74 \\
 I_3^s &= \det [s_{ij}] = |s_{ij}| = 66.
 \end{aligned}$$

Za kontrolo določimo drugo in tretjo invarianto deviatorja še z enačbama (1.261) in (1.262)

$$\begin{aligned}
 I_2^s &= I_2^\sigma - \frac{(I_1^\sigma)^2}{3} = -62 - \frac{6^2}{3} = -74 \\
 I_3^s &= I_3^\sigma - \frac{I_1^\sigma I_2^\sigma}{3} + \frac{2(I_1^\sigma)^3}{27} = -74 + \frac{6 \cdot 62}{3} + \frac{2 \cdot 6^3}{27} = 66.
 \end{aligned}$$

Karakteristična enačba deviatoričnega dela tenzorja napetosti

$$s^3 - I_1^s s^2 + I_2^s s - I_3^s = 0$$

je sedaj

$$s^3 - 74s - 66 = 0.$$

Če za s vstavimo vrednosti s_{11} , s_{22} , s_{33} , vidimo, da je karakteristična enačba pri vseh treh izpolnjena. s_{11} , s_{22} , s_{33} so torej glavne vrednosti deviatoričnega dela tenzorja napetosti.

V razdelku **1.11** smo pokazali, da se glavne smeri deviatoričnega dela napetostnega tenzorja ujemajo z glavnimi smermi celotnega tenzorja napetosti. O tem se najhitreje prepričamo tako, da transformiramo komponente deviatorja v sistem glavnih vektorjev \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3

$$[s_{\alpha\beta}] = [e_{\alpha i}][s_{ij}][e_{\beta j}] \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; i, j = x, y, z).$$

Po prvem množenju dobimo

$$\begin{aligned} [e_{\alpha i}][s_{ij}] = [s_{\alpha j}] &= \begin{bmatrix} 0.879 & 0.462 & -0.114 \\ 0.347 & -0.786 & -0.512 \\ -0.326 & 0.411 & -0.852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7.930 & 4.169 & -1.029 \\ -0.313 & 0.709 & 0.462 \\ 2.649 & -3.335 & 6.909 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dobljeno matriko $[s_{\alpha j}]$ moramo pomnožiti še s transponirano transformacijsko matriko $[e_{j\beta}]$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} [s_{\alpha\beta}] &= \begin{bmatrix} 7.930 & 4.169 & -1.029 \\ -0.313 & 0.709 & 0.462 \\ 2.649 & -3.335 & 6.909 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.879 & 0.347 & -0.326 \\ 0.462 & -0.786 & 0.411 \\ -0.114 & -0.512 & -0.852 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9.018 & 0 & 0 \\ 0 & -0.902 & 0 \\ 0 & 0 & -8.116 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da so vektorji \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 tudi glavni vektorji deviatoričnega dela tenzorja napetosti.

Za kontrolo izračunajmo invariante deviatoričnega dela napetosti še iz glavnih deviatoričnih napetosti, kakor to določajo enačbe (1.270)

$$I_1^s = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 9.018 - 0.902 - 8.116 = 0$$

$$I_2^s = -\frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) = -\frac{1}{2} (9.018^2 + 0.902^2 + 8.116^2) = -74$$

$$I_3^s = s_{11} s_{22} s_{33} = 9.018 \cdot 0.902 \cdot 8.116 = 66.$$

e. Napetosti v oktaedrski ravnini smo obravnavali v razdelku **1.12**. Če v izraz (1.275) za enotsko normalo oktaedrske ravnine vstavimo glavne vektorje \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , po ureditvi dobimo

$$\mathbf{e}_o = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0.519 \mathbf{e}_x + 0.050 \mathbf{e}_y - 0.853 \mathbf{e}_z .$$

Komponente σ_{oi} vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_o$, ki v točki P pripada oktaedrski ravnini, določimo z enačbo (1.150)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ox} \\ \sigma_{oy} \\ \sigma_{oz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.519 \\ 0.050 \\ -0.853 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.966 \\ 0.991 \\ 1.955 \end{Bmatrix} ,$$

tako da je

$$\boldsymbol{\sigma}_o = 6.966 \mathbf{e}_x + 0.991 \mathbf{e}_y + 1.955 \mathbf{e}_z .$$

Normalna napetost v oktaedrski ravnini je sedaj

$$\sigma_{oo} = \boldsymbol{\sigma}_o \cdot \mathbf{e}_o = \begin{Bmatrix} 6.966 \\ 0.991 \\ 1.955 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0.519 \\ 0.050 \\ -0.853 \end{Bmatrix} = 2 .$$

S tem smo potrdili ugotovitev, da je normalna napetost v oktaedrski ravnini enaka hidrostatični napetosti ($\sigma_{oo} = \sigma^H = 2$).

Strižno napetost τ_0 v oktaedrski ravnini lahko izračunamo na dva načina

$$\begin{aligned} \tau_o &= \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2} \\ &= \pm \frac{1}{3} \sqrt{(11.018 - 1.098)^2 + (1.098 + 6.116)^2 + (-6.116 - 11.018)^2} \\ &= \pm 7.024 \end{aligned}$$

ali

$$\tau_o = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} I_2^s} = \sqrt{\frac{2 \cdot 74}{3}} = \pm 7.024 .$$

Zgled 1.7

Napetostno stanje materialnega delca \mathcal{Q} je podano s tremi enakimi glavnimi normalnimi napetostmi ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = q$). Dokaži, da je v katerikoli ravnini skozi obravnavani materialni delec normalna napetost enaka q , strižna napetost pa je nič in da gre torej za izotropno napetostno stanje!

Bazo, ki jo sestavljajo glavni vektorji obravnavanega napetostnega stanja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, zavrtimo v poljubno novo lego $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, definirano s transformacijsko matriko $[e_{i\alpha}]$. Komponente napetostnega tenzorja σ_{ij} , s katerimi je obravnavano napetostno stanje opisano v poljubni bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, izračunamo z enačbo (1.168)

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} e_{i\alpha} \sigma_{\alpha\beta} e_{\beta j} \quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

pri čemer je

$$[\sigma_{\alpha\beta}]_Q = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}.$$

V našem primeru je $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, zato se vsota v transformacijski enačbi poenostavi

$$\sigma_{ij} = \sigma_{11} e_{i1} e_{j1} + \sigma_{22} e_{i2} e_{j2} + \sigma_{33} e_{i3} e_{j3} = q (e_{i1} e_{j1} + e_{i2} e_{j2} + e_{i3} e_{j3}).$$

Normalne napetosti v koordinatnih ravninah poljubnega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ dobimo, če sta indeksa i in j enaka

$$j = i \quad \rightarrow \quad \sigma_{ii} = q (e_{i1}^2 + e_{i2}^2 + e_{i3}^2) = q.$$

Pri tem smo v skladu s prvimi tremi od enačb (1.36) upoštevali, da je izraz v oklepaju enak 1. Strižne napetosti pa dobimo pri različnih indeksih i in j . Ob upoštevanju druge trojice enačb (1.36) je

$$j \neq i \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} = q (e_{i1} e_{j1} + e_{i2} e_{j2} + e_{i3} e_{j3}) = 0.$$

Zato je v katerikoli bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$

$$[\sigma_{ij}]_Q = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}.$$

Napetostno stanje delca \mathcal{Q} je torej res izotropno.

Zgled 1.8

Napetostno stanje v točki T je opisano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na koordinatni sistem (x, y, z) . Določi velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti!

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Glavne normalne napetosti obravnavanega napetostnega stanja so rešitev enačbe

$$\begin{vmatrix} -6 - \sigma & 0 & -12 \\ 0 & 5 - \sigma & 0 \\ -12 & 0 & 1 - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanto razvijemo po elementih druge vrstice, ker ima najmanj neničnih členov in dobimo

$$(5 - \sigma)(\sigma^2 + 5\sigma - 150) = 0.$$

Prvo rešitev dobimo iz pogoja

$$5 - \sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{11} = 5,$$

preostali dve rešitvi pa iz pogoja

$$\begin{aligned} (\sigma^2 + 5\sigma - 150) = (\sigma - 10)(\sigma + 15) = 0 & \rightarrow \sigma_{22} = 10, \\ & \sigma_{33} = -15. \end{aligned}$$

Glavne normalne napetosti navadno razvrstimo po velikosti

$$\sigma_{11} = 10, \quad \sigma_{22} = 5, \quad \sigma_{33} = -15,$$

tako da je

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}.$$

Smerne kosinuse glavne smeri \mathbf{e}_1 izračunamo iz enačbe

$$\begin{bmatrix} -6 - 10 & 0 & -12 \\ 0 & 5 - 10 & 0 \\ -12 & 0 & 1 - 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Če bi poskusili določiti glavni vektor \mathbf{e}_1 kot normirani vektor kofaktorjev k členom druge vrstice matrike koeficientov, bi dobili vse tri smerne kosinuse enake nič. To je posledica dejstva, da je ravnina z normalo \mathbf{e}_y že kar ena od glavnih ravnin, saj sta v tej ravnini obe strižni napetosti enaki nič. Ta rešitev torej ni uporabna, zato moramo vzeti prvo ali tretjo vrstico. Kofaktorji k členom prve vrstice so

$$K_{xx}^{(1)} = 45, \quad K_{xy}^{(1)} = 0, \quad K_{xz}^{(1)} = -60,$$

njihova norma pa je

$$k_x^{(1)} = \pm \sqrt{45^2 + 60^2} = \pm 75.$$

Vzamemo $k_x^{(1)} = 75$ in dobimo

$$e_{1x} = \frac{45}{75} = 0.6, \quad e_{1y} = 0, \quad e_{1z} = \frac{-60}{75} = -0.8,$$

$$\mathbf{e}_1 = 0.6 \mathbf{e}_x - 0.8 \mathbf{e}_z.$$

Podobno določimo drugo glavno smer \mathbf{e}_2 , le da tokrat uporabimo kofaktorje k členom druge vrstice

$$\begin{bmatrix} -6 - 5 & 0 & -12 \\ 0 & 5 - 5 & 0 \\ -12 & 0 & 1 - 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{yx}^{(2)} = 0, \quad K_{yy}^{(2)} = -100, \quad K_{yz}^{(2)} = 0,$$

z normo

$$k_y^{(2)} = \pm\sqrt{100^2} = \pm 100.$$

Tokrat vzamemo $k_y^{(2)} = -100$ in dobimo

$$e_{2x} = 0, \quad e_{2y} = 1, \quad e_{2z} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y.$$

Enotski vektor tretje glavne smeri \mathbf{e}_3 določimo z vektorskim produktom glavnih vektorjev \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_3 = 0.8 \mathbf{e}_x + 0.6 \mathbf{e}_z.$$

Kontrola: Komponente enotskih vektorjev glavnih smeri \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 tvorijo transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$ za prehod iz koordinatnega sistema (x, y, z) v koordinatni sistem glavnih smeri $(1, 2, 3)$

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

S transformacijsko enačbo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [e_{\alpha i}][\sigma_{ij}][e_{j\beta}] \quad (i, j = x, y, z; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

dobimo v našem primeru

$$\begin{aligned} [\sigma_{\alpha\beta}] &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrika napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$ je diagonalna, rezultati so torej pravilni.

Zgled 1.9

Prostorsko napetostno stanje delca T je podano z matriko napetosti $[\sigma_{ij}]$. Pri tem sta strižni napetosti σ_{zx} in σ_{zy} enaki nič, kar pomeni, da je σ_{zz} ena od glavnih normalnih napetosti, na primer $\sigma_{zz} \equiv \sigma_{33}$. Dokaži, da je v tem primeru mogoče preostali glavni napetosti določiti z enačbo (1.314), ki sicer velja za ravninsko napetostno stanje!

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Glavne normalne napetosti podanega napetostnega stanja so koreni enačbe

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanto razvijemo po elementih tretje vrstice in ob upoštevanju simetrije strižnih napetosti dobimo

$$(\sigma_{zz} - \sigma) [(\sigma_{xx} - \sigma)(\sigma_{yy} - \sigma) - \sigma_{xy}^2] = 0.$$

Iz pogoja, da je prvi oklepaj na levi strani gornje enačbe enak nič, sledi pričakovani rezultat

$$\sigma_{zz} - \sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{33} = \sigma_{zz}.$$

Preostali dve glavni normalni napetosti dobimo kot rešitvi kvadratne enačbe

$$(\sigma_{xx} - \sigma)(\sigma_{yy} - \sigma) - \sigma_{xy}^2 = 0.$$

Ta enačba ima dva korena

$$\sigma_{11,22} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}.$$

Obe rešitvi sta realni, saj je izraz pod korenem vselej nenegativen. S tem je dokaz končan.

Kakor smo pokazali v razdelku **1.13**, nastopata glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22} v ravninah, ki sta pravokotni na ravnino z normalo $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z$ in ju glede na smer \mathbf{e}_x določata prvi rešitvi enačbe

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}.$$

Glavni normalni napetosti in njuni smeri v ravnini (x, y) lahko torej kljub temu, da je napetostno stanje prostorsko, v opisanem primeru določimo kar z izrazi, ki veljajo pri ravninskem napetostnem stanju. Gornjo ugotovitev lahko seveda smiselno uporabimo tudi v primerih, ko je kot ena od glavnih ravnin vnaprej znana ravnina (y, z) ali ravnina (z, x) .

(Uporabi gornje ugotovitve pri rešitvi zgleда 1.8!)

Zgled 1.10

Dokaži, da je napetostno stanje, ki je v koordinatnem sistemu (x, y, z) določeno s podanimi komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, enosno! Določi velikost in smer edine glavne normalne napetosti!

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Invariante obravnavanega tenzorja napetosti so

$$\begin{aligned} I_1^\sigma &= 4 + 16 + 1 = 21 \\ I_2^\sigma &= \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = 0 \\ I_3^\sigma &= \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Karakteristična enačba obravnavanega napetostnega stanja

$$\sigma^3 - 21\sigma^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\sigma - 21)\sigma^2 = 0$$

ima tri realne korene

$$\sigma_{11} = 21, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = 0.$$

Gre torej res za enoosno napetostno stanje z eno samo od nič različno glavno normalno napetostjo $\sigma_{11} = 21$.

Smerne kosinuse enotskega vektorja \mathbf{e}_1 , ki mu pripada dobljena glavna normalna napetost σ_{11} , dobimo iz enačbe

$$\begin{bmatrix} 4 - 21 & 8 & 2 \\ 8 & 16 - 21 & 4 \\ 2 & 4 & 1 - 21 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Rešitve so sorazmerne kofaktorjem poljubne vrstice ali stolpca matrice koeficientov. Vzemimo kar kofaktorje k členom prve vrstice

$$\begin{aligned} K_{xx} &= \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -20 \end{vmatrix} = 84 \\ K_{xy} &= - \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} = 168 \\ K_{xz} &= \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 42. \end{aligned}$$

Dobljene vrednosti normiramo s faktorjem k_x

$$k_x = \sqrt{84^2 + 168^2 + 42^2} = 192.468$$

in izračunamo smerne kosinuse enotskega vektorja \mathbf{e}_1

$$\begin{aligned} e_{1x} &= \frac{84}{192.468} = 0.436 \\ e_{1y} &= \frac{168}{192.468} = 0.873 \\ e_{1z} &= \frac{42}{192.468} = 0.218. \end{aligned}$$

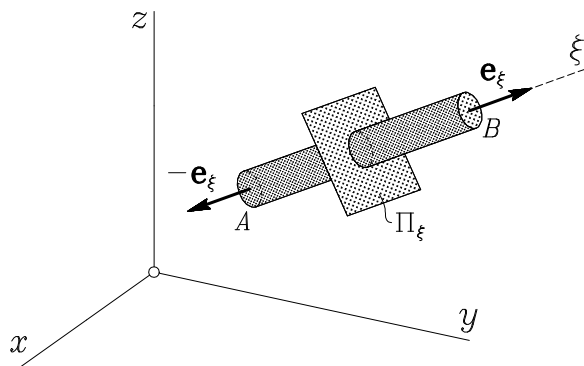
Enotski vektor smeri edine glavne normalne napetosti σ_{11} je torej

$$\mathbf{e}_1 = 0.436 \mathbf{e}_x + 0.873 \mathbf{e}_y + 0.218 \mathbf{e}_z .$$

V tem primeru imamo torej opraviti z eno samo glavno ravnino z normalo \mathbf{e}_1 in glavno normalno napetostjo σ_{11} . Vse druge smeri v tej ravnini so enakovredne.

Zgled 1.11

V kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) je podana natezno obtežena ravna palica. Krajšči vzdolžne osi palice sta $A(200, 200, 300)$ in $B(418.2, 636.4, 409.1)$ (slika Z-1.11 a). Dolžine so v cm. Vzemimo, da v poljubnem prečnem prerezu palice, pravokotnem na njeno vzdolžno os, nastopa le po vsem prerezu enakomerna natezna normalna napetost 21 kN/cm^2 . V poljubni točki palice si zamislimo tri ravnine, ki so vzporedne koordinatnim ravninam izbranega koordinatnega sistema. Določi napetosti v teh treh ravninah! (Z drugimi besedami: Določi komponente tenzorja napetosti, ki opisuje podano napetostno stanje glede na koordinatni sistem (x, y, z) !)



Slika Z-1.11 a

Relativni krajevni vektor med krajiščema osi palice A in B je

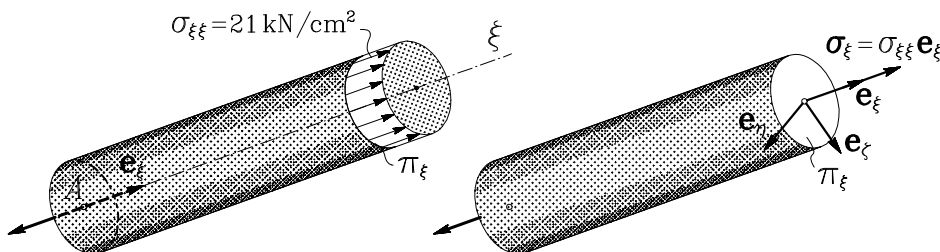
$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x_B - x_A) \mathbf{e}_x + (y_B - y_A) \mathbf{e}_y + (z_B - z_A) \mathbf{e}_z \\ &= (418.2 - 200.0) \mathbf{e}_x + (636.4 - 200.0) \mathbf{e}_y + (409.1 - 300.0) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r} &= 218.2 \mathbf{e}_x + 436.4 \mathbf{e}_y + 109.1 \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{218.2^2 + 436.4^2 + 109.1^2} = 500.0.$$

Enotski vektor v smeri vzdolžne osi palice označimo z \mathbf{e}_ξ

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\xi &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{500.0} (218.2 \mathbf{e}_x + 436.4 \mathbf{e}_y + 109.1 \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{e}_\xi &= 0.436 \mathbf{e}_x + 0.873 \mathbf{e}_y + 0.218 \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Če si v obravnavani točki palice zamislimo nov kartezijski koordinatni sistem (ξ, η, ζ) , čigar bazo tvori enotski vektor \mathbf{e}_ξ z dvema nanj in medsebojno pravokotnima vektorjema \mathbf{e}_η in \mathbf{e}_ζ , ima tenzor napetosti v tem koordinatnem sistemu le eno od nič različno komponento $\sigma_{\xi\xi} = 21 \text{ kN/cm}^2$, vse ostale komponente napetosti pa so enake nič (slika Z-1.11 b)



Slika Z-1.11 b

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta).$$

Komponente σ_{ij} obravnavanega tenzorja napetosti v koordinatnem sistemu (x, y, z) izračunamo s transformacijsko enačbo (1.168)

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} e_{i\alpha} e_{j\beta} \quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta).$$

Ker so vse komponente $\sigma_{\alpha\beta}$ razen $\sigma_{\xi\xi}$ enake nič, je zapis gornje dvojne vsote zelo preprost. Komponente tenzorja napetosti glede na koordinatni sistem (x, y, z) so

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{\xi\xi} e_{x\xi}^2 = 21 \cdot 0.436^2 = 4 \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{\xi\xi} e_{y\xi}^2 = 21 \cdot 0.873^2 = 16 \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{\xi\xi} e_{z\xi}^2 = 21 \cdot 0.218^2 = 1 \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{\xi\xi} e_{x\xi} e_{y\xi} = 21 \cdot 0.436 \cdot 0.873 = 8 \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{\xi\xi} e_{y\xi} e_{z\xi} = 21 \cdot 0.873 \cdot 0.218 = 4 \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{\xi\xi} e_{z\xi} e_{x\xi} = 21 \cdot 0.218 \cdot 0.436 = 2. \end{aligned} \quad [\text{kN/cm}^2]$$

Tako dobimo

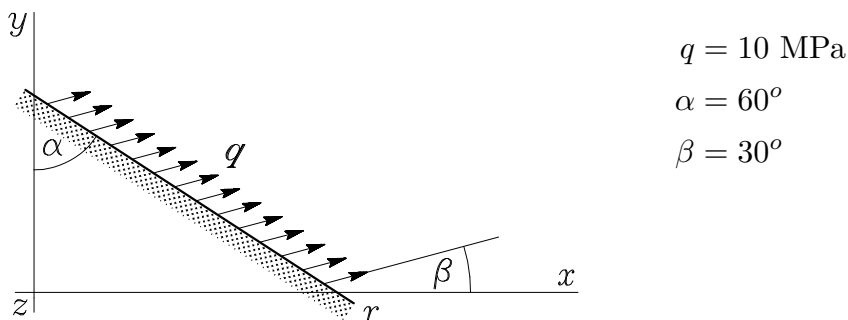
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (i, j = x, y, z).$$

Primerjava rezultata z rešitvijo zgleда 1.10 pokaže, da gre v obeh nalogah za isto napetostno stanje, kakršno je značilno za osno obteženo palico, pri kateri vzamemo, da je vzdolžna normalna napetost enakomerno porazdeljena po prečnem prerezu. Predpostavka o enakomernem poteku napetosti po prečnem prerezu je upravičena, če je palica izrazito podolgovata – če je torej katerakoli izmera prečnega prereza veliko manjša od dolžine palice.

Zgled 1.12

Na rob r tanke stene, v kateri vlada homogeno ravninsko napetostno stanje, deluje enakomerna zvezna obtežba velikosti q , kakor kaže *slika Z-1.12 a*. Določi komponente tenzorja napetosti v koordinatnem sistemu

(x, y) tako, da bosta glavni normalni napetosti nasprotno enaki med seboj ($\sigma_{22} = -\sigma_{11}$)! Določi enotska vektorja normal ravnin obeh glavnih normalnih napetosti!



Slika Z-1.12 a

Pri ravninskem napetostnem stanju v ravnini (x, y) sta glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22} določeni z enačbo (1.314)

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}.$$

Pogoj $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$ je izpolnjen le, če velja

$$\sigma_{yy} = -\sigma_{xx}.$$

Najprej določimo enotski vektor zunanje normale \mathbf{e}_n na robu r (slika Z-1.12 b)

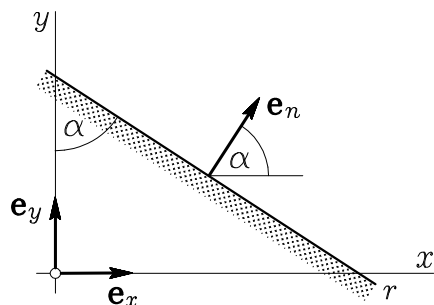
$$e_{nx} = \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad e_{ny} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_y,$$

nato pa še vektor specifične površinske zunanje obtežbe \mathbf{p}_n na robu r

$$p_{nx} = q \cos \beta = q \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{ny} = q \sin \beta = q \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{p}_n = q \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_y \right).$$



Slika Z-1.12 b

Komponente tenzorja napetosti glede na koordinatni sistem (x, y) so na površini (robu) telesa povezane s komponentami specifične površinske zunanje obtežbe z enačbami (1.291)

$$p_{nx} = \sigma_{xx} e_{nx} + \sigma_{xy} e_{ny}$$

$$p_{ny} = \sigma_{yx} e_{nx} + \sigma_{yy} e_{ny}.$$

Po vstavitvi znanih vrednosti smernih kosinusov in komponent zunanje obtežbe dobimo

$$\frac{\sqrt{3}}{2} q = \frac{1}{2} \sigma_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{xy}$$

$$\frac{1}{2} q = \frac{1}{2} \sigma_{yx} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{yy}.$$

Če v gornjih enačbah upoštevamo zahtevo $\sigma_{yy} = -\sigma_{xx}$, sledi

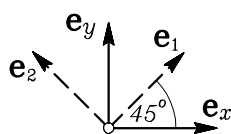
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = q.$$

Glavni normalni napetosti sta sedaj

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = q.$$

Določimo še enotska vektorja ravnin obeh glavnih normalnih napetosti

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \infty \quad \rightarrow \quad \alpha_\sigma = \frac{\pi}{4}.$$



Slika Z-1.12 c

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Zgled 1.13

Podana matrika napetosti $[\sigma_{ij}]$ opisuje napetostni primer čistega striga v ravnini (x, z) . Določi velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti v tem primeru! Nariši Mohrov krog, ki ustreza obravnavanemu napetostnemu stanju!

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Glavne normalne napetosti določimo neposredno z enačbo (1.179)

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \tau \\ 0 & -\sigma & 0 \\ \tau & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanto razvijemo po členih druge vrstice in dobimo

$$-\sigma(\sigma^2 - \tau^2) = -\sigma(\sigma - \tau)(\sigma + \tau) = 0.$$

Koreni dobljene karakteristične enačbe so

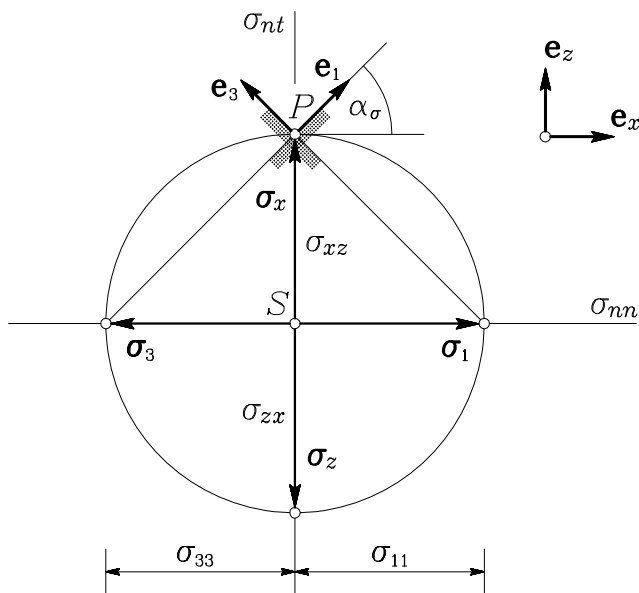
$$\sigma_{11} = \tau, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = -\tau.$$

Ker gre očitno za ravninsko napetostno stanje v ravnini (x, z) , je $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_y$, smeri preostalih dveh glavnih normalnih napetosti pa lahko določimo z enačbo (1.310)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2\tau}{0 - 0} = \infty \quad \rightarrow \quad \alpha_\sigma = \frac{\pi}{4}.$$

Enotska vektorja glavnih smeri \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_3 sta v skladu z enačbama (1.313)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \alpha_\sigma \mathbf{e}_x + \sin \alpha_\sigma \mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{e}_3 &= -\sin \alpha_\sigma \mathbf{e}_x + \cos \alpha_\sigma \mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \end{aligned}$$



Slika Z-1.13

Za vajo se še prepričajmo, da v ravninah z normalama \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_3 nastopata glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{33} . V obravnavanem primeru so vektorji napetosti v koordinatnih ravninah

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \tau \mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \tau \mathbf{e}_x,$$

zato je določitev vektorjev napetosti v ravninah z normalama \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_3 čisto preprosta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 &= \boldsymbol{\sigma}_x e_{1x} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{1z} = \tau \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \\ \boldsymbol{\sigma}_3 &= \boldsymbol{\sigma}_x e_{3x} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{3z} = \tau \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z). \end{aligned}$$

Normalni napetosti v obravnavanih ravninah sta sedaj

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{\tau}{2} (1 + 1) = \tau \\ \sigma_{33} &= \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\tau}{2} (-1 - 1) = -\tau, \end{aligned}$$

strižna napetost $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ pa mora biti nič

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0.$$

Dobljene rezultate preverimo še v ustreznem Mohrovem krogu (*slika Z-1.13*).

Zgled 1.14

Vzemimo, da v tanki steni vlada homogeno ravninsko napetostno stanje. Opišemo ga z glavnimi normalnimi napetostmi $\sigma_{11} = 60 \text{ MPa}$, $\sigma_{22} = -15 \text{ MPa}$, $\sigma_{33} = 0$. Določi ravnine, v katerih nastopajo samo strižne napetosti! Rezultat prikaži tudi v ustreznem Mohrovem krogu!

Vzemimo, da pogoju naloge ustreza ravnina z normalo \mathbf{e}_n , ki jo zapišemo glede na glavna vektorja podanega napetostnega stanja

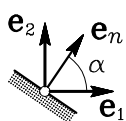
$$\mathbf{e}_n = e_{n1} \mathbf{e}_1 + e_{n2} \mathbf{e}_2. \quad (a)$$

Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ v ravnini z normalo \mathbf{e}_n določimo z enačbo (1.213)

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{11} e_{n1} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} e_{n2} \mathbf{e}_2. \quad (b)$$

Če naj v obravnavani ravnini nastopa le strižna napetost, mora biti normalna komponenta σ_{nn} napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_n$ enaka nič

$$\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_n = \sigma_{11} e_{n1}^2 + \sigma_{22} e_{n2}^2 = 0. \quad (c)$$



Če kot, ki ga normala \mathbf{e}_n oklepa s smerjo \mathbf{e}_1 , označimo z α (slika Z-1.14 a), je $e_{n1} = \cos \alpha$ in $e_{n2} = \sin \alpha$. Tedaj lahko pišemo

Slika Z-1.14 a

$$\sigma_{nn} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha = 0 \quad (\check{c})$$

oziroma

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}. \quad (d)$$

Enačba ima realno rešitev le v primeru, da sta napetosti σ_{11} in σ_{22} različnih predznakov. V našem primeru dobimo

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{60}{15} = 4 \quad \rightarrow \quad \alpha = \pm 2. \quad (e)$$

Dobili smo torej dve rešitvi

$$\alpha_a = 63.4^\circ \quad \text{in} \quad \alpha_b = -63.4^\circ. \quad (f)$$

Enotski normalni ravnini, v katerih nastopajo samo strižne napetosti, označimo z \mathbf{e}_a in \mathbf{e}_b

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a &= 0.447 \mathbf{e}_1 + 0.894 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_b &= 0.447 \mathbf{e}_1 - 0.894 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (g)$$

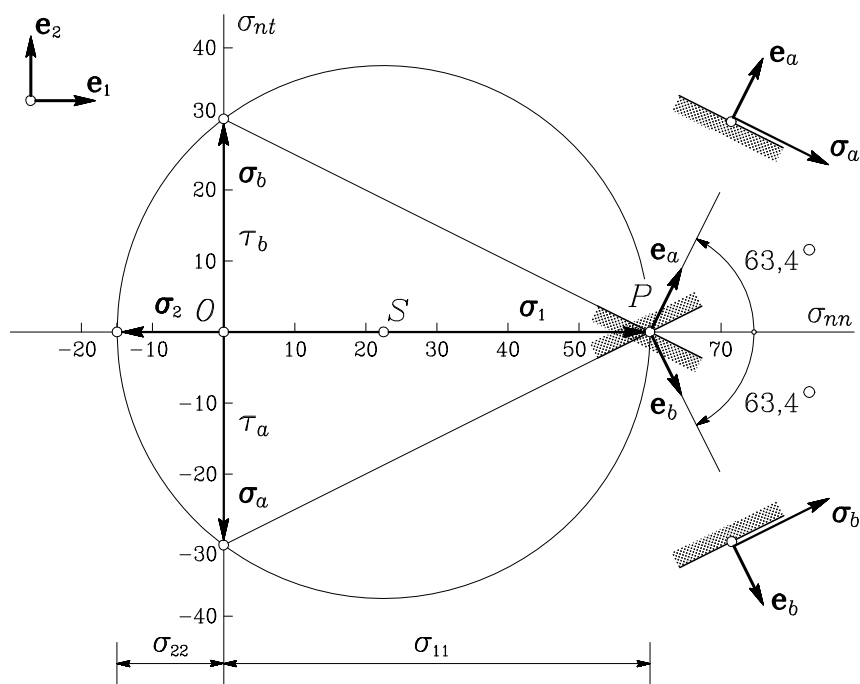
Pripadajoča napetostna vektorja σ_a in σ_b izračunamo z enačbo (b)

$$\begin{aligned}\sigma_a &= 26.833 \mathbf{e}_1 - 13.416 \mathbf{e}_2 \\ \sigma_b &= 26.833 \mathbf{e}_1 + 13.416 \mathbf{e}_2.\end{aligned}\tag{h}$$

Hitro se lahko prepričamo, da sta normalni komponenti σ_{aa} in σ_{bb} dobljenih napetostnih vektorjev res nič. Strižni napetosti τ_a in τ_b pa izračunamo kar kot velikosti napetostnih vektorjev σ_{aa} in σ_{bb}

$$\begin{aligned}\tau_a &= \sigma_a = \sqrt{\sigma_a \cdot \sigma_a} = 30 \text{ MPa} \\ \tau_b &= \sigma_b = \sqrt{\sigma_b \cdot \sigma_b} = 30 \text{ MPa}.\end{aligned}\tag{i}$$

Rezultate lahko odmerimo v ustreznem Mohrovem krogu. Posebej je prikazan tudi način delovanja napetosti v obeh dobljenih ravninah (slika Z-1.14 b).



Slika Z-1.14 b

Zgled 1.15

Premik togega telesa je glede na kartezijski koordinatni sistem z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ opisan s translacijo \mathbf{u}_0 referenčne točke $Q_0(5, 5, 1)$ in majhnim zasukom $\boldsymbol{\omega}_0$

$$\mathbf{u}_0 = 10^{-2}(2\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = 10^{-2}(\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z).$$

Delec \mathcal{Q} je v začetnem stanju določen s točko $Q(8, 2, -1)$ (telesne koordinate delca \mathcal{Q} so torej $x = 8, y = 2, z = -1$). Določi pomik \mathbf{u} in zasuk $\boldsymbol{\omega}$ delca \mathcal{Q}

- v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$,
- v bazi $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, ki je glede na bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ definirana s transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

-
- Pomik in zasuk poljubnega delca togega telesa \mathcal{Q} , ki je leži v točki $Q(x, y, z)$, sta določena z enačbama (1.346) in (1.347)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0.$$

V našem primeru je

$$\mathbf{r}_0 = 5\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r} = 8\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = 3\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho} = 10^{-2} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 10^{-2}(5\mathbf{e}_x + 11\mathbf{e}_y - 9\mathbf{e}_z).$$

Pomik in zasuk delca \mathcal{Q} v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ sta tako

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 10^{-2}(7\mathbf{e}_x + 8\mathbf{e}_y - 8\mathbf{e}_z) \\ \boldsymbol{\omega} &= 10^{-2}(\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z).\end{aligned}$$

b. Vektor pomika \mathbf{u} je invarianta glede na zasuk koordinatnega sistema, zato je

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{e}_x + u_y\mathbf{e}_y + u_z\mathbf{e}_z = u_\xi\mathbf{e}_\xi + u_\eta\mathbf{e}_\eta + u_\zeta\mathbf{e}_\zeta.$$

Z zaporednim skalarnim množenjem gornje enačbe z enotskimi vektorji $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ dobimo komponente pomika v zasukani bazi, kakor smo pokazali že v enačbah (1.63) in (1.64). V matrični obliki je

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

ali na kratko

$$u_\alpha = \sum_i e_{\alpha i} u_i \quad (i = x, y, z; \alpha = \xi, \eta, \zeta).$$

Podobno velja za komponente zasuka $\boldsymbol{\omega}$

$$\omega_\alpha = \sum_i e_{\alpha i} \omega_i \quad (i = x, y, z; \alpha = \xi, \eta, \zeta).$$

Tako dobimo

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{Bmatrix} = 10^{-2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ -8 \end{Bmatrix} = 10^{-2} \begin{Bmatrix} \frac{7}{\sqrt{3}} \\ \frac{-14}{\sqrt{6}} \\ \frac{-16}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = 10^{-2} \left(\frac{7}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_\xi - \frac{14}{\sqrt{6}} \mathbf{e}_\eta - \frac{16}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\zeta \right)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} &= 10^{-2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= 10^{-2} \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 \boldsymbol{\omega} &= 10^{-2} \left(\frac{6}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_\xi + \frac{3}{\sqrt{6}} \mathbf{e}_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\zeta \right).
 \end{aligned}$$

DEFORMABILNO TELO

2.1 Deformabilno telo

V prvem poglavju smo vpeljali *togo telo* kot računski model za mehansko analizo tistih realnih trdnih teles, ki med delovanjem zunanje obtežbe tako malo spremenijo svojo velikost, obliko in lego v prostoru, da je vpliv teh sprememb v enačbah ravnotežja zanemarljiv, pa najsi gre pri tem za ravnotežje telesa kot celote ali vsakega materialnega delca posebej. Zato v ravnotežnih pogojih, ki smo jih izpeljali v prejšnjem poglavju, nastopajo samo zunanje sile in napetosti. Ker gre za mirujoča telesa, je zapis ravnotežnih pogojev tudi neodvisen od časa. V razdelku 1.6 smo ugotovili, da ob upoštevanju simetrije napetostnih komponent, ki sledi iz momentnega ravnotežnega pogoja, dobimo tri projekcijske ravnotežne pogoje, v katerih nastopa šest neodvisnih napetostnih komponent. V splošnem imamo za šest neznanih napetosti le tri enačbe; gre torej za statično nedoločen problem, saj iz treh ravnotežnih pogojev ne moremo enolično določiti šestih neznanih napetosti. To je mogoče le v posebnih primerih, ko lahko zaradi posebnih geometrijskih in materialnih lastnosti telesa ter načina učinkovanja zunanje obtežbe vnaprej predvidimo razporeditev napetosti po telesu. Tako smo na primer v zgledu 1.10 upravičeno predpostavili enakomerno razporeditev vzdolžne normalne napetosti po prečnem prerezu prizmatične palice in določili njeno velikost iz pogoja za ravnotežje enega od odrezanih delov palice kot razmerje med delujočo osno obtežbo in ploščino prečnega prereza palice.

Lahko torej ugotovimo, da je računski model togega telesa sicer ugoden za vpeljavo pojma napetosti ter izpeljavo ravnotežnih pogojev in trans-

formacijskih enačb, vendar te enačbe same ne zadostujejo za računsko določitev napetosti. Zato v nadaljevanju vpeljemo strožji računski model za mehansko analizo trdnih teles, ki vključuje tudi lastnost *deformabilnosti* in ga zato imenujemo *deformabilno telo*.

2.2 Opis deformiranja trdnega telesa

V razdelku **1.15** smo pokazali, kako opišemo spremembo lege togega telesa v prostoru. Podobno se pod vplivom zunanje obtežbe po prostoru premika tudi deformabilno telo, pri čemer pa se razen njegove lege spreminjata tudi njegova velikost in oblika. Pravimo, da se telo *deformira*. V okviru koncepta zvezne snovi si lahko to razložimo tako, da med delovanjem zunanje obtežbe vezi med delci telesa nekoliko popustijo; pri tem se medsebojne lege delcev spremenijo, vendar tako, da je vseskozi ohranjena kompaktna narava snovi.

Pri togem telesu smo pomik in zasuk[†] kateregakoli delca telesa izrazili s šestimi neodvisnimi komponentami pomika in zasukaja referenčnega delca. Opis deformiranja deformabilnega telesa pa očitno zahteva podatke o gibanju vsakega od delcev posebej, kar pomeni, da ima deformabilno telo v splošnem neskončno veliko prostostnih stopenj.

Vzemimo, da je telo \mathcal{B} v nekem času t_0 neobteženo in da je njegova temperatura konstantna in izenačena s konstantno temperaturo okolja. To stanje telesa imenujmo *začetno* ali *nedeformirano stanje telesa* in ga označimo z \mathbf{B} . V tem stanju zavzema telo v trirazsežnem prostoru območje \mathcal{V} , omejeno s sklenjeno mejno ploskvijo \mathcal{S} (*slika 2.1*). Prostornina območja \mathcal{V} je V , površina ploskve \mathcal{S} pa S .

Kakor smo pokazali v razdelku **1.2**, je lega poljubnega delca \mathcal{T} glede na izbrano nepremično točko O trirazsežnega prostora določena s krajevnim vektorjem \mathbf{r} . Če izberemo točko O tudi za izhodišče prostorskega

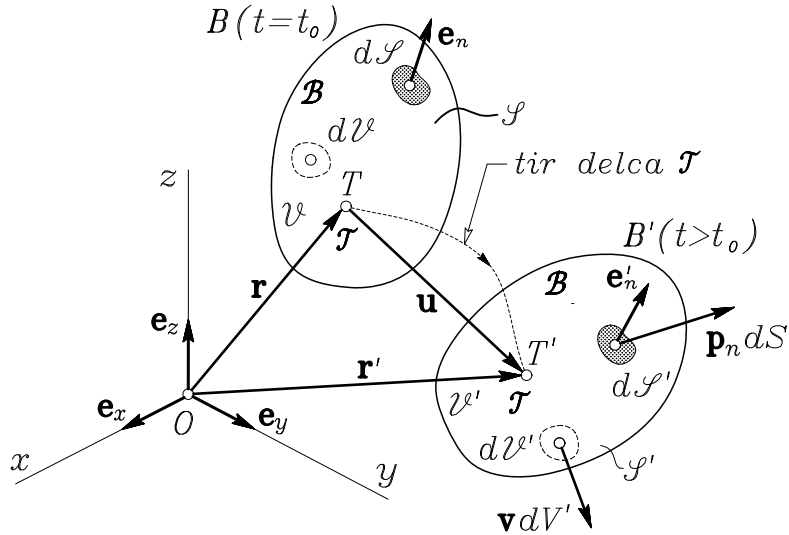
[†] O zasuku infinitezimalno majhnega delca pravzaprav ne moremo govoriti. Mišljen je zasuk elementarnega dela telesa v bližnji okolici obravnavanega delca.

kartezijskega koordinatnega sistema s koordinatami x, y, z , je v njem delec \mathcal{T} določen s točko $T(x, y, z)$ oziroma s krajevnim vektorjem te točke

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(T) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.1)$$

Ker gre za model zvezne trdne snovi, pripada vsakemu krajevnemu vektorju oziroma vsaki trojici koordinat x, y, z iz območja \mathcal{V} en sam delec in obratno: vsakemu delcu \mathcal{T} pripada ena sama trojica števil x, y, z

$$(x, y, z) \iff \mathcal{T}.$$



Slika 2.1

V razdelku 1.2 smo razen nepomičnega prostorskega kartezijskega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ in s koordinatami x, y, z vpeljali še telesni koordinatni sistem z bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ in s koordinatami ξ, η, ζ . V nadaljevanju obravnavajmo najpreprostejšo možnost, ko v začetnem stanju \mathbf{B} izhodišči obeh koordinatnih sistemov sovpadeta v isti točki

O , za telesni koordinatni sistem pa izberemo kartezijski koordinatni sistem, za katerega velja

$$\mathbf{B}(t = t_0) : \begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_\eta &= \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\zeta &= \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Koordinate delca \mathcal{T} glede na telesni koordinatni sistem so tedaj

$$\mathbf{B}(t = t_0) : \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y \\ \zeta &= z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

To pomeni, da smo v stanju \mathbf{B} vsakemu delcu \mathcal{T} , ki je v prostorskem koordinatnem sistemu določen s koordinatami x, y, z , priredili novo trojico števil $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$. Ko se pri gibanju in deformiranju telesa lega opazovanega delca glede na opazovališče O spremeni, se pri tem spremeni krajevni vektor delca in s tem tudi njegove prostorske koordinate x, y, z . Te koordinate so torej odvisne od časa t . Za koordinate ξ, η, ζ pa nasprotno zahtevamo, naj ista trojica $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$ določa isti delec \mathcal{T} v kateremkoli stanju telesa. To pomeni, da so koordinate ξ, η, ζ delca \mathcal{T} neodvisne od časa

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta). \quad (2.4)$$

Trojica števil $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$ torej ves čas gibanja in deformiranja določa isti delec \mathcal{T} . Zato jih imenujemo *telesne* ali *materialne koordinate*[†] delca \mathcal{T} .

Lahko bi rekli, da smo s telesnimi koordinatami x, y, z poimenovali (identificirali) delec \mathcal{T} . Vseh delcev, ki sestavljajo obravnavano trdno

[†] V splošnem bi lahko za telesne koordinate izbrali tudi katerekoli druge, na primer krogelne, cilindrične ali polarne koordinate.

telo, je namreč neskončno veliko, zato bi nam za njihovo poimenovanje hitro zmanjkalo črkovnih ali številskih oznak. Opisani način identifikacije delcev pa omogoča, da vsak delec nedvoumno prepoznamo po njegovih telesnih koordinatah, s prostorskimi koordinatami pa zasledujemo njegovo pot med deformiranjem telesa.

Če začne na telo v stanju \mathbf{B} delovati mehanska zunanja obtežba in morebitna sprememba temperaturnega polja, se prične telo deformirati in v nekem kasnejšem času $t > t_0$ zavzame novo območje prostora \mathcal{V}' z mejno ploskvijo \mathcal{S}' [†]. To novo, *deformirano stanje telesa* označimo z \mathbf{B}' . Pri prehodu iz začetnega, nedeformiranega stanja \mathbf{B} v deformirano stanje \mathbf{B}' se v splošnem absolutno in relativno spremenijo tudi lege vseh materialnih delcev telesa. Opazovani poljubni delec \mathcal{T} se tako premakne v novo točko $T'(x', y', z')$, ki je v geometrijskem pogledu določena s krajevnim vektorjem \mathbf{r}'

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z = \sum_i x'_i \mathbf{e}_i, \quad (i = x, y, z). \quad (2.5)$$

Še enkrat poudarimo, da gre pri tem vseskozi za isti materialni delec \mathcal{T} ; oznaka T' pomeni le točko v prostoru, v kateri je delec \mathcal{T} v stanju \mathbf{B}' v času $t > t_0$.

Ob zahtevi, da se med deformiranjem ves čas ohranja zvezna narava telesa, je torej tudi v stanju \mathbf{B}' s koordinatami x', y', z' krajevnega vektorja \mathbf{r}' določen en sam materialni delec, ki tokrat leži v točki T'

$$(x', y', z') \iff \mathcal{T}.$$

Razliko krajevnih vektorjev \mathbf{r}' in \mathbf{r} istega delca \mathcal{T} imenujemo *vektor pomika* in jo označimo z \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}. \quad (2.6)$$

[†] Predpostavili smo, da poteka proces obteževanja in deformiranja dovolj počasi, da lahko zanemarimo dinamične učinke (na primer nihanje telesa).

To pomeni, da predstavlja vektorsko polje pomikov \mathbf{u} preslikavo telesa iz stanja \mathbf{B} v stanje \mathbf{B}' ali obratno. Možna sta dva načina opisa deformiranja:

- a. *Lagrangev opis*, pri katerem poznamo geometrijski opis telesa v začetnem, nedeformiranem stanju \mathbf{B} (to je navadno načrt konstrukcije, iz katerega so razvidne izmere telesa, njegova oblika in lega v prostoru) in nas zanima vektorsko polje pomikov \mathbf{u} , ki določa prehod telesa iz stanja \mathbf{B} v deformirano stanje \mathbf{B}'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(T) + \mathbf{u}(T) = \mathbf{r}'(T'). \quad (2.7)$$

To pomeni, da pri Lagrangevem opisu za referenčno stanje, na katerega se sklicujemo pri opisu deformiranega telesa, izberemo nedeformirano stanje \mathbf{B} in da vektor pomika \mathbf{u} kakor tudi krajevni vektor \mathbf{r}' k opazovanemu delcu v deformirani legi T' izražamo kot funkciji koordinat x, y, z točke T v nedeformirani legi.

- b. *Eulerjev opis*, pri katerem poznamo deformirano stanje telesa \mathbf{B}' (na primer kot rezultat meritev ali kot zahtevano deformirano obliko, na primer pri oblikovanju pločevine v avtomobilsko školjko) in iščemo vektorsko polje pomikov \mathbf{u} , ki povezuje znano stanje \mathbf{B}' z začetnim, nedeformiranim stanjem telesa \mathbf{B}

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'(T') - \mathbf{u}(T') = \mathbf{r}(T). \quad (2.8)$$

Pri Eulerjevem opisu je za referenčno stanje izbrano stanje \mathbf{B}' in vse nastopajoče količine so funkcije koordinat x', y', z' opazovane točke v deformirani legi T' .

Vektorsko polje pomikov je v obeh primerih isto

$$\mathbf{u}(T) = \mathbf{u}(T'), \quad (2.9)$$

saj je odvisno le od zunanje obtežbe, geometrijskih in materialnih lastnosti telesa in načina podpiranja, ne pa od tega, ali smo za opis deformiranja izbrali Eulerjev ali Lagrangev opis.

V nadaljevanju se omejimo na Lagrangev opis deformiranega telesa, saj imamo v mehaniki konstrukcij opraviti v glavnem s takimi nalogami, pri katerih poznamo načrt nedeformirane konstrukcije. To pomeni, da vse deformacijske količine izražamo glede na nedeformirano velikost, obliko in lego telesa v stanju \mathbf{B} . Vzemimo, da poznamo vektorsko polje pomikov $\mathbf{u}(x, y, z)$, ki je v kartezijskem koordinatnem sistemu podano s komponentami $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z = \sum_i u_i \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.10)$$

Tedaj lahko z enačbo (2.7) določimo krajevni vektor \mathbf{r}' , ki določa lego delca \mathcal{T} po opravljeni deformaciji

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{u} = (x + u_x) \mathbf{e}_x + (y + u_y) \mathbf{e}_y + (z + u_z) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}' &= \sum_i (x_i + u_i) \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Iz primerjave z enačbo (2.5) sledi

$$\begin{aligned} x' &= x + u_x \\ y' &= y + u_y \\ z' &= z + u_z \end{aligned} \quad (2.12)$$

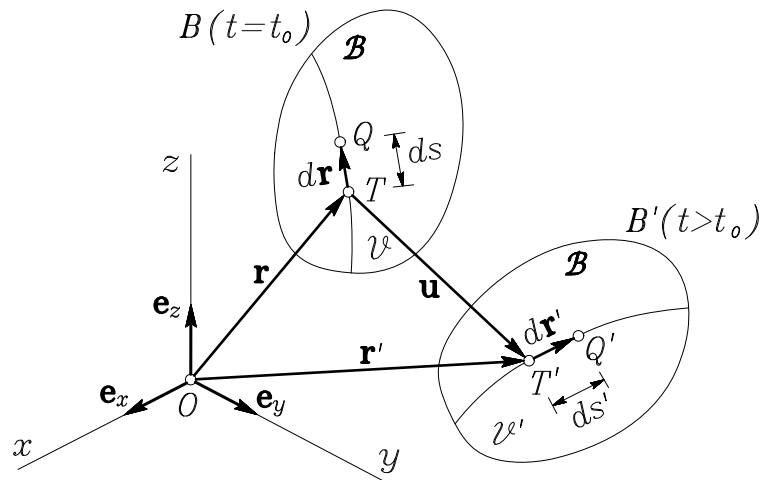
oziroma

$$x'_i = x_i + u_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.13)$$

Z enačbami (2.3) smo koordinate x, y, z proglasili za telesne koordinate delca \mathcal{T} . Zato v enačbah (2.12) te koordinate povedo, za kateri delec telesa gre, koordinate x', y', z' pa določajo točko prostora, v kateri je obravnavani delec \mathcal{T} v času t , torej po opravljeni deformaciji. Ker se koordinate x, y, z nanašajo na začetno, nedeformirano stanje telesa \mathbf{B} , jih imenujemo tudi *Lagrangeve koordinate*. Koordinate x', y', z' pa povedo trenutno lego delca \mathcal{T} v prostoru, zato jih imenujemo *prostorske* ali *Eulerjeve koordinate* delca \mathcal{T} . Telesne koordinate torej dajejo “ime” obravnavanemu delcu in ostanejo enake med celotnim deformacijskim procesom, prostorske koordinate delca pa se nanašajo na

nepomični prostorski koordinatni sistem in se med gibanjem in deformiranjem telesa spreminjajo v odvisnosti od razvoja pomikov. Odločitev za Lagrangev opis deformiranega telesa zato tudi pomeni, da se ta opis nanaša na telesne koordinate.

Pri znanem polju pomikov \mathbf{u} lahko vsakemu delcu \mathcal{T} , ki ga v začetnem stanju telesa določimo z izbiro njegovih telesnih koordinat x, y, z , priredimo prostorske koordinate x', y', z' , s katerimi je določena njegova lega v prostoru po izvršeni deformaciji. S tem pa so določene tudi spremembe medsebojnih leg posameznih materialnih delcev. Geometrijske spremembe, ki med deformiranjem telesa nastopijo v bližnji okolici obravnavanega delca, so zanimive predvsem v zvezi z vprašanjem, kolikšne napetosti se pri tem pojavijo v tej okolici.



Slika 2.2

Pri preučevanju geometrijskih sprememb pri deformaciji telesa je ugodno vpeljati pojem *materialnega vlakna*. Materialno vlakno tvori podmnožica materialnih delcev, ki ležijo na poljubni gladki krivulji skozi obravnavano točko T . Med deformiranjem se skupaj s telesom deformira tudi namišljeno materialno vlakno, ki ga vseskozi sestavlja niz istih delcev. To pomeni, da se med deformiranjem ti delci med

seboj približujejo oziroma oddaljujejo, materialno vlakno pa v obravnavani točki spreminja tudi svojo smer. Oglejmo si spremembo medsebojne lege dveh infinitezimalno bližnjih delcev telesa, ki ju v stanju \mathbf{B} določata točki $T(x, y, z)$ in $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$ (slika 2.2). Njuna medsebojna lega je določena z infinitezimalnim krajevnim vektorjem $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z = \sum_i dx_i \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.14)$$

Infinitezimalni vektor $d\mathbf{r}$ predstavlja spremembo krajevnega vektorja \mathbf{r} točke T pri infinitezimalnih spremembah dx, dy, dz neodvisnih spremenljivk x, y, z . Po deformaciji se spremenijo prostorske koordinate obeh opazovanih delcev. Delec \mathcal{T} preide v novo lego $T'(x', y', z')$, delec \mathcal{Q} pa v $Q'(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$. V stanju \mathbf{B}' je medsebojna lega obeh delcev določena z infinitezimalnim krajevnim vektorjem $d\mathbf{r}'$. Glede na nepomični prostorski kartezijski koordinatni sistem lahko ta krajevni vektor zapišemo takole

$$d\mathbf{r}' = dx' \mathbf{e}_x + dy' \mathbf{e}_y + dz' \mathbf{e}_z = \sum_i dx'_i \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.15)$$

Kakor kaže enačba (2.11), je krajevni vektor \mathbf{r}' v Lagrangevem opisu funkcija telesnih koordinat x, y, z , zato lahko spremembo krajevnega vektorja $d\mathbf{r}'$ v stanju \mathbf{B}' izrazimo tudi kot popolni diferencial krajevnega vektorja \mathbf{r}'

$$d\mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial z} dz = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x_i} dx_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.16)$$

Opazujmo materialno vlakno, ki se v začetnem stanju \mathbf{B} ujema s koordinatno krivuljo x skozi točko T ; to je krivulja, vzdolž katere se spreminja samo telesna koordinata x , koordinati y in z pa sta konstantni. V nedeformiranem stanju \mathbf{B} pomeni prirastek koordinate x za Δx tudi fizikalni prirastek dolžine koordinatne krivulje za Δx , zato je parcialni odvod krajevnega vektorja \mathbf{r} po x enak enotskemu vektorju v smeri x .

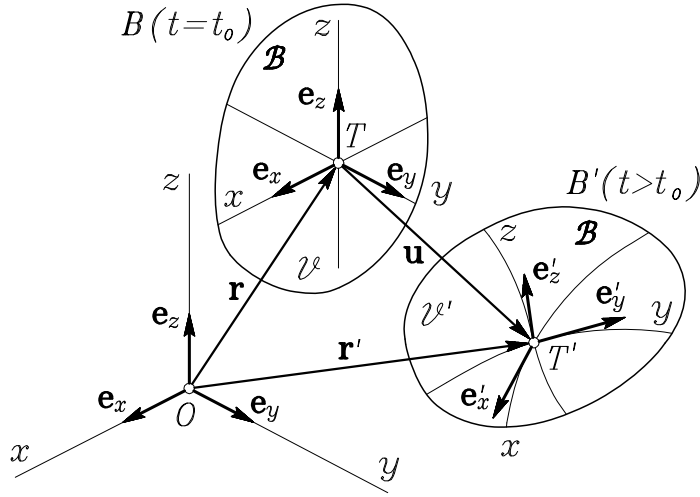
Podobno dobimo s parcialnim odvajanjem enačbe (2.1) tudi enotska vektorja v smereh y in z

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{e}_x, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z \quad (2.17)$$

ali na kratko

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.18)$$

V kartezijskem koordinatnem sistemu tvorijo koordinatne krivulje stanja \mathcal{B} mrežo medsebojno pravokotnih premic. Med deformiranjem se pripadajoča materialna vlakna deformirajo skupaj s telesom in preidejo v mrežo krivulj (sliki 2.3 in 2.4).



Slika 2.3

Ker vsakemu delcu pripada v splošnem različen pomik, se materialna vlakna pri tem raztegnejo ali skrčijo. Zato prirastek telesne koordinate na deformirani koordinatni črti ni enak fizikalnemu prirastku dolžine koordinatne črte. Parcialni odvodi krajevnega vektorja \mathbf{r}' po telesnih koordinatah so zato enaki tangentnim vektorjem vzdolž deformiranih koordinatnih krivulj v točki T' , ki pa v splošnem niso več enotski niti

pravokotni med seboj. Označimo jih z $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x} = \mathbf{e}'_x, \quad \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial y} = \mathbf{e}'_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial z} = \mathbf{e}'_z. \quad (2.19)$$

Zaradi enačb (2.7) in (2.17) pa velja

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_x &= \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \\ \mathbf{e}'_y &= \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \\ \mathbf{e}'_z &= \mathbf{e}_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ob upoštevanju enačb (2.11) in (2.19) lahko gornje enačbe na kratko zapišemo takole

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x_i}, \quad (2.21)$$

ob upoštevanju enačbe (2.11) pa sledi naslednji zapis

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \sum_j \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.22)$$

V matrični obliki zapišemo enačbo (2.22) takole

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}'_x \\ \mathbf{e}'_y \\ \mathbf{e}'_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{Bmatrix}. \quad (2.23)$$

Tangentni vektorji $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$ sestavljajo *deformirano telesno koordinatno bazo* v opazovani točki T' . Ker je pomik \mathbf{u} vektorska funkcija koordinat x, y, z , so tudi tangentni vektorji $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$ funkcije teh koordinat. Velikosti in smeri baznih vektorjev $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$ se torej v splošnem spreminjajo od točke do točke

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i(x, y, z) \quad (i = x, y, z). \quad (2.24)$$

Prirastek krajevnega vektorja $d\mathbf{r}'$ v stanju \mathbf{B}' lahko sedaj zapišemo v deformirani telesni koordinatni bazi v točki T . Iz enačb (2.16) in (2.19) namreč sledi

$$d\mathbf{r}' = dx \mathbf{e}'_x + dy \mathbf{e}'_y + dz \mathbf{e}'_z = \sum_i dx_i \mathbf{e}'_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.25)$$

Če primerjamo enačbi (2.25) in (2.14), vidimo, da ostanejo telesne koordinate dx , dy , dz infinitezimalnega krajevnega vektorja po deformaciji nespremenjene, le da se nanašajo na deformirano, v splošnem krivočrtno telesno koordinatno bazo. Zato jih imenujemo *krivočrtne koordinate* vektorja $d\mathbf{r}'$ v bazi \mathbf{e}'_x , \mathbf{e}'_y , \mathbf{e}'_z . V stanju \mathbf{B}' so torej krivočrtne koordinate vektorja $d\mathbf{r}'$ številsko enake kartezijskim koordinatam tega vektorja v nedeformiranem stanju \mathbf{B} , kar pomeni, da smo celotno deformacijo vektorja $d\mathbf{r}$ pripisali izključno deformaciji telesne koordinatne baze.

Dolžine baznih vektorjev deformirane baze določimo na znani način

$$e'_i = |\mathbf{e}'_i| = \sqrt{\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_i} \quad (i = x, y, z). \quad (2.26)$$

Sedaj lahko bazne vektorje deformirane baze normiramo glede na njihove dolžine in dobimo enotske vektorje na koordinatnih krivuljah stanja \mathbf{B}' v točki T' . Prirastek krajevnega vektorja $d\mathbf{r}'$ v stanju \mathbf{B}' lahko s tem zapišemo na naslednji način

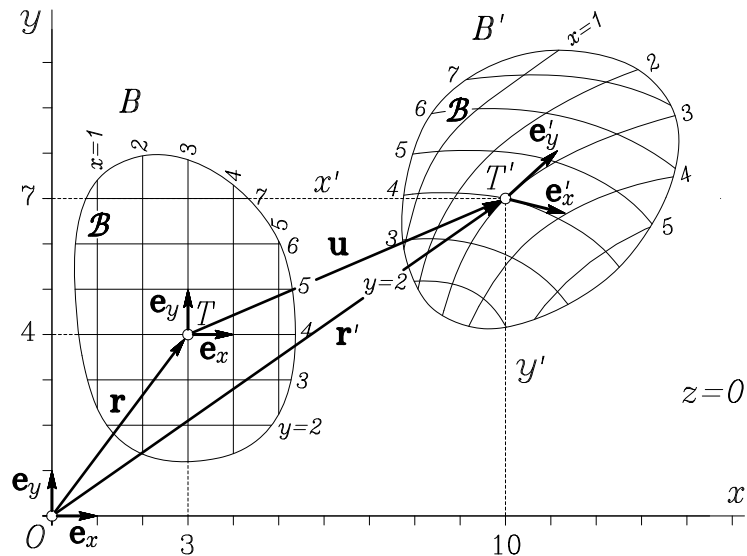
$$d\mathbf{r}' = dx e'_x \left(\frac{\mathbf{e}'_x}{e'_x} \right) + dy e'_y \left(\frac{\mathbf{e}'_y}{e'_y} \right) + dz e'_z \left(\frac{\mathbf{e}'_z}{e'_z} \right) \quad (2.27)$$

ali na kratko

$$d\mathbf{r}' = \sum_i dx_i e'_i \left(\frac{\mathbf{e}'_i}{e'_i} \right) \quad (i = x, y, z). \quad (2.28)$$

Komponente $dx_i e'_i$ imenujemo *fizikalne koordinate* vektorja $d\mathbf{r}'$ v bazi \mathbf{e}'_x , \mathbf{e}'_y , \mathbf{e}'_z , saj se nanašajo na enotske bazne vektorje.

Na kratko lahko gornje ugotovitve strnemo takole: V nedeformiranem stanju \mathbf{B} smo vsakemu materialnemu delcu priredili enako kartezijsko telesno koordinatno bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Med delovanjem zunanje obtežbe se je telo deformiralo, s tem pa so se vsaka po svoje “deformirale” tudi telesne koordinatne baze vsakega delca. V deformiranem stanju \mathbf{B}' pripada zato vsakemu delcu v splošnem različna “deformirana” telesna koordinatna baza $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$, ki je torej funkcija telesnih koordinat delca x, y, z . Kakor sledi iz enačbe (2.25), ponuja deformirana telesna baza ugodno možnost za zapis spremembe krajevnega vektorja $d\mathbf{r}'$ med obravnavanim in poljubnim bližnjim delcem kar s prirastki kartezijskih telesnih koordinat.



Slika 2.4

Za ilustracijo je na *sliki 2.4* prikazan *ravninski primer deformacije* telesnih koordinatnih črt ($z = 0$). Vzeli smo, da se telesne koordinate v nedeformiranem stanju \mathbf{B} pri času t_0 ujemajo s prostorskimi koordinatami prostorskega kartezijskega koordinatnega sistema x, y, z . Delec \mathcal{T} je v stanju \mathbf{B} določen s presečiščem koordinatnih črt $x = 3$ in $y = 4$; ima torej telesne koordinate $(3, 4, 0)$. Ko se pri gibanju in deformiranju

telesa lega opazovanega delca \mathcal{T} spremeni, se spremeni njegov krajevni vektor. V prostorskem koordinatnem sistemu je delec \mathcal{T} v stanju \mathbf{B}' določen z novimi prostorskimi koordinatami $x' = 10$, $y' = 7$, $z' = 0$. Mreža v začetku ravnih in medsebojno pravokotnih telesnih koordinatnih črt se deformira v mrežo nepravokotnih krivulj. Pri tem pa delec \mathcal{T} ves čas leži v presečišču telesnih koordinatnih krivulj $x = 3$ in $y = 4$. Ista trojica telesnih koordinat $(3, 4, 0)$ torej določa opazovani delec \mathcal{T} med celotnim deformacijskim procesom.

Iz enačb (2.12) tudi sledi, da so pri enoličnem polju pomikov prostorske koordinate funkcije telesnih koordinat in obratno. Prostorske koordinate infinitezimalnega krajevnega vektorja $d\mathbf{r}'$ v stanju \mathbf{B}' lahko zato zapišemo tudi kot popolne diferencialne glede na prirastke telesnih koordinat

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy + \frac{\partial x'}{\partial z} dz \\ dy' &= \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy + \frac{\partial y'}{\partial z} dz \\ dz' &= \frac{\partial z'}{\partial x} dx + \frac{\partial z'}{\partial y} dy + \frac{\partial z'}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Zapišimo gornje enačbe v matrični obliki

$$\begin{Bmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

oziroma na kratko

$$\{dx'_i\} = \left[\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right] \{dx_j\}. \quad (2.31)$$

Enačbe (2.29) do (2.31) povezujejo kartezijske koordinate dveh različnih vektorjev $d\mathbf{r}$ in $d\mathbf{r}'$. Obenem pa določajo pravilo za transformacijo koordinat istega vektorja $d\mathbf{r}'$ pri prehodu iz koordinatne baze $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$ v bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. V matematiki je matrika $\left[\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right]$ znana kot Jacobijeva

matrika $[J]$ preslikave koordinat x', y', z' v koordinate x, y, z

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Ob upoštevanju enačbe (2.13) izrazimo poljubno komponento dx'_i vektorja $d\mathbf{x}'$ z vsoto

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_j \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.33)$$

Izraz v oklepaju na desni strani enačbe (2.33) imenujemo komponenta deformacijskega gradienta F_{ij} stanja \mathbf{B}' glede na stanje \mathbf{B}^\dagger

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.34)$$

Enačbo (2.33) lahko sedaj zapišemo še krajše

$$dx'_i = \sum_j F_{ij} dx_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.35)$$

Matrika komponent deformacijskega gradienta je očitno enaka Jacobi-jevi matriki preslikave koordinat x', y', z' v koordinate x, y, z

$$[F_{ij}] = [J]. \quad (2.36)$$

Če prostorske koordinate izrazimo s telesnimi koordinatami in pomiki po enačbah (2.12), dobi matrika deformacijskega gradienta naslednjo obliko

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

[†] Nekateri avtorji uporabljajo pojem deformacijski gradient za transponirane vrednosti tega izraza.

oziroma

$$[F_{ij}] = \left[\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]. \quad (2.38)$$

Upoštevajoč enačbe (2.23) do (2.38) lahko tudi deformacijo telesne koordinatne baze zapišemo kot preslikavo

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}'_x \\ \mathbf{e}'_y \\ \mathbf{e}'_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial y} \\ \frac{\partial x'}{\partial z} & \frac{\partial y'}{\partial z} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{Bmatrix} = [F_{ij}]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

ali na kratko

$$\mathbf{e}'_i = \sum_j \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.40)$$

2.3 Tenzor velikih deformacij

Kot najbolj naravno in vsakdanjim izkušnjam z deformabilnimi telesi najbližjo mero za opis deformiranja v neposredni okolici opazovanega delca vzamemo kar normirano spremembo razdalje med bližnjima točkama T in Q med deformacijo telesa (slika 2.2). V nedeformiranem stanju \mathbf{B} je ta razdalja enaka dolžini $ds = |d\mathbf{r}|$ prirastka krajevnega vektorja \mathbf{r} . Ob upoštevanju enačbe (2.14) dobimo

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \sum_j dx_i dx_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.41)$$

V deformiranem stanju \mathbf{B}' pa je $ds' = |d\mathbf{r}'|$ in zaradi enačbe (2.25) sledi

$$ds'^2 = d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' = \sum_i \sum_j dx_i dx_j \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.42)$$

Razlika kvadratov obeh elementarnih dolžin je tako

$$ds'^2 - ds^2 = \sum_i \sum_j (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) dx_i dx_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.43)$$

Z vpeljavo okrajšave

$$2E_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.44)$$

lahko pišemo

$$ds'^2 - ds^2 = 2 \sum_i \sum_j E_{ij} dx_i dx_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.45)$$

Ker je $ds'^2 - ds^2 = (ds' + ds)(ds' - ds)$, je razlika elementarnih dolžin $(ds' - ds)$ sorazmerna izrazu na desni strani gornje enačbe. Zato lahko novo vpeljano količino s komponentami E_{ij} vzamemo kot primerno mero za deformiranje telesa v okolici opazovanega materialnega delca \mathcal{T} . Upoštevajoč invariantnost razlike $ds'^2 - ds^2$ lahko sklepamo, da so E_{ij} komponente tenzorja. Glede na definicijo (2.44) lahko zaradi komutativnosti skalarnega produkta ugotovimo, da gre za simetričen tenzor 2. reda $\mathbf{E}(2)$.

$$E_{ij} = E_{ji}. \quad (2.46)$$

Imenujemo ga *tenzor velikih deformacij*, saj v dosedanjih izvajanjih velikosti pomikov nismo omejili. Podobno kot komponente tenzorja napetosti lahko tudi komponente tenzorja velikih deformacij uredimo v simetrično kvadratno matriko reda 3×3 . V kartezijskih koordinatah x, y, z je

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Ob upoštevanju enačb (2.44) in (2.22) lahko komponente tenzorja velikih deformacij izrazimo s pomiki

$$2E_{ij} = \left(\mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.48)$$

in po ureditvi dobimo

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \cdot \mathbf{e}_i \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}. \quad (2.49)$$

Zapišimo desno stran gornje enačbe še v skalarni obliki

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (i, j, k = x, y, z). \quad (2.50)$$

Kartezijske komponente tenzorja velikih deformacij so tako

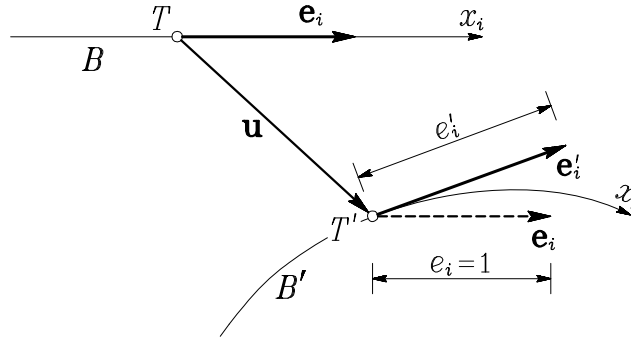
$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\ E_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\ E_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ E_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ E_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ E_{yx} &= E_{xy} \quad E_{zy} = E_{yz} \quad E_{xz} = E_{zx}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Kakor vidimo, so komponente tenzorja velikih deformacij izražene s prvimi parcialnimi odvodi pomikov, in sicer tako, da ima vsaka komponenta linearni in kvadratični del. V nadaljevanju skušamo s komponentami tenzorja velikih deformacij izraziti najpomembnejše geometrijske spremembe v okolici opazovanega delca.

2.4 Geometrijske spremembe pri deformiranju telesa

Specifična sprememba dolžine

Oglejmo si, kako se med deformiranjem telesa spreminja dolžina poljubnega materialnega vlakna skozi obravnavano točko T . Brez izgube na splošnosti lahko opazujemo kar enega od materialnih vlaken, ki v nedeformiranem stanju ležijo vzdolž koordinatnih krivulj. Naj bo to koordinatna krivulja x_i , katere smer je v točki T določena z enotskim tangentskim vektorjem \mathbf{e}_i ($i = x, y$ ali z). Med deformiranjem telesa se materialno vlakno raztegne ali skrči in spremeni svojo smer. S tem spremeni svojo velikost in smer tudi tangentski vektor (slika 2.5).



Slika 2.5

V začetnem stanju B vzemimo koordinatno krivuljo x skozi obravnavano točko $T(x, y, z)$ in bližnjo točko $Q(x + dx, y, z)$. Sprememba krajevnega vektorja \mathbf{r} med točkama T in Q je tedaj

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x, \quad (2.52)$$

njegova dolžina ds_x pa je

$$ds_x = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{dx^2 \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x} = dx e_x = dx. \quad (2.53)$$

Po deformaciji telesa ostanejo telesne koordinate točk T' in Q' nespremenjene, sprememba krajevnega vektorja $d\mathbf{r}'$ pa je v skladu z enačbo (2.25)

$$d\mathbf{r}' = dx \mathbf{e}'_x. \quad (2.54)$$

Razdalja ds'_x med točkama T' in Q' v stanju \mathbf{B}' je sedaj

$$ds'_x = \sqrt{d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}'} = \sqrt{dx^2 \mathbf{e}'_x \cdot \mathbf{e}'_x} = dx e'_x. \quad (2.55)$$

Specifično spremembo dolžine v točki T in v smeri koordinatne krivulje x označimo z D_{xx} in jo v duhu Lagrangevega opisa definiramo z razmerjem med spremembo dolžine in začetno dolžino vlakna

$$D_{xx} = \frac{ds'_x - ds_x}{ds_x}. \quad (2.56)$$

Upoštevajoč enačbi (2.53) in (2.55) sledi

$$D_{xx} = \frac{dx e'_x - dx}{dx} = e'_x - 1. \quad (2.57)$$

Dobljeni rezultat lahko posplošimo v ugotovitev, da je specifična sprememba dolžine materialnega vlakna vzdolž poljubne koordinatne krivulje x_i določena z razmerjem spremembe dolžine pripadajočega tangentnega vektorja \mathbf{e}_i in njegove prvotne dolžine (enote) (slika 2.5)

$$D_{ii} = \frac{dx e'_i - dx_i}{dx_i} = e'_i - 1. \quad (2.58)$$

Pri tem smo upoštevali, da je $e_i = 1$. Če v enačbi (2.44) vzamemo $j = i$, dobimo

$$2E_{ii} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_i - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = e'^2_i - 1. \quad (2.59)$$

Iz enačb (2.57) in (2.59) sledi

$$e'_i = 1 + D_{ii} = \sqrt{1 + 2E_{ii}} \quad (2.60)$$

in specifično spremembo dolžine D_{ii} v smeri \mathbf{e}_i izrazimo v odvisnosti od komponente E_{ii} tenzorja velikih deformacij

$$D_{ii} = \sqrt{1 + 2E_{ii}} - 1. \quad (2.61)$$

S prav takšno enačbo določimo specifično spremembo dolžine poljubnega drugega materialnega vlakna skozi delec T . Za vlakno, katerega smer je v točki T določena z enotskim vektorjem \mathbf{e}_α , dobimo

$$D_{\alpha\alpha} = \sqrt{1 + 2E_{\alpha\alpha}} - 1, \quad (2.62)$$

pri čemer komponento $E_{\alpha\alpha}$ določimo s transformacijsko enačbo (1.163), ki smo jo izpeljali v razdelku 1.8

$$E_{\alpha\alpha} = \sum_i \sum_j E_{ij} e_{\alpha i} e_{\alpha j} \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.63)$$

Sprememba pravega kota

Specifične spremembe dolžin, ki smo jih obravnavali v prejšnjem razdelku, so povezane s spremembo velikosti telesa. Sprememba oblike kot druga osnovna značilnost deformacije pa je povezana s spremembami kotov med posameznimi materialnimi vlakni. Za opis kotnih sprememb je najenostavneje, če opazujemo materialna vlakna, ki so bila pred deformacijo pravokotna med seboj in določimo spremembo pravega kota med deformiranjem telesa. Vzemimo materialni vlakni, ki se ujemata z dvema od koordinatnih krivulj skozi opazovano točko T in sta njuni smeri pred deformacijo določeni z enotskima in medsebojno pravokotnima telesnima baznima vektorjema \mathbf{e}_i in \mathbf{e}_j ($i \neq j$). Po deformaciji oba bazna vektorja v splošnem spremenita svoji velikosti in smeri (slika 2.6). Novi kot med baznima vektorjema deformiranega stanja \mathbf{e}'_i in \mathbf{e}'_j označimo s ϑ'_{ij} in definiramo spremembo pravega kota D_{ij} kot razliko

$$D_{ij} = \angle(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) - \angle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \frac{\pi}{2} - \vartheta'_{ij}. \quad (2.64)$$

Glede na uporabljeno definicijo je sprememba pravega kota pozitivna, če se opazovani pravi kot med deformiranjem zmanjša ($\vartheta'_{ij} < \pi/2$).

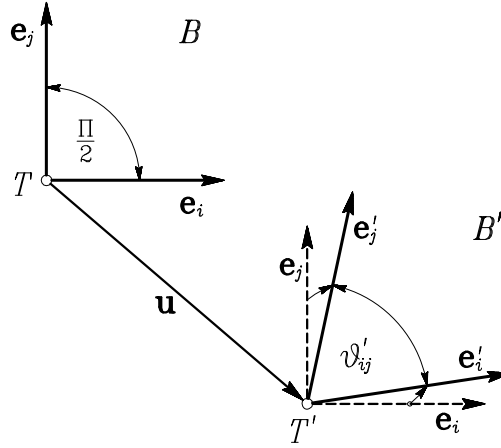
Upoštevamo, da je

$$\sin D_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta'_{ij}\right) = \cos \vartheta'_{ij}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = e'_i e'_j \cos \vartheta'_{ij} \quad \rightarrow \quad \cos \vartheta'_{ij} = \frac{\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j}{e'_i e'_j} \quad (2.66)$$

in ker je pri $i \neq j$ $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, dobimo iz enačb (2.44) in (2.60)

$$\sin D_{ij} = \frac{2E_{ij}}{\sqrt{1 + 2E_{ii}}\sqrt{1 + 2E_{jj}}}. \quad (2.67)$$



Slika 2.6

Na enak način določimo spremembo pravega kota med poljubnima enotskima vektorjema \mathbf{e}_α in \mathbf{e}_β , ki sta v nedeformiranem stanju B pravokotna med seboj ($\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 0$)

$$\sin D_{\alpha\beta} = \frac{2E_{\alpha\beta}}{\sqrt{1 + 2E_{\alpha\alpha}}\sqrt{1 + 2E_{\beta\beta}}}, \quad (2.68)$$

kjer v skladu z enačbo (1.163) velja

$$E_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j E_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j} \quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta). \quad (2.69)$$

Tako smo pokazali, kako specifične spremembe dolžin in spremembe pravih kotov kot najpomembnejše geometrijske značilnosti deformacije trdnega telesa izrazimo s komponentami tenzorja velikih deformacij. Z enačbami (2.51) jih tako povežemo tudi s komponentami vektorskega polja pomikov. Glede na to, da velikosti vpeljanih deformacijskih količin nismo omejili, lahko končno tudi trdimo, da smo tenzor s komponentami E_{ij} upravičeno poimenovali *tenzor velikih deformacij*.

Ob upoštevanju enačb (2.60) in (2.67) lahko zapišemo tudi obratne zveze, s katerimi komponente tenzorja velikih deformacij povežemo s specifičnimi spremembami dolžin in spremembami pravih kotov

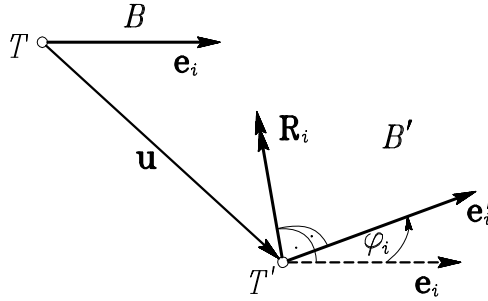
$$E_{ii} = D_{ii} + \frac{1}{2} D_{ii}^2 \quad (2.70)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (1 + D_{ii})(1 + D_{jj}) \sin D_{ij}. \quad (2.71)$$

Sprememba smeri

Ugotovili smo že in v prejšnjem razdelku tudi upoštevali, da materialno vlakno med deformiranjem telesa razen dolžine spremeni tudi smer. Oglejmo si materialno vlakno, katerega smer je v obravnavani točki T v nedeformiranem stanju \mathbf{B} določena s telesnim baznim vektorjem \mathbf{e}_i , v deformiranem stanju \mathbf{B}' pa z baznim vektorjem \mathbf{e}'_i (slika 2.7). Kot φ_i med vektorjema \mathbf{e}_i in \mathbf{e}'_i imenujemo *zasuk* ali *rotacija* materialnega vlakna v smeri \mathbf{e}_i . Podobno kakor pri vektorju pomika moramo tudi pri zasuku razen velikosti določiti tudi njegovo smer. Iz 1. poglavja vemo, da je vektor zasuka določen z velikostjo kota in z enotskim vektorjem normale na ravnino, ki jo določata prvotna in nova smer opazovanega materialnega vlakna. Zato za mero spremembe smeri materialnega vlakna v točki T vzamemo vektorski produkt \mathbf{R}_i vektorjev \mathbf{e}_i in \mathbf{e}'_i

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_i. \quad (2.72)$$



Slika 2.7

Pri tem smo s privzetim vrstnim redom obeh vektorjev upoštevali, da gre za Lagrangev opis zasuka materialnega vlakna iz smeri \mathbf{e}_i v smer \mathbf{e}'_i . Zaradi enačbe (2.22) in ker je $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, sledi

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{e}_i \times \left(\mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) = \mathbf{e}_i \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}. \quad (2.73)$$

Upoštevajoč definicijo vektorskega produkta lahko povežemo velikost R_i vektorja \mathbf{R}_i z velikostjo zasuka φ_i

$$R_i = |\mathbf{R}_i| = |\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_i| = e_i e'_i \sin \varphi_i = e'_i \sin \varphi_i. \quad (2.74)$$

Zaradi enačbe (2.60) lahko vrednost R_i izrazimo tudi takole

$$\begin{aligned} R_i &= (1 + D_{ii}) \sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i &= \frac{R_i}{1 + D_{ii}} = \frac{R_i}{\sqrt{1 + 2E_{ii}}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Kakor vidimo, izbrana mera za spremembo smeri vlakna $|\mathbf{R}_i| = R_i$ ni enaka zasuku, saj je s faktorjem $(1 + D_{ii})$ sorazmerna sinus zasučnega kota. Vektorje \mathbf{R}_i lahko torej pogojno imenujemo *reducirani vektorji zasukov*. Ker so izraženi s pomiki, lahko z njimi izračunamo zasuke φ_i po enačbi (2.75). Pri znanem polju pomikov \mathbf{u} lahko torej določimo

velikost in smer zasuka poljubnega koordinatnega materialnega vlakna skozi opazovano točko T .

Zapišimo enačbo (2.73) v kartezijskih koordinatah (x, y, z) . Vektorske produkte izračunamo kot ustrezne determinante in dobimo

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x &= \mathbf{e}_x \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_y &= \mathbf{e}_y \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial u_x}{\partial y} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_z &= \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{\partial u_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (2.76)$$

Vektorje \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y , \mathbf{R}_z lahko formalno zapišemo z njihovimi skalarnimi komponentami v bazi \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x &= R_{xy} \mathbf{e}_y + R_{xz} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_y &= R_{yx} \mathbf{e}_x + R_{yz} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_z &= R_{zx} \mathbf{e}_x + R_{zy} \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (2.77)$$

Pri tem smo glede na enačbe (2.76) upoštevali, da je $R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = 0$, z nadaljnjo primerjavo enačb (2.76) in (2.77) pa dobimo

$$\begin{aligned}R_{xy} &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} & R_{xz} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ R_{yx} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} & R_{yz} &= -\frac{\partial u_x}{\partial y} \\ R_{zx} &= -\frac{\partial u_y}{\partial z} & R_{zy} &= \frac{\partial u_x}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.78)$$

Komponente R_{xy} , R_{xz} , \dots , R_{zy} predstavljajo projekcije oziroma vrednosti vektorjev reduciranih zasukov \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y , \mathbf{R}_z v smereh \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Premik opazovanega delca \mathcal{T} iz lege T v nedeformiranem stanju \mathbf{B} v lego T' v deformiranem stanju \mathbf{B}' smo opisali z enim samim vektorjem pomika \mathbf{u} . Da bi tudi zasuk elementarnega dela telesa v bližnji okolici delca \mathcal{T} opisali z enim samim vektorjem, sestavimo namišljeni

rezultirajoči zasuk v točki T kot vsoto vektorjev reduciranih zasukov \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y , \mathbf{R}_z

$$\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z = \mathbf{e}_x \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{e}_y \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (2.79)$$

Ker so bazni vektorji \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z konstantni, lahko pišemo

$$\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{e}_x \times \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{e}_y \times \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) \quad (2.80)$$

in dalje

$$\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \times \mathbf{u}. \quad (2.81)$$

V okroglem oklepaju na desni strani enačbe (2.81) prepoznamo Hamiltonov[†] diferencialni operator ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.82)$$

V enačbi (2.81) se operator ∇ obnaša kot vektor, zato velja

$$\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u}. \quad (2.83)$$

Komponente rotorja vektorskega polja \mathbf{u} najlažje določimo z determinanto

$$\text{rot } \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \quad (2.84)$$

in dobimo

$$\text{rot } \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (2.85)$$

[†] William Rowan Hamilton, irski matematik in astronom, 1805-1865.

Zapišimo sedaj polovični rotor pomikov z upoštevanjem zvez (2.78)

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{2}(R_{yx} + R_{zx}) \mathbf{e}_x + \frac{1}{2}(R_{zy} + R_{xy}) \mathbf{e}_y + \frac{1}{2}(R_{xz} + R_{yz}) \mathbf{e}_z. \quad (2.86)$$

Komponenta polovičnega rotorja pomikov v smeri \mathbf{e}_x predstavlja povprečno vrednost reduciranih zasukov okrog osi x ; R_{yx} je namreč reducirana vrednost zasuka materialnega vlakna v smeri \mathbf{e}_y okrog osi x , R_{zx} pa reducirana vrednost zasuka materialnega vlakna v smeri \mathbf{e}_z okrog osi x . Gre torej za povprečni reducirani zasuk dveh značilnih materialnih vlaken v ravnini (y, z) okrog osi x . Podobno komponenti polovičnega rotorja pomikov v smereh \mathbf{e}_y in \mathbf{e}_z pomenita povprečna reducirana zasuka v ravninah (z, x) in (x, y) oziroma okrog smeri y in z . Zato za komponente polovičnega rotorja pomikov vpeljemo nove oznake

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(R_{yx} + R_{zx}) &= \omega_x \equiv \omega_{yz} \\ \frac{1}{2}(R_{zy} + R_{xy}) &= \omega_y \equiv \omega_{zx} \\ \frac{1}{2}(R_{xz} + R_{yz}) &= \omega_z \equiv \omega_{xy}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Upoštevajoč enačbe (2.78) lahko torej povprečne reducirane zasuke izrazimo s pomiki

$$\begin{aligned} \omega_x \equiv \omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\omega_{zy} \\ \omega_y \equiv \omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -\omega_{xz} \\ \omega_z \equiv \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\omega_{yx}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Z identiteto $\omega_{yz} \equiv \omega_x$ smo, na primer, povedali, da gre za povprečni reducirani zasuk dveh značilnih materialnih vlaken v ravnini (y, z) oziroma za povprečni reducirani zasuk teh vlaken okrog osi x . Zato

gre pri vpeljanih dvojnih oznakah le navidez za nepotrebno zapletanje; kakor bomo videli v nadaljevanju, je v nekaterih izpeljavah bolj ugoden prvi, v drugih pa drugi način označevanja zasukov.

V gornjih izvajanjih smo torej govorili o *povprečnih reduciranih zasukih* v koordinatnih ravninah oziroma okrog normal na te ravnine. Še enkrat opozorimo, da pri tem ne gre za fizikalne vrednosti zasukov, temveč za njihove sinuse, pomnožene z velikostjo deformirane enote $(1 + D_{ii})$, kakor sledi iz enačbe (2.75).

Za polovični rotor pomikov lahko sedaj vpeljemo novo oznako $\boldsymbol{\omega}$ in ga zapišemo na naslednji način

$$\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z = \sum_i \omega_i \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.89)$$

Razcep matrike prvih parcialnih odvodov pomikov

V dosedanjih izvajanjih smo vse najpomembnejše geometrijske značilnosti deformacije v bližnji okolici opazovanega delca izrazili s parcialnimi odvodi komponent vektorskega polja pomikov. Zato si matriko nastopajočih parcialnih odvodov oglejmo nekoliko podrobneje.

Kakor vemo iz linearne algebre, lahko vsako realno kvadratno matriko enolično razcepimo na simetrični in antisimetrični del. Za matriko $[C_{ij}]$ na primer velja

$$[C_{ij}] = [S_{ij}] + [A_{ij}], \quad (2.90)$$

kjer je $[S_{ij}]$ simetrična, $[A_{ij}]$ pa antisimetrična matrika

$$\begin{aligned} [S_{ij}] &= \frac{1}{2}[C_{ij} + C_{ji}] & \dots & S_{ji} = S_{ij} \\ [A_{ij}] &= \frac{1}{2}[C_{ij} - C_{ji}] & \dots & A_{ji} = -A_{ij}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Matriko parcialnih odvodov pomikov

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

v kateri indeks i določa vrstice, indeks j pa stolpce, razcepimo na simetrični del $[\varepsilon_{ij}]$ in antisimetrični del $[\omega_{ij}]$

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = [\varepsilon_{ij}] + [\omega_{ij}]. \quad (2.93)$$

Pri tem je

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ji} \quad (2.94)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\omega_{ji}. \quad (2.95)$$

Ker smo jih izračunali kot komponente kartezijskih vektorjev, sestavljajo vrednosti ε_{ij} simetrični tenzor 2. reda $\varepsilon(2)$, vrednosti ω_{ij} pa antisimetrični tenzor 2. reda $\omega(2)$. Izpišimo komponente obeh tenzorjev glede na kartezijsko bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \omega_{xx} &= \omega_{yy} = \omega_{zz} = 0 \\ \omega_{xy} &\equiv \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\omega_{yx} \\ \omega_{yz} &\equiv \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\omega_{zy} \\ \omega_{zx} &\equiv \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -\omega_{xz}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Primerjava enačb (2.96) z enačbami (2.51) kaže, da so komponente simetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov enake linearnim delom ustreznih komponent tenzorja velikih deformacij. Iz primerjave enačb (2.97) in (2.88) pa lahko ugotovimo, da so komponente antisimetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov enake povprečnim reduciranim zasukom v koordinatnih ravninah oziroma okrog ustreznih koordinatnih smeri.

2.5 Poenostavitve pri omejenih deformacijah

V dosedanjih izvajanjih se nikjer nismo omejili glede velikosti pomikov in zasukov. Vse izpeljane enačbe veljajo pri poljubno velikih pomikih in zasukih, s tem pa tudi pri poljubno velikih specifičnih spremembah dolžin in spremembah pravih kotov. Pri tem se tudi nismo vprašali, kolikšne deformacije dovoljuje material, iz katerega je narejeno telo. O tem bomo podrobneje govorili v 3. poglavju. Kakor vidimo, nas tako splošen opis deformiranja telesa pripelje do nelinearnih zvez med pomiki in deformacijami, kar seveda zelo oteži praktično računanje. Problemi, ki zahtevajo nelinearno analizo deformacij in pomikov, v glavnem presegajo predvideni okvir tega učbenika. Izpeljane enačbe so pomembne predvsem zaradi vpogleda v fizikalno in geometrijsko ozadje deformiranja telesa. Razen tega pa smo z njimi pripravili tudi orodje za študij stabilnostnih problemov, ki jih bomo srečali v 5. poglavju.

Kakor smo omenili že v uvodu, so v večini praktičnih inženirskih nalog deformacije pri redni obtežbi omejene iz funkcionalnih in estetskih razlogov. Že v poglavju o napetostih smo izpeljali ravnotežne pogoje ob predpostavki, da je vpliv spremembe velikosti, oblike in lege telesa zanemarljiv. Reševanje tako poenostavljenih enačb ravnotežja ob upoštevanju točnih kinematičnih zvez ne bi bilo smiselno. Zato v nadaljevanju upoštevamo da so: (i) pomiki in zasuki majhni v primerjavi s siceršnjimi izmerami telesa, (ii) prvi parcialni odvodi pomikov in vse geometrijske spremembe v okolici poljubnega opazovanega delca

majhni v primerjavi z enoto.

Če so prvi parcialni odvodi majhne količine v primerjavi z enoto

$$\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right| \ll 1 \quad (i, j = x, y, z), \quad (2.98)$$

lahko v izrazih za komponente tenzorja velikih deformacij v primerjavi z linearnimi členi zanemarimo člene, v katerih nastopajo kvadrati in produkti parcialnih odvodov pomikov. Iz primerjave enačb (2.51) in (2.96) sledi, da so v tem primeru komponente tenzorja velikih deformacij približno enake komponentam simetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov

$$\begin{aligned} E_{xx} &\approx \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} \\ E_{yy} &\approx \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} \\ E_{zz} &\approx \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} \\ E_{xy} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \varepsilon_{xy} \\ E_{yz} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \varepsilon_{yz} \\ E_{zx} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \varepsilon_{zx} \\ E_{yx} &= E_{xy} \approx \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy} \\ E_{zy} &= E_{yz} \approx \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} \\ E_{xz} &= E_{zx} \approx \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Vzemimo, da so tudi specifične spremembe dolžin majhne v primerjavi z enoto

$$|D_{ii}| \ll 1. \quad (2.100)$$

Tedaj lahko v enačbi (2.70) zanemarimo kvadratni člen v primerjavi z linearnim in sledi

$$D_{ii} \approx E_{ii} \approx \varepsilon_{ii}. \quad (2.101)$$

To pomeni, da lahko pri majhnih prvih parcialnih odvodih pomikov specifične spremembe dolžin v koordinatnih smereh izrazimo kar s pripadajočimi diagonalnimi komponentami simetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov. V kartezijskih koordinatah x, y, z je na primer

$$\begin{aligned} D_{xx} &\approx \varepsilon_{xx} \\ D_{yy} &\approx \varepsilon_{yy} \\ D_{zz} &\approx \varepsilon_{zz} . \end{aligned} \quad (2.102)$$

Jasno je, da velja enako pravilo tudi za poljubno smer \mathbf{e}_α

$$D_{\alpha\alpha} \approx \varepsilon_{\alpha\alpha} , \quad (2.103)$$

kjer komponento $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ določimo s transformacijsko enačbo (1.163)

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{\alpha i} e_{\alpha j} \quad (i, j = x, y, z) . \quad (2.104)$$

Spremembe pravih kotov so s specifičnimi spremembami dolžin povezane z enačbo (2.71)

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (1 + D_{ii} + D_{jj} + D_{ii}D_{jj}) \sin D_{ij} . \quad (2.105)$$

Če so razen specifičnih sprememb dolžin tudi spremembe pravih kotov in zasuki majhne količine

$$\begin{aligned} |D_{ij}| &\ll 1, \quad (i \neq j) \\ |\varphi_i| &\ll 1, \end{aligned} \quad (2.106)$$

lahko v enačbi (2.105) zanemarimo D_{ii}, D_{jj} in $D_{ii}D_{jj}$ v primerjavi z 1. Razen tega lahko vzamemo

$$\sin D_{ij} \approx D_{ij} \quad (2.107)$$

in ob upoštevanju enačb (2.99) dobimo

$$D_{ij} \approx 2E_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j) . \quad (2.108)$$

Kakor vidimo, lahko ob izpolnjenih pogojih (2.98), (2.100) in (2.106) spremembe pravih kotov opišemo z dvakratnimi vrednostmi pripadajočih zunajdiagonalnih komponent simetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov. Pravilo lahko spet posplošimo na opis spremembe pravega kota med dvema poljubnima, v nedeformiranem stanju \mathbf{B} medsebojno pravokotnima smerema \mathbf{e}_α in \mathbf{e}_β

$$D_{\alpha\beta} \approx 2E_{\alpha\beta} \approx 2\varepsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta), \quad (2.109)$$

kjer je

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j} \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.110)$$

Ob upoštevanju predpostavk (2.100) in (2.106) lahko tudi v enačbi (2.75) zanemarimo D_{ii} v primerjavi z 1, vzamemo, da je $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$ in dobimo

$$\varphi_i \approx R_i. \quad (2.111)$$

To pomeni, da lahko pri majhnih deformacijah zasuk φ_i obravnavanega materialnega vlakna v opazovani točki telesa opišemo z velikostjo R_i vektorja \mathbf{R}_i ; z drugimi besedami: R_i je pri majhnih deformacijah fizikalna vrednost zasuka vlakna v smeri \mathbf{e}_i . Iz enačb (2.86) do (2.88) s tem sledi, da komponente polovičnega rotorja pomikov predstavljajo fizikalne vrednosti povprečnih zasukov v koordinatnih ravninah. Primerjava z enačbami (2.97) pa nadalje pokaže, da lahko pri majhnih deformacijah povprečne zasuke v koordinatnih ravninah opišemo z ustreznimi komponentami antisimetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov.

Funkcije ε_{ij} in ω_{ij} , ki smo jih sicer formalno dobili z razcepom matrike $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ na simetrični in antisimetrični del, so tako v primeru, da gre za majhne deformacije, dobile svoj fizikalni pomen: diagonalne komponente ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} simetričnega tenzorja $\varepsilon(2)$ predstavljajo specifične spremembe dolžin v smereh x, y, z , zunajdiagonalne komponente ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} pa polovične spremembe pravih kotov

$\angle(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, $\angle(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, $\angle(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x)$. Za specifične spremembe dolžin pogosto uporabljamo tudi izraz *normalne deformacije* (včasih tudi linearne deformacije, raztezki, dilatacije ...), za spremembe pravih kotov pa izraz *kotne ali distorzijske deformacije*. Tenzor $\varepsilon(2)$ imenujemo *tenzor majhnih deformacij*, enačbe (2.96), ki povezujejo specifične spremembe dolžin in spremembe pravih kotov s parcialnimi odvodi pomikov, pa *kinematične enačbe pri majhnih deformacijah*. Te enačbe sestavljajo drugo pomembno skupino osnovnih enačb mehanike trdnega telesa[†].

Komponente $\omega_{xy} \equiv \omega_z$, $\omega_{yz} \equiv \omega_x$, $\omega_{zx} \equiv \omega_y$ antisimetričnega tenzorja $\omega(2)$ pa po vrsti predstavljajo povprečne zasuke v koordinatnih ravninah (x, y) , (y, z) , (z, x) oziroma okrog osi x , y in z . Pri tem so komponente polovičnega rotorja pomikov izražene s pomiki na enak način kot komponente tenzorja $\omega(2)$, ne glede na to, ali gre za velike ali majhne deformacije. Razlika je le v tem, da pri majhnih deformacijah komponente ω_{ij} pomenijo fizikalne vrednosti zasukov, pri velikih deformacijah pa ne. Zato tenzor $\omega(2)$ s komponentami ω_{ij} imenujemo *tenzor zasukov* ali *tenzor rotacij*.

2.6 Tenzor majhnih deformacij

Tenzor majhnih deformacij, ki ga v kartezijskih koordinatah predstavimo z matriko $[\varepsilon_{ij}]$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.112)$$

je v matematičnem pogledu popolnoma enakovreden tenzorju napetosti, s katerim smo se podrobno spoznali v 1. poglavju. Zato vse matematične operacije in pravila, ki smo jih vpeljali za tenzor napetosti, veljajo

[†] Prvo skupino osnovnih enačb sestavljajo ravnotežni pogoji (1.131) in (1.140).

tudi za tenzor majhnih deformacij. Elementi vrstic (zaradi simetrije pa tudi elementi stolpcev) matrike $[\varepsilon_{ij}]$ sestavljajo tri koordinatne vektorje deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, \boldsymbol{\varepsilon}_z$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_x &= \varepsilon_{xx} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{xy} \mathbf{e}_y + \varepsilon_{xz} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y &= \varepsilon_{yx} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{yy} \mathbf{e}_y + \varepsilon_{yz} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z &= \varepsilon_{zx} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{zy} \mathbf{e}_y + \varepsilon_{zz} \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (2.113)$$

ali na kratko

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.114)$$

Medtem ko smo koordinatnim vektorjem napetosti $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$ zlahka pripisali očiten fizikalni pomen, za koordinatne vektorje deformacij tega ni moč ugotoviti. Sestavljeni so namreč iz fizikalno povsem različnih normalnih in kotnih deformacij. V matematičnem pogledu pa koordinatne vektorje deformacij razumemo kot vrednosti tenzorja deformacij v smereh $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, ki v mnogočem olajšajo zapise in izpeljave pri analizi deformacijskega stanja telesa. Deformacijski vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$, ki pripada poljubni smeri \mathbf{e}_α , imenujemo *vrednost tenzorja deformacij v smeri \mathbf{e}_α* in ga določimo po analogiji z enačbo (1.142)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_x e_{\alpha x} + \varepsilon_y e_{\alpha y} + \varepsilon_z e_{\alpha z} = \sum_i \varepsilon_i e_{\alpha i} \quad (i = x, y, z). \quad (2.115)$$

S skalarnim množenjem deformacijskega vektorja $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ z vektorjem \mathbf{e}_α dobimo normalno deformacijo (specifično spremembo dolžine) materialnega vlakna, ki je v stanju \mathbf{B} določeno z enotskim vektorjem \mathbf{e}_α

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha} \approx D_{\alpha\alpha}. \quad (2.116)$$

Podobno lahko določimo spremembo pravega kota, ki ga v stanju \mathbf{B} oklepa enotski vektor \mathbf{e}_α z nekim drugim enotskim vektorjem \mathbf{e}_β , tako da je $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 0$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2} D_{\alpha\beta}. \quad (2.117)$$

Transformacija tenzorja majhnih deformacij

Transformacija komponent tenzorja majhnih deformacij pri prehodu iz kartezijskega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ v nov kartezijski koordinatni sistem z bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ in obratno je določena analogno z enačbami (1.163) do (1.168). Za posamezne komponente velja

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j} \quad (\alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta; i, j = x, y, z). \quad (2.118)$$

Če pa želimo izračunati vse komponente tenzorja majhnih deformacij v zasukanem koordinatnem sistemu, je ugodneje zapisati enačbo (2.118) v matrični obliki

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = [e_{\alpha i}][\varepsilon_{ij}][e_{j\beta}]. \quad (2.119)$$

V primeru, da poznamo komponente deformacij $\varepsilon_{\alpha\beta}$ v zasukanem koordinatnem sistemu $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, lahko določimo komponente istega deformacijskega tenzorja v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ z enačbo

$$\varepsilon_{ij} = \sum_\alpha \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} e_{i\alpha} e_{j\beta} \quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta) \quad (2.120)$$

oziroma v matrični obliki

$$[\varepsilon_{ij}] = [e_{i\alpha}][\varepsilon_{\alpha\beta}][e_{\beta j}]. \quad (2.121)$$

Glavne normalne deformacije

Podobno kakor pri napetostih določimo velikosti glavnih normalnih deformacij kot ničle karakteristične enačbe tenzorja majhnih deformacij

$$\varepsilon^3 - I_1^\varepsilon \varepsilon^2 + I_2^\varepsilon \varepsilon - I_3^\varepsilon = 0, \quad (2.122)$$

kjer so $I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon$ invariante tenzorja majhnih deformacij. Koreni karakteristične enačbe $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ so *glavne normalne deformacije*, ki pripadajo glavnim smerem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (glej pojasnila v Zgledu 3.2).

O računskih metodah smo podrobno govorili že v razdelku o glavnih normalnih napetostih in njihovih smereh. Glavna vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 določimo z rešitvijo sistema homogenih enačb

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{gg} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{gg} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{gx} \\ e_{gy} \\ e_{gz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.123)$$

pri $g = 1$ in $g = 2$, tretji glavni vektor \mathbf{e}_3 pa z enačbo $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. Kakor smo pokazali v razdelku **1.9**, sestavljajo tedaj vektorji \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 desnosučno ortonormalno bazo, v kateri ima tenzor majhnih deformacij diagonalno obliko

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

To pomeni, da v koordinatnih ravninah koordinatnega sistema z bazo \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 ni sprememb pravih kotov, materialna vlakna v smereh \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 pa doživijo ekstremne specifične spremembe dolžin ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} . V glavni bazi \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 dobijo tudi koordinatni vektorji deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ razviden fizikalni pomen, saj po velikosti in smeri opisujejo ekstremne raztezke oziroma skrčke materialnih vlaken v smereh glavnih baznih vektorjev

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \varepsilon_{11} \mathbf{e}_1 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \varepsilon_{22} \mathbf{e}_2 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \varepsilon_{33} \mathbf{e}_3. \quad (2.125)$$

Glavne spremembe pravih kotov

Velikosti glavnih sprememb pravih kotov in smeri, med katerimi te spremembe nastopajo, določamo z enakimi enačbami, kot smo jih izpeljali za glavne strižne napetosti v razdelku **1.10**. Kakor sledi iz enačb (1.240) in (1.246) do (1.248), določajo smeri, med katerimi nastopajo glavne kotne spremembe, trije pari medsebojno pravokotnih vektorjev

\mathbf{e}_I in \mathbf{t}_I , \mathbf{e}_{II} in \mathbf{t}_{II} ter \mathbf{e}_{III} in \mathbf{t}_{III}

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) & \mathbf{t}_I &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}_{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1) & \mathbf{t}_{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}_{III} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) & \mathbf{t}_{III} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Smerem \mathbf{e}_I , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III} pripadajo deformacijski vektorji $\boldsymbol{\varepsilon}_I$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{II}$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_{III}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_I &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{III} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Specifične spremembe dolžin v teh smereh ε_{II} , ε_{III} in ε_{III} določimo po zgladu enačb (1.243)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{II} &= \boldsymbol{\varepsilon}_I \cdot \mathbf{e}_I = \frac{1}{2} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \varepsilon_{III} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{II} \cdot \mathbf{e}_{II} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) \\ \varepsilon_{III} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{III} \cdot \mathbf{e}_{III} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Končno zapišimo še vrednosti glavnih kotnih sprememb

$$\begin{aligned} \varepsilon_{It} &= \boldsymbol{\varepsilon}_I \cdot \mathbf{t}_I = \frac{1}{2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \\ \varepsilon_{II t} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{II} \cdot \mathbf{t}_{II} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \\ \varepsilon_{III t} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{III} \cdot \mathbf{t}_{III} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}). \end{aligned} \quad (2.129)$$

V literaturi je označevanje kotnih sprememb in pripadajočih normalnih deformacij zelo pisano. Pogosto so spremembe pravih kotov označene s simbolom γ

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} &\equiv \gamma_{xy} & 2\varepsilon_{\text{I}t} &\equiv \gamma_{\text{I}} \\ 2\varepsilon_{yz} &\equiv \gamma_{yz} & 2\varepsilon_{\text{II}t} &\equiv \gamma_{\text{II}} \\ 2\varepsilon_{zx} &\equiv \gamma_{zx} & 2\varepsilon_{\text{III}t} &\equiv \gamma_{\text{III}}, \end{aligned} \quad (2.130)$$

normalne deformacije pa s simbolom ε , ki mu pripišemo en sam indeks

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &\equiv \varepsilon_x & \varepsilon_{\text{I I}} &\equiv \varepsilon_{\text{I}} \\ \varepsilon_{yy} &\equiv \varepsilon_y & \varepsilon_{\text{II II}} &\equiv \varepsilon_{\text{II}} \\ \varepsilon_{zz} &\equiv \varepsilon_z & \varepsilon_{\text{III III}} &\equiv \varepsilon_{\text{III}}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Da ne bi bilo dvoma, poudarimo, da je, na primer, $\varepsilon_{\text{II}t}$ sprememba pravega kota med materialnima vlaknoma, ki sta bili v nedeformiranem stanju telesa vzporedni z enotskima vektorjema \mathbf{e}_{II} in \mathbf{t}_{II} .

Specifična sprememba prostornine

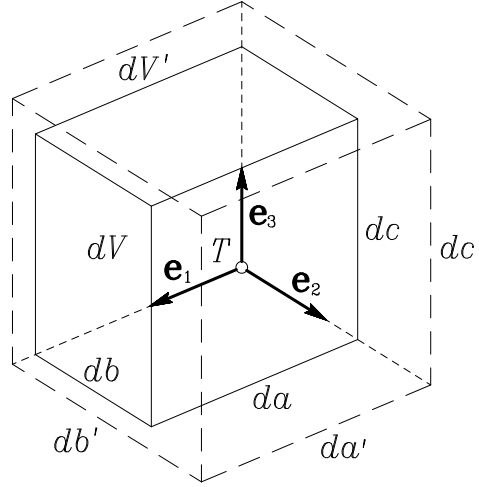
V okolici opazovane točke T izberimo elementarni del telesa, ki ima v nedeformiranem stanju obliko pravokotnega kvadra z infinitezimalnimi stranicami da , db in dc , vzporednimi z glavnimi smermi \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 tenzorja majhnih deformacij (slika 2.8). V nedeformiranem stanju \mathbf{B} ima ta elementarni kvader prostornino dV

$$dV = da db dc. \quad (2.132)$$

Med deformiranjem telesa se dolžine stranic opazovanega elementarnega kvadra spremenijo v da' , db' , dc' . Ker so stranice vzporedne glavnim vektorjem deformacijskega tenzorja, se pravi koti med njimi ne spremenijo, zato je prostornina dV' v deformiranem stanju \mathbf{B}' spet določena s produktom deformiranih dolžin stranic

$$dV' = da' db' dc'. \quad (2.133)$$

Specifične spremembe dolžin stranic obravnavanega elementarnega kvadra so pri majhnih deformacijah določene kar z glavnimi normalnimi deformacijami ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} .



Slika 2.8

V Lagrangevem opisu je torej

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{da' - da}{da} \approx \varepsilon_{11} & \rightarrow & \quad da' = da(1 + \varepsilon_{11}) \\
 D_{22} &= \frac{db' - db}{db} \approx \varepsilon_{22} & \rightarrow & \quad db' = db(1 + \varepsilon_{22}) \\
 D_{33} &= \frac{dc' - dc}{dc} \approx \varepsilon_{33} & \rightarrow & \quad dc' = dc(1 + \varepsilon_{33}).
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

V duhu Lagrangevega opisa definiramo specifično spremembo prostornine D_V v opazovani točki telesa z izrazom

$$D_V = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{dV'}{dV} - 1. \tag{2.135}$$

Ob upoštevanju enačb (2.132) do (2.134) preide gornja enačba v naslednjo obliko

$$D_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33}. \tag{2.136}$$

Ker gre za majhne deformacije, lahko zanemarimo kvadratne in kubični člen v primerjavi z linearnim delom in dobimo

$$D_V \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = I_1^\varepsilon. \quad (2.137)$$

Kakor vidimo, lahko v primeru majhnih deformacij specifično spremembo prostornine v opazovani točki telesa opišemo kar s prvo invarianto tenzorja majhnih deformacij. Enako pravilo velja tudi v katerikoli drugi koordinatni bazi, na primer $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ali $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, saj je invarianta I_1^ε neodvisna od izbire koordinat

$$D_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} + \varepsilon_{\zeta\zeta}. \quad (2.138)$$

V literaturi je specifična sprememba prostornine pogosto označena tudi z ε_V

$$D_V \equiv \varepsilon_V = I_1^\varepsilon. \quad (2.139)$$

Hidrostatični in deviatorični del tenzorja majhnih deformacij

Podobno kakor smo to naredili pri tenzorju napetosti, tudi tenzor majhnih deformacij razcepimo na hidrostatični ali sferični del ε_{ij}^H in deviatorični ali distorzijski del ε_{ij}^D , ki ga označimo z d_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^H + \varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij}^H + d_{ij}. \quad (2.140)$$

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da je v primeru majhnih deformacij prva invarianta deformacijskega tenzorja I_1^ε enaka specifični spremembi prostornine ε_V v obravnavani točki telesa. Po analogiji z napetostmi izrazimo hidrostatični del deformacij s *sferično ali volumetrično deformacijo* ε^H

$$\varepsilon^H = \frac{1}{3} I_1^\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_V. \quad (2.141)$$

Hidrostatični del je tako

$$\varepsilon_{ij}^H = \frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} \quad (2.142)$$

oziroma v matrični obliki

$$[\varepsilon_{ij}^H] = \begin{bmatrix} \varepsilon^H & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^H & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^H \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \varepsilon_V \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.143)$$

Preostali del tenzorja majhnih deformacij je definiran kot deviatorični oziroma distorzijski del deformacijskega stanja, tako da je

$$d_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^H \quad \rightarrow \quad d_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_H. \quad (2.144)$$

V kartezijskih koordinatah x, y, z tako dobimo

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_H & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_H & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_H \end{bmatrix}. \quad (2.145)$$

Razcep (2.140) lahko sedaj zapišemo takole

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^H \delta_{ij} + d_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} + d_{ij}. \quad (2.146)$$

V glavnih koordinatah deformacijskega stanja ima tudi distorzijski del deformacijskega tenzorja diagonalno obliko

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_H & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} - \varepsilon_H & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} - \varepsilon_H \end{bmatrix}. \quad (2.147)$$

Analogno kot v razdelku **1.11** lahko tudi ugotovimo, da se glavne smeri distorzijskega dela deformacijskega stanja ujemaajo z glavnimi smermi celotnega tenzorja majhnih deformacij.

Za naše nadaljnje delo je pomembna druga invarianta distorzijskega dela deformacijskega tenzorja I_2^d . Ob upoštevanju ugotovitev iz razdelka **1.11** jo lahko izrazimo z enačbo

$$I_2^d = I_2^\varepsilon - \frac{1}{3} (I_1^\varepsilon)^2 \quad (2.148)$$

ali z glavnimi normalnimi deformacijami

$$I_2^d = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 \right] \quad (2.149)$$

ali pa z glavnimi distorzijskimi deformacijami

$$I_2^d = -\frac{1}{2} (d_{11}^2 + d_{22}^2 + d_{33}^2) . \quad (2.150)$$

2.7 Tenzor zasukov

Ob upoštevanju zvez (2.88) lahko tenzor zasukov v kartezijskem koordinatnem sistemu zapišemo na dva načina

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.151)$$

Tenzor zasukov je antisimetričen, zato so njegove diagonalne komponente enake nič. Podobno kakor pri tenzorju majhnih deformacij sestavimo *koordinatne vektorje zasukov*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_x &= \omega_{xy} \mathbf{e}_y + \omega_{xz} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\omega}_y &= \omega_{yx} \mathbf{e}_x + \omega_{yz} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\omega}_z &= \omega_{zx} \mathbf{e}_x + \omega_{zy} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (2.152)$$

oziroma

$$\boldsymbol{\omega}_i = \sum_j \omega_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z) . \quad (2.153)$$

Glede na enačbo (2.151) pa lahko koordinatne vektorje zasukov zapišemo tudi takole

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_x &= \omega_z \mathbf{e}_y - \omega_y \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\omega}_y &= -\omega_z \mathbf{e}_x + \omega_x \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\omega}_z &= \omega_y \mathbf{e}_x - \omega_x \mathbf{e}_y . \end{aligned} \quad (2.154)$$

V enačbi (2.89) smo za polovični rotor pomikov vpeljali oznako $\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z = \sum_i \omega_i \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.155)$$

V primeru, da gre za majhne deformacije, lahko tudi vektorju $\boldsymbol{\omega}$ najdemo geometrijski pomen. Tedaj namreč vektor $\boldsymbol{\omega}$ predstavlja rezultirajoči zasuk elementarnega dela telesa v bližnji okolici opazovanega delca. Zveze med rezultirajočim vektorjem zasuka $\boldsymbol{\omega}$ in koordinatnimi vektorji $\boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y, \boldsymbol{\omega}_z$ izpeljemo iz vektorskih produktov vektorja $\boldsymbol{\omega}$ z baznimi vektorji $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Ker je na primer

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_z \mathbf{e}_y - \omega_y \mathbf{e}_z = \boldsymbol{\omega}_x \quad (2.156)$$

in podobno za smeri \mathbf{e}_y in \mathbf{e}_z , dobimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_x &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.157)$$

ali splošno

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.158)$$

Enačbo (2.93), s katero smo povezali parcialne odvode pomikov s komponentami tenzorjev majhnih deformacij in zasukov, lahko sedaj zapišemo v vektorski obliki. Zvezo

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.159)$$

pomnožimo z baznimi vektorji \mathbf{e}_j ($j = x, y, z$) in seštejemo po j

$$\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j = \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j + \sum_j \omega_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.160)$$

Ker so \mathbf{e}_j konstantni vektorji, dobimo ob upoštevanju enačb (2.10), (2.114) in (2.153) naslednjo zvezo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.161)$$

Zaradi enačbe (2.158) pa lahko pišemo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.162)$$

Tako smo parcialne odvode vektorskega polja pomikov izrazili s koordinatnimi vektorji deformacij in zasukov.

Na koncu poskusimo še koordinatnim vektorjem rotacij poiskati fizikalni pomen. Primerjava enačb (2.22) in (2.161)

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i \quad (i = x, y, z) \quad (2.163)$$

pove, da vektor $\boldsymbol{\omega}_i$ predstavlja tisti del spremembe telesnega baznega vektorja \mathbf{e}_i , ki je posledica zavrtitve materialnega vlakna v smeri x_i okrog obravnavanega materialnega delca. Če bi se namreč elementarni del telesa v bližnji okolici delca obnašal kot togo telo, kar pomeni, da v tej okolici ne bi prišlo do sprememb dolžin in pravih kotov ($\boldsymbol{\varepsilon}_i = 0$), bi vektor $\boldsymbol{\omega}_i$ predstavljal celotno spremembo telesnega baznega vektorja \mathbf{e}_i med deformiranjem telesa.

2.8 Določanje zasukov in pomikov

V praktičnih primerih mehanske analize se lahko v odvisnosti od izbrane poti za reševanje mehanskih enačb znajdemo v različnih situacijah. Če v določeni fazi računskega postopka poznamo pomike $u_i(x, y, z)$, je določitev komponent tenzorja majhnih deformacij ε_{ij} in rotacij ω_{ij} trivialna: pomike odvajamo in njihove prve odvode vstavimo v kinematične enačbe (2.96) in (2.97). V nadaljevanju pa si oglejmo bolj

zahteven primer, da je deformacijsko stanje telesa podano s komponentami $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ tenzorja majhnih deformacij v kartezijskih koordinatah x, y, z . To pomeni, da poznamo šest enoličnih, dvakrat zvezno odvedljivih funkcij

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y, z) \quad (i, j = x, y, z)$$

in želimo določiti zasuke in pomike, ki pripadajo temu deformacijskemu stanju. Način podpiranja telesa oziroma njegovo povezavo s sosednjimi telesi lahko brez izgube na splošnosti opišemo z vektorjema pomika \mathbf{u}_0 in zasuka $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$. Načelno lahko referenčno točko T_0 poljubno izberemo. Če gre za samostojno telo, vzamemo za točko T_0 navadno katero od podpor, če je obravnavano telo element sestavljene konstrukcije, pa je ugodno za točko T_0 izbrati katerega od stikov s sosednjimi deli konstrukcije.

Ob predpostavki, da poznamo zasuk $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke T_0 in da je zasuk $\boldsymbol{\omega}$ enolična vektorska funkcija, določimo zasuk $\boldsymbol{\omega}$ poljubne točke telesa $T(x, y, z)$ z integriranjem popolnega diferenciala zasuka $d\boldsymbol{\omega}$ vzdolž poljubne neprekinjene poti od točke T_0 do točke T (slika 2.9)

$$\int_{T_0}^T d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_0 + \int_{T_0}^T d\boldsymbol{\omega}. \quad (2.164)$$

V kartezijskih koordinatah je

$$d\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} dx + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y} dy + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial z} dz = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_i} dx_i. \quad (2.165)$$

Parcialne odvode, ki nastopajo v gornji enačbi, povežemo z deformacijami z enačbo (2.89). Ker je

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.166)$$

in ker je ∇ "konstanten vektor", lahko ob upoštevanju enačbe (2.162) pišemo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_i + \frac{1}{2} \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i). \quad (2.167)$$

Dvojni vektorski produkt, ki nastopa v drugem členu na desni strani enačbe (2.167), je primer, kjer se operator *nabla* ne obnaša kakor navaden kartezijski vektor[†]. Zato je

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i) + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{e}_i}). \quad (2.168)$$

Upoštevajoč znano formulo za dvojni vektorski produkt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (2.169)$$

dobimo

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{e}_i \cdot \nabla) - \mathbf{e}_i(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{e}_i) - \mathbf{e}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla). \quad (2.170)$$

Ker je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{e}_i \cdot \nabla) &= (\mathbf{e}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_i} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{e}_i &= 0 \\ \mathbf{e}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.171)$$

dobimo

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_i} \quad (2.172)$$

in iz enačbe (2.167) sledi

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_i} = \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (2.173)$$

Popolni diferencial zasuka je sedaj

$$d\boldsymbol{\omega} = \sum_i (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_i) dx_i = \nabla \times \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i dx_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.174)$$

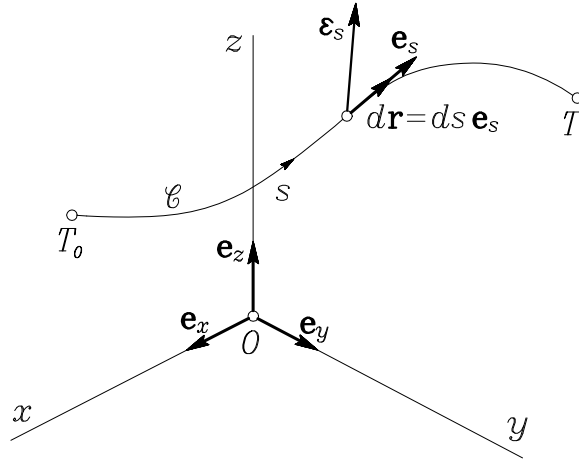
[†] Glej na primer: Bronštejn, Semendjajev, Matematični priročnik (1967), str. 634 ali D. M. Ivanović, Vektorska analiza, Naučna knjiga, Beograd (1963).

Prirastek krajevnega vektorja $d\mathbf{r}$, ki ustreza premiku za ds vzdolž poljubne integracijske krivulje \mathcal{C} med referenčno točko T_0 in poljubno točko telesa T (slika 2.9), povežemo z ustreznimi prirastki kartezijskih koordinat z enačbo

$$d\mathbf{r} = ds \mathbf{e}_s = \sum_i dx_i \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z), \quad (2.175)$$

kjer je \mathbf{e}_s enotski tangentni vektor na integracijsko krivuljo \mathcal{C} v opazovani točki

$$\mathbf{e}_s = \sum_i e_{si} \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.176)$$



Slika 2.9

Iz primerjave enačb (2.175) in (2.176) sledi

$$\begin{aligned} dx_i &= ds e_{si} \\ ds &= \sum_i dx_i e_{si} \quad (i = x, y, z). \end{aligned} \quad (2.177)$$

Prvo od zvez (2.177) vstavimo v enačbo (2.174)

$$d\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \left(\sum_i \varepsilon_i e_{si} \right) ds \quad (i = x, y, z). \quad (2.178)$$

Primerjava z enačbo (2.115) pove, da izraz v oklepaju predstavlja vrednost tenzorja majhnih deformacij v smeri \mathbf{e}_s (slika 2.9)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i e_{si} \quad (i = x, y, z), \quad (2.179)$$

zato lahko popolni diferencial zasuka $d\boldsymbol{\omega}$ izrazimo v brezkoordinatni obliki z enačbo

$$d\boldsymbol{\omega} = (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_s) ds. \quad (2.180)$$

Enačba (2.164) je sedaj

$$\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_0 + \int_{T_0}^T \sum_i (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_i) dx_i = \boldsymbol{\omega}_0 + \int_{T_0}^T (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_s) ds. \quad (2.181)$$

Kakor vidimo, je zasuk $\boldsymbol{\omega}$ poljubne točke T sestavljen iz konstantnega zasuka $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke T_0 , kakršnega bi dobili, če bi imeli opravka s togim telesom, in dodatnega člena, ki je posledica deformabilnosti telesa. Če za tisti del zasuka, ki je posledica lastnih deformacij telesa, uvedemo oznako $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon(T) = \int_{T_0}^T \sum_i (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_i) dx_i = \int_{T_0}^T (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_s) ds, \quad (2.182)$$

lahko enačbo (2.181) zapišemo kakor sledi

$$\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_\varepsilon. \quad (2.183)$$

Podobno kakor zasuk določimo tudi vektor pomika \mathbf{u} poljubne točke T z integriranjem popolnega diferenciala pomikov od referenčne točke T_0 do točke T

$$\mathbf{u}(T) = \mathbf{u}_0 + \int_{T_0}^T d\mathbf{u}, \quad (2.184)$$

kjer je

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = \sum_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dx_i \quad (i = x, y, z). \quad (2.185)$$

Upoštevajoč enačbo (2.161) lahko popolni diferencial pomika izrazimo z deformacijami in zasuki in enačba (2.184) preide v naslednjo obliko

$$\mathbf{u}(T) = \mathbf{u}_0 + \int_{T_0}^T \sum_i (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i) dx_i = \mathbf{u}_0 + \int_{T_0}^T \sum_i (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dx_i. \quad (2.186)$$

Integral vektorskega produkta preoblikujemo z integriranjem po delih in ob upoštevanju zveze (2.175) dobimo

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \sum_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i dx_i &= \int_{T_0}^T \boldsymbol{\omega} \times \sum_i \mathbf{e}_i dx_i = \int_{T_0}^T \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} \\ &= [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]_{T_0}^T - \int_{T_0}^T d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_0 + \int_{T_0}^T \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (2.187)$$

Zaradi enačb (2.183) in (2.180) je dalje

$$\int_{T_0}^T \sum_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i dx_i = (\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_\varepsilon) \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_0 + \int_{T_0}^T \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_s) ds. \quad (2.188)$$

Enačba (2.186) se s tem glasi

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \times \mathbf{r} + \int_{T_0}^T [\boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_s)] ds. \quad (2.189)$$

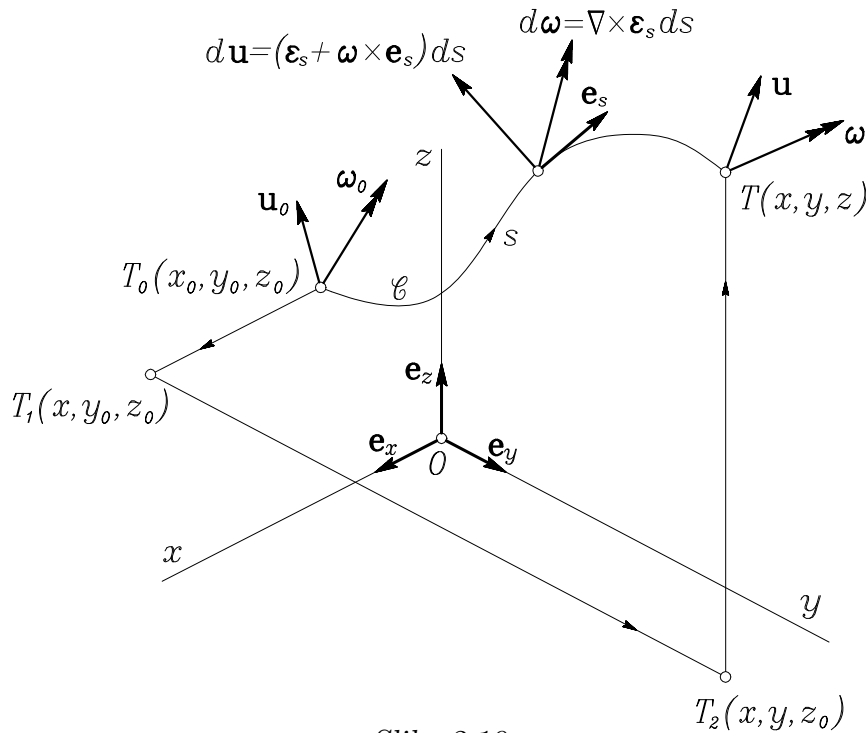
Z oznakama

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \mathbf{u}_\varepsilon &= \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \times \mathbf{r} + \int_{T_0}^T [\boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_s)] ds \end{aligned} \quad (2.190)$$

zapišemo enačbo (2.189) na kratko

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_\varepsilon. \quad (2.191)$$

V deležu \mathbf{u}_t smo namreč prepoznali poenostavljeno Rodriguesovo formulo (1.346) za pomike togega telesa, del \mathbf{u}_ε pa predstavlja vpliv deformabilnosti telesa na pomik \mathbf{u} poljubne točke T .



Slika 2.10

Če poznamo deformacije ε_s , lahko torej z enačbama (2.181) in (2.189) določimo pomike in zasuke poljubne točke T v odvisnosti od pomikov in zasukov referenčne točke T_0 . Enačbi smo izpeljali ob predpostavki, da so zasuki in pomiki enolične funkcije koordinat. To pomeni, da integrali, ki nastopajo v obeh enačbah, niso odvisni od izbire integracijske poti.[†]

Praktično delo pri določanju zasukov in pomikov v kartezijskem koordinatnem sistemu si občutno olajšamo, če izberemo integracijsko pot od

[†] Pogoje, ki jih morajo izpolnjevati komponente tenzorja majhnih deformacij, da bi bila zagotovljena enoličnost pomikov in zasukov, bomo izpeljali v razdelku 2.9.

referenčne točke T_0 do poljubne točke T na poseben način. Sestavimo jo iz treh ravnih odsekov, ki so vsak zase vzporedni s katero od koordinatnih smeri (slika 2.10). Na prvem odseku med točkama $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in $T_1(x, y_0, z_0)$, ki je vzporeden z osjo x , je $dy = dz = 0$ ter $y = y_0$ in $z = z_0$. Za odsek med točkama T_1 in $T_2(x, y, z_0)$, ki je vzporeden z osjo y , velja $dx = dz = 0$ in $z = z_0$, za odsek med točkama T_2 in $T(x, y, z)$ pa $dx = dy = 0$. Z upoštevanjem opisane izbire integracijske poti v enačbah (2.181) in (2.186) dobimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega}(x_0, y_0, z_0) + & \int_{x_0}^x \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x(\xi, y_0, z_0) d\xi + \\ & \int_{y_0}^y \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y(\xi, \eta, z_0) d\eta + \\ & \int_{z_0}^z \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z(\xi, \eta, \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (2.192)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(x_0, y_0, z_0) + & \int_{x_0}^x [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\xi, y_0, z_0) + \boldsymbol{\omega}_x(\xi, y_0, z_0)] d\xi + \\ & \int_{y_0}^y [\boldsymbol{\varepsilon}_y(\xi, \eta, z_0) + \boldsymbol{\omega}_y(\xi, \eta, z_0)] d\eta + \\ & \int_{z_0}^z [\boldsymbol{\varepsilon}_z(\xi, \eta, \zeta) + \boldsymbol{\omega}_z(\xi, \eta, \zeta)] d\zeta. \end{aligned} \quad (2.193)$$

V obeh gornjih enačbah nastopajo integrali s spremenljivimi zgornjimi mejami, saj koordinate x, y, z določajo izbrano poljubno točko telesa, v kateri želimo izračunati pomike in zasuke. Zato smo morali za izvedenost integralov, ki nastopajo v omenjenih enačbah, izbrati nove integracijske spremenljivke $\xi \in [x_0, x]$, $\eta \in [y_0, y]$, $\zeta \in [z_0, z]$.

Integracijsko pot med točkama T_0 in T bi seveda lahko izbrali tudi drugače, vsekakor pa jo je smiselno sestaviti iz treh ravnih odsekov, v kakršnemkoli zaporedju vzporednih s koordinatnimi osmi.

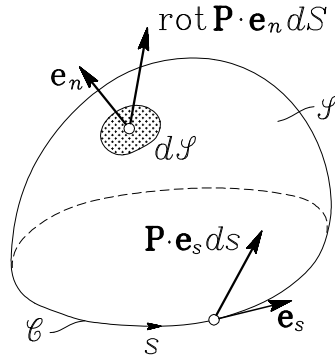
2.9 Kompatibilnostni pogoji

Stokesov integralni izrek

Stokesov[†] integralni izrek je eden od osnovnih izrekov matematične analize. Z njim povežemo krivuljski integral poljubne, vsaj enkrat zvezno odvedljive vektorske funkcije \mathbf{P} po sklenjeni krivulji \mathcal{C} s ploskovnim integralom rotorja te funkcije po orientirani ploskvi \mathcal{S} , napeti nad krivuljo \mathcal{C} (slika 2.11)

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_s ds = \int_{\mathcal{S}} \text{rot } \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{e}_n dS. \quad (2.194)$$

Pri tem je smer integriranja vzdolž krivulje določena z zahtevo, da je integracijsko področje \mathcal{S} ves čas na “levi” strani krivulje \mathcal{C} .



Slika 2.11

Ker je $\mathbf{e}_s ds = d\mathbf{r}$, v kartezijskih koordinatah dobimo

$$\oint_{\mathcal{C}} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \int_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) e_{nx} + \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) e_{ny} + \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) e_{nz} \right] dS. \quad (2.195)$$

[†] George Gabriel Stokes, irski matematik, 1819–1903.

V razdelku o kompatibilnostnih pogojih uporabljamo Stokesov integralni izrek v posplošeni obliki

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{P}_x dx + \mathbf{P}_y dy + \mathbf{P}_z dz) = \int_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial z} \right) e_{nx} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial x} \right) e_{ny} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial y} \right) e_{nz} \right] dS. \quad (2.196)$$

Pri tem so \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y , \mathbf{P}_z vsaj enkrat zvezno odvedljive vektorske funkcije, definirane vzdolž krivulje \mathcal{C} in na ploskvi \mathcal{S} .

Pogoji za enoličnost zasukov in pomikov

V razdelku 2.4 smo izpeljali *kinematične enačbe* trdnega telesa (2.96), ki v primeru majhnih deformacij povezujejo šest linearno neodvisnih komponent ε_{ij} simetričnega tenzorja majhnih deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}(2)$ s tremi neodvisnimi komponentami u_i vektorskega polja pomikov \mathbf{u}

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.197)$$

Če poznamo komponente pomika u_i kot zvezne in odvedljive funkcije koordinat x, y, z , lahko z enačbami (2.197) brez težav določimo deformacije ε_{ij} . V primeru, da poznamo deformacije ε_{ij} in iščemo

pomike u_i , pa se naloga zaplete[†]. Enačbe (2.197) predstavljajo namreč *predoločen sistem enačb*, saj imamo za določitev treh pomikov na razpolago šest enačb. Sistem je enolično rešljiv le v primeru, da so funkcije ε_{ij} povezane z dodatnimi enačbami – vezmi. Ker nas zanimajo le enolične rešitve, vzamemo kot vezi kar pogoje za enolično integrabilnost pomikov. V mehaniki te pogoje imenujemo *kompatibilnostni pogoji*. Matematično jih izrazimo z zahtevo, da mora biti integral popolnega diferenciala $d\mathbf{u}$ vektorskega polja pomikov po poljubni sklenjeni krivulji \mathcal{C} znotraj telesa enak nič

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.198)$$

Z drugimi besedami lahko kompatibilnostne pogoje opredelimo kot pogoje, ki jih morajo izpolnjevati komponente tenzorja deformacij, da bi bil integral na desni strani enačbe (2.184) neodvisen od izbire integracijske poti od referenčne točke T_0 do točke T , kakor smo to predpostavili v razdelku **2.8**. V tem smislu lahko pogoj (2.198) izpeljemo z naslednjim razmislekom. Vzemimo, da poznamo popolni diferencial $d\mathbf{u}$ funkcije \mathbf{u} in njeno vrednost \mathbf{u}_0 v referenčni točki T_0 . Pomik \mathbf{u} poljubne točke T je tedaj

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{u}, \quad (2.199)$$

pri čemer smo za integracijsko pot od točke T_0 do točke T izbrali krivuljo \mathcal{C}_1 (slika 2.12). Funkcija \mathbf{u} je enolična, če dobimo enak rezultat pri katerikoli drugi integracijski poti, na primer vzdolž krivulje \mathcal{C}_2

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{u}. \quad (2.200)$$

S primerjavo enačb (2.199) in (2.200) dobimo

$$\int_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{u} = \int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{u} \quad \text{ozioroma} \quad \int_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{u} - \int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.201)$$

[†] Ali bomo pri mehanski analizi trdnega telesa prišli v prvo ali v drugo od omenjenih situacij, je odvisno od tega, kakšno metodo izberemo za reševanje sistema osnovnih enačb, ki vladajo nad mehanskim stanjem telesa. O tem bomo podrobneje govorili v 4. poglavju.

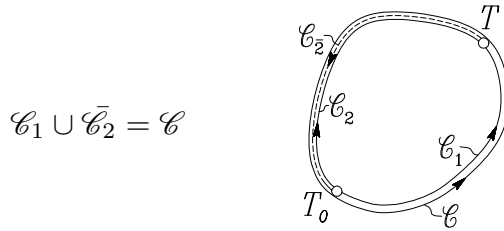
Če s $\bar{\mathcal{C}}_2$ označimo integracijsko pot, ki sicer poteka po isti krivulji kot \mathcal{C}_2 , le v nasprotni smeri, velja

$$\int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{u} = - \int_{\bar{\mathcal{C}}_2} d\mathbf{u}. \quad (2.202)$$

Enačbo (2.201) lahko tedaj zapišemo tudi takole

$$\int_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{u} + \int_{\bar{\mathcal{C}}_2} d\mathbf{u} = \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.203)$$

kakor smo pogoj enoličnosti pomika \mathbf{u} vpeljali z enačbo (2.198).



Slika 2.12

Kakor je razvidno iz enačbe (2.186), nastopa v izrazu za določanje pomikov tudi vektor zasuka $\boldsymbol{\omega}$. Potreben pogoj za enoličnost pomikov je torej tudi enoličnost zasuka $\boldsymbol{\omega}$

$$\oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \quad (2.204)$$

Upoštevajoč enačbo (2.181) lahko pogoj za enoličnost zasukov (2.204) zapišemo v kartezijskem koordinatnem sistemu takole

$$\oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{\omega} = \oint_{\mathcal{C}} [(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x) dx + (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y) dy + (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) dz] = \mathbf{0}. \quad (2.205)$$

Integral po sklenjeni krivulji \mathcal{C} prevedemo v skladu s Stokesovim izrekom v integral po ploskvi \mathcal{S} , ki je napeta nad krivuljo \mathcal{C} (slika 2.11) in dobimo

$$\int_{\mathcal{S}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y) \right] e_{nx} + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x) - \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) \right] e_{ny} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x) \right] e_{nz} \right\} dS = \mathbf{0}. \quad (2.206)$$

Izrazi v oglatih oklepajih predstavljajo vrednosti nekega tenzorja 2. reda v smereh \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Ta tenzor imenujemo *tenzor kompatibilnosti* $\mathbf{K}(2)$. Njegove vrednosti v koordinatnih smereh so torej *koordinatni vektorji kompatibilnosti*, za katere uvedemo oznake \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_y , \mathbf{K}_z

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y) \\ \mathbf{K}_y &= \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x) - \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) \\ \mathbf{K}_z &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x). \end{aligned} \quad (2.207)$$

Enačba (2.206) se s tem glasi

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{K}_x e_{nx} + \mathbf{K}_y e_{ny} + \mathbf{K}_z e_{nz}) dS = \mathbf{0}. \quad (2.208)$$

Primerjava z enačbo (1.142) pove, da pomeni izraz pod integralom vrednost tenzorja $\mathbf{K}(2)$ v smeri \mathbf{e}_n

$$\mathbf{K}_x e_{nx} + \mathbf{K}_y e_{ny} + \mathbf{K}_z e_{nz} = \mathbf{K}_n \quad (2.209)$$

in enačba (2.204) dobi končno obliko

$$\oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}} \mathbf{K}_n dS = \mathbf{0}. \quad (2.210)$$

Oglejmo si še pogoj za enoličnost pomika \mathbf{u} . Iz enačbe (2.189) sledi, da lahko kompatibilnostni pogoj (2.198) zapišemo takole

$$\oint_{\mathcal{C}} [\boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_s)] ds = \mathbf{0}. \quad (2.211)$$

V kartezijskih koordinatah je

$$\oint_{\mathcal{C}} \{ [\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x)] dx + [\boldsymbol{\varepsilon}_y + \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y)] dy + [\boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z)] dz \} = \mathbf{0}. \quad (2.212)$$

Na levi strani gornje enačbe uporabimo Stokesov izrek in po nekoliko daljši izpeljavi, v kateri je treba upoštevati tudi enačbe (2.17) in oznake (2.207), dobimo

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times (\mathbf{K}_x e_{nx} + \mathbf{K}_y e_{ny} + \mathbf{K}_z e_{nz}) dS = \mathbf{0}. \quad (2.213)$$

Upoštevajoč enačbo (2.209) lahko sedaj tudi kompatibilnostni pogoj (2.198) zapišemo v zgoščeni obliki

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times \mathbf{K}_n dS = \mathbf{0}. \quad (2.214)$$

Opazimo lahko podobnost kompatibilnostnih pogojev (2.210) in (2.214) z enačbama (1.100) in (1.101). Kompatibilnostna pogoja lahko torej razumemo kot neke vrste “ravnotežna pogoja”, ki zahtevata, da morata biti rezultanta in rezultirajoči moment “napetosti kompatibilnosti” \mathbf{K}_n na ploskvi \mathcal{S} enaki nič. Podobno kakor pri napetostih veljata tudi naslednji “enačbi ravnotežja za napetosti kompatibilnosti”, ki se ujemata z ravnotežnima enačbama (1.122) in (1.129) v primeru, da ni prostorninske obtežbe[†]

$$\frac{\partial \mathbf{K}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{K}_z}{\partial z} = \mathbf{0}, \quad (2.215)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{K}_x + \mathbf{e}_y \times \mathbf{K}_y + \mathbf{e}_z \times \mathbf{K}_z = \mathbf{0}. \quad (2.216)$$

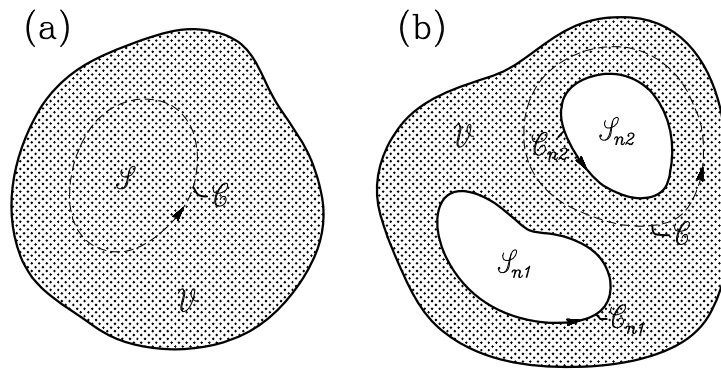
[†] O tem se lahko prepričamo z vstavljanjem zvez (2.207) v enačbi (2.215) in (2.216). Dokaz enačbe (2.215) je čisto preprost, za dokaz enačbe (2.216) pa moramo upoštevati identiteto (2.169) in simetrijo tenzorja majhnih deformacij.

Od tod lahko sklepamo, da je tenzor kompatibilnosti $\mathbf{K}(2)$ v matematičnem pogledu povsem enakovreden tenzorju napetosti $\boldsymbol{\sigma}(2)$ ali tenzorju majhnih deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}(2)$. Gre torej za simetričen tenzor 2. reda s komponentami K_{ij}

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.217)$$

Zaradi simetrije, ki izhaja iz enačbe (2.216), je tenzor kompatibilnosti določen s šestimi linearno neodvisnimi komponentami, med katerimi pa v skladu z enačbami (1.132) obstaja diferencialna odvisnost

$$\sum_i \frac{\partial K_{ji}}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.218)$$



Slika 2.13

Vrnimo se h kompatibilnostnemu pogoju (2.210). Vzemimo, da predstavlja obravnavano telo *enkrat sovisno območje* \mathcal{V} v trirazsežnem prostoru. To pomeni, da lahko vsako sklenjeno krivuljo \mathcal{C} znotraj območja \mathcal{V} skrčimo v eno samo točko, ne da bi pri tem zapustili območje \mathcal{V} (slika 2.13-a). V tem primeru lahko tudi poljubno sklenjeno integracijsko krivuljo v kompatibilnostnem pogoju (2.210) skrčimo na točko znotraj območja telesa \mathcal{V} . S tem se tudi integracijska ploskev \mathcal{S} skrči v eno samo točko in pogoj (2.210) je izpolnjen, če je integrand enak nič

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{0} \quad (2.219)$$

povsod na območju \mathcal{V} in na njegovi mejni ploskvi \mathcal{S}^\dagger . Jasno je, da je v tem primeru izpolnjen tudi pogoj za enoličnost pomikov (2.214). Pri enkrat sovisnih telesih je torej pogoj (2.219) *potreben in zadosten pogoj* za enoličnost zasukov $\boldsymbol{\omega}$ in pomikov \mathbf{u} .

Območja z notranjimi odprtinami, v katerih lahko najdemo m družin sklenjenih krivulj, ki jih ne moremo na opisani način skrčiti v točko, temveč kvečjemu na eno od kontur notranje odprtine, imenujemo $(m+1)$ -krat sovisna območja (slika 2.13-b). Območje z eno notranjo odprtino je torej *dvakrat sovisno*, območje z dvema notranjima odprtinama *trikrat sovisno* in tako naprej. Pri večkrat sovisnih telesih je pogoj (2.219) sicer potreben, ne pa tudi zadosten pogoj za enoličnost zasukov in pomikov. Za vsako sklenjeno krivuljo, ki je znotraj območja \mathcal{V} ni mogoče skrčiti bolj kakor na konturo \mathcal{C}_{ni} notranje odprtine, moramo namreč enoličnost zasukov in pomikov zagotoviti posebej

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}_{ni}} \mathbf{K}_n dS = \mathbf{0}, \quad (2.220)$$

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} d\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}_{ni}} \mathbf{r} \times \mathbf{K}_n dS = \mathbf{0}. \quad (2.221)$$

Enačba (2.219), ki pri enkrat sovisnih območjih predstavlja potreben in zadosten pogoj za enolično integrabilnost kinematičnih enačb (2.96), je izpolnjena le tedaj, če so vsi trije koordinatni vektorji kompatibilnosti enaki nič

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_y &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_z &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.222)$$

Od tod pa spet sledi, da morajo biti vse komponente tenzorja kompatibilnosti enake nič

[†] Izbira krivulje \mathcal{C} in s tem tudi območja \mathcal{S} je poljubna, zato predstavlja enačba (2.219) edino rešitev enačbe (2.220).

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.223)$$

Z zapisom enačb (2.222) v kartezijski bazi \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z izrazimo kompatibilnostne pogoje v skalarni obliki. Vektorske produkte, ki nastopajo v izrazih (2.207), izračunamo z ustreznimi determinantami. Upoštevamo še, da je tenzor majhnih deformacij simetričen in da zaradi zveznosti in odvedljivosti deformacij ε_{ij} vrstni red odvajanja v mešanih parcialnih odvodih ni pomemben. Po nekoliko daljši izpeljavi in ureditvi tako dobimo

$$\begin{aligned} K_{xx} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \\ K_{yy} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = 0 \\ K_{zz} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ K_{xy} = K_{yx} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 \\ K_{yz} = K_{zy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = 0 \\ K_{zx} = K_{xz} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Kompatibilnostne enačbe je mogoče zapisati tudi s komponentami tako imenovanega *Riemannovega*[†] tenzorja četrtega reda $\mathbf{R}(4)$. Komponente tega tenzorja v kartezijskem koordinatnem sistemu označimo z R_{ijkl} ($i, j, k, l = x, y, z$) in dobimo

$$R_{ijkl} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l}. \quad (2.225)$$

[†] Georg Friedrich Bernhard Riemann, nemški matematik, 1826–1866.

Riemannov tenzor $\mathbf{R}(4)$ ima v trirazsežnem prostoru $3^4 = 81$ komponent. Zaradi simetrije tenzorja majhnih deformacij in ker v mešanih odvodih deformacij vrstni red odvajanja ni pomemben, lahko ugotovimo, da je od enainosemdesetih komponent tenzorja $\mathbf{R}(4)$ le devet različnih od nič, med njimi pa le šest medsebojno neodvisnih[†]. Če namesto splošnih indeksov i, j, k, l vstavimo ustrezne kombinacije posebnih indeksov x, y, z , lahko hitro ugotovimo, da veljajo med komponentami tenzorja kompatibilnosti $\mathbf{K}(2)$ in tenzorja $\mathbf{R}(4)$ naslednje enakosti

$$\begin{aligned}
 R_{xyxy} &\equiv -K_{zz} \\
 R_{yzyz} &\equiv -K_{xx} \\
 R_{zxzx} &\equiv -K_{yy} \\
 R_{xyzx} = R_{xzyx} &\equiv -K_{yz} = -K_{zy} \\
 R_{yzxy} = R_{yxzy} &\equiv -K_{zx} = -K_{xz} \\
 R_{zxyz} = R_{zyxz} &\equiv -K_{xy} = -K_{yx}.
 \end{aligned} \tag{2.226}$$

Vse ostale komponente tenzorja $\mathbf{R}(4)$ so enake nič.

Pogoje za enoličnost pomikov in rotacij lahko torej enakovredno izrazimo z zahtevo, da morajo biti vse komponente Riemannovega tenzorja v deformiranem stanju telesa enake nič

$$R_{ijkl} = 0 \quad (i, j, k, l = x, y, z). \tag{2.227}$$

2.10 Ravninsko deformacijsko stanje (RDS)

Pri analizi napetosti smo v razdelku **1.13** vpeljali pojem ravninskega napetostnega stanja, pri katerem vsi možni vektorji napetosti ležijo v isti ravnini. Podobno lahko primer, pri katerem vsi deformacijski vektorji ležijo v isti ravnini, opredelimo kot *ravninsko deformacijsko stanje (RDS)*.

[†] Zahtevnejši bralec lahko več o tem izve iz knjige Saje, Srpčič, Osnove nelinearne mehanike trdnih teles (1993).

Kot primer vzemimo, da je deformacijsko stanje v okolici opazovanega materialnega delca opisano z vektorskim poljem pomikov \mathbf{u} s komponentami

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y) \\ u_y &= u_y(x, y) \\ u_z &= C, \end{aligned} \quad (2.228)$$

kjer je C konstanta (navadno kar $C = 0$). Z upoštevanjem navedenih pomikov v kinematičnih enačbah (2.197) dobimo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.229)$$

V tem primeru ima matrika majhnih deformacij naslednjo obliko

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.230)$$

Deformacijski vektorji v koordinatnih ravninah kartezijskega koordinatnega sistema (x, y, z) so tedaj

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_x &= \varepsilon_{xx} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{xy} \mathbf{e}_y \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y &= \varepsilon_{yx} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{yy} \mathbf{e}_y \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.231)$$

Gre torej za ravninsko deformacijsko stanje v ravnini (x, y) . Iz enačb (2.97) tudi sledi, da se v obravnavanem primeru RDS razvije le zasuk $\omega_{xy} \equiv \omega_z$, ostala dva zasuka pa sta nič

$$\begin{aligned} \omega_{xy} \equiv \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \omega_{yz} \equiv \omega_x &= 0 \\ \omega_{zx} \equiv \omega_y &= 0. \end{aligned} \quad (2.232)$$

Poudarimo še, da so v opisanem primeru vse deformacije in zasuk ω_z le funkcije koordinat x in y

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}(x, y) & (i, j = x, y) \\ \omega_z &= \omega_z(x, y).\end{aligned}\tag{2.233}$$

Računski model ravninskega deformacijskega stanja je umestno vpeljati na primer pri mehanski analizi segmenta med dvema prečnima prerezoma dolinske pregrade, predorske cevi, opornega zidu ali podobne konstrukcije, pri kateri sosednji segmenti preprečujejo razvoj pomikov pravokotno na ravnino obravnavanega segmenta. V tem smislu je računski model RDS primeren tudi za obravnavanje nekaterih rotacijsko simetričnih primerov.

Za transformacije deformacijskih količin ter določanje velikosti in smeri glavnih normalnih in kotnih deformacij pri ravninskem deformacijskem stanju veljajo enaka pravila, kakor smo jih izpeljali v primeru ravninskega napetostnega stanja v razdelku **1.13**. Normalno deformacijo v smeri \mathbf{e}_ξ in polovično spremembo pravega kota med vektorjema \mathbf{e}_ξ in \mathbf{e}_η izračunamo podobno, kakor smo z enačbama (1.306) in (1.307) izračunali normalno in strižno napetost pri RNS

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi\xi} &= \boldsymbol{\varepsilon}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi = \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\alpha + \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha,\end{aligned}\tag{2.234}$$

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\alpha + \varepsilon_{xy} \cos 2\alpha.\tag{2.235}$$

Tudi smeri in velikosti glavnih normalnih in glavnih kotnih deformacij določamo z obrazci, ki smo jih z enačbami (1.308) do (1.328) vpeljali pri RNS v razdelku **1.13**. Pri določitvi smeri glavnih normalnih napetosti si pomagamo z enačbo (1.310)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}\tag{2.236}$$

in z njenimi rešitvami

$$\alpha_\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \pm \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.228)$$

Glavni smeri \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 določata rešitvi pri $k = 0$ in $k = 1$. Če označimo $\alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon^{k=0}$, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_x + \sin \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_x + \cos \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (2.237)$$

Velikosti glavnih normalnih deformacij lahko izračunamo po vzorcu enačbe (1.314)

$$\varepsilon_{11,22} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2}, \quad (2.239)$$

oziroma bolj nedvoumno

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{\xi\xi}(\alpha_\varepsilon^{k=0}) = \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\alpha_\varepsilon + \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha_\varepsilon \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{\xi\xi}(\alpha_\varepsilon^{k=1}) = \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\alpha_\varepsilon - \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha_\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Glavna kotna sprememba nastopa med vektorjema \mathbf{e}_γ in \mathbf{t}_γ , ki ju določimo s prvo rešitvijo enačbe

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\gamma = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2\varepsilon_{xy}} \quad (2.241)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\gamma &= \cos \alpha_\gamma \mathbf{e}_x + \sin \alpha_\gamma \mathbf{e}_y \\ \mathbf{t}_\gamma &= -\sin \alpha_\gamma \mathbf{e}_x + \cos \alpha_\gamma \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (2.242)$$

oziroma

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\gamma &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{t}_\gamma &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2).\end{aligned}\tag{2.243}$$

Enotska vektorja \mathbf{e}_γ in \mathbf{t}_γ določata smernici dveh medsebojno pravokotnih materialnih vlaken v ravnini (x, y) , med katerima dobimo največjo oziroma najmanjšo kotno spremembo γ (podrobnosti so pojasnjene v zgledu 2.2)

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}).\tag{2.244}$$

Jasno je, da lahko konstruiramo tudi Mohrove kroge za RDS, vendar se bomo temu zaradi popolne analogije z RNS odpovedali.

Kompatibilnostni pogoji pri RDS

Pri ravninskem deformacijskem stanju v ravnini (x, y) imamo opraviti s tremi kinematičnimi enačbami, iz katerih moramo določiti dva pomika u_x in u_y

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ 2\varepsilon_{xy} &= 2\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.245}$$

Fizikalni razmislek pove, da ima sistem (2.245) enolično rešitev, kar pomeni, da enačbe niso neodvisne med seboj. Njihovo medsebojno povezavo lahko v obravnavanem primeru poiščemo na preprost način z eliminacijo pomikov. Prvo od gornjih enačb dvakrat parcialno odvajamo po y , drugo dvakrat parcialno po x , tretjo pa mešano po x in y . Nato prvi dve dobljeni enačbi seštejemo, tretjo pa odštejemo. Pri

zveznih in odvedljivih pomikih vrstni red odvajanja v mešanih odvodih ni pomemben in sledi

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (2.246)$$

Na levi strani enačbe (2.246) prepoznamo komponento K_{zz} tenzorja kompatibilnosti in lahko pišemo

$$\text{RDS}(x, y) : \quad K_{zz} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.247)$$

Enak rezultat dobimo tudi z neposrednim upoštevanjem zvez (2.228) in (2.229) v enačbah (2.224), pri čemer je preostalih pet kompatibilnostnih pogojev identično izpolnjenih.

Kakor vidimo, dobimo v primeru ravninskega deformacijskega stanja en sam kompatibilnostni pogoj (2.247), ki povezuje kinematične enačbe (2.229) tako, da je iz njih mogoče enolično določiti pomika u_x in u_y .

Vse navedeno seveda velja tudi tedaj, če vlada ravninsko deformacijsko stanje v kateri od preostalih dveh koordinatnih ravnin, ali v katerikoli drugi splošni ravnini skozi obravnavani delec. Uporabimo lahko vse prikazane enačbe, le indekse moramo ustrezno spremeniti. Pri ravninskem deformacijskem stanju v ravnini (y, z) bi tako dobili

$$\text{RDS}(y, z) : \quad K_{xx} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0, \quad (2.248)$$

pri ravninskem deformacijskem stanju v ravnini (z, x) pa

$$\text{RDS}(z, x) : \quad K_{yy} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = 0. \quad (2.249)$$

2.11 Deformabilno telo - Zgledi

Zgled 2.1

Deformiranje telesa je opisano s poljem pomikov \mathbf{u} v telesnih koordinatah x, y, z (dolžine so podane v cm)

$$\mathbf{u} = 10^{-4} [2x^2 \mathbf{e}_x - (x + y)^2 \mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z].$$

- Določi spremembo razdalje med delcema \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 , ki sta v nedeformiranem stanju določena s točkama $T_1(10, 10, 0)$ in $T_2(11, 11, 0)$!
- V točki T_1 določi točno vrednost specifične spremembe dolžine v smeri $\overline{T_1 T_2}$! Kolikšno napako narediš, če to specifično spremembo dolžine izraziš
 - z vrednostjo tenzorja majhnih deformacij v smeri $\overline{T_1 T_2}$,
 - s povprečno vrednostjo specifične spremembe dolžine med točkama T_1 in T_2 ?
- Določi velikosti in smeri glavnih normalnih in kotnih deformacij v točki T_1 !

- Najprej določimo krajevna vektorja \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 točk T_1 in T_2 pred deformacijo ter njuno razliko $\Delta \mathbf{r}$

$$\mathbf{r}_1 = 10\mathbf{e}_x + 10\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{r}_2 = 11\mathbf{e}_x + 11\mathbf{e}_y$$

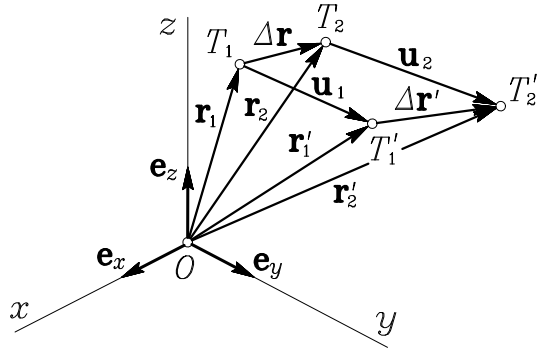
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y.$$

Razdalja med točkama T_1 in T_2 je pred deformacijo enaka dolžini $|\Delta \mathbf{r}|$ relativnega krajevnega vektorja $\Delta \mathbf{r}$

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad |\Delta \mathbf{r}| = 1.414214 \text{ cm}.$$

Med deformiranjem telesa se delca \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 iz točk T_1 in T_2 premakneta v novi legi T'_1 in T'_2 , kakor je shematično prikazano na sliki Z-2.1 a. Pomika obeh točk izračunamo tako, da telesne koordinate točk T_1 in T_2 vstavimo v enačbo za pomik $\mathbf{u}(x, y, z)$

$$\begin{array}{l} T_1(10, 10, 0) \\ T_2(11, 11, 0) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = 10^{-4}(200 \mathbf{e}_x - 400 \mathbf{e}_y + 4 \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{u}_2 = 10^{-4}(242 \mathbf{e}_x - 484 \mathbf{e}_y + 4 \mathbf{e}_z) . \end{array}$$



Slika Z-2.1 a

Krajevna vektorja \mathbf{r}'_1 in \mathbf{r}'_2 k točkama T'_1 in T'_2 ter njuna razlika $\Delta \mathbf{r}'$ so

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 = 10.0200 \mathbf{e}_x + 9.9600 \mathbf{e}_y + 0.0004 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{u}_2 = 11.0242 \mathbf{e}_x + 10.9516 \mathbf{e}_y + 0.0004 \mathbf{e}_z \\ \Delta \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = 1.0042 \mathbf{e}_x + 0.9916 \mathbf{e}_y . \end{aligned}$$

Nova razdalja $(\overline{T_1 T_2})'$ med točkama T'_1 in T'_2 je enaka dolžini $|\Delta \mathbf{r}'|$ relativnega krajevnega vektorja $\Delta \mathbf{r}'$

$$(\overline{T_1 T_2})' = |\Delta \mathbf{r}'| = \sqrt{1.0042^2 + 0.9916^2} = 1.411272 \text{ cm} .$$

Sprememba razdalje med točkama T_1 in T_2 je sedaj

$$|\Delta \mathbf{r}'| - |\Delta \mathbf{r}| = 1.411272 - 1.414214 = -0.002942 \text{ cm} .$$

b. Točna vrednost specifične spremembe dolžine v smeri \mathbf{e}_r je določena z enačbo (2.61)

$$D_{rr} = \sqrt{1 + 2E_{rr}} - 1.$$

Pri tem je \mathbf{e}_r enotski vektor smeri $\overline{T_1 T_2}$. Določimo ga z normiranjem relativnega krajevnega vektorja $\Delta \mathbf{r}$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Izračunati moramo še komponente E_{ij} tenzorja velikih deformacij v točki T_1 . V skladu z enačbami (2.51) je splošno

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= 4x \cdot 10^{-4} + [8x^2 + 2(x+y)^2] \cdot 10^{-8} \\ E_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &= -2(x+y) \cdot 10^{-4} + 2(x+y)^2 \cdot 10^{-8} \\ E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ &= -(x+y) \cdot 10^{-4} + 2(x+y)^2 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Ostale komponente tenzorja velikih deformacij so v našem primeru enake nič ($E_{zx} = E_{zy} = E_{zz} = 0$). V točki $T_1(10, 10, 0)$ imajo od nič različne komponente tenzorja velikih deformacij naslednje vrednosti

$$\begin{aligned} E_{xx} &= 40 \cdot 10^{-4} + 1600 \cdot 10^{-8} = 40.16 \cdot 10^{-4} \\ E_{yy} &= -40 \cdot 10^{-4} + 800 \cdot 10^{-8} = -39.92 \cdot 10^{-4} \\ E_{xy} &= -20 \cdot 10^{-4} + 800 \cdot 10^{-8} = -19.92 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Pri tem smo namenoma ločili prispevke linearnih in nelinearnih delov komponent E_{ij} . Linearni deli namreč predstavljajo komponente ε_{ij} tenzorja majhnih deformacij.

Matriki tenzorjev velikih in majhnih deformacij v točki $T_1(10, 10, 0)$ sta tako

$$[E_{ij}]_{T_1} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 40.16 & -19.92 & 0 \\ -19.92 & -39.92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}]_{T_1} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vrednost E_{rr} tenzorja velikih deformacij v smeri \mathbf{e}_r izračunamo z enačbo (2.63)

$$E_{rr} = \sum_i \sum_j E_{ij} e_{ri} e_{rj}.$$

Ker je $e_{rz} = 0$, sledi

$$\begin{aligned} E_{rr} &= E_{xx} e_{rx}^2 + 2E_{xy} e_{rx} e_{ry} + E_{yy} e_{ry}^2 \\ &= 10^{-4} \left[40.16 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 19.92 \cdot \frac{1}{2} - 39.92 \cdot \frac{1}{2} \right] \\ E_{rr} &= -19.80 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Točna vrednost specifične spremembe dolžine D_{rr} v smeri \mathbf{e}_r je torej

$$\begin{aligned} D_{rr} &= \sqrt{1 - 2 \cdot 19.80 \cdot 10^{-4}} - 1 \\ D_{rr} &= -19.8196 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Podobno kakor vrednost E_{rr} izračunamo tudi normalno komponento ε_{rr} tenzorja majhnih deformacij, s katero lahko približno opišemo specifično spremembo dolžine v smeri \mathbf{e}_r

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{ri} e_{rj} = \varepsilon_{xx} e_{rx}^2 + 2\varepsilon_{xy} e_{rx} e_{ry} + \varepsilon_{yy} e_{ry}^2 \\ &= 10^{-4} \left[40 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} - 40 \cdot \frac{1}{2} \right] \\ \varepsilon_{rr} &= -20 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

D_{rr} in ε_{rr} predstavljata točno in približno vrednost specifične spremembe dolžine v točki T_1 . Povprečno vrednost specifične spremembe dolžine \bar{D}_{rr} med točkama T_1 in T_2 pa v Lagrangevem opisu določimo z ulomkom

$$\bar{D}_{rr} = \frac{|\Delta \mathbf{r}'| - |\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = \frac{|\Delta \mathbf{r}'|}{|\Delta \mathbf{r}|} - 1 = \frac{1.411272}{1.414214} - 1$$

$$\bar{D}_{rr} = -0.00208.$$

Relativna napaka n_ε , ki jo naredimo, če specifično spremembo dolžine v smeri \mathbf{e}_r v točki T_1 izrazimo z vrednostjo ε_{rr} , je

$$n_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{rr}}{D_{rr}} - 1 = \frac{0.002}{0.001982} - 1$$

$$n_\varepsilon = 0.0091 = 0.91 \%.$$

Pri tem smo kot primerjalno vrednost seveda vzeli točno vrednost specifične spremembe dolžine D_{rr} . Podobno določimo relativno napako \bar{n} , ki jo naredimo, če specifično spremembo dolžine v smeri \mathbf{e}_r v točki T_1 izrazimo s povprečno vrednostjo \bar{D}_{rr}

$$\bar{n} = \frac{\bar{D}_{rr}}{D_{rr}} - 1 = \frac{0.00208}{0.001982} - 1$$

$$\bar{n} = 0.0494 = 4.94 \%.$$

V našem primeru bi torej naredili kar 5.4-krat večjo napako, če bi specifično spremembo dolžine D_{rr} izrazili s povprečno vrednostjo specifične spremembe dolžine med točkama T_1 in T_2 , kakor če jo izrazimo z ustrežno vrednostjo ε_{rr} . Te ugotovitve seveda ne smemo posplošiti, saj se v primeru homogenega deformacijskega stanja povprečna vrednost ujema s točno vrednostjo specifične spremembe dolžine v vsaki točki telesa.

c. Ker gre za ravninsko deformacijsko stanje, določimo velikosti in smeri glavnih normalnih in kotnih deformacij z enačbami (2.236) do

(2.245). Glavni normalni deformaciji ε_{11} in ε_{22} sta

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \\ &= 10^{-4} \left[\frac{1}{2}(40 - 40) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(40 + 40)^2 + 20^2} \right] \\ \varepsilon_{11} &= 0.00447 \qquad \varepsilon_{22} = -0.00447.\end{aligned}$$

Glavni smeri \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 sta določeni z rešitvijo enačbe

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} = \frac{-2 \cdot 20}{40 + 40} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha_\varepsilon = -13.3^\circ + k \cdot 90^\circ.$$

Vzamemo $\alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon^{k=0} = -13.3^\circ$ in v skladu z enačbama (2.237) dobimo (slika Z-2.1 b)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \cos \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_x + \sin \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_y = 0.973 \mathbf{e}_x - 0.230 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_x + \cos \alpha_\varepsilon \mathbf{e}_y = 0.230 \mathbf{e}_x + 0.973 \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Z vstavitvijo rešitve $\alpha_\varepsilon = -13.3^\circ$ v enačbi (2.240) se lahko prepričamo, da pripada smeri \mathbf{e}_1 glavna normalna deformacija ε_{11} , smeri \mathbf{e}_2 pa glavna normalna deformacija ε_{22} . Ker je

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha_\varepsilon &= \sin(-26.6^\circ) = -0.447 \\ \cos 2\alpha_\varepsilon &= \cos(-26.6^\circ) = 0.894,\end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\alpha_\varepsilon + \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha_\varepsilon = \\ &= 10^{-4} \left[\frac{1}{2}(40 - 40) + \frac{1}{2}(40 + 40) \cdot 0.894 + 20 \cdot 0.447 \right] = 0.00447 \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos 2\alpha_\varepsilon - \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha_\varepsilon = \\ &= 10^{-4} \left[\frac{1}{2}(40 - 40) - \frac{1}{2}(40 + 40) \cdot 0.894 - 20 \cdot 0.447 \right] = -0.00447.\end{aligned}$$

Naredimo še nekaj kontrol. Koordinatni vektorji deformacij so v našem primeru

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_x &= 10^{-4} (40 \mathbf{e}_x - 20 \mathbf{e}_y) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y &= 10^{-4} (-20 \mathbf{e}_x - 40 \mathbf{e}_y) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Transformacijsko matriko za preslikavo iz začetne koordinatne baze $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ v glavno bazo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sestavljajo komponente glavnih vektorjev

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.973 & -0.230 & 0 \\ 0.230 & 0.973 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorja deformacij v smereh \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 izračunamo s Cauchyjevo enačbo (2.115)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= \boldsymbol{\varepsilon}_x e_{1x} + \boldsymbol{\varepsilon}_y e_{1y} + \boldsymbol{\varepsilon}_z e_{1z} \\ &= 10^{-4} [0.973 (40 \mathbf{e}_x - 20 \mathbf{e}_y) - 0.230 (-20 \mathbf{e}_x - 40 \mathbf{e}_y)] \\ &= 10^{-4} (43.525 \mathbf{e}_x - 10.275 \mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_2 &= \boldsymbol{\varepsilon}_x e_{2x} + \boldsymbol{\varepsilon}_y e_{2y} + \boldsymbol{\varepsilon}_z e_{2z} \\ &= 10^{-4} [0.230 (40 \mathbf{e}_x - 20 \mathbf{e}_y) + 0.973 (-20 \mathbf{e}_x - 40 \mathbf{e}_y)] \\ &= 10^{-4} (-10.275 \mathbf{e}_x - 43.525 \mathbf{e}_y).\end{aligned}$$

Deformacijska vektorja $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ lahko zapišemo tudi takole

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= 0.00447 (0.973 \mathbf{e}_x - 0.230 \mathbf{e}_y) = 0.00447 \mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= -0.00447 (0.230 \mathbf{e}_x + 0.973 \mathbf{e}_y) = -0.00447 \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Do enakih ugotovitev bi prišli tudi tako, da bi poiskali normalni in strižni komponenti deformacijskih vektorjev $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_2$

$$\varepsilon_{11} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 10^{-4} (43.525 \cdot 0.973 + 10.275 \cdot 0.230) = 0.00447$$

$$\varepsilon_{12} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 10^{-4} (43.525 \cdot 0.230 - 10.275 \cdot 0.973) = 0$$

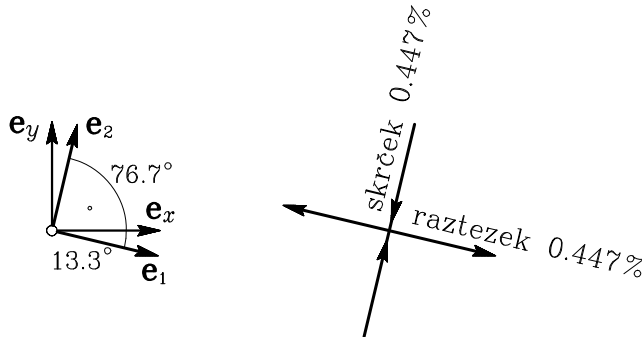
$$\varepsilon_{22} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 10^{-4} (-10.275 \cdot 0.230 - 43.525 \cdot 0.973) = -0.00447$$

$$\varepsilon_{21} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 10^{-4} (-10.275 \cdot 0.973 + 43.525 \cdot 0.230) = 0.$$

Tudi neposredna pot z uporabo transformacijske formule (2.119) vodi do enakih rezultatov

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_{\alpha\beta}] &= [e_{\alpha i}][\varepsilon_{ij}][e_{j\beta}] \\
 &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.973 & -0.230 & 0 \\ 0.230 & 0.973 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.973 & 0.230 & 0 \\ -0.230 & 0.973 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [\varepsilon_{\alpha\beta}] &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 44.721 & 0 & 0 \\ 0 & -44.721 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dobljeni rezultati povedo, da v smeri \mathbf{e}_1 nastopi raztezek, v smeri \mathbf{e}_2 pa skrčec, oba velikosti 0.00447, to je 0.447 % (slika Z-2.1 b). Pravi kot med vlaknoma, ki sta pred deformacijo usmerjeni vzdolž vektorjev \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 se med deformiranjem ne spremeni.



Slika Z-2.1 b

Ekstremno vrednost kotne spremembe γ izračunamo s formulo (2.244)

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad \rightarrow \quad \gamma = \pm 0.00447.$$

Smernici tistih dveh materialnih vlaken, ki sta sprva pravokotni med seboj, med deformiranjem pa se pravi kot med njima najbolj spremeni,

določata enotska vektorja \mathbf{e}_γ in \mathbf{t}_γ (slika Z-2.1 c). Določimo ju tako, da rešitev enačbe (2.241)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\gamma = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2\varepsilon_{xy}} = -\frac{40 + 40}{-2 \cdot 20} = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha_\gamma = 31.7^\circ + k \cdot 90^\circ$$

pri $k = 0$ vstavimo v enačbi (2.242)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\gamma &= 0.851 \mathbf{e}_x + 0.526 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{t}_\gamma &= 0.526 \mathbf{e}_x - 0.851 \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Še hitreje določimo enotska vektorja \mathbf{e}_γ in \mathbf{t}_γ z enačbama (2.243)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\gamma &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) & \mathbf{e}_\gamma &= 0.851 \mathbf{e}_x + 0.526 \mathbf{e}_y \\ & \rightarrow & & \\ \mathbf{t}_\gamma &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) & \mathbf{t}_\gamma &= 0.526 \mathbf{e}_x - 0.851 \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Vektor deformacij, ki pripada smeri \mathbf{e}_γ , označimo z $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, vektor deformacij, ki pripada smeri \mathbf{t}_γ pa z $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Njune komponente določimo tokrat malo drugače, pri čemer upoštevamo, da gre za ravninsko deformacijsko stanje

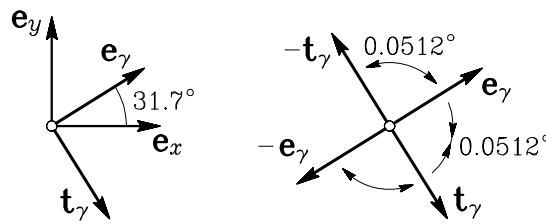
$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ex} \\ \varepsilon_{ey} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{ex} \\ e_{ey} \end{Bmatrix} = \\ & 10^{-4} \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & -40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.851 \\ 0.526 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 23.511 \\ -38.042 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{tx} \\ \varepsilon_{ty} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{tx} \\ e_{ty} \end{Bmatrix} = \\ & 10^{-4} \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & -40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.526 \\ -0.851 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 38.042 \\ 23.511 \end{Bmatrix}. \\ \boldsymbol{\varepsilon}_e &= 10^{-4} (23.511 \mathbf{e}_x - 38.042 \mathbf{e}_y) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t &= 10^{-4} (38.042 \mathbf{e}_x + 23.511 \mathbf{e}_y). \end{aligned}$$

Polovični spremembi pravih kotov med vektorjema \mathbf{e}_γ in \mathbf{t}_γ oziroma med vektorjema \mathbf{e}_γ in $-\mathbf{t}_\gamma$ sta

$$\begin{aligned}\varepsilon_e \cdot \mathbf{t}_\gamma &= 10^{-4} (23.511 \cdot 0.526 + 38.042 \cdot 0.851) \\ &= 0.00447 = 0.256^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_e \cdot (-\mathbf{t}_\gamma) &= 10^{-4} (-23.511 \cdot 0.526 - 38.042 \cdot 0.851) \\ &= -0.00447 = -0.256^\circ.\end{aligned}$$

Upoštevajoč definicijo spremembe pravega kota (2.64) in enačbo (2.108) lahko torej ugotovimo, da se pravi kot med vektorjema \mathbf{e}_γ in \mathbf{t}_γ zmanjša za $2 \times 0.256 = 0.512^\circ$, pravi kot med vektorjema \mathbf{e}_γ in $-\mathbf{t}_\gamma$ pa se za prav toliko poveča (slika Z-2.1 c).



Slika Z-2.1 c

Za kontrolo še izračunajmo

$$\begin{aligned}\varepsilon_t \cdot \mathbf{e}_\gamma &= 10^{-4} (23.511 \cdot 0.526 + 38.042 \cdot 0.851) \\ &= 0.00447 = 0.256^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t \cdot (-\mathbf{e}_\gamma) &= 10^{-4} (-23.511 \cdot 0.526 - 38.042 \cdot 0.851) \\ &= -0.00447 = -0.256^\circ.\end{aligned}$$

Rezultat skupaj s sliko Z-2.1 c potrjuje prejšnjo ugotovitev, da se pravi kot med vektorjema \mathbf{t}_γ in \mathbf{e}_γ zmanjša, pravi kot med vektorjema \mathbf{t}_γ in $-\mathbf{e}_\gamma$ pa poveča za 0.512° .

Zgled 2.2

V točki T , kjer je deformacijsko stanje opisano z matriko $[\varepsilon_{ij}]$ majhnih deformacij glede na telesni koordinatni sistem z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, določi specifično spremembo dolžine v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_ξ ter spremembe pravih kotov v koordinatnih ravninah drugega kartezijskega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$! Določi tudi velikosti in smeri glavnih normalnih deformacij ter specifično spremembo prostornine v točki T !

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \frac{1}{2}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Enotski vektor \mathbf{e}_ζ , ki skupaj z vektorjema \mathbf{e}_ξ in \mathbf{e}_η sestavlja novo desnosučno kartezijsko bazo, ni podan. Določimo ga z vektorskim produktom znanih baznih vektorjev \mathbf{e}_ξ in \mathbf{e}_η

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\zeta &= \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \\ \mathbf{e}_\zeta &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Komponente deformacijskih vektorjev $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi, \boldsymbol{\varepsilon}_\eta$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta$, ki predstavljajo vrednosti tenzorja majhnih deformacij v smereh $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, določimo glede na bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ z enačbo (2.119)

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = [e_{\alpha i}] [\varepsilon_{ij}] [e_{j\beta}] = [\varepsilon_{\alpha j}] [e_{j\beta}].$$

Pri tem matrika $[\varepsilon_{\alpha j}] = [e_{\alpha i}] [\varepsilon_{ij}]$ vsebuje ravno iskane komponente deformacijskih vektorjev $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi, \boldsymbol{\varepsilon}_\eta$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_\zeta$ v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ (glej tudi zgled 1.6, točko b.)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi x} & \varepsilon_{\xi y} & \varepsilon_{\xi z} \\ \varepsilon_{\eta x} & \varepsilon_{\eta y} & \varepsilon_{\eta z} \\ \varepsilon_{\zeta x} & \varepsilon_{\zeta y} & \varepsilon_{\zeta z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \\
 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \\
 &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3\sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Deformacijski vektorji ε_{ξ} , ε_{η} in ε_{ζ} so tako

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi} &= 10^{-3}(3\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + 3\sqrt{2}\mathbf{e}_z) \\
 \varepsilon_{\eta} &= 10^{-3}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \sqrt{2}\mathbf{e}_z) \\
 \varepsilon_{\zeta} &= 10^{-3}(\sqrt{2}\mathbf{e}_x + \sqrt{2}\mathbf{e}_y).
 \end{aligned}$$

Specifično spremembo dolžine v smeri \mathbf{e}_{ξ} izračunamo kot projekcijo vektorja ε_{ξ} na smer \mathbf{e}_{ξ}

$$D_{\xi\xi} \approx \varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{\xi} \cdot \mathbf{e}_{\xi} = 10^{-3} \left(3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$D_{\xi\xi} = 6 \cdot 10^{-3}.$$

Spremembo pravega kota med enotskima vektorjema \mathbf{e}_{ξ} in \mathbf{e}_{η} izračunamo s skalarnim produktom deformacijskega vektorja ε_{ξ} z enotskim vektorjem \mathbf{e}_{η}

$$D_{\xi\eta} \approx 2\varepsilon_{\xi\eta} = 2\varepsilon_{\xi} \cdot \mathbf{e}_{\eta} = 2 \cdot 10^{-3} \left(-3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$D_{\xi\eta} = 0.$$

Podobno določimo tudi spremembi preostalih dveh pravih kotov med baznimi vektorji

$$D_{\eta\zeta} \approx 2 \varepsilon_{\eta\zeta} = 2 \boldsymbol{\varepsilon}_\eta \cdot \mathbf{e}_\zeta = 0$$

$$D_{\zeta\xi} \approx 2 \varepsilon_{\zeta\xi} = 2 \boldsymbol{\varepsilon}_\zeta \cdot \mathbf{e}_\xi = 0.$$

Kakor vidimo, so vektorji \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ glavni vektorji podanega deformacijskega stanja, saj so kotne spremembe v vseh koordinatnih ravninah enake nič. Normalna deformacija $\varepsilon_{\xi\xi}$ je torej že ena od glavnih normalnih deformacij, preostali dve pa določimo na podoben način

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \boldsymbol{\varepsilon}_\eta \cdot \mathbf{e}_\eta = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = \boldsymbol{\varepsilon}_\zeta \cdot \mathbf{e}_\zeta = -2 \cdot 10^{-3}.$$

Enak rezultat dobimo tudi z uporabo transformacijske enačbe (2.119)

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = [\varepsilon_{\alpha j}] [e_{j\beta}]$$

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3\sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

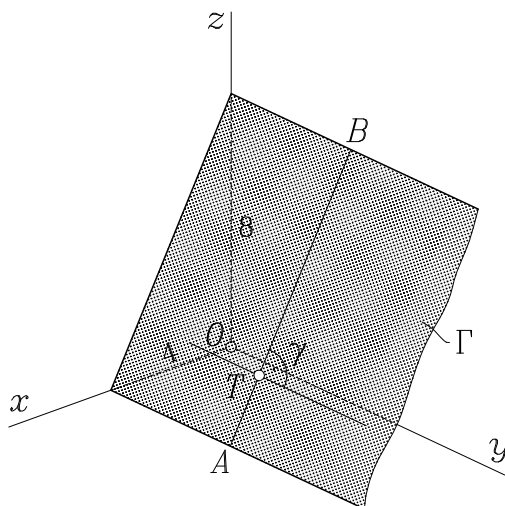
Določitev specifične spremembe prostornine ε_V v točki T je sedaj zelo preprosta naloga. Kakor pove enačba (2.139), je specifična sprememba prostornine v območju majhnih deformacij določena kar s prvo invarianto deformacijskega tenzorja

$$\varepsilon_V = I_1^\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 10^{-3}(6 + 2 - 2) = 0.006.$$

Zgled 2.3

Deformiranje telesa je opisano z vektorskim poljem pomikov

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 10^{-4} [(5x^2 - 6z) \mathbf{e}_x + 2y^2z \mathbf{e}_y + (x^2 - 3y^2z) \mathbf{e}_z].$$



Slika Z-2.3 a

V točki $T(x, 4, 2)$, ki leži v ravnini Γ (slika Z-2.3 a), določi:

- specifično spremembo dolžine normale in specifično spremembo dolžine tangente v smeri \overline{AB} na ravnino Γ ,
- spremembo pravega kota Θ ,
- rezultirajoči vektor zasuka ω , vrednosti tenzorja zasukov ω_n v smeri normale in ω_t v smeri \overline{AB} ter povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale na ravnino Γ ,
- glavne normalne in kotne deformacije!
- Ugotovi, ali v kaki točki na črti \overline{AB} vlada izohorno deformacijsko stanje (to pomeni, da je specifična sprememba prostornine v taki točki enaka nič)!

Najprej določimo komponente ε_{ij} tenzorja majhnih deformacij in komponente ω_{ij} tenzorja zasukov

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 10x \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 4yz \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -3y^2 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = (y^2 - 3yz) \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = (x - 3) \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{xy} \equiv \omega_z \equiv -\omega_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$\omega_{yz} \equiv \omega_x \equiv -\omega_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -(y^2 + 3yz) \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{zx} \equiv \omega_y \equiv -\omega_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -(x + 3) \cdot 10^{-4}.$$

Enačba ravnine Γ je

$$z = -2x + 8,$$

zato je za točko $T \in \Gamma$ $x = 3$ in dobimo $T(3, 4, 2)$. Matriki majhnih deformacij in zasukov v točki T sta torej

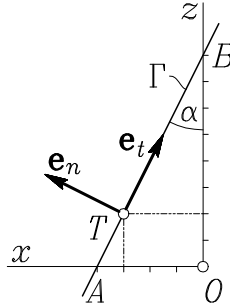
$$[\varepsilon_{ij}]_T = 10^{-4} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -8 \\ 0 & -8 & -48 \end{bmatrix}$$

$$[\omega_{ij}]_T = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -40 \\ -6 & 40 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enotski vektor normale ravnine Γ označimo z \mathbf{e}_n , enotski vektor smeri \overline{AB} pa z \mathbf{e}_t (slika Z-2.3 b). Ker je $\overline{AB} = 4\sqrt{5}$, dobimo

$$\mathbf{e}_n = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$$

$$\mathbf{e}_t = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{5}} (-\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_z) .$$



Slika Z-2.3 b

a. Komponente deformacijskega vektorja $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, ki v točki T pripada smeri \mathbf{e}_n , določimo po analogiji z enačbo (1.150)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nx} \\ \varepsilon_{ny} \\ \varepsilon_{nz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{nx} \\ e_{ny} \\ e_{nz} \end{Bmatrix} \\ &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -8 \\ 0 & -8 & -48 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 60 \\ -8 \\ -48 \end{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} (60 \mathbf{e}_x - 8 \mathbf{e}_y - 48 \mathbf{e}_z) . \end{aligned}$$

Podobno določimo komponente deformacijskega vektorja $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, ki v točki T pripada smeri \mathbf{e}_t

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{tx} \\ \varepsilon_{ty} \\ \varepsilon_{tz} \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -8 \\ 0 & -8 & -48 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} -30 \\ -16 \\ -96 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} (-30 \mathbf{e}_x - 16 \mathbf{e}_y - 96 \mathbf{e}_z) .$$

Specifična sprememba dolžine D_{nn} v smeri normale \mathbf{e}_n je enaka normalni deformaciji ε_{nn} , ki jo določimo kot projekcijo deformacijskega vektorja $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ na smer \mathbf{e}_n

$$\varepsilon_{nn} = \boldsymbol{\varepsilon}_n \cdot \mathbf{e}_n = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \cdot (60 \cdot 2 - 48 \cdot 1) = \frac{72}{5} \cdot 10^{-4} = 0.00144$$

$$D_{nn} \approx \varepsilon_{nn} = 0.00144 .$$

Specifična sprememba dolžine materialnega vlakna v smeri tangente \overline{AB} pa določimo z normalno deformacijo ε_{tt}

$$\varepsilon_{tt} = \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{e}_t = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \cdot (30 \cdot 1 - 96 \cdot 2) = -\frac{162}{5} \cdot 10^{-4} = 0.00324$$

$$D_{tt} \approx \varepsilon_{tt} = 0.00324 .$$

b. Sprememba $\Delta\Theta = D_{yt}$ pravega kota Θ med vlaknoma, ki sta v nedeformiranem stanju usmerjeni vzdolž enotskih vektorjev \mathbf{e}_y in \mathbf{e}_t , je pri majhnih deformacijah enaka dvakratni vrednosti deformacijske komponente ε_{yt} , ki jo izračunamo s skalarnim množenjem deformacijskega vektorja $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ z enotskim vektorjem \mathbf{e}_t (slika Z-2.3 c). V našem primeru je

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y = 10^{-4} (32 \mathbf{e}_y - 8 \mathbf{e}_z)$$

in sledi

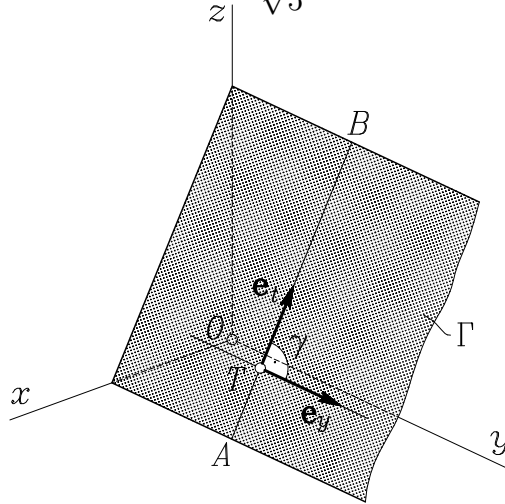
$$\varepsilon_{yt} = \boldsymbol{\varepsilon}_y \cdot \mathbf{e}_t = -\frac{16}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\Theta = D_{yt} \approx 2 \varepsilon_{yt} = -\frac{32}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4} = -0.00143 .$$

Za kontrolo izračunajmo $\Delta\Theta$ še s projekcijo deformacijskega vektorja $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ na smer \mathbf{e}_y

$$\varepsilon_{ty} = \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{e}_y = -\frac{16}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\Theta = D_{ty} \approx 2\varepsilon_{ty} = -\frac{32}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4} = -0.00143.$$



Slika Z-2.3 c

c. Rezultirajoči vektor zasuka $\boldsymbol{\omega}$ v točki T je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z = \omega_{yz} \mathbf{e}_x + \omega_{zx} \mathbf{e}_y + \omega_{xy} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\omega} &= 10^{-4} (-40 \mathbf{e}_x - 6 \mathbf{e}_y).\end{aligned}$$

Rotacijska vektorja $\boldsymbol{\omega}_n$ in $\boldsymbol{\omega}_t$, ki predstavljata vrednosti tenzorja zasukov $\boldsymbol{\omega}(2)$ v smereh \mathbf{e}_n in \mathbf{e}_t , najhitreje izračunamo z uporabo enačbe (2.158), kjer vzamemo $i = n$

$$\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -40 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_n = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} (-6 \mathbf{e}_x + 40 \mathbf{e}_y + 12 \mathbf{e}_z)$$

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_t = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -40 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_t = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} (-12 \mathbf{e}_x + 80 \mathbf{e}_y - 6 \mathbf{e}_z).$$

Za kontrolo izračunajmo komponente vektorjev $\boldsymbol{\omega}_n$ in $\boldsymbol{\omega}_t$ še s transformacijsko enačbo (1.150)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \omega_{nx} \\ \omega_{ny} \\ \omega_{nz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{xx} & \omega_{yx} & \omega_{zx} \\ \omega_{xy} & \omega_{yy} & \omega_{zy} \\ \omega_{xz} & \omega_{yz} & \omega_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{nx} \\ e_{ny} \\ e_{nz} \end{Bmatrix} \\ &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 40 \\ 6 & -40 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} -6 \\ 40 \\ 12 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

in podobno za vektor $\boldsymbol{\omega}_t$

$$\begin{Bmatrix} \omega_{tx} \\ \omega_{ty} \\ \omega_{tz} \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 40 \\ 6 & -40 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} -12 \\ 80 \\ -6 \end{Bmatrix}.$$

Tudi povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale \mathbf{e}_n lahko določimo na dva načina. Najhitreje ga izračunamo kot projekcijo rezultirajočega zasuka $\boldsymbol{\omega}$ na smer normale \mathbf{e}_n

$$\begin{aligned} \omega_n &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_n = 10^{-4}(-40 \mathbf{e}_x - 6 \mathbf{e}_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \\ \omega_n &= -\frac{80}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Zasuk ω_n lahko določimo tudi kot povprečni zasuk v ravnini enotskih vektorjev \mathbf{e}_y in \mathbf{e}_t

$$\omega_n \equiv \omega_{yt} = \boldsymbol{\omega}_y \cdot \mathbf{e}_t.$$

Pri nas je

$$\boldsymbol{\omega}_y = -40 \cdot 10^{-4} \mathbf{e}_z$$

in dobimo

$$\omega_n \equiv \omega_{yt} = -\frac{80}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}.$$

Za kontrolo izračunajmo še zasuk ω_{ty}

$$\omega_{ty} = \boldsymbol{\omega}_t \cdot \mathbf{e}_y = \frac{80}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4} = -\omega_n.$$

Kakor se spodobi, smo dobili nasproten predznak, saj je smer zasuka iz smeri \mathbf{e}_t proti \mathbf{e}_y nasprotna smeri vektorja normale \mathbf{e}_n .

č. Glede na obliko matrike majhnih deformacij $[\varepsilon_{ij}]$ je jasno, da je raztezek ε_{xx} že ena od glavnih normalnih deformacij, na primer $\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_{11} = 30 \cdot 10^{-4}$. V zgledu 1.11 smo pokazali, da lahko preostali glavni vrednosti določimo kakor pri ravninskem deformacijskem stanju

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22,33} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + \varepsilon_{yz}^2} \\ &= 10^{-4} \left[\frac{1}{2} (32 - 48) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (32 + 48)^2 + 8^2} \right] \\ \varepsilon_{22} &= 32.79 \cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_{33} = -48.79 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Glavne normalne deformacije navadno razvrstimo po velikosti, podobno kakor smo z (ne)enačbo (1.245) razvrstili glavne normalne napetosti. Dobljene glavne normalne deformacije zato ustrezno preštevilčimo in dobimo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{I}} &= 32.79 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{\text{II}} &= 30.00 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{\text{III}} &= -48.79 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Glavne vrednosti kotnih deformacij označimo z γ_{I} , γ_{II} in γ_{III} in jih izračunamo po vzorcu enačb (1.244)

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{I}} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \quad \rightarrow \quad \gamma_{\text{I}} = 39.40 \cdot 10^{-4} \\ \gamma_{\text{II}} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \quad \rightarrow \quad \gamma_{\text{II}} = -40.79 \cdot 10^{-4} \\ \gamma_{\text{III}} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad \rightarrow \quad \gamma_{\text{III}} = 1.40 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

d. Deformacijsko stanje je izohorno, če je specifična sprememba prostornine D_V v obravnavani točki telesa enaka nič. Specifična sprememba prostornine je pri majhnih deformacijah enaka prvi invarianti

deformacijskega tenzorja. V našem primeru dobimo

$$D_V = I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 10^{-4} (10x + 4yz - 3y^2) .$$

Pogoj $D_V = 0$ pokaže, da je specifična sprememba prostornine nič povsod na preseku obravnavanega telesa s ploskvijo

$$10x + 4yz - 3y^2 = 0 \quad \text{ozioroma} \quad z = \frac{3y}{4} - \frac{5x}{2y} .$$

Za točke, ki ležijo na črti \overline{AB} , velja

$$z = -2x + 8 \quad \text{in} \quad y = 4$$

in pogoj izohornosti $D_V = 0$ preide v preprosto obliko

$$10^{-4} [10x + 4 \cdot 4 \cdot (-2x + 8) - 3 \cdot 4^2] = 0 .$$

Od tod sledi

$$x = \frac{40}{11} \quad \text{in} \quad z = \frac{8}{11} .$$

Pogoj naloge torej izpolnjuje točka $T_1 \left(\frac{40}{11}, 4, \frac{8}{11} \right)$. To pomeni, da se elementarnemu delu telesa v bližnji okolici točke T_1 pri obravnavani deformaciji prostornina ne spremeni. Naredimo še kontrolo in najprej izračunajmo vrednosti normalnih deformacij v točki T_1

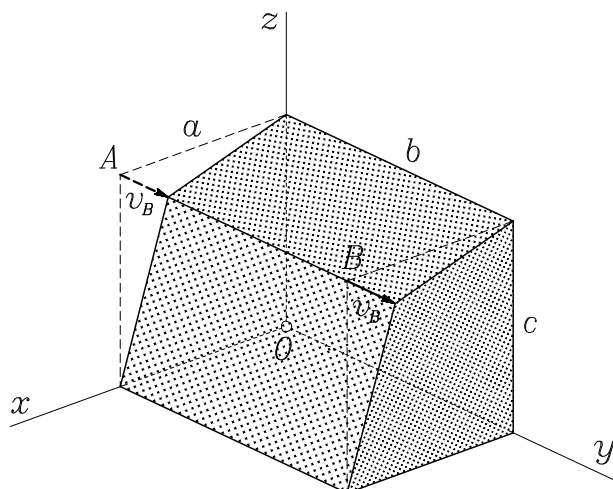
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 10^{-4} \cdot 10 \cdot \frac{40}{11} = \frac{400}{11} \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{yy} &= 10^{-4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{8}{11} = \frac{128}{11} \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{zz} &= -10^{-4} \cdot 3 \cdot 4^2 = -\frac{528}{11} \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Specifična sprememba prostornine v točki T_1 je torej zares enaka nič

$$\varepsilon_V = I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{10^{-4}}{11} (400 + 128 - 528) = 0$$

Zgled 2.4

Homogen kvader s stranicami a , b , c se deformira tako, da se stranica \overline{AB} translatorno premakne v smeri y za vrednost v_B . Vse stranice ostanejo pri tem ravne (slika Z-2.4 a).



Slika Z-2.4 a

Določi vektor pomika poljubnega delca $\mathcal{D}(x, y, z)$ ter komponente tenzorja majhnih deformacij glede na prikazani kartezijski koordinatni sistem! Določi tudi velikosti in smeri glavnih normalnih deformacij!

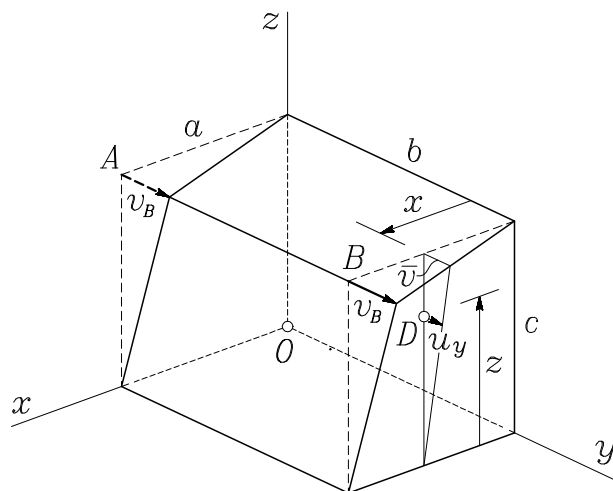
Glede na podatek, da ostanejo stranice obravnavanega kvadra ravne[†], lahko pomik v smeri y določimo iz podobnih trikotnikov (slika Z-2.4 b), pomika u_x in u_z pa sta nič. Razen tega je tudi očitno, da pomik u_y ni odvisen od koordinate y . To pomeni, da je pomik u_y poljubnega delca $\mathcal{D}(x, y, z)$ enak pomiku u_y delca $\mathcal{D}_1(x, b, z)$ na mejni ploskvi $y = b$

$$u_y = \bar{v} \frac{z}{c} \quad \rightarrow \quad u_y = v_B \frac{x z}{a c}$$

[†] Deformirana oblika poljubnega prereza $y = konst.$ je hiperbolični paraboloid.

in vektor pomika poljubnega delca $\mathcal{D}(x, y, z)$ je

$$\mathcal{V} : \begin{array}{l} x \in [0, a] \\ y \in [0, b] \\ z \in [0, c] \end{array} \rightarrow \mathbf{u}(x, y, z) = \frac{v_B}{ac} xz \mathbf{e}_y .$$



Slika Z-2.4 b

Z odvajanjem pomika u_y in vstavitvijo v kinematične enačbe (2.96) dobimo komponente tenzorja majhnih deformacij

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{v_B}{2ac} z$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \frac{v_B}{2ac} x$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 .$$

Z okrajšavo

$$\alpha = \frac{v_B}{2ac}$$

dobi matrika majhnih deformacij naslednjo preprosto obliko

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha z & 0 \\ \alpha z & 0 & \alpha x \\ 0 & \alpha x & 0 \end{bmatrix}.$$

Invariante obravnavanega deformacijskega stanja so

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon &= 0 \\ I_2^\varepsilon &= -\alpha^2 (x^2 + z^2) \\ I_3^\varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

Glavne normalne deformacije izračunamo kot korene karakteristične enačbe

$$\varepsilon^3 - I_1^\varepsilon \varepsilon^2 + I_2^\varepsilon \varepsilon - I_3^\varepsilon = 0.$$

V našem primeru dobimo

$$\varepsilon^3 - \alpha^2 (x^2 + z^2) \varepsilon = \varepsilon [\varepsilon^2 - \alpha^2 (x^2 + z^2)] = 0.$$

Korene gornje enačbe je prav lahko izračunati

$$\varepsilon_{11} = \alpha \sqrt{x^2 + z^2} \quad \varepsilon_{22} = 0 \quad \varepsilon_{33} = -\alpha \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Smerne kosinuse prve glavne smeri \mathbf{e}_1 določimo kot rešitve naslednje enačbe

$$\begin{bmatrix} -\alpha \sqrt{x^2 + z^2} & \alpha z & 0 \\ \alpha z & -\alpha \sqrt{x^2 + z^2} & \alpha x \\ 0 & \alpha x & -\alpha \sqrt{x^2 + z^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Kakor vemo, so rešitve premo sorazmerne kofaktorjem k členom poljubne vrstice ali stolpca matrike koeficientov. Vzemimo kar prvo vrstico in izračunajmo kofaktorje

$$K_{xx}^{(1)} = \alpha^2 z^2 \quad K_{xy}^{(1)} = \alpha^2 z \sqrt{x^2 + z^2} \quad K_{xz}^{(1)} = \alpha^2 x z.$$

Dobljene vrednosti normiramo tako, da bo \mathbf{e}_1 enotski vektor

$$k_x^{(1)} = \pm \sqrt{(K_{xx}^{(1)})^2 + (K_{xy}^{(1)})^2 + (K_{xz}^{(1)})^2}$$

$$k_x^{(1)} = \pm \alpha^2 z \sqrt{2(x^2 + z^2)}.$$

Privzamemo kar pozitivni predznak norme in dobimo

$$e_{1x} = \frac{K_{xx}^{(1)}}{k_x^{(1)}} = \frac{z}{\sqrt{2(x^2 + z^2)}}$$

$$e_{1y} = \frac{K_{xy}^{(1)}}{k_x^{(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e_{1z} = \frac{K_{xz}^{(1)}}{k_x^{(1)}} = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + z^2)}}$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{z}{\sqrt{2(x^2 + z^2)}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y + \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + z^2)}} \mathbf{e}_z.$$

Podobno določimo drugo glavno smer \mathbf{e}_2

$$\mathbf{e}_2 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \mathbf{e}_x + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \mathbf{e}_z.$$

Tretjo glavno smer \mathbf{e}_3 najhitreje določimo z vektorskim produktom

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

od koder sledi

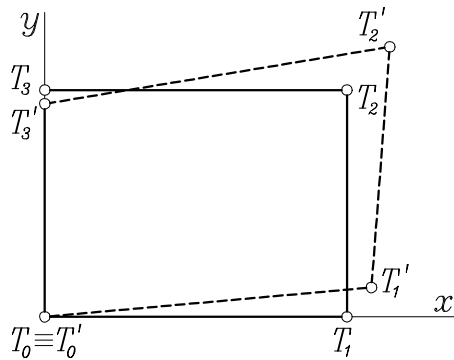
$$\mathbf{e}_3 = \frac{z}{\sqrt{2(x^2 + z^2)}} \mathbf{e}_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y + \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + z^2)}} \mathbf{e}_z.$$

(Kontrola: določi glavne normalne deformacije s transformacijsko enačbo (2.119)! Upoštevaj, da komponente glavnih vektorjev tvorijo transformacijsko matriko, ki diagonalizira matriko majhnih deformacij!)

Zgled 2.5

Na površini tanke pločevine označimo pravokoten vzorec, ki ga določajo točke T_0, T_1, T_2, T_3 (slika Z-2.5 a). Pod vplivom zunanje obtežbe, ki deluje v ravnini pločevine, se nekatere od teh točk premaknejo v nove lege. Začetna debelina stene $\delta = 1$ mm se v točki T_0 zmanjša na 0.9987 mm. V točki T_0 določi:

- komponente tenzorja majhnih deformacij v koordinatnem sistemu (x, y, z) ,
- velikosti in smeri glavnih normalnih in ekstremnih strižnih deformacij,
- specifično spremembo prostornine!



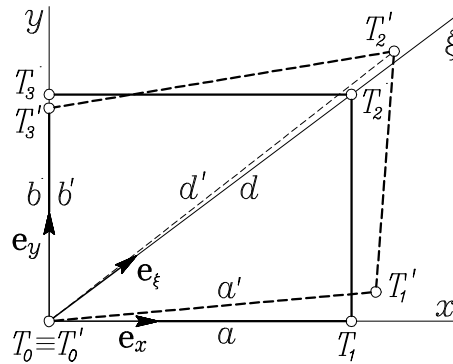
$$\begin{aligned}
 T_0(0, 0) &\rightarrow T'_0(0, 0) \\
 T_1(4, 0) &\rightarrow T'_1(4.0313, 0.0726) \\
 T_2(4, 3) &\rightarrow T'_2(4.0450, 3.0400) \\
 T_3(0, 3) &\rightarrow T'_3(0, 2.9850).
 \end{aligned}$$

(koordinate so v cm)

Slika Z-2.5 a

a. Zaradi preglednejšega pisanja označimo dolžino stranice $\overline{T_0T_1}$ z a , dolžino stranice $\overline{T_0T_3}$ z b in dolžino diagonale $\overline{T_0T_2}$ z d , njihove dolžine po deformaciji pa po vrsti z a' , b' in d' . Enotski vektor smeri nedeformirane diagonale d označimo z \mathbf{e}_ξ (slika Z-2.5 b):

$$\begin{aligned}
 a = 4 \text{ cm} \quad \dots \quad a' &= \sqrt{4.0313^2 + 0.0726^2} = 4.0320 \text{ cm} \\
 b = 3 \text{ cm} \quad \dots \quad b' &= 2.9850 \text{ cm} \\
 d = \sqrt{4^2 + 3^2} &= 5 \text{ cm} \\
 d' = \sqrt{4.0450^2 + 3.0400^2} &= 5.0600 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$



Slika Z-2.5 b

$$e_{\xi x} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad e_{\xi y} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_{\xi} = 0.8 \mathbf{e}_x + 0.6 \mathbf{e}_y .$$

Specifične spremembe dolžin v smereh x , y in ξ izračunamo v skladu z Lagrangevo formulacijo deformacij glede na začetne dolžine “vlakn” v teh smereh

$$D_{xx} = \varepsilon_{xx} = \frac{a' - a}{a} = \frac{4.0320 - 4}{4} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xx} = 0.008$$

$$D_{yy} = \varepsilon_{yy} = \frac{b' - b}{b} = \frac{2.9850 - 3}{3} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy} = -0.005$$

$$D_{\xi\xi} = \varepsilon_{\xi\xi} = \frac{d' - d}{d} = \frac{5.0600 - 5}{5} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{\xi\xi} = 0.012 .$$

(S tem smo dejansko določili *povprečne* vrednosti specifičnih sprememb dolžin stranic a in b ter diagonale d .) Ker obtežba deluje v ravnini pločevine, ni kotnih deformacij v ravninah (x, z) in (y, z)

$$\varepsilon_{xz} = 0 \quad \text{in} \quad \varepsilon_{yz} = 0 .$$

Specifična sprememba dolžine v smeri ξ je povezana s komponentami tenzorja majhnih deformacij v koordinatnem sistemu (x, y, z) z enačbo (2.120)

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{\xi i} e_{\xi j} \quad (i, j = x, y, z)$$

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx} e_{\xi x}^2 + 2\varepsilon_{xy} e_{\xi x} e_{\xi y} + \varepsilon_{yy} e_{\xi y}^2,$$

v kateri je edina neznanka deformacija ε_{xy} . Ko vstavimo številske vrednosti, dobimo

$$0.012 = 0.008 \cdot 0.8^2 + 2\varepsilon_{xy} \cdot 0.8 \cdot 0.6 - 0.005 \cdot 0.6^2$$

in od tod

$$\varepsilon_{xy} = 0.009.$$

Iz podatka o spremembi debeline pločevine lahko izračunamo tudi specifično spremembo dolžine v smeri z

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\delta' - \delta}{\delta} = \frac{0.9987 - 1}{1} \rightarrow \varepsilon_{zz} = -0.0013.$$

Matrika majhnih deformacij v točki T_0 je tako

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 80 & 90 & 0 \\ 90 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}.$$

Za kontrolo lahko v tem geometrijsko preprostem primeru določimo spremembo pravega kota v ravnini (x, y) neposredno iz *slike Z-2.5 a*

$$\operatorname{tg} D_{xy} = \frac{y'_{T_1}}{x'_{T_1}} = \frac{0.0726}{4.0313} = 0.0180 \rightarrow D_{xy} = \operatorname{arctg} 0.0180 \approx 0.0180$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{D_{xy}}{2} = 0.009.$$

b. Iz oblike matrike majhnih deformacij $[\varepsilon_{ij}]$ je očitno, da je ε_{zz} že kar ena od glavnih normalnih deformacij; označimo jo na primer z ε_{33}

$$\varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_{zz} = -0.0013.$$

Preostali dve glavni normalni deformaciji ε_{11} in ε_{22} lahko sedaj določimo kot pri ravninskem deformacijskem stanju v ravnini (x, y)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \\ &= 10^{-4} \left[\frac{80 - 50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80 + 50}{2}\right)^2 + 90^2} \right]\end{aligned}$$

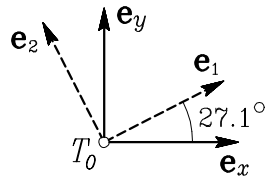
$$\varepsilon_{11} = 0.0126 \qquad \varepsilon_{22} = -0.0096.$$

Enotska vektorja smeri glavnih normalnih deformacij v ravnini (x, y) določimo z enačbo (2.236)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} = \frac{2 \cdot 0.009}{0.008 + 0.005} = 1.3846$$

$$2\alpha_\varepsilon = 54.2^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha_\varepsilon = 27.1^\circ.$$

Ker je $\sin 27.1^\circ = 0.4553$ in $\cos 27.1^\circ = 0.8904$, sledi (slika Z-2.5 c)



$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= 0.8904 \mathbf{e}_x + 0.4553 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_2 &= -0.4553 \mathbf{e}_x + 0.8904 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Slika Z-2.5 c

c. Specifična sprememba prostornine v točki T_0 je

$$\begin{aligned}D_V \equiv \varepsilon_V &= I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ D_V &= 0.008 - 0.005 - 0.0013 \quad \rightarrow \quad D_V = 0.0017.\end{aligned}$$

V tem zgledu smo imeli opraviti z meritvami deformacij v bližnji okolici izbrane točke T_0 na površini obtežene pločevine. Tudi prikazana analiza

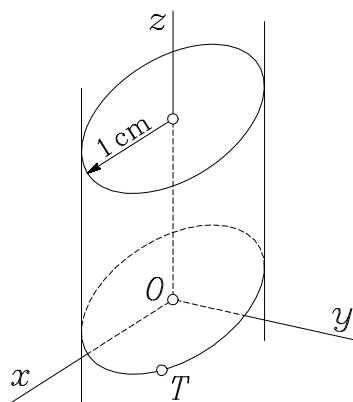
deformacijskega stanja se nanaša na točko T_0 , medtem ko za poznavanje deformacijskega stanja obravnavanega telesa kot celote nimamo dovolj podatkov.

Zgled 2.6

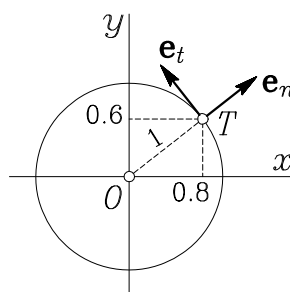
Deformiranje telesa je opisano s komponentami ε_{ij} tenzorja majhnih deformacij glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z) . V notranjosti telesa si zamislimo krožno valjasto ploskev z vzdolžno osjo z in s polmerom 1 cm ter točko $T(0.8, y > 0, 0)$ na tej ploskvi (slika Z-2.6 a).

- Določi specifično spremembo dolžine v smeri normale ter spremembo pravega kota med normalo in tangento na vodilno krožnico v točki T !
- Določi velikosti in smeri glavnih normalnih deformacij v točki T !

$$[\varepsilon_{ij}]_T = 10^{-4} \begin{bmatrix} 5.28 & -12.96 & 0 \\ -12.96 & -2.28 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Slika Z-2.6 a



Slika Z-2.6 b

a. Koordinate točke T morajo zadoščati enačbi presečne krožnice obravnavane ploskve z ravnino (x, y) (slika Z-2.6 b)

$$x^2 + y^2 = 1^2 \quad \rightarrow \quad y = 0.6 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad T(0.8, 0.6, 0).$$

Enotski vektor normale na valjasto ploskev v točki T označimo z \mathbf{e}_n , enotski vektor tangente na vodilno krožnico pa z \mathbf{e}_t

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n &= 0.8 \mathbf{e}_x + 0.6 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_t &= -0.6 \mathbf{e}_x + 0.8 \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Specifično spremembo dolžine D_{nn} v smeri normale \mathbf{e}_n določimo v skladu z enačbama (2.103) in (2.104)

$$D_{nn} = \varepsilon_{nn} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{ni} e_{nj} \quad (i, j = x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nn} &= \varepsilon_{xx} e_{nx}^2 + 2\varepsilon_{xy} e_{nx} e_{ny} + \varepsilon_{yy} e_{ny}^2 = \\ &= 10^{-4} (5.28 \cdot 0.8^2 - 2 \cdot 12.96 \cdot 0.8 \cdot 0.6 - 2.28 \cdot 0.6^2) \\ D_{nn} &= \varepsilon_{nn} = -9.883 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Spremembo pravega kota D_{nt} med normalo \mathbf{e}_n in tangento \mathbf{e}_t določimo kot dvakratno vrednost deformacije ε_{nt}

$$\begin{aligned} D_{nt} &= 2\varepsilon_{nt} = 2 \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{ni} e_{tj} \quad (i, j = x, y, z) \\ 2\varepsilon_{nt} &= 2[\varepsilon_{xx} e_{nx} e_{tx} + \varepsilon_{xy}(e_{nx} e_{ty} + e_{ny} e_{tx}) + \varepsilon_{yy} e_{ny} e_{ty}] = \\ &= 2 \cdot 10^{-4} [-5.28 \cdot 0.8 \cdot 0.6 - 12.96(0.8^2 - 0.6^2) - 2.28 \cdot 0.6 \cdot 0.8] \\ D_{nt} &= 2\varepsilon_{nt} = -14.515 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

b. Zaradi preprostejšega dela vpeljemo reducirane vrednosti deformacij

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = 10^4 \varepsilon_{ij}$$

in določimo glavne vrednosti tenzorja majhnih deformacij kot rešitve naslednje enačbe

$$\begin{vmatrix} 5.28 - \bar{\varepsilon} & -12.96 & 0 \\ -12.96 & -2.28 - \bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \bar{\varepsilon} \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanto razvijemo po elementih tretje vrstice in dobimo

$$(-1 - \bar{\varepsilon})(\bar{\varepsilon}^2 - 3\bar{\varepsilon} - 180) = 0.$$

Prva dva korena dobimo iz pogoja

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 - 3\bar{\varepsilon} - 180 = (\bar{\varepsilon} - 15)(\bar{\varepsilon} + 12) = 0 & \quad \rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_{11} = 15 \\ & \quad \quad \quad \bar{\varepsilon}_{22} = -12, \end{aligned}$$

tretji koren pa iz pogoja

$$-1 - \bar{\varepsilon} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_{33} = -1.$$

Dejanske vrednosti glavnih linearnih deformacij so sedaj

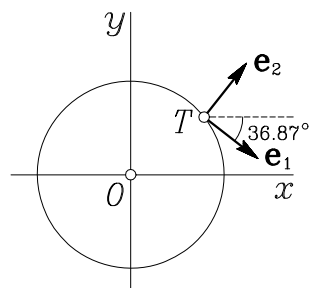
$$\varepsilon_{11} = 15 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_{22} = -12 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_{33} = -1 \cdot 10^{-4}.$$

Kakor vidimo iz sestave deformacijske matrike, je deformacija ε_{zz} že kar ena od glavnih normalnih deformacij ($\varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_{zz}$). Zato se glavna smer \mathbf{e}_3 ujema s smerjo \mathbf{e}_z , glavni smeri \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 pa določimo z enačbo (2.236) kakor pri ravninskem deformacijskem stanju

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_\varepsilon &= \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} = \frac{2 \cdot (-12.96)}{5.28 + 2.28} = -3.429 \\ 2\alpha_\varepsilon &= -73.74^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha_\varepsilon = -36.87^\circ. \end{aligned}$$

Upoštevajoč enačbi (1.313) dobimo (slika Z-2.6 c)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 0.8 \mathbf{e}_x - 0.6 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_2 &= 0.6 \mathbf{e}_x + 0.8 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$



Slika Z-2.6 c

Komponente glavnih vektorjev tvorijo transformacijsko matriko, ki diagonalizira matriko majhnih deformacij

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} 8.0 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bralcu prepuščamo, da se z uporabo enačbe (2.119) o tem sam prepriča.

Zgled 2.7

Komponente tenzorja majhnih deformacij so podane v telesnih koordinatah x, y, z , in sicer v odvisnosti od konstantnega parametra K . Določi to konstanto tako, da bo iz deformacij mogoče enolično izračunati pomike! Določi prostorske koordinate in telesne bazne vektorje delca $\mathcal{D}(3, 4, 0)$ po deformaciji telesa, ki je v točki $A(0, 0, 0)$ togo vpeto v nepomično podlago! Kako se med deformiranjem telesa spremenijo koordinate relativnega krajevnega vektorja $\Delta \mathbf{r}$ med delcema \mathcal{D} in $\mathcal{P}(3.06, 4.02, 0)$? Dolžine so podane v cm.

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2x^2 - Ky^2 & xy(3y - 2) & 0 \\ xy(3y - 2) & 3Kx^2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da bi lahko iz kinematičnih enačb enolično določili pomike in zasuke v poljubni točki telesa, morajo komponente tenzorja majhnih deformacij

izpolnjevati kompatibilnostne pogoje. V obravnavanem primeru gre za ravninsko deformacijsko stanje v ravnini (x, y) , kjer je kompatibilnostni pogoj izražen z enačbo (2.247)

$$K_{zz} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

V obravnavanem primeru dobimo

$$\begin{aligned} 10^4 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= -2K \\ 10^4 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 6Ky \\ 10^4 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 6y - 2 \end{aligned}$$

in po vstavitvi v kompatibilnostni pogoj sledi

$$10^4 K_{zz} = (K - 2)(6y - 2) = 0.$$

Pri poljubni vrednosti y je gornja enačba izpolnjena le, če velja

$$K - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad K = 2.$$

Matrika deformacij je tako

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2(x^2 - y^2) & xy(3y - 2) & 0 \\ xy(3y - 2) & 6x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

S tem lahko zapišemo vektorje deformacij, ki pripadajo smerem \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , kakor sledi

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 10^{-4} [2(x^2 - y^2) \mathbf{e}_x + xy(3y - 2) \mathbf{e}_y] \\ \varepsilon_y &= 10^{-4} [xy(3y - 2) \mathbf{e}_x + 6x^2y \mathbf{e}_y] \\ \varepsilon_z &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

V kartezijskem koordinatnem sistemu določamo zasuke z enačbo (2.192)

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \int_{x_0}^x [\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x]_{\substack{\eta=y_0 \\ \zeta=z_0}} d\xi + \int_{y_0}^y [\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y]_{\zeta=z_0} d\eta + \int_{z_0}^z \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z d\zeta,$$

pri čemer smo za izvrednotenje integralov s spremenljivo zgornjo mejo vpeljali integracijske spremenljivke $\xi \in [x_0, x]$, $\eta \in [y_0, y]$ in $\zeta \in [z_0, z]$. Kakor smo ugotovili v razdelku **2.10**, nastopa pri ravninskem deformacijskem stanju v ravnini (x, y) le zasuk $\omega_z \equiv \omega_{xy}$, preostala zasuka pa sta nič. Iz tretje od enačb (2.154) s tem sledi

$$\boldsymbol{\omega}_z = \omega_y \mathbf{e}_x - \omega_x \mathbf{e}_y = \mathbf{0}.$$

Zasuk ω_z določimo kot projekcijo vektorja $\boldsymbol{\omega}$ na smer \mathbf{e}_z , pri čemer upoštevamo, da je $\boldsymbol{\varepsilon}_z = \mathbf{0}$

$$\omega_z = \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega_z^0 + \int_{x_0}^x [\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x)]_{\eta=y_0} d\xi + \int_{y_0}^y \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y) d\eta.$$

Z ω_z^0 smo označili vrednost zasuka ω_z v referenčni točki $A(0, 0, 0)$, zato je $x_0 = 0$ in $y_0 = 0$. Ker je obravnavano telo v točki A togo vpeto, je $\omega_z^0 = \omega_z(A) = 0$.

Mešana produkta pod integrali izračunamo kot determinanti

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} = 10^{-4}(3y^2 + 2y)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} = 10^{-4}(6xy + 2x).$$

Tako dobimo

$$\omega_z = 10^{-4} \left(\int_0^x [3\eta^2 + 2\eta]_{\eta=0} d\xi + \int_0^y [6\xi\eta + 2\xi] d\eta \right).$$

Po integriranju sledi končni izraz za zasuk ω_z

$$\omega_z = 10^{-4} (3xy^2 + 2xy) .$$

Pomik \mathbf{u} poljubne točke telesa $T(x, y, z)$ je določen z enačbo (2.193)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x [\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega}_x]_{\substack{\eta=y_0 \\ \zeta=z_0}} d\xi + \int_{y_0}^y [\boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\omega}_y]_{\zeta=z_0} d\eta + \int_{z_0}^z [\boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\omega}_z] d\zeta .$$

Pomika u_x in u_y določimo s skalarnim množenjem gornje enačbe z enotskima vektorjema \mathbf{e}_x oziroma \mathbf{e}_y . Upoštevajoč, da je $\boldsymbol{\varepsilon}_z = \mathbf{0}$ in $\boldsymbol{\omega}_z = \mathbf{0}$, dobimo

$$\begin{aligned} u_x &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u} = u_x^0 + \int_0^x \mathbf{e}_x \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega}_x]_{\eta=0} d\xi + \int_0^y \mathbf{e}_x \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\omega}_y] d\eta , \\ u_y &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{u} = u_y^0 + \int_0^x \mathbf{e}_y \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega}_x]_{\eta=0} d\xi + \int_0^y \mathbf{e}_y \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\omega}_y] d\eta . \end{aligned}$$

Za izhodiščno točko smo spet izbrali točko $A(0, 0, 0)$, za katero velja

$$u_x^0 = u_x(A) = 0 \quad \text{in} \quad u_y^0 = u_y(A) = 0 .$$

Zato je

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^x [\varepsilon_{xx} + \omega_{xx}]_{\eta=0} d\xi + \int_0^y [\varepsilon_{yx} + \omega_{yx}] d\eta \\ u_y &= \int_0^x [\varepsilon_{xy} + \omega_{xy}]_{\eta=0} d\xi + \int_0^y [\varepsilon_{yy} + \omega_{yy}] d\eta . \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $\omega_{xx} = \omega_{yy} = 0$, $\omega_{xy} = -\omega_{yx} = \omega_z$, vstavimo izraze za deformacije in zasuk ω_z in po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} u_x &= 10^{-4} \left(\int_0^x 2\xi^2 d\xi - \int_0^y 4\xi\eta d\eta \right) \\ u_y &= 10^{-4} \left(\int_0^x [6\xi\eta^2]_{y=0} d\xi + \int_0^y 6\xi^2\eta d\eta \right) . \end{aligned}$$

Po integriranju in ureditvi sledi

$$u_x = \left(\frac{2x^3}{3} - 2xy^2 \right) \cdot 10^{-4}$$

$$u_y = 3x^2y^2 \cdot 10^{-4}.$$

Vektor pomika poljubnega delca je torej

$$\mathbf{u} = 10^{-4} \left[\left(\frac{2x^3}{3} - 2xy^2 \right) \mathbf{e}_x + 3x^2y^2 \mathbf{e}_y \right].$$

Dobljena enačba pove, kako se med deformiranjem telesa premakne delec s telesnimi koordinatami x, y, z . Prostorske koordinate x', y', z' poljubnega delca s telesnimi koordinatami x, y, z so v deformiranem stanju \mathbf{B}' določene z enačbami (2.12). V našem primeru dobimo

$$x' = x + u_x \quad \rightarrow \quad x' = x + \left(\frac{2x^3}{3} - 2xy^2 \right) \cdot 10^{-4}$$

$$y' = y + u_y \quad \rightarrow \quad y' = y + 3x^2y^2 \cdot 10^{-4}.$$

Zvezi med telesnimi in prostorskimi koordinatami poljubnega delca sta v obravnavanem primeru nelinearni. Zato tokrat ni mogoče izpeljati obratne zveze, ki bi v analitični obliki izražala telesne koordinate v odvisnosti od prostorskih koordinat. To bi lahko storili le numerično za vsako izbrano diskretno točko telesa, pri čemer bi za rešitev sistema dveh nelinearnih enačb z dvema neznankama uporabili katero od znanih metod, na primer Newtonovo tangentno metodo. Tako bi lahko rešili naslednjo nalogo: določi telesne koordinate delca, ki se v deformiranem stanju \mathbf{B}' nahaja v točki prostora x', y', z' !

Pomika delca $\mathcal{D}(3, 4, 0)$ sta

$$u_x(\mathcal{D}) = -0.00780 \text{ cm} \quad \text{in} \quad u_y(\mathcal{D}) = 0.04320 \text{ cm}.$$

Prostorske koordinate delca \mathcal{D} so tako

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(3, 4, 0) : \quad x' = 3 - 0.00780 & \quad \rightarrow \quad x' = 2.99220 \text{ cm} \\ y' = 4 + 0.04320 & \quad \rightarrow \quad y' = 4.04320 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Telesno koordinatno bazo poljubnega delca v deformiranem stanju \mathbf{B}' določimo z enačbami (2.22)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_x &= \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = [1 + 2(x^2 - y^2) \cdot 10^{-4}] \mathbf{e}_x + 6xy^2 \cdot 10^{-4} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}'_y &= \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = -4xy \cdot 10^{-4} \mathbf{e}_x + (1 + 6x^2y \cdot 10^{-4}) \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Za delec $\mathcal{D}(3, 4, 0)$ dobimo

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(3, 4, 0) : \quad \mathbf{e}'_x &= 0.99860 \mathbf{e}_x + 0.02880 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}'_y &= -0.00480 \mathbf{e}_x + 1.02160 \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Oglejmo si še spremembo relativnega krajevnega vektorja $\Delta \mathbf{r}$ med delcema \mathcal{D} in \mathcal{P} , ki sta v nedeformiranem stanju \mathbf{B} določena s krajevnima vektorjema $\mathbf{r}(\mathcal{D})$ in $\mathbf{r}(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\mathcal{D}) &= 3 \mathbf{e}_x + 4 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}(\mathcal{P}) &= 3.06 \mathbf{e}_x + 4.02 \mathbf{e}_y \\ \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\mathcal{P}) - \mathbf{r}(\mathcal{D}) = 0.06 \mathbf{e}_x + 0.02 \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Med deformiranjem telesa doživi delec \mathcal{D} pomik $\mathbf{u}(\mathcal{D})$, delec \mathcal{P} pa pomik $\mathbf{u}(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathcal{D}) &= -0.00780 \mathbf{e}_x + 0.04320 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{u}(\mathcal{P}) &= -0.00798 \mathbf{e}_x + 0.04540 \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Novi legi delcev \mathcal{D} in \mathcal{P} v stanju \mathbf{B}' določata krajevna vektorja $\mathbf{r}'(\mathcal{D})$ in $\mathbf{r}'(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(\mathcal{D}) &= \mathbf{r}(\mathcal{D}) + \mathbf{u}(\mathcal{D}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}'(\mathcal{D}) = 2.99220 \mathbf{e}_x + 4.04320 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}'(\mathcal{P}) &= \mathbf{r}(\mathcal{P}) + \mathbf{u}(\mathcal{P}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}'(\mathcal{P}) = 3.05202 \mathbf{e}_x + 4.06540 \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Relativni krajevni vektor $\Delta \mathbf{r}'$ v stanju \mathbf{B}' je tako

$$\Delta \mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathcal{P}) - \mathbf{r}'(\mathcal{D}) \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{r}' = 0.05982 \mathbf{e}_x + 0.02220 \mathbf{e}_y.$$

Glede na to, da je $\Delta \mathbf{r}$ majhen krajevni vektor, lahko njegovo spremembo med deformiranjem telesa približno določimo tudi z enačbo (2.25), ki sicer velja za infinitezimalno majhne krajevne vektorje

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r}' &\approx \Delta x \mathbf{e}'_x + \Delta y \mathbf{e}'_y \\ &= 0.06 (0.99860 \mathbf{e}_x + 0.02880 \mathbf{e}_y) + 0.02 (-0.00480 \mathbf{e}_x + 1.02160 \mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{r}' \approx 0.05982 \mathbf{e}_x + 0.02216 \mathbf{e}_y.$$

Kakor vidimo, smo za komponento v smeri \mathbf{e}_x dobili “točno” vrednost, pri komponenti v smeri \mathbf{e}_y pa smo naredili majhno napako (-0.18%).

Zgled 2.8

Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x, z . Vse točke telesa se premikajo le v ravnini (x, z) . Razen tega je točka $T_0(0, 0, 0)$ nepomično, a vrtljivo podprta, v točki $T_1(10, 0, 0)$ pa je preprečen pomik v smeri z . Določi pomika u_x in u_z ter zasuk ω_y kot funkcije koordinat (x, z) ! Določi vrednosti zasukov ω_y v obeh podporah, pomik u_x v točki T_1 ter vrednosti obeh pomikov in zasuka ω_y v točki $T(5, 0, 0.5)$! Dolžine so podane v m.

$$\varepsilon_{xx} = 8x \cos 2\pi z \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zz} = -100xz \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = [-x^2(3 + 4\pi \sin 2\pi z) - 25z^2 + 15x + 25] \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zy} = 0$$

$$u_x(0, 0, 0) \equiv u_x^0 = 0$$

$$u_z(0, 0, 0) \equiv u_z^0 = 0$$

$$u_z(10, 0, 0) \equiv u_z^1 = 0$$

Preden se lotimo določanja zasukov in pomikov, preverimo, če sploh smemo pričakovati enolične rešitve. Te so zagotovljene, če je izpolnjen pogoj kompatibilnosti, ki se pri ravninskem deformacijskem stanju v ravnini (x, z) izraža z enačbo (2.249)

$$K_{yy} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = 0.$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned} 10^4 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= 0 \\ 10^4 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= -32\pi^2 x \cos 2\pi z \\ 10^4 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= -16\pi^2 x \cos 2\pi z \end{aligned}$$

in kompatibilnostni pogoj je identično izpolnjen.

V kartezijskem koordinatnem sistemu določimo rezultirajoči vektor zasuka $\boldsymbol{\omega}$ z enačbo (2.192). Spet vpeljemo integracijske spremenljivke ξ , η , ζ in dobimo

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \int_{x_0}^x [\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x]_{\substack{\eta=y_0 \\ \zeta=z_0}} d\xi + \int_{y_0}^y [\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_y]_{\zeta=z_0} d\eta + \int_{z_0}^z \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z d\zeta.$$

Pri tem je v našem primeru

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_{xx} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{xz} \mathbf{e}_z \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z = \varepsilon_{zx} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{zz} \mathbf{e}_z.$$

Povprečni zasuk ω_y v ravnini (x, z) določimo kot projekcijo vektorja $\boldsymbol{\omega}$ na smer enotskega vektorja \mathbf{e}_y

$$\omega_y = \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega_y^0 + \int_{x_0}^x [\mathbf{e}_y \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x)]_{\substack{\eta=y_0 \\ \zeta=z_0}} d\xi + \int_{z_0}^z \mathbf{e}_y \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) d\zeta.$$

Pri tem smo z ω_y^0 označili vrednost zasuka ω_y v točki $T_0(0, 0, 0)$. To pomeni, da smo za referenčno točko za določitev zasuka ω_y izbrali točko

T_0 , čeprav zasuka v tej točki zaenkrat še ne poznamo. Mešana produkta v gornji enačbi sta

$$\mathbf{e}_y \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varepsilon_{xx} & 0 & \varepsilon_{xz} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x}$$

$$\mathbf{e}_y \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_x) = [2x(3 - 4\pi \sin 2\pi z) - 15] \cdot 10^{-4}$$

$$\mathbf{e}_y \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varepsilon_{zx} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x}$$

$$\mathbf{e}_y \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}_z) = (50z - 8\pi^2 x^2 \cos 2\pi z) \cdot 10^{-4}.$$

Zasuk ω_z je sedaj

$$\begin{aligned} \omega_y &= \omega_y^0 + 10^{-4} \int_0^x [2\xi(3 - 4\pi \sin 2\pi \zeta) - 15]_{z=0} d\xi + \\ &10^{-4} \int_0^z (50\zeta - 8\pi^2 \xi^2 \cos 2\pi \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Po integriranju sledi izraz za zasuk ω_y

$$\omega_y = \omega_y^0 + 10^{-4} [x^2(3 - 4\pi \sin 2\pi z) + 25z^2 - 15x].$$

Pomik \mathbf{u} poljubne točke telesa $T(x, y, z)$ je določen z enačbo (2.193)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^x [\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega}_x]_{\substack{\eta=y_0 \\ \zeta=z_0}} dx + \int_{y_0}^y [\boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\omega}_y]_{z=z_0} d\eta + \int_{z_0}^z [\boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\omega}_z] d\zeta.$$

Pomika u_x in u_z določimo s skalarnim množenjem gornje enačbe z enotskima vektorjema \mathbf{e}_x oziroma \mathbf{e}_z . Če za izhodiščno točko spet izberemo kar točko T_0 , dobimo

$$u_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u} = u_x^0 + \int_0^x \mathbf{e}_x \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega}_x]_{z=0} dx + \int_0^z \mathbf{e}_x \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\omega}_z] dz$$

$$u_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} = u_z^0 + \int_0^x \mathbf{e}_z \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega}_x]_{z=0} dx + \int_0^z \mathbf{e}_z \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\omega}_z] dz.$$

V izhodiščni točki T_0 sta preprečena oba pomika ($u_x^0 = u_z^0 = 0$), tako da velja

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^x [\varepsilon_{xx} + \omega_{xx}]_{\zeta=0} d\xi + \int_0^z [\varepsilon_{zx} + \omega_{zx}] d\zeta \\ u_z &= \int_0^x [\varepsilon_{xz} + \omega_{xz}]_{\zeta=0} d\xi + \int_0^z [\varepsilon_{zz} + \omega_{zz}] d\zeta. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $\omega_{xx} = \omega_{zz} = 0$, $\omega_{zx} = -\omega_{xz} = \omega_y$, vstavimo izraze za deformacije in zasuk ω_y in po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} u_x &= 10^{-4} \left(\int_0^x [8\xi \cos 2\pi\zeta]_{z=0} d\xi + \right. \\ &\quad \left. \int_0^z (10^4 \omega_y^0 + 25 - 8\pi\xi^2 \sin 2\pi\zeta) d\zeta \right) \\ u_z &= 10^{-4} \left(\int_0^x (-10^4 \omega_y^0 - 6\xi^2 + 30\xi + 25) d\xi - \int_0^z 100 \xi \zeta d\zeta \right). \end{aligned}$$

Po integriranju in ureditvi sledi

$$\begin{aligned} u_x &= z \omega_y^0 + 10^{-4} (4x^2 \cos 2\pi z + 25z) \\ u_z &= -x \omega_y^0 + 10^{-4} [-2x^3 + 15x^2 + 25x(1 - z^2)]. \end{aligned}$$

Zasuk ω_y v izhodiščni točki T_0 določimo ob pogoju, da je pomik u_z^1 v točki $T_1(10, 0, 0)$ enak nič

$$\begin{aligned} u_z(10, 0, 0) &= -10 \omega_y^0 + 10^{-4} (-2 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10) = 0 \\ \omega_y^0 &= -25 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

S tem dobimo končno obliko funkcij pomikov in zasuka ω_y

$$\begin{aligned} u_x &= 10^{-4} \cdot 4x^2 \cos 2\pi z \\ u_z &= 10^{-4} [-2x^3 + 15x^2 + 50x(1 - z^2)] \\ \omega_y &= 10^{-4} [x^2(3 - 4\pi \sin 2\pi z) - 15x - 25(1 - z^2)]. \end{aligned}$$

(Kontrola: Vstavi parcialne odvode dobljenih funkcij pomikov v kinematične enačbe in preveri, če so te izpolnjene!)

Preostali del naloge je čisto preprost. V izraze za pomika u_x in u_z ter zasuk ω_y vstavimo koordinate točk T_1 in T ter izračunamo vrednosti pomikov in zasuka v teh točkah. Rezultati so zbrani v preglednici.

Točka	$T_0(0, 0, 0)$	$T_1(10, 0, 0)$	$T(5, 0, 0.5)$
u_x (m)	0	0.040000	-0.010000
u_z (m)	0	0	0.031250
ω_y (rad)	-0.002500	0.012500	-0.001875

SOVISNOSTI MED NAPETOSTMI IN DEFORMACIJAMI

3.1 Splošno o sovisnostih med napetostmi in deformacijami

V prvem poglavju smo napetostno stanje opazovanega materialnega delca in s tem tudi obravnavanega trdnega telesa opisali s šestimi neodvisnimi komponentami simetričnega tenzorja napetosti. Izpeljali smo sistem treh enačb ravnotežja s pripadajočimi robnimi pogoji, s katerimi smo napetosti povezali z zunanjo površinsko in prostorninsko obtežbo. Izpeljane enačbe so neodvisne od materialnih lastnosti obravnavanega telesa in jih torej lahko uporabljamo pri vseh modelih teles iz zvezne snovi. Prav tako smo v drugem poglavju neodvisno od vrste in lastnosti snovi izpeljali kinematične enačbe, ki predstavljajo zveze med tremi komponentami vektorskega polja pomikov in šestimi neodvisnimi komponentami simetričnega tenzorja majhnih deformacij.

Izkušnje pa nas učijo, da se telesa iz različnih materialov različno odzivajo na enako zunanjo obtežbo. Tako se, na primer, gumijast trak pri isti vzdolžni sili veliko bolj raztegne kot jeklen trak enakih dimenzij. Da bi lahko povezali zunanjo obtežbo s pomiki, moramo torej poiskati novo skupino enačb, ki opisujejo medsebojno odvisnost napetosti in deformacij. Do takega sklepa nas pripelje še drug razmislek. Doslej smo izpeljali tri ravnotežne in šest kinematičnih, skupaj torej devet enačb. V teh enačbah nastopa šest napetosti, šest deformacij in trije pomiki, skupaj petnajst neznanih funkcij. Vpeljati moramo torej še šest enačb, da bi bil mehanski problem trdnega telesa enolično rešljiv. Te enačbe imenujemo *materialne* ali *konstitucijske enačbe*. Pogosto, na primer v naslovu tega poglavja, je v rabi tudi izraz *sovisnosti med napetostmi in deformacijami*, čeprav je nekoliko ohlapen, saj v njih lahko nastopajo

še druge spremenljivke (temperatura, vlažnost, čas).

Struktura materiala

Osnovna značilnost snovi, ki odločilno vpliva na njeno mehansko obnašanje, je *struktura*. To je način, kako so molekule sestavljene v kompaktno celoto. Glede na strukturo lahko trdne snovi v grobem razdelimo na *amorfne*, *kristalne* in *kristalaste*. Amorfne snovi so sestavljene iz popolnoma naključno razvrščenih in medsebojno povezanih osnovnih delcev. Med amorfne materiale spada na primer steklo, guma, nekatere plastične mase, smole in podobne snovi. Nasprotno pa je za kristalne snovi značilna po posebnih zakonitostih urejena razvrstitev in medsebojna povezava molekul. Kristalno strukturo lahko opazimo predvsem pri mineralih. Kristalaste snovi so sicer sestavljene iz pravih kristalov, ki pa so lahko različnih oblik in orientacije ter brez posebnega pravila povezani med seboj. Kristalasta struktura je značilna za jeklo in druge kovine. Med kristalaste snovi uvrščamo tudi sestavljene materiale, kot je na primer beton, pri katerem so mineralna zrna različnih velikosti in leg s cementnim vezivom povezana med seboj.

Izotropija in anizotropija

Od strukture je v največji meri odvisno, ali se snov obnaša *izotropno* ali *anizotropno*. *Izotropija* je lastnost snovi, da se obnaša enako v vseh smereh, in je posebej značilna za amorfne snovi. Tudi kristalastim snovem navadno pripišemo izotropne lastnosti. Čeprav je vsak od kristalov, ki sestavljajo tako snov, sam zase anizotropen, se telo zaradi njihove naključne razporeditve v celoti obnaša kot izotropno. Snovi s kristalno strukturo pa se praviloma obnašajo anizotropno, kar pomeni, da so njihove mehanske lastnosti v različnih smereh različne. Zaradi pravilne kristalne strukture je navadno možno določiti končno število značilnih smeri anizotropije. Take posebne oblike anizotropije je mogoče opaziti tudi pri nekaterih organskih materialih (les, usnje,...), pri katerih so molekule razporejene v enako orientiranih vlaknih. Posebej za les so značilne občutne razlike v mehanskih lastnostih v smeri

vlaknen ter v smereh radialno in tangencialno na smer letnic. Zaradi posebnosti tehnološkega postopka pri izdelavi elementov lahko pride do anizotropnega obnašanja tudi pri nekaterih materialih, ki imajo sicer kristalasto strukturo. Značilen primer je vroče valjana pločevina, pri kateri so mehanske lastnosti v smeri valjanja drugačne kakor pravokotno na to smer.

Homogenost in nehomogenost

Telesa, ki imajo v vsaki točki znotraj območja, ki ga zasedajo v prostoru, enako strukturo, gostoto in mehanske lastnosti, imenujemo *homogena*. Nasprotno se pri *nehomogenih* telesih nekatere ali vse navedene značilnosti spreminjajo od točke do točke. Amorfnna in kristalasta telesa so ponavadi homogena. Prav tako običajno obravnavamo kot homogen material narmiran beton, čeprav je sestavljen iz zrn peska in gramoza ter cementnega veziva. Beton, ojačen z jeklenimi palicami, pa je izrazit primer nehomogenega materiala.

3.2 Idealna telesa – materialni modeli

Medtem ko so ravnotežne in kinematične enačbe v okviru privzetih omejitev glede velikosti deformacij enake za vse vrste zvezne snovi, se sovisnosti med napetostmi in deformacijami pri različnih realnih materialih močno razlikujejo. Razen fizikalno kemijske narave snovi vplivajo nanje tudi različni načini delovanja zunanje obtežbe (statična, dinamična,...), temperatura, vlažnost, pri nekaterih snoveh pa tudi čas.

Že v uvodu smo omenili, da je formulacija zvez med napetostmi in deformacijami zelo zapletena naloga. Predvsem ni mogoče pričakovati, da bi lahko enovito zapisali te zveze za vse materiale, s katerimi imamo opraviti v tehniki. Pomagamo si z vpeljavo tako imenovanih *idealnih teles*, ki jim pripišemo poenostavljene mehanske lastnosti čim večje skupine realnih teles, za katere je značilno podobno mehansko obnašanje v določenih razmerah. Gre torej spet za računske modele, tokrat jih imenujemo

tudi *materialni modeli*, s katerimi skušamo čim preprosteje, pa vendar v mejah vnaprej predpisane natančnosti opisati dejansko obnašanje materialov.

Pri tem gre v glavnem za dve skupini idealnih teles. V prvo skupino uvrščamo telesa, pri katerih lahko vpliv časa na razvoj napetosti in deformacij zanemarimo in jih imenujemo *časovno neodvisna idealna telesa*. S takimi telesi se pretežno ukvarjamo tudi v tej knjigi. Na koncu poglavja pa se na kratko posvetimo tudi bolj splošnim *časovno odvisnim idealnim telesom*, ki vključujejo tudi vpliv časa na sovisnosti med napetostmi in deformacijami.

Med časovno neodvisnimi idealnimi telesi sta v mehaniki trdnih teles bistvenega pomena *idealno elastično* ali *Hookovo*[†] telo in *idealno plastično* ali *Saint-Venantovo*[‡] telo. Osnovo za matematično modeliranje časovno odvisnih idealnih teles pa razen že omenjenih dveh predstavlja tako imenovana *viskozna* ali *Newtonova* tekočina. Na lastnostih teh treh idealnih teles so zgrajene osnovne discipline *klasične mehanike zvezne snovi: teorija elastičnosti, teorija plastičnosti* in *hidromehanika*.

Seveda pa z lastnostmi omenjenih treh idealnih teles ni mogoče opisati dejanskega obnašanja raznovrstnih snovi pri različnih tehnoloških procesih in v različnih razmerah delovanja. Za obravnavanje različnih, praviloma časovno odvisnih problemov, s katerimi se srečamo v tehniki, je bilo treba razviti vrsto novih idealnih teles z zelo zapletenimi lastnostmi. To je naloga posebne veje mehanike, imenovane *reologija*, znotraj katere nastopajo Hookovo, Saint-Venantovo in Newtonovo telo kot posebni primeri. S smiselnimi kombinacijami teh osnovnih teles skuša reologija čim verneje posnemati dejansko, zapleteno obnašanje različnih snovi, na primer zemljin, betona, smol, kovin pri visokih temperaturah, lesa in drugih materialov.

[†] Robert Hooke, angleški inženir, 1635–1703.

[‡] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, francoski matematik in fizik, 1797–1886.

Splošni pristop pri snovanju idealnih teles lahko v grobem razdelimo na dve fazi. Najprej glede na izkušnje, pridobljene z opazovanjem obnašanja skupine sorodnih snovi, izberemo funkcijsko obliko sovisnosti med deformacijami, napetostmi, temperaturo in časom, s katero skušamo v kvalitativnem smislu opisati to obnašanje. V drugi fazi pa na osnovi ustreznega števila eksperimentalnih podatkov določimo parametre teh sovisnosti, s čimer opredelimo konstitucijske enačbe opazovanega materiala tudi v kvantitativnem pogledu – pravimo, da materialni model kalibriramo. Kakor smo že omenili, je praviloma lažje sestaviti materialni model časovno neodvisnega telesa, še posebej v izotermnem primeru, ko se tudi temperatura snovi ne spreminja. V tem primeru lahko navadno že z razmeroma majhnim številom eksperimentov ugotovimo primerno funkcijsko obliko zvez med napetostmi in deformacijami ter dosežemo zadovoljivo natančnost nastopajočih parametrov. Pomemben podatek pri tovrstnih materialih je, ali se v določenem napetostnem območju obnašajo *elastično* ali *neelastično*. Elastična so telesa, ki se med delovanjem zunanje obtežbe sicer deformirajo, vendar se po popolni razbremenitvi povrnejo v prvotno velikost in obliko. Telesa, ki tudi po popolni razbremenitvi ohranijo deformirano obliko in velikost, so idealno plastična. Najpogosteje pa se telesa obnašajo elastično–plastično, kar pomeni, da se po razbremenitvi del deformacije izgubi, del pa se ohrani.

3.3 Eksperimentalni podatki. Enoosni in strižni poskus

V odvisnosti od vrste preiskovanega materiala so znane številne eksperimentalne metode, s katerimi skušamo pridobiti čim več pomembnih podatkov o obnašanju materiala pri značilnih načinih in pogojih obteževanja. Najpogostejša in najpreprostejša metoda preiskave je enoosni natezni poskus na valjastem ali prizmatičnem vzorcu. Ta poskus je posebej primeren za preiskave kovinskih materialov. Pri drugih materialih so pogosto potrebne še dodatne preiskave, na primer

tlačne, upogibne in torzijske preiskave pri betonu in lesu, strižne in triaksialne preiskave zemljin in podobno.

Enoosni natezni poskus

Kot rečeno, je enoosni natezni poskus najpreprostejši način določitve osnovnih mehanskih parametrov materiala. Pri tem gre za preiskavo valjastega ali prizmatičnega vzorca standardiziranih dimenzij in oblike pri natezni osni obtežbi.

Kot primer si oglejmo rezultate enoosnega nateznega poskusa na vzorcu mehkega konstrukcijskega jekla, ki predstavlja značilno obnašanje razmeroma velike skupine trdnih snovi. Praviloma izvajamo tovrstne preiskave pri konstantni temperaturi $T = 20\text{ °C}$, standardizirana pa je tudi hitrost obteževanja. Vzorec vstavimo v trgalni stroj, ki omogoča hkratno merjenje osne obtežbe vzorca (natezne osne sile) N , vzdolžnega podaljška Δl in prečnega skrčka Δd . Pri znani začetni merski dolžini vzorca l in znanem začetnem premeru d lahko pri vsaki doseženi vrednosti natezne osne sile N izračunamo velikost enakomerne vzdolžne normalne napetosti σ_l , pripadajočo specifično spremembo dolžine v vzdolžni (longitudinalni) smeri ε_l in specifično spremembo dolžine v prečni (transverzalni) smeri ε_t . Praviloma določamo tako imenovano *nazivno* (nominalno) ali *inženirsko* vrednost vzdolžne normalne napetosti σ_l , ki se nanaša na začetno ploščino A prečnega prereza nedeformiranega vzorca

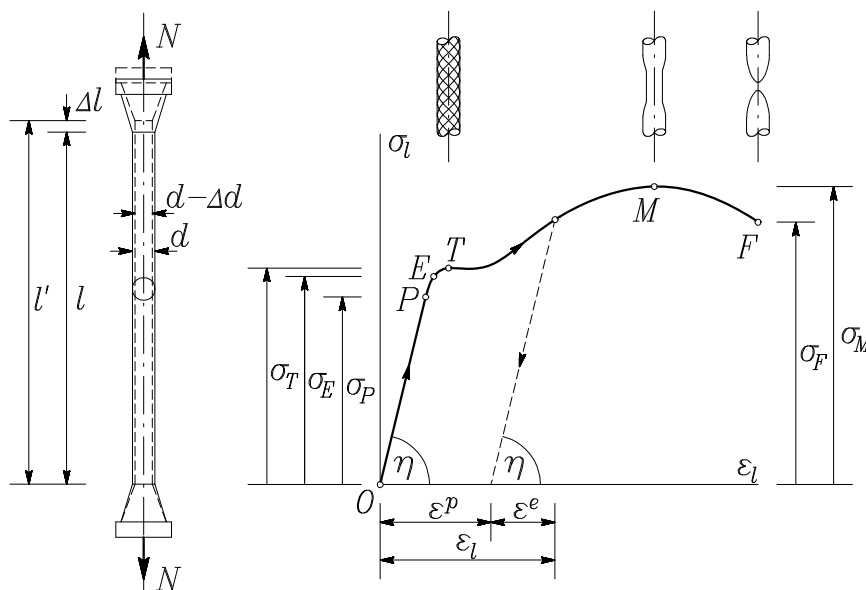
$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad \sigma_l = \frac{N}{A}. \quad (3.1)$$

Tudi specifični spremembi dolžin ε_l v vzdolžni smeri in ε_t prečno na vzdolžno os vzorca izrazimo glede na nedeformirane izmere vzorca

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d}. \quad (3.2)$$

Medsebojno odvisnost med nazivno vzdolžno normalno napetostjo σ_l in vzdolžno specifično spremembo dolžine ε_l običajno prikažemo v diagramu, ki mu pravimo $\sigma-\varepsilon$ diagram ali *delovni diagram materiala*. Na

sliki 3.1 je prikazan $\sigma - \varepsilon$ diagram mehkega konstrukcijskega jekla. Na diagramu lahko opazimo nekatere značilne točke oziroma območja, s katerimi so določene glavne mehanske lastnosti opazovanega materiala.



Slika 3.1

Začetni del diagrama med točkama O in P poteka po premici, kar pomeni, da v tem območju napetost σ_l narašča premosorazmerno z relativnim raztezkom ε_l . Napetost, ki ustreza točki P , imenujemo *meja proporcionalnosti* in jo označimo s σ_P . Dokler napetost v vzorcu ne doseže meje proporcionalnosti, je zveza med napetostjo in deformacijo linearna. Če v tem območju vzorec razbremenimo, poteka razbremenitev po isti premici kot obremenitev. Pri popolni razbremenitvi do točke O tudi deformacija v celoti izgine. Take deformacije imenujemo *elastične deformacije*, lastnost snovi, da se po prenehanju obremenitve povrne v nedeformirano stanje, pa *elastičnost*.

Pri povečevanju napetosti nad mejo proporcionalnosti σ_P zveza med deformacijo in napetostjo ni več linearna, vendar pa tudi za to območje

velja, da po razbremenitvi deformacija izgine. Tako obnašanje imenujemo *nelinearna elastičnost* in ga lahko opazujemo vse dotlej, dokler napetost ne doseže vrednosti σ_E . To napetost imenujemo *meja elastičnosti* in je v $\sigma-\varepsilon$ diagramu označena s točko E .

Pri napetostih nad mejo elastičnosti σ_E se značaj deformacij bistveno spremeni. Že majhno povečanje napetosti povzroči občutno večji prirastek raztezka kakor v elastičnem področju. Na polirani površini vzorca lahko z natančnim opazovanjem opazimo poševne črte, ki so glede na vzdolžno smer nagnjene približno za 45° . To so tako imenovane *Lüdersove linije*[†], ki nastanejo zaradi medsebojnih zdrsov kristalov v ravninah največjih strižnih napetosti. Ko napetost doseže točko T , material ne nudi več odpora nadaljnjemu raztezanju; raztezek raste pri konstantni ali celo padajoči nazivni napetosti. Pravimo, da material *plastično teče*. Vrednost napetosti σ_T imenujemo *meja tečenja*. Pogosto sta v rabi tudi izraza *meja velikih raztezkov* pri natezni oziroma *meja gnetenja* pri tlačni obtežbi kovinskih elementov.

Po začetnem hitrem naraščanju deformacije nad mejo tečenja se material spet začne opazneje upirati nadaljnjemu raztezanju; deformacija raste le ob povečevanju napetosti. Ta pojav imenujemo *utrditev materiala*. Opazujemo ga lahko vse do točke M , kjer napetost doseže svojo največjo vrednost σ_M . To napetost imenujemo *natezna trdnost materiala*. Od tod naprej obremenitve vzorca ne moremo več povečevati; nazivna napetost pada, deformacija pa se še povečuje, dokler se vzorec pri napetosti σ_F ne pretrga oziroma “poruši”. Napetost σ_F imenujemo *napetost pri porušitvi* ali *porušna napetost*.

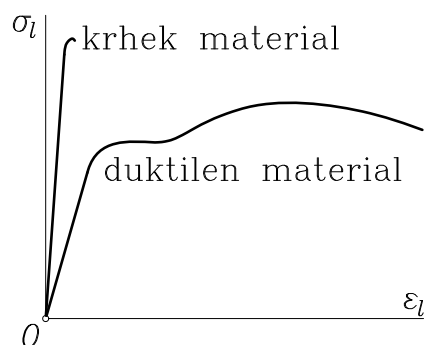
Za celotno območje $\sigma-\varepsilon$ diagrama nad mejo elastičnosti E je značilno, da se pri razbremenitvi vzorec ne vrne v začetno obliko in velikost, temveč poteka razbremenjevanje približno vzporedno smeri OP , torej vzporedno z linearno elastičnim delom diagrama. Od celotne dosežene deformacije ε_l se torej pri razbremenitvi en del izgubi, drugi del pa

[†] Pojav je leta 1859 odkril in opisal nemški inženir W. Lüders.

ostane. Deformacijo ε_l lahko torej zapišemo kot vsoto

$$\varepsilon_l = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (3.3)$$

Povračljivi del ε^e imenujemo *elastična deformacija*, nepovračljivi del ε^p pa *plastična deformacija*. Lastnost materiala, da se v njem pojavijo plastične deformacije, imenujemo *plastičnost*. V $\sigma - \varepsilon$ diagramu lahko torej ločimo dve območji: *elastično območje* med točkama O in E in *elastično-plastično območje* med točkama E in F . V elastičnem območju je celotna deformacija elastična, v elastično-plastičnem območju pa je celotna deformacija sestavljena iz elastičnega in plastičnega dela. Kakor vidimo, se lahko isti material obnaša kot elastičen ali kot elastično-plastičen, pač v odvisnosti od velikosti dosežene napetosti oziroma deformacije.



Slika 3.2

Pri obravnavanju mehanskih lastnosti materialov pogosto uporabljamo pojma *žilavost* in *krhkost* (slika 3.2). Žilavi ali *duktilni* so materiali z izrazitimi območji elastičnega in plastičnega obnašanja, ki pred porušitvijo dosežejo znatne plastične deformacije[†]. Značilna predstavnika žilavih snovi sta mehko jeklo in les. Za krhke snovi (kamen, steklo, nekatera jekla, lito železo, ...) je nasprotno značilno, da imajo

[†] Pojem žilavosti pogosto uporabljamo tudi za opis sposobnosti snovi za prenašanje ponavljajoče se obtežbe v plastičnem območju.

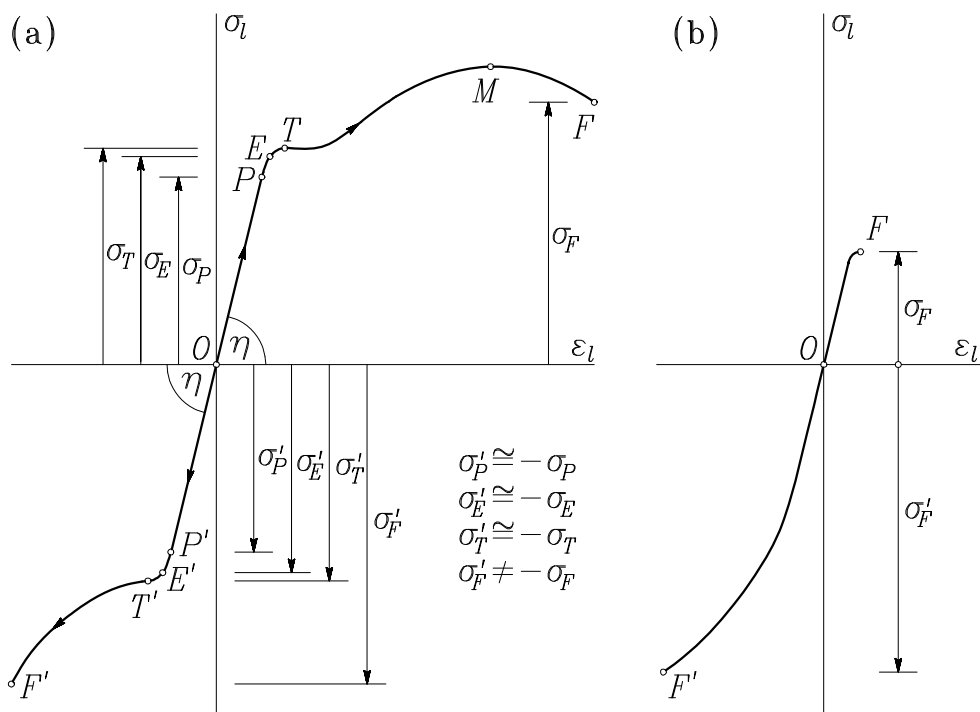
majhno sposobnost deformiranja. Pri naraščanju napetosti se deformacija le počasi povečuje, nato pa nenadoma pride do porušitve vzorca. Od celotne dosežene deformacije je le neznamenit del plastičen. Tak način porušitve imenujemo *krhki lom*. Za krhke materiale je značilno, da je porušna napetost pri natezni obremenitvi praviloma manjša kakor pri tlačni obremenitvi. Posebej omenimo še tako imenovane *plastične materiale* (plastelin, glina, asfalt, ...), ki praktično nimajo elastičnega območja in se v celoti plastično deformirajo.

Opozoriti pa moramo, da je opisana razdelitev materialov le pogojna. Diagram $\sigma-\varepsilon$ namreč definira mehanske lastnosti preizkušane materiala pri enoosnem napetostnem stanju, pri konstantni temperaturi in pri predpisani hitrosti obteževanja. V drugačnih razmerah se lahko isti material obnaša povsem drugače. Zlasti je pomemben vpliv temperature, saj se pri segrevanju praviloma povečuje žilavost oziroma duktilnost, medtem ko isti material pri nizkih temperaturah postane krhek. Jeklo pri visokih temperaturah postane povsem plastično in tekoče, pri nizkih temperaturah pa se obnaša kot zelo krhek material. Podobno lahko ugotovimo, da nekateri materiali pri počasnem povečevanju obtežbe dosežejo visoke napetosti in velike plastične deformacije, pri hipni obremenitvi pa se že pri manjši obtežbi porušijo s krhkim lomom.

Torej bi bilo umestno govoriti o stanjih, v katerih se pri določenih pogojih nahaja material (elastično, plastično, krhko, žilavo stanje). Vendar običajno uporabljamo prej navedeno razdelitev na elastične, elastično-plastične, krhke, žilave materiale; taka razdelitev namreč v večini primerov ustreza normalnim pogojem, v kakršnih te materiale uporabljamo v tehniki, zlasti v gradbeništvu.

Vrnimo se k $\sigma-\varepsilon$ diagramu, ki prikazuje sovisnost med napetostjo in deformacijo pri enoosnem nateznem poskusu valjastega vzorca. Pri duktilnih kovinskih materialih dobimo podobno sliko tudi pri tlačnem poskusu (*slika 3.3-a*), kar pomeni, da je $\sigma-\varepsilon$ diagram v elastičnem območju in v začetnem delu elastično-plastičnega območja približno "antisimetričen". Pri krhkih materialih pa je, kot že rečeno, absolutna

vrednost porušne napetosti v tlaku znatno večja od porušne napetosti v nategu (slika 3.3-b).



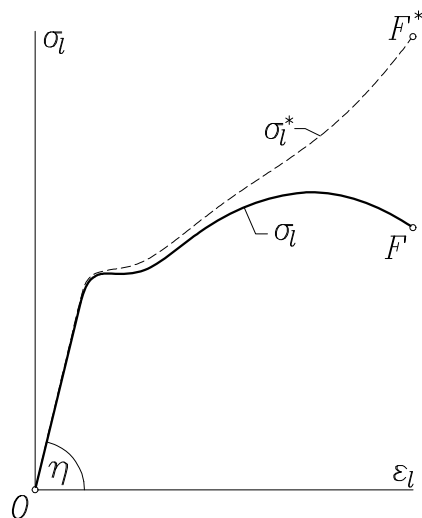
Slika 3.3

Razlika med obnašanjem pri natezni oziroma pri tlačni obremenitvi je še posebej opazna pri betonu, za katerega je znano, da dobro prenaša tlačne napetosti, medtem ko je njegova natezna trdnost praktično zanemarljiva. Tudi načini preizkušanja so pri betonu precej bolj zapleteni kakor pri kovinah. V tej knjigi se podrobnejši obravnavi mehanskih lastnosti betona odpovedujemo, saj nam gre predvsem za razlago osnovnih principov in izpeljavo konstitucijskih enačb za preproste materialne modele.

Dejanski $\sigma-\varepsilon$ diagram. Logaritemska deformacija

Pri opisu standardnega $\sigma-\varepsilon$ diagrama smo poudarili, da gre za sovisnost med nazivno vzdolžno normalno napetostjo σ_l in celotno doseženo

specifično spremembo dolžine vzorca. To pomeni, da smo vzdolžno normalno napetost med celotnim poskusom določali kot razmerje med osno silo N in ploščino A prečnega prereza nedeformiranega vzorca.



Slika 3.4

Vendar lahko med enoosnim poskusom z merjenjem spremembe premera vzorca Δd zasledujemo tudi razvoj specifične spremembe dolžine v prečni smeri glede na vzdolžno os vzorca. Ugotovimo lahko, da vzdolžnemu raztežku ustreza skrčec v prečni smeri. To je razumljivo, saj je osnovna lastnost trdnih teles ravno ta, da se “upirajo” spremembi prostornine. V elastičnem območju in v začetnem delu elastično-plastičnega območja diagrama je prečna deformacija razmeroma majhna in enakomerna po celotni dolžini vzorca. V območju velikih plastičnih deformacij in največjih napetosti pa pride do izrazite lokalne zožitve in končno do pretrganja oziroma porušitve vzorca. Dejanska vzdolžna napetost σ_l^* , ki je določena kot razmerje med osno silo N in trenutno ploščino A' , je zato ves čas večja od nazivne napetosti σ_l . V začetnem delu diagrama je razlika praktično zanemarljiva, v območju izrazite lokalne zožitve pa je odstopanje bistveno večje in kaže, da se dejanska napetost v resnici povečuje vse do porušitve vzorca (slika 3.4).

Iz oblike σ – ε diagrama lahko razberemo, da po prestopu meje tečenja raztezek zelo hitro narašča. Tako pridemo v območje velikih deformacij, kjer določitev specifične spremembe dolžine glede na celotno spremembo dolžine vzorca in njegovo začetno dolžino ni več povsem upravičena. Boljšo mero za trenutni raztezek dobimo z naslednjim razmislekom. Vzemimo, da je v določenem trenutku obteževanja skupna sprememba dolžine Δl . Trenutna deformirana dolžina vzorca l' je torej

$$l' = l + \Delta l. \quad (3.4)$$

Pri infinitezimalnem prirastku obtežbe za dN se dolžina vzorca spremeni za dl . Tej spremembi ustreza prirastek prave (trenutne) vzdolžne deformacije $d\epsilon_l$, ki ga izračunamo glede na doseženo dolžino vzorca l'

$$d\epsilon_l = \frac{dl}{l'}. \quad (3.5)$$

Celotno vzdolžno deformacijo dobimo z integriranjem gornje enačbe v mejah od začetne dolžine l do trenutne dolžine l'

$$\epsilon_l = \int_l^{l'} \frac{dl}{l'} = \ln \frac{l'}{l}. \quad (3.6)$$

To je tako imenovana *logaritemska deformacija*, ki je z deformacijo ϵ_l povezana z enačbo

$$\epsilon_l = \ln \frac{l + \Delta l}{l} = \ln(1 + \epsilon_l). \quad (3.7)$$

Prirastek logaritemske deformacije $d\epsilon_l$ je tako

$$d\epsilon_l = \frac{d\epsilon_l}{1 + \epsilon_l}. \quad (3.8)$$

Razvoj desne strani zveze (3.7) v potenčno vrsto

$$\epsilon_l = \epsilon_l - \frac{1}{2}\epsilon_l^2 + \frac{1}{3}\epsilon_l^3 - \dots \quad (3.9)$$

pokaže, da pri majhnih vrednostih ε_l med deformacijo ε_l in logaritemsko deformacijo ϵ_l praktično ni razlike, saj lahko kvadratni člen in člene višjih redov zanemarimo v primerjavi z linearnim členom

$$|\varepsilon_l| \ll 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon_l \approx \varepsilon_l. \quad (3.10)$$

Ker se dolžina vzorca med poskusom neprestano povečuje, za zaporedoma izmerjene trenutne dolžine $l'_1, l'_2, \dots, l'_n = l'$ velja

$$l < l'_1 < l'_2 \dots < l'_n \quad (3.11)$$

in logaritemsko deformacijo pri doseženi dolžini vzorca $l' = l'_n$ lahko izračunamo takole

$$\epsilon_l = \int_l^{l'} \frac{dl}{l'} = \int_l^{l'_1} \frac{dl}{l'_1} + \int_{l'_1}^{l'_2} \frac{dl}{l'_2} + \dots + \int_{l'_{n-1}}^{l'_n} \frac{dl}{l'_n} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n. \quad (3.12)$$

Podobno kakor logaritemsko vzdolžno deformacijo ϵ_l pogosto definiramo tudi *logaritemsko prostorninsko* ali *volumsko deformacijo* ϵ_V . Vzemimo, da je elementarni del vzorca v nedeformiranem stanju kvader s končno velikimi stranicami a_x, a_y, a_z in začetno prostornino $V = a_x a_y a_z$. V določenem trenutku obteževanja znašajo skupne spremembe teh dolžin po vrsti $\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z$, tako da so nove dolžine

$$\begin{aligned} a'_x &= a_x + \Delta a_x \\ a'_y &= a_y + \Delta a_y \\ a'_z &= a_z + \Delta a_z. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Prostornina kvadra je tedaj $V' = a'_x a'_y a'_z$. Zaradi prirastka zunanje obtežbe se prostornina spremeni za dV in ustrezni prirastek logaritemske volumske deformacije $d\epsilon_V$ je

$$d\epsilon_V = \frac{dV}{V'}. \quad (3.14)$$

Po integriranju gornje enačbe v mejah od začetne prostornine V do trenutne prostornine V' dobimo celotno logaritemsko volumsko deformacijo

$$\epsilon_V = \int_V^{V'} \frac{dV}{V} = \ln\left(\frac{V'}{V}\right). \quad (3.15)$$

Ob upoštevanju izrazov za V in V' lahko logaritemsko volumsko deformacijo zapišemo kot vsoto

$$\epsilon_V = \ln\left(\frac{a'_x a'_y a'_z}{a_x a_y a_z}\right) = \ln\left(\frac{a'_x}{a_x}\right) + \ln\left(\frac{a'_y}{a_y}\right) + \ln\left(\frac{a'_z}{a_z}\right). \quad (3.16)$$

Tako smo dobili vsoto logaritemskih vzdolžnih deformacij v smereh x , y , z

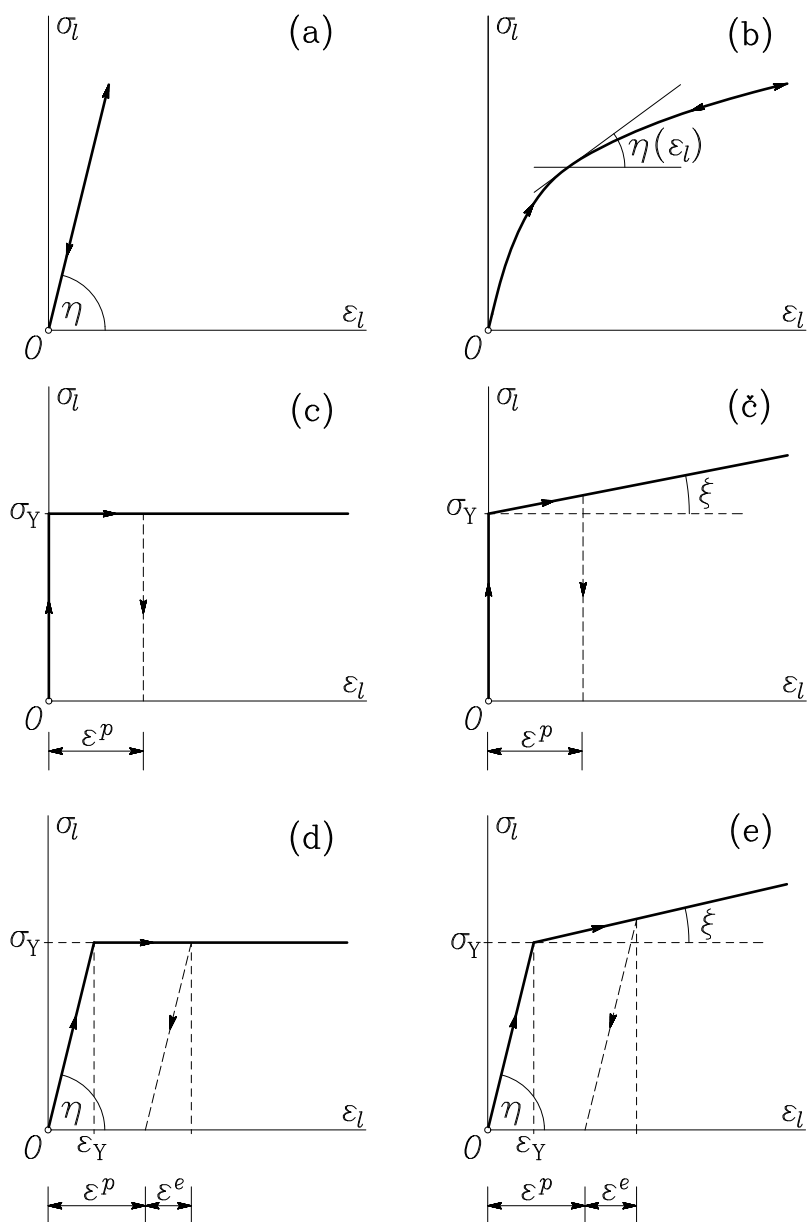
$$\epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (3.17)$$

Kakor vidimo, je logaritemska volumska deformacija, ki vključuje tudi plastične deformacije, izražena na povsem enak način kakor specifična sprememba prostornine ϵ_V , ki smo jo za primer majhnih deformacij izpeljali v razdelku **2.6**.

Idealizirani (računski) σ – ϵ diagrami

Da bi se izognili težavam, ki jih prinese upoštevanje σ – ϵ diagramov z vsemi njihovimi posebnostmi, si pri večini praktičnih nalog pomagamo z vpeljavo idealiziranih oziroma računskih materialnih diagramov. S temi idealiziranimi računskimi materialnimi diagrami zajamemo le bistvene značilnosti posameznih oziroma večjih skupin materialov, ki v določenih razmerah izkazujejo podobno mehansko obnašanje. Pri tem sta najpomembnejša razmejitve med elastičnim in plastičnim oziroma elastično–plastičnim območjem ter opis obnašanja v elastično–plastičnem območju. Pri konstrukcijskem jeklu se vrednosti napetosti na meji proporcionalnosti, meji elastičnosti in meji tečenja običajno le malo razlikujejo, zato za mejo med linearno elastičnim in plastičnim delom diagrama navadno vzamemo kar mejo tečenja T ; ustrezno napetost

označimo s $\sigma_Y = \sigma_T$, pripadajočo vzdolžno deformacijo pa z ε_Y .



Slika 3.5

Nekateri idealizirani materialni diagrami, ki jih najpogosteje uporabljamo pri praktičnem delu, so prikazani na *sliki 3.5*.

Tako je na *sliki 3.5-a* prikazan računski model *linearno elastičnega*, na *sliki 3.5-b* pa model *nelinearno elastičnega materiala*. Skupna značilnost obeh modelov je, da je trenutna napetost odvisna le od trenutne velikosti deformacije, nič pa od tega, kako je bilo trenutno deformacijsko stanje doseženo. Zveza med napetostjo in deformacijo je torej vseskozi enolična. Takim materialom pravimo tudi *hiperelastični materiali*.

Slika 3.5-c prikazuje model *idealno togega – idealno plastičnega materiala*, pri katerem je elastična deformacija zanemarljivo majhna. Šele, ko napetost doseže mejo plastičnega tečenja, se pojavi deformacija, ki se pri nespremenjeni napetosti veča čez vse meje. Če med plastičnim deformiranjem material razbremenimo, je celotna dosežena deformacija plastična, torej nepovrnljiva. Podobno obnašanje opisuje model *idealno togega materiala z linearno plastično utrditvijo* (*slika 3.5-č*), le da je tu za plastično deformiranje potrebno nadaljnje povečevanje napetosti nad mejo plastičnega tečenja. Posebej pri kovinah pogosto uporabljamo modela *idealno elastičnega – idealno plastičnega materiala* (*slika 3.5-d*) in *bilinearne elastično – plastičnega materiala z utrditvijo* (*slika 3.5-e*). Za oba je značilno, da se pri napetostih pod mejo plastičnega tečenja snov obnaša linearno elastično, nad to mejo pa se pojavijo plastične deformacije. Če med plastičnim deformiranjem material razbremenimo, poteka razbremenitev vzporedno z elastičnim delom σ – ε diagrama. Pri tem se del dosežene deformacije povrne, del pa ostane. Za modele *c – e* je torej značilno, da zveza med napetostjo in deformacijo ni enolična, temveč je odvisna od tega, kako je bilo trenutno napetostno oziroma deformacijsko stanje doseženo.

Za materiale, katerih mehanskega obnašanja ne moremo dovolj natančno opisati z navedenimi idealiziranimi diagrami, moramo vpeljati posebne, navadno strožje računske modele. Kot primer navedimo materiale z izrazito ukrivljenimi materialnimi diagrami, pri katerih si lahko pomagamo na dva načina. Opišemo jih lahko z ustreznimi eksponent-

nimi funkcijami ali pa z multilinearimi računskimi modeli, pri katerih dejanski diagram nadomestimo z zaporedjem linearnih odsekov. Kot zanimivo možnost omenimo še uporabo programskih orodij tako imenovane *umetne inteligence*, na primer umetnih nevronske mreže, s katerimi je mogoče razmeroma natančno opisati tudi zelo neregularno obnašanje nekaterih snovi.

Linearno elastični del materialnega diagrama. Hookov zakon

V linearno elastičnem območju je sovisnost med vzdolžno normalno napetostjo σ_l in specifično spremembo dolžine ε_l opisana s *Hookovim zakonom*

$$\sigma_l = E \varepsilon_l \quad \text{ozioroma} \quad \varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E}. \quad (3.18)$$

Parameter E imenujemo *modul elastičnosti* ali *Youngov[†] modul* in ga določimo iz naklona linearne dela $\sigma - \varepsilon$ diagrama (*slika 3.1*)

$$E = \operatorname{tg} \eta. \quad (3.19)$$

Enoosni poskus tudi kaže, da je prečna deformacija ε_t v linearno elastičnem območju prenosorazmerna vzdolžni deformaciji ε_l

$$\varepsilon_t = -\nu \varepsilon_l = -\frac{\nu}{E} \sigma_l. \quad (3.20)$$

Konstantni brezdimenzijski materialni parameter $\nu \geq 0$, ki je znan kot *koeficient prečne kontrakcije (zoženja)* ali *Poissonov[‡] količnik*, določimo kot razmerje med izmerjenima deformacijama v vzdolžni in prečni smeri

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = -\frac{l \Delta d}{d \Delta l}. \quad (3.21)$$

Okvirne vrednosti modulov elastičnosti, koeficientov prečne kontrakcije in meje tečenja za nekatere materiale, s katerimi se največkrat srečujemo v inženirstvu, so podane v *preglednici 3-1*.

[†] Thomas Young, britanski fizik in zdravnik, 1773–1829.

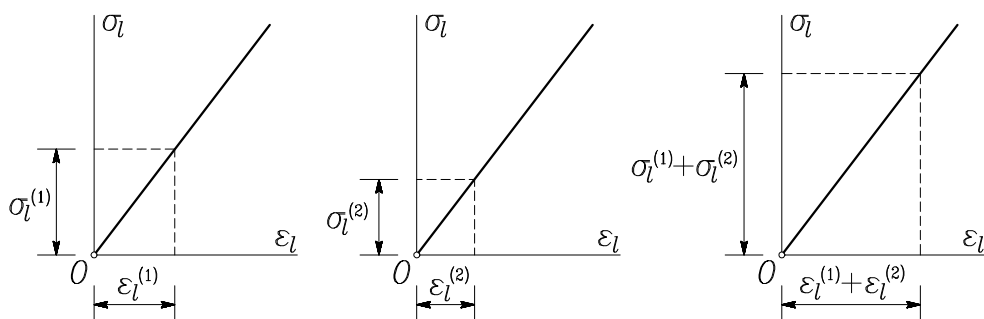
[‡] Siméon Denis Poisson, francoski matematik, 1781–1840.

Zakon superpozicije

Linearnost in enoličnost zveze med napetostjo in deformacijo omogoča vpeljavo tako imenovanega *zakona superpozicije*. Vzemimo, da vzorec najprej obremenimo z napetostjo $\sigma_l^{(1)}$ in izmerimo deformacijo $\varepsilon_l^{(1)}$. Nato vzorec razbremenimo in ga ponovno obremenimo z napetostjo $\sigma_l^{(2)}$, ki ji ustreza deformacija $\varepsilon_l^{(2)}$ (slika 3.6). Če po ponovni razbremenitvi obremenimo palico z napetostjo σ_l , ki je enaka vsoti napetosti $\sigma_l^{(1)}$ in $\sigma_l^{(2)}$, je tudi ustrezna deformacija ε_l enaka vsoti deformacij $\varepsilon_l^{(1)}$ in $\varepsilon_l^{(2)}$.

$$\sigma_l = \sigma_l^{(1)} + \sigma_l^{(2)} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_l = \varepsilon_l^{(1)} + \varepsilon_l^{(2)}. \quad (3.22)$$

Ob predpostavki, da je vsaka posamezna napetost, kakor tudi njihova vsota, manjša od meje tečenja, velja dobljeno pravilo za poljubno veliko obtežnih primerov, pri čemer vrstni red obteževanja ni pomemben.



Slika 3.6

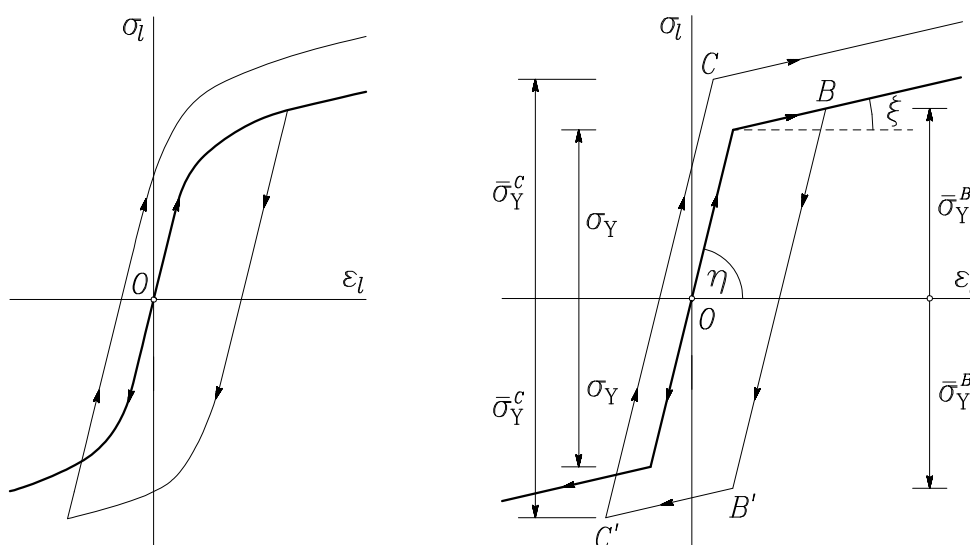
Zakon superpozicije lahko posplošimo tudi na prostorsko napetostno in deformacijsko stanje in ga zapišemo, na primer, v naslednji obliki:

Če na linearno elastično telo deluje več obtežb, je njihov skupni mehanski vpliv enak vsoti mehanskih vplivov, ki pripadajo posameznim obtežbam.

S pojmom *mehanski vpliv* so zajeti pomiki ter napetostno in deformacijsko stanje telesa. Hitro se lahko prepričamo, da v nelinearno elastičnem in elastično-plastičnem območju zakon superpozicije ne velja.

Elastično–plastični del materialnega diagrama

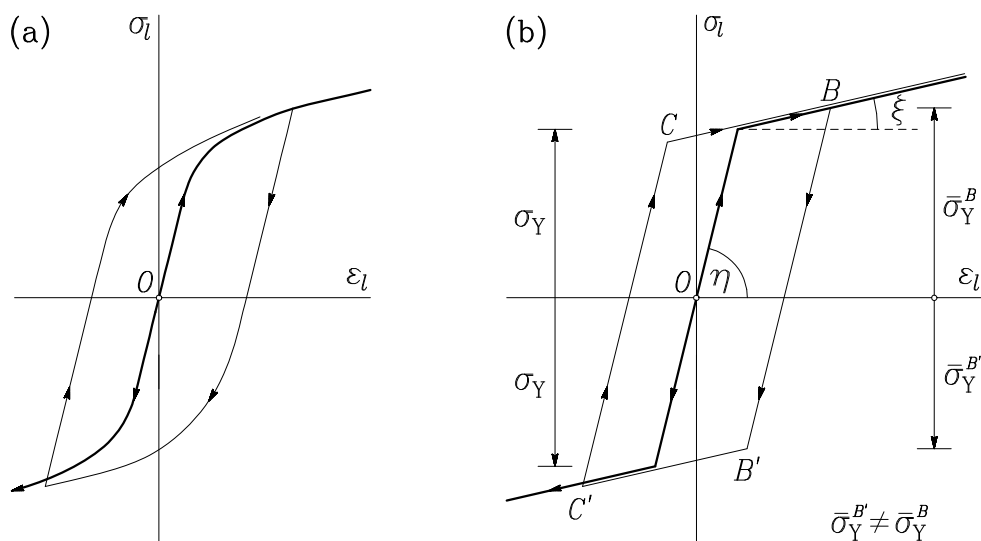
V območju elastičnih deformacij ustreza vsaki podani napetosti σ_l ena sama vrednost deformacije ε_l , ne glede na to, ali gre za obremenjevanje ali razbremenjevanje vzorca. To pomeni, da je zveza med napetostjo in deformacijo v elastičnem območju enolična. Za elastično–plastično območje pa je značilno, da je ta zveza odvisna od zgodovine deformiranja oziroma obteževanja vzorca. Kakor smo že omenili, se razbremenitev v elastično–plastičnem območju odvija približno vzporedno z linearno elastičnim delom $\sigma-\varepsilon$ diagrama.



Slika 3.7

Material, ki je bil sicer že plastificiran, se torej med razbremenjevanjem spet obnaša elastično, zato pravimo, da gre za elastično razbremenitev. Pri popolni razbremenitvi, ko je $\sigma_l = 0$, elastični del deformacije ε^e izgine, plastični del ε^p pa ostane. Tudi pri ponovnem obteževanju se vzorec sprva obnaša linearno elastično, vse dokler ne doseže plastičnega dela $\sigma-\varepsilon$ diagrama. Deformacije, ki ustrezajo posameznim vrednostim napetosti σ_l , pa tudi točka, v kateri se material pri ponovnem obremenjevanju spet začne plastificirati, so odvisne od dosežene plastične

deformacije ε^p (slika 3.1). Pojav, da je meja tečenja pri ponovni obremenitvi višja kakor pri prvi obremenitvi vzorca, smo imenovali *utrditev materiala*. Če je delovni diagram materiala antisimetričen, kar pomeni, da je $\sigma_l(-\varepsilon_l) = -\sigma_l(\varepsilon_l)$, navadno predpostavimo, da je tudi meja tečenja utrjenega materiala enaka tako v nateznem kakor v tlačnem napetostnem področju. Takemu načinu utrjevanja pravimo *izotropno utrjevanje* (slika 3.7).



Slika 3.8

Vendar poskusi kažejo, da je pri kovinah način utrjevanja praviloma drugačen. Če material, ki je bil, na primer, že plastificiran v nategu, elastično razbremenimo in ponovno obremenimo v tlaku, se v tlačnem napetostnem območju plastifikacija začne že pri nižji absolutni vrednosti napetosti kot je bila meja tečenja utrjenega materiala v nategu (slika 3.8-a). Ta pojav je znan kot *Bauschingerjev[†] efekt* in ga lahko približno opišemo s *kinematičnim modelom utrjevanja* (slika 3.8-b).

V splošnem velja, da v primerjavi z izotropnim kinematični model utrditve bolje opisuje dejansko obnašanje materiala, zlasti v primerih

[†] Johann Bauschinger, nemški matematik in tehnik, 1833–1893.

cikličnega obteževanja, pri katerem pride do izmeničnega plastificiranja materiala v nateznem oziroma tlačnem napetostnem območju.

Kakor kažejo poskusi, je tudi v elastično–plastičnem območju prečna deformacija premo sorazmerna vzdolžni deformaciji, in sicer s približno konstantnim koeficientom prečne kontrakcije $\nu \approx 0.5$

$$\varepsilon_p \approx -\frac{1}{2}\varepsilon_l. \quad (3.23)$$

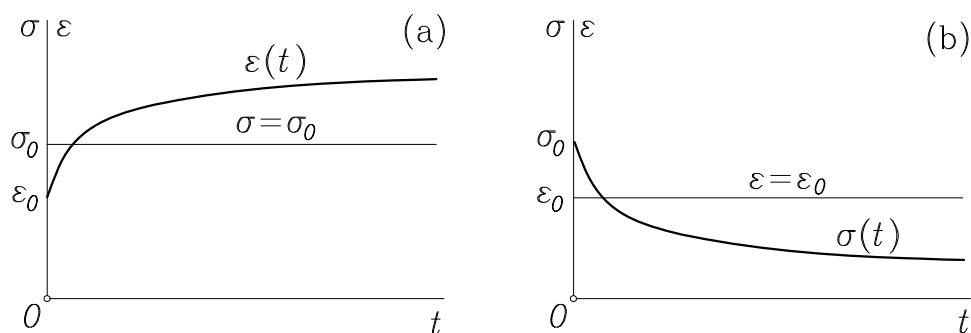
V nadaljevanju bomo pokazali, da je s tem opisana nestisljivost materiala pri majhnih deformacijah, kar pomeni, da je v plastičnem območju specifična sprememba prostornine ε_V vseskozi enaka nič.

Vpliv časa na zvezo med napetostjo in deformacijo. Lezenje in sprostitve materiala

Dosedanje ugotovitve o obnašanju materialov pri obremenjevanju in razbremenjevanju ter o posebnostih $\sigma - \varepsilon$ diagramov, ki grafično predstavljajo rezultate enoosnih poskusov, se nanašajo na vnaprej predpisan način in hitrost obremenjevanja in razbremenjevanja. Čas trajanja posameznega poskusa je praviloma razmeroma kratek, zato je vpliv časa na rezultate zanemarljiv. Pri drugačnih hitrostih obremenjevanja lahko v splošnem opazimo, da se rezultati razlikujejo od standardnega $\sigma - \varepsilon$ diagrama. Z opazovanjem obteženih vzorcev skozi daljše časovno obdobje je mogoče tudi ugotoviti, da se deformacije povečujejo s časom, tudi v primeru, da obtežba ostane nespremenjena. Omenjeni poskusi opozarjajo na vrsto pojavov, ki so povezani s hitrostjo obteževanja in trajanjem obremenitve vzorcev, vendar jih pri definiranju idealnih teles navadno ne upoštevamo. Oglejmo si dva med seboj povezana časovna pojava, ki sta pomembna tudi v vsakdanji tehniški praksi. To sta pojava *lezenja* in *sprostitve materiala*.

Lezenje ali *viskozno tečenje* je pojav, da deformacija ne doseže svoje končne vrednosti neposredno po obremenitvi vzorca. Pri nespremenjeni obtežbi se deformacija s časom še naprej povečuje, čeprav ni bila

dosežena meja elastičnosti (slika 3.9-a). Del celotne deformacije, ki je posledica lezenja, navadno imenujemo *viskozna deformacija*. Poskusi kažejo, da viskozna deformacija sprva hitreje, nato pa vse počasneje narašča, dokler se sčasoma ne umiri. Še posebej za kovine in plastične mase je značilno, da se pri višjih temperaturah sposobnost viskoznega deformiranja izrazito poveča. Pri normalnih temperaturah je lezenje najizrazitejše pri betonskih in lesenih vzorcih.



Slika 3.9

Sprostitev ali *relaksacija napetosti* je pojav, da se napetost manjša pri konstantni deformaciji (slika 3.9-b), in sicer na tisto vrednost, pri kateri bi v enakem času zaradi lezenja nastopila enaka deformacija sproščenelega vzorca. Torej je relaksacija obraten pojav od lezenja.

Še posebno v statično nedoločenih telesih pride zaradi lezenja in sprostitve materiala do znatnih prerazporeditev in sprememb napetosti in deformacij. Kot primer navedimo zmanjšanje upogibnih momentov nad podporami in povečanje upogibnih momentov v poljih pri neprekinjenih nosilcih in okvirjih, zmanjšanje nateznih sil v kablji za prednapenjanje in podobno.

S podrobnejšim proučevanjem mehanskih pojavov, v katerih igra čas kot spremenljivka problema pomembno vlogo, se ukvarja posebna veja mehanike – *reologija*. V tem učbeniku je vpliv časa omenjen zgolj informativno, sicer pa se v nadaljevanju omejimo na obravnavanje *časovno neobčutljivih snovi*.

Vpliv spremenljive temperature na zvezo med napetostjo in deformacijo

Kakor je bilo že omenjeno, so s segrevanjem oziroma ohlajanjem povezane občutne spremembe mehanskih lastnosti trdnih teles. Pri segrevanju se praviloma manjša modul elastičnosti, znižuje se meja plastičnega tečenja, povečuje pa se duktilnost in sposobnost viskoznega deformiranja. V mejah normalnih temperatur, v katerih delujejo gradbene konstrukcije, te pojave navadno zanemarimo. Ni pa mogoče zanemariti znane lastnosti večine trdnih snovi, da se pri segrevanju raztezajo, pri ohlajanju pa krčijo.

Preglednica 3-1

material	E	ν	σ_Y	α_T
	MPa	–	MPa	K^{-1}
jeklo	210 000	0.30	240 – 410	$1.25 \cdot 10^{-5}$
aluminij	72 000	0.34	50	$2.29 \cdot 10^{-5}$
baker	115 000	0.34	120	$1.67 \cdot 10^{-5}$
beton	21 000	0.16	–	$1.25 \cdot 10^{-5}$

Pri obravnavanju vpliva temperature spremembe na deformacije je običajna predpostavka, da homogena sprememba temperature pri nepodprtem telesu povzroči le spremembo prostornine, ne pa tudi spremembe oblike telesa. Pri vzorcu, na katerem izvajamo enoosni poskus, lahko opazimo, da sprememba temperature ΔT povzroči spremembo vzdolžne deformacije ε_l^T

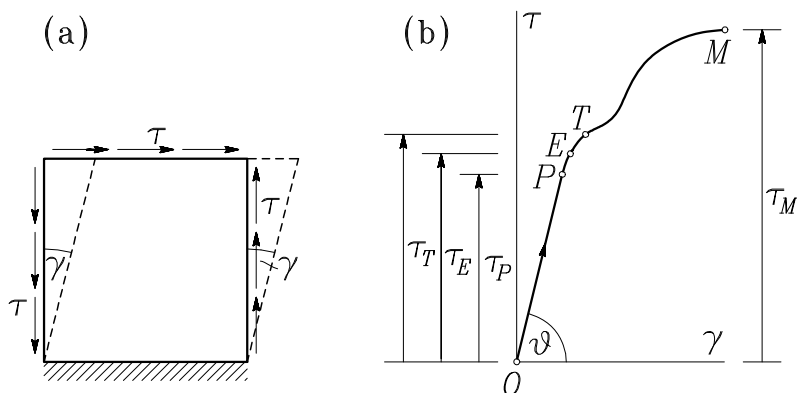
$$\varepsilon_l^T = \alpha_T \Delta T. \quad (3.24)$$

Za večino materialov je *linearni temperaturni razteznostni koeficient* α_T v normalnih razmerah praktično neodvisen od mehanske obtežbe vzorca, pa tudi v odvisnosti od trenutne dosežene temperature se le

neznatno spreminja. Zato praviloma računamo kar s konstantno vrednostjo koeficienta α_T . Vrednosti teh koeficientov so za nekatere najpogostejše materiale zbrane v preglednici 3-1.

Strižni poskus

Za celovitejši vpogled v obnašanje teles pri bolj splošnih napetostnih stanjih je pogosto treba razen enoosnega narediti še dodatne poskuse. Tak je na primer *strižni poskus*, ki je pomemben predvsem pri zemljinah in nekaterih anizotropnih snoveh. V odvisnosti od namena preiskave so načini izvedbe strižnih poskusov raznovrstni; praviloma so zahtevnejši od enoosnega nateznega poskusa, rezultati pa manj zanesljivi. Najenostavnejši je način, pri katerem enakomerno debel pravokoten vzorec obtežujemo s čisto strižno obtežbo τ v ravnini vzorca in merimo pripadajočo spremembo pravega kota γ med stranicama (slika 3.10-a). Tudi rezultate strižnega poskusa navadno prikažemo grafično v tako imenovanem τ - γ diagramu (slika 3.10-b).



Slika 3.10

Pri konstrukcijskih jeklih je sovisnica med strižno obtežbo τ in kotno deformacijo γ podobna σ - ε diagramu. Določajo jo značilne vrednosti: meja proporcionalnosti τ_P , meja elastičnosti τ_E , meja tečenja τ_T in strižna trdnost τ_M .

V tem učbeniku se omejimo le na linearno elastični del $\tau-\gamma$ diagrama, kjer je zveza med strižno napetostjo τ in kotno deformacijo γ podana z enačbo

$$\tau = G\gamma. \quad (3.25)$$

Parameter G imenujemo *strižni modul* in ga določimo iz naklona linearnega dela $\tau-\gamma$ diagrama (*slika 3.10-b*)

$$G = \operatorname{tg} \vartheta. \quad (3.26)$$

3.4 Idealno elastično telo. Posplošeni Hookov zakon

V razdelku **3.3** smo opisali izvedbo enoosnega nateznega poskusa in pojave, ki jih pri tem lahko opazimo. Pri praktičnih nalogah, pri katerih imamo opraviti z enoosnim napetostnim stanjem, lahko torej neposredno uporabimo dejanske ali idealizirane $\sigma-\varepsilon$ diagrame, ki smo jih za uporabljeni material dobili z enoosnimi poskusi. Vendar v praksi pogosto naletimo na primere, pri katerih je napetostno stanje ravninsko ali prostorsko. Da bi tudi v teh primerih lahko povezali napetosti z deformacijami, moramo ugotoviti, do katerih smo prišli pri enoosnih poskusih, posplošiti z vpeljavo idealnih trirazsežnih teles. Kakor smo že povedali, je običajni postopek naslednji: najprej glede na izkušnje z obnašanjem vzorcev v različnih napetostnih oziroma deformacijskih območjih izberemo funkcijsko obliko zvez med napetostmi, deformacijami, temperaturo in časom. S tem definiramo materialni model obravnavane snovi v kvalitativnem pogledu. Parametre, ki določajo ta model tudi kvantitativno, pa določimo glede na rezultate meritev, in sicer pri tolikih poskusih, da je zagotovljena predpisana statistična zanesljivost.

Za obravnavanje elastičnih teles privzamemo *Cauchyjev model* elastične snovi, ki je zasnovan na predpostavki, da so komponente σ_{ij} napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\sigma}$ (2) enolične funkcije komponent ε_{ij} tenzorja majhnih

deformacij $\varepsilon(2)$ [†]

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}). \quad (3.27)$$

V kartezijskih koordinatah x, y, z lahko gornjo enačbo zapišemo z vsoto

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sum_k \sum_l C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z). \quad (3.28)$$

Če so koeficienti C_{ijkl} funkcije napetosti ali deformacij, gre za nelinearno elastično snov. Če so ti koeficienti še funkcije koordinat x, y, z , je snov tudi nehomogena, saj se v tem primeru zveze med napetostmi in deformacijami spreminjajo od delca do delca. V tem učbeniku se omejimo na primer, da so koeficienti C_{ijkl} konstante, kar pomeni, da obravnavamo linearno elastično, homogeno, vendar zaenkrat anizotropno snov. Simetrični tenzor s komponentami σ_{ij}^0 predstavlja začetne napetosti, ki pripadajo nedeformirani obliki in velikosti telesa

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl} = 0). \quad (3.29)$$

Najpogostejši izvor začetnih napetosti je sprememba temperature telesa pri preprečenem deformiranju. Znano je, da se trdne snovi pri segrevanju raztezajo, pri ohlajanju pa krčijo. Če zaradi nepodajnosti okolice ali zaradi delovanja zunanje obtežbe deformiranje telesa ni možno, se v njem pojavijo začetne temperaturne napetosti[‡]. V nadaljevanju vzamemo, da so temperaturne začetne napetosti premo sorazmerne spremembi temperature. Če začetno temperaturo T_0 spremenimo za $\Delta T = T - T_0$, pri čemer je deformiranje telesa preprečeno ($\varepsilon_{kl} = 0$), lahko začetne napetosti izrazimo takole

$$\sigma_{ij}^0 = -\beta_{ij} (T - T_0) = -\beta_{ij} \Delta T \quad (i, j = x, y, z). \quad (3.30)$$

[†] V literaturi je ta model znan kot Cauchyjev model hiperelastične snovi. V rabi je tudi Greenov model hiperelastične snovi, ki pa ga v tej knjigi ne obravnavamo.

[‡] V splošnem bi s koeficienti σ_{ij}^0 lahko opisali tudi zaostale napetosti, ki v nedeformirani snovi ostanejo zaradi tehnološkega postopka pri izdelavi telesa.

Pri tem so koeficienti β_{ij} komponente simetričnega tenzorja $\beta(2)$. To so numerične konstante, s katerimi opišemo vpliv temperaturne spremembe na začetne napetosti. Enačba (3.28) se s tem glasi

$$\sigma_{ij} = \sum_k \sum_l C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \Delta T. \quad (3.31)$$

Koeficienti C_{ijkl} tvorijo *konstitucijski tenzor* 4. reda $\mathbf{C}(4)$, ki ima v trirazsežnem prostoru $3^4 = 81$ komponent. Ker povezuje simetrična tenzorja $\sigma(2)$ in $\varepsilon(2)$, mora biti tudi tenzor $\mathbf{C}(4)$ simetričen glede na indeksa i in j oziroma k in l

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} \\ C_{ijkl} &= C_{ijlk}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ob upoštevanju simetrije napetostnega in deformacijskega tenzorja lahko neodvisne komponente obeh tenzorjev razvrstimo v dva stolpca s po šestimi elementi in zapišemo enačbo (3.31) v matrični obliki

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & C_{xxxy} & C_{xxyz} & C_{xxzx} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyyz} & C_{yyzx} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzyz} & C_{zzzx} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyzz} & C_{xyxy} & C_{xyyz} & C_{xyzx} \\ C_{yzxx} & C_{yzyy} & C_{yzzz} & C_{yzxy} & C_{yzyz} & C_{yzzx} \\ C_{zxxx} & C_{zxyy} & C_{zxzz} & C_{zaxy} & C_{zxyz} & C_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} - \\ &\begin{Bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{zz} \\ \beta_{xy} \\ \beta_{yz} \\ \beta_{zx} \end{Bmatrix} \Delta T. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pri tem smo izkoristili enačbi (3.32) in zmanjšali število neodvisnih komponent konstitucijskega tenzorja na 36. Enačba (3.33) predstavlja *posplošeni Hookov zakon linearno elastične anizotropne snovi*. Če za stolpec napetosti uvedemo oznako $\{\sigma\}$, za matriko snovnih koeficientov

oznako $[\mathbf{c}]$, za stolpec deformacij oznako $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ in za stolpec temperaturnih konstant oznako $\{\boldsymbol{\beta}\}$, lahko gornjo enačbo zapišemo na kratko

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{c}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\beta}\} \Delta T. \quad (3.34)$$

Pri elastični snovi smo predpostavili enolično zvezo med napetostmi in deformacijami, zato je matrika $[\mathbf{c}]$ nesingularna in lahko izračunamo njeno inverzno matriko $[\mathbf{c}]^{-1}$. S tem lahko določimo obrat enačbe (3.34), kar pomeni, da rešimo sistem konstitucijskih enačb (3.33) glede na deformacije. Enačbo (3.34) pomnožimo z leve s $[\mathbf{c}]^{-1}$

$$[\mathbf{c}]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{c}]^{-1} [\mathbf{c}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - [\mathbf{c}]^{-1} \{\boldsymbol{\beta}\} \Delta T. \quad (3.35)$$

Z oznakami

$$\begin{aligned} [\mathbf{d}] &= [\mathbf{c}]^{-1} \\ \{\boldsymbol{\alpha}\} &= [\mathbf{c}]^{-1} \{\boldsymbol{\beta}\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

zapišemo inverzno obliko enačbe (3.34) takole

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{d}] \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\alpha}\} \Delta T. \quad (3.37)$$

Podobno kakor v enačbi (3.33) dobimo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{xxxx} & d_{xxyy} & d_{xxzz} & d_{xxxy} & d_{xxyz} & d_{xxzx} \\ d_{yyxx} & d_{yyyy} & d_{yyzz} & d_{yyxy} & d_{yyyz} & d_{yyzx} \\ d_{zzxx} & d_{zzyy} & d_{zzzz} & d_{zzxy} & d_{zzyz} & d_{zzzx} \\ d_{xyxx} & d_{xyyy} & d_{xyzx} & d_{xyxy} & d_{xyyz} & d_{xyzx} \\ d_{yzxx} & d_{yzyy} & d_{yzzz} & d_{yzxy} & d_{yzyz} & d_{yzzx} \\ d_{zxxx} & d_{zxxy} & d_{zxzz} & d_{zxxxy} & d_{zxxyz} & d_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zz} \\ \alpha_{xy} \\ \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} \end{pmatrix} \Delta T. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Drugi člen na desni strani enačbe (3.37) oziroma (3.38) predstavlja začetne deformacije ε_{ij}^0 , ki nastopijo v sicer mehansko neobteženem telesu ($\sigma_{ij} = 0$) zaradi temperaturne spremembe ΔT

$$\varepsilon_{ij}^0 = \alpha_{ij} \Delta T. \quad (3.39)$$

Po vzorcu enačbe (3.28) lahko sedaj zapišemo odvisnost deformacij ε_{ij} od napetosti σ_{ij} in začetnih deformacij ε_{ij}^0

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \sum_k \sum_l D_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z). \quad (3.40)$$

Pri tem smo z D_{ijkl} označili komponente inverznega konstitucijskega tenzorja $\mathbf{D}(4)$. Opozoriti moramo, da komponente matrike $[\mathbf{d}]$ niso enake istoležnim komponentam inverznega konstitucijskega tenzorja $\mathbf{D}(4)$. Upoštevajoč, da za komponente D_{ijkl} veljajo enake simetrijske lastnosti kakor za komponente C_{ijkl}

$$\begin{aligned} D_{ijkl} &= D_{jikl} \\ D_{ijkl} &= D_{ijlk}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

lahko zveze med komponentami matrike $[\mathbf{d}]$ in tenzorskimi komponentami D_{ijkl} brez težav določimo s primerjanjem enačb (3.38) in (3.40) pri $\Delta T = 0$. To nalogo prepuščamo bralcu.

Vrnimo se k enačbi (3.33). Eksperimentalna določitev 36 parametrov C_{ijkl} in 6 parametrov β_{ij} ter praktična uporaba konstitucijske enačbe (3.33) pri popolnoma splošnem anizotropnem materialu bi bila očitno zelo zapletena, če ne celo neizvedljiva. Zato si oglejmo, kako se posplošeni Hookov zakon poenostavi pri ortotropni in kako pri izotropni snovi. V ta namen moramo najprej ugotoviti, kako se koeficienti C_{ijkl} in β_{ij} transformirajo pri zasuku kartezijskega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ v poljubno novo lego $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, ki je določena s transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$. Za koeficiente β_{ij} velja transformacijsko pravilo, ki smo ga izpeljali v poglavju o napetostih in ga zapisali z enačbo (1.163)

$$\beta_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j \beta_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j} \quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta). \quad (3.42)$$

To pravilo posplošimo tudi za transformacijo tenzorja $\mathbf{C}(4)$, kakor smo pokazali z enačbo (1.169)

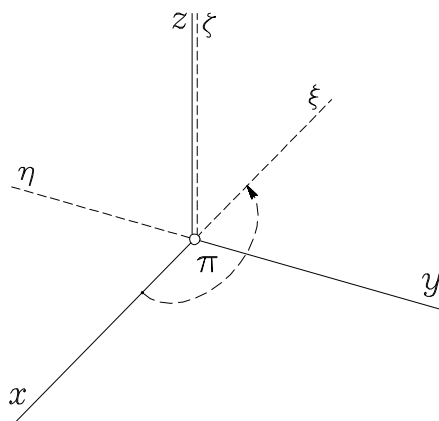
$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l C_{ijkl} e_{\alpha i} e_{\beta j} e_{\gamma k} e_{\delta l} \quad (3.43)$$

$$(i, j, k, l = x, y, z; \alpha, \beta, \gamma, \delta = \xi, \eta, \zeta).$$

Pri povsem splošnem anizotropnem materialu se pri poljubnem zasuku koordinatne baze spremenijo vsi koeficienti obeh omenjenih tenzorjev. Pri izotropni snovi pa nasprotno vsi koeficienti ostanejo nespremenjeni ne glede na zasuk koordinatne baze. Med tema skrajnima primeroma obstajajo nekateri posebni primeri anizotropije, pri katerih je mogoče ugotoviti končno število značilnih smeri, v katerih se snov obnaša izotropno.

Ortotropna snov

Med posebnimi primeri anizotropije je najpomembnejši primer *ortotropne* ali *ortogonalno izotropne snovi*, za katero je značilno, da se obnaša izotropno glede na tri medsebojno pravokotne ravnine.



Slika 3.11

Vzemimo, da so to kar koordinatne ravnine kartezijskega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. To pomeni, da se komponente tenzorjev $\mathbf{C}(4)$ in $\beta(2)$ ne spremenijo, če koordinatno bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ zavrtimo za kot π okoli katerekoli od koordinatnih osi. Začnimo na primer tako, da zavrtimo koordinatno bazo za kot π okoli osi z v novo lego $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ (slika 3.11). Transformacijska matrika, ki pripada temu zasuku, je

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \\ e_{\eta x} & e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta x} & e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Pogoj ortotropije izrazimo z zahtevo, da morajo biti pri opisanem zasuku koordinatne baze istoležne komponente tenzorjev $\mathbf{C}(4)$ in $\beta(2)$ v obeh bazah enake. Ob upoštevanju transformacijskega pravila (3.43) in posebne oblike matrike $[e_{\alpha i}]$ lahko hitro ugotovimo, da ostanejo nespremenjene vse komponente tenzorja $\mathbf{C}(4)$, ki imajo nič ali sodo število indeksov z . Vsem členom z lihimi števili indeksov z pa obravnavana transformacija spremeni predznak.

Za komponento $C_{\xi\xi\xi\xi}$ na primer zahtevamo, da je $C_{\xi\xi\xi\xi} = C_{xxxx}$ in dobimo

$$\begin{aligned} C_{\xi\xi\xi\xi} &= C_{xxxx} e_{\xi x} e_{\xi x} e_{\zeta z} e_{\xi x} = C_{xxxx} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \\ C_{\xi\xi\xi\xi} &= -C_{xxxx} = C_{xxxx}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Člen C_{xxxx} je torej lahko kvečjemu nič. Na podoben način ugotovimo, da so vsi členi z lihimi števili indeksov z enaki nič

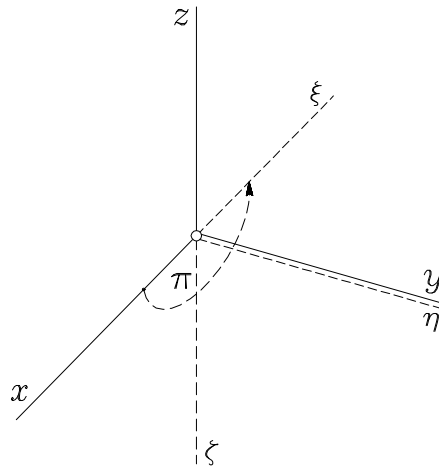
$$\begin{aligned} C_{xxyz} &= C_{xxzx} = C_{yyyz} = C_{yyyz} = C_{zzyz} = C_{zzzx} = \\ C_{xyyz} &= C_{xyzx} = C_{yzzx} = C_{yzyy} = C_{yzzz} = C_{yzyy} = \\ C_{zxxx} &= C_{zxyy} = C_{zxxx} = C_{zxxx} = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Podobno iz enačbe (3.42) sledi, da ostanejo temperaturni koeficienti $\beta_{xx}, \beta_{yy}, \beta_{xy}$ in β_{zz} pri obravnavanem zasuku koordinatne baze nespremenjeni, koeficienta β_{yz} in β_{zx} pa sta nič

$$\beta_{yz} = \beta_{zx} = 0. \quad (3.47)$$

Postopek ponovimo pri zasuku koordinatne baze za kot π okrog smeri y (slika 3.12). Transformacijska matrika je tokrat

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$



Slika 3.12

S podobnim sklepanjem kakor v prejšnjem primeru ugotovimo, da morajo biti nič tudi vsi členi, ki imajo liho število indeksov y

$$\begin{aligned} C_{xxxy} = C_{yyxy} = C_{zzxy} = C_{xyxx} = \\ C_{xyyy} = C_{xyzx} = C_{yzzx} = C_{zxyz} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

in

$$\beta_{xy} = 0. \quad (3.50)$$

Zasuk koordinatne baze za kot π okoli smeri x ne pove nič novega. To pomeni, da dobijo konstitucijske enačbe pri splošnem ortotropnem materialu naslednjo obliko

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{xyxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{yzyz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T. \quad (3.51)$$

Pri tem moramo poudariti, da gre za material, ki je ortotropen glede na koordinatne ravnine kartezijskega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Pri ortotropni snovi je torej zveza med napetostmi in deformacijami opisana z dvanajstimi mehanskimi in tremi temperaturnimi parametri. Kakor vidimo, so normalne napetosti odvisne samo od normalnih deformacij, strižne napetosti pa le od kotnih sprememb. Sprememba temperature vpliva le na normalne, ne pa tudi na strižne napetosti.

Vrednosti dvanajstih mehanskih in treh temperaturnih parametrov, ki določajo zvezo med napetostmi in deformacijami pri ortotropni snovi, določimo glede na rezultate eksperimentov. Ker je s poskusi neprimerno enostavneje izmeriti deformacije kakor napetosti, izrazimo enačbe (3.51) v inverzni obliki. Glede na posebno obliko enačb (3.51) lahko v skladu z enačbo (3.38) brez posebne izpeljave zapišemo

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{xxxx} & d_{xxyy} & d_{xxzz} & 0 & 0 & 0 \\ d_{yyxx} & d_{yyyy} & d_{yyzz} & 0 & 0 & 0 \\ d_{zzxx} & d_{zzyy} & d_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{xyxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{yzyz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T. \quad (3.52)$$

Pri ortotropni snovi upravičeno pričakujemo, da se smeri glavnih normalnih deformacij ujemajo s smermi glavnih normalnih napetosti. S tem in ob upoštevanju zakona superpozicije je mogoče materialne parametre ortotropnega modela snovi določiti kar z enoosnimi in strižnimi poskusi na vzorcu v obliki kvadra, katerega stranske ploskve so vzporedne z ravninami ortotropije.

Za začetek vzemimo, da je sprememba temperature ΔT nič, saj so poskusi praviloma izpeljani pri konstantni temperaturi. Smeri ortotropije opišemo s kartezijsko bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Najprej naredimo enoosni poskus na vzorcu, katerega vzdolžna os se ujema s smerjo \mathbf{e}_x . V obravnavanem obtežnem primeru gre torej za enoosno napetostno stanje, za katerega velja

$$\sigma_{xx} \neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (3.53)$$

Iz dobljenega $\sigma - \varepsilon$ diagrama odčitamo modul elastičnosti E_x za prvo smer ortotropije, tako da je

$$\sigma_{xx} = E_x \varepsilon_{xx} \quad \rightarrow \quad E_x = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}. \quad (3.54)$$

Z merjenjem prečnih deformacij v preostalih dveh ortotropnih smereh y in z pa določimo še koeficienta prečne kontrakcije ν_{yx} in ν_{zx} . Pri tem je s Poissonovim količnikom ν_{yx} opisan vpliv glavne normalne napetosti σ_{xx} na glavno prečno deformacijo ε_{yy} , s količnikom ν_{zx} pa vpliv napetosti σ_{xx} na glavno prečno deformacijo ε_{zz}

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= -\nu_{yx} \varepsilon_{xx} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu_{zx} \varepsilon_{xx} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x} \sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ker gre za ortotropno snov, količnika ν_{yx} in ν_{zx} namreč v splošnem nista enaka. S primerjavo prvih treh od enačb (3.52) z enačbami (3.54) in (3.55) dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= d_{xxxx} \sigma_{xx} = \frac{1}{E_x} \sigma_{xx} &\rightarrow & d_{xxxx} = \frac{1}{E_x} \\ \varepsilon_{yy} &= d_{yyxx} \sigma_{xx} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} \sigma_{xx} &\rightarrow & d_{yyxx} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} \\ \varepsilon_{zz} &= d_{zzxx} \sigma_{xx} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x} \sigma_{xx} &\rightarrow & d_{zzxx} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Postopek ponovimo pri enoosni obtežbi vzorca v ortotropni smeri \mathbf{e}_y , pri čemer velja

$$\sigma_{yy} \neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (3.57)$$

Iz dobljenega $\sigma - \varepsilon$ diagrama odčitamo modul elastičnosti E_y za ortotropno smer y , izmerimo pa tudi Poissonova količnika ν_{xy} in ν_{zy} , ki opisujeta vpliv glavne normalne napetosti σ_{yy} na glavni prečni normalni deformaciji ε_{xx} in ε_{zz} . Podobno kakor v prejšnjem primeru dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= d_{yyyy} \sigma_{yy} = \frac{1}{E_y} \sigma_{yy} &\rightarrow & d_{yyyy} = \frac{1}{E_y} \\ \varepsilon_{xx} &= d_{xxyy} \sigma_{yy} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y} \sigma_{yy} &\rightarrow & d_{xxyy} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y} \\ \varepsilon_{zz} &= d_{zzyy} \sigma_{yy} = -\frac{\nu_{zy}}{E_y} \sigma_{yy} &\rightarrow & d_{zzyy} = -\frac{\nu_{zy}}{E_y}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Končno naredimo še enoosni poskus v ortotropni smeri z in podobno kakor v prejšnjih dveh primerih dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= d_{zzzz} \sigma_{zz} = \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} &\rightarrow & d_{zzzz} = \frac{1}{E_z} \\ \varepsilon_{xx} &= d_{xxzz} \sigma_{zz} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} \sigma_{zz} &\rightarrow & d_{xxzz} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} \\ \varepsilon_{yy} &= d_{yyzz} \sigma_{zz} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z} \sigma_{zz} &\rightarrow & d_{yyzz} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}.\end{aligned}\quad (3.59)$$

Koeficiente d_{xyxy} , d_{yzyz} in d_{zxzx} , ki povezujejo strižne napetosti s spremembami pravih kotov, določimo s tremi ločenimi strižnimi poskusi. Vzemimo, da pravokotni vzorec najprej obtežimo s čisto strižno obtežbo v ravnini, ki jo določata ortotropni smeri x in y . Gre torej za čisti strig v ravnini (x, y)

$$\sigma_{xy} \neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (3.60)$$

Iz dobljenega τ - γ diagrama, ki v tem primeru predstavlja sovisnico med delujočo strižno napetostjo $\tau = \sigma_{xy}$ in izmerjeno spremembo pravega kota $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$, odčitamo strižni modul G_{xy} . Ker je torej

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}}, \quad (3.61)$$

iz primerjave s četrto od enačb (3.52) sledi

$$2\varepsilon_{xy} = d_{xyxy} \sigma_{xy} \quad \rightarrow \quad d_{xyxy} = \frac{1}{G_{xy}}. \quad (3.62)$$

Strižna poskusa v ravninah (y, z) in (z, x) nas na podoben način pripeljeta do koeficientov d_{yzyz} in d_{zxzx}

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{yz} = d_{yzyz} \sigma_{yz} &\quad \rightarrow \quad d_{yzyz} = \frac{1}{G_{yz}} \\ 2\varepsilon_{zx} = d_{zxzx} \sigma_{zx} &\quad \rightarrow \quad d_{zxzx} = \frac{1}{G_{zx}}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

kjer sta G_{yz} in G_{zx} strižna modula v obravnavanih ravninah.

Zakon superpozicije omogoča, da vplive vseh šestih omenjenih obtežnih primerov seštejemo in tako dobimo zveze med napetostmi in deformacijami pri prostorskem napetostnem in deformacijskem stanju.

Temperaturne parametre α_{xx} , α_{yy} in α_{zz} enostavno določimo z enim samim poskusom, pri katerem izmerimo temperaturne deformacije mehansko neobteženega vzorca v smereh ortotropije.

Jasno je, da predstavljajo parametri α_{xx} , α_{yy} in α_{zz} kar temperaturne razteznostne koeficiente v smereh x , y in z .

S tem smo model linearno elastične ortotropne snovi umerili (kalibrirali) glede na dejanske mehanske in termomehanske lastnosti konkretnega obravnavanega materiala. Kakor vidimo, je model določen s tremi moduli elastičnosti, šestimi koeficienti prečne kontrakcije, tremi strižnimi moduli in tremi temperaturnimi razteznostnimi koeficienti

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{zx}}{E_x} & \frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T. \quad (3.64)$$

V praksi pogosto uporabljamo nekoliko pripravnejši *Greenov[†] model* linearno elastične ortotropne snovi, ki vsebuje dodatno zahtevo, da je matrika $[\mathbf{d}]$ simetrična

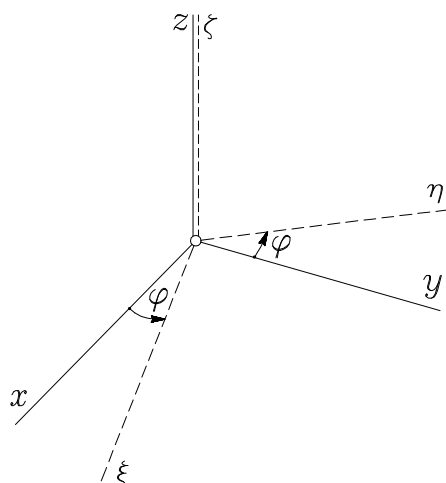
$$\begin{aligned} d_{yyxx} = d_{xxyy} &\quad \rightarrow \quad \frac{\nu_{yx}}{E_x} = \frac{\nu_{xy}}{E_y} \\ d_{zzxx} = d_{xxzz} &\quad \rightarrow \quad \frac{\nu_{zx}}{E_x} = \frac{\nu_{xz}}{E_z} \\ d_{zzyy} = d_{yyzz} &\quad \rightarrow \quad \frac{\nu_{zy}}{E_y} = \frac{\nu_{yz}}{E_z}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Greenov model je torej določen le z devetimi neodvisnimi mehanskimi parametri in s tremi temperaturnimi razteznostnimi koeficienti.

[†] George Green, angleški mlinar in matematik, 1793–1841.

Izotropna snov

Povedali smo že, da pri *izotropni snovi* mehanske in druge lastnosti niso odvisne od smeri opazovanja. Gre torej za poseben primer ortotropne snovi, pri kateri dodatno zahtevamo, da se komponente tenzorjev $\mathbf{C}(4)$ in $\beta(2)$ ne spremenijo, če koordinatno bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ v katerikoli od koordinatnih ravnin zavrtimo za poljuben kot φ v novo lego $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$. Najprej vzemimo, da zavrtimo koordinatno bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ za kot φ okrog osi z (slika 3.13).



Slika 3.13

Pripadajoča transformacijska matrika je

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Pogoje izotropije izrazimo z zahtevo, da morajo biti istoležne komponente tenzorjev $\mathbf{C}(4)$ in $\beta(2)$ enake v obeh bazah. Ob upoštevanju simetrijskih pogojev (3.32) dobimo

$$C_{\xi\xi\xi\xi} = C_{xxxx} \cos^4 \varphi + C_{yyyy} \sin^4 \varphi + (C_{xxyy} + C_{yyxx} + 4C_{xyxy}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = C_{xxxx} \quad (3.67)$$

$$C_{\eta\eta\eta\eta} = C_{xxxx} \sin^4 \varphi + C_{yyyy} \cos^4 \varphi + (C_{xxyy} + C_{yyxx} + 4C_{xyxy}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = C_{yyyy} \quad (3.68)$$

$$C_{\zeta\zeta\zeta\zeta} = C_{zzzz} \quad (3.69)$$

$$C_{\xi\xi\eta\eta} = (C_{xxxx} + C_{yyyy} - 4C_{xyxy}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + C_{xxyy} \cos^4 \varphi + C_{yyxx} \sin^4 \varphi = C_{xxyy} \quad (3.70)$$

$$C_{\xi\xi\zeta\zeta} = C_{xxzz} \cos^2 \varphi + C_{yyzz} \sin^2 \varphi = C_{xxzz} \quad (3.71)$$

$$C_{\eta\eta\xi\xi} = (C_{xxxx} + C_{yyyy} - 4C_{xyxy}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + C_{xxyy} \sin^4 \varphi + C_{yyxx} \cos^4 \varphi = C_{yyxx} \quad (3.72)$$

$$C_{\eta\eta\zeta\zeta} = C_{xxzz} \sin^2 \varphi + C_{yyzz} \cos^2 \varphi = C_{yyzz} \quad (3.73)$$

$$C_{\zeta\zeta\xi\xi} = C_{zzxx} \cos^2 \varphi + C_{zzyy} \sin^2 \varphi = C_{zzxx} \quad (3.74)$$

$$C_{\zeta\zeta\eta\eta} = C_{zzxx} \sin^2 \varphi + C_{zzyy} \cos^2 \varphi = C_{zzyy} \quad (3.75)$$

$$C_{\xi\eta\xi\eta} = (C_{xxxx} + C_{yyyy} - C_{xxyy} - C_{yyxx}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + C_{xyxy} (\sin^4 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) = C_{xyxy} \quad (3.76)$$

$$C_{\eta\zeta\eta\zeta} = C_{yzyz} \cos^2 \varphi + C_{xzzx} \sin^2 \varphi = C_{yzyz} \quad (3.77)$$

$$C_{\zeta\xi\xi\xi} = C_{zxzx} \cos^2 \varphi + C_{zyzy} \sin^2 \varphi = C_{zxzx} . \quad (3.78)$$

Kakor vidimo, je enačba (3.69) izpolnjena pri vsakem kotu φ . Sicer pa začnimo z enačbo (3.71), iz katere sledi enakost

$$C_{xxzz} = C_{yyzz} . \quad (3.79)$$

Do enake ugotovitve pripelje tudi enačba (3.73). Podobno dobimo iz enačb (3.74) in (3.75) enakost

$$C_{zzxx} = C_{zzyy} , \quad (3.80)$$

iz enačb (3.77) in (3.78) pa sledi

$$C_{zxzx} = C_{zyzy} . \quad (3.81)$$

Z medsebojnim odštevanjem enačb (3.70) in (3.72) dobimo še

$$C_{xxyy} = C_{yyxx} . \quad (3.82)$$

Če ob upoštevanju enakosti (3.82) odštejemo enačbo (3.68) od enačbe (3.67), sledi

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} . \quad (3.83)$$

Preostane le še enačba (3.76), ki jo ob upoštevanju enačb (3.82) in (3.83) lahko zapišemo takole

$$\left[\frac{1}{2}(C_{xxxx} - C_{xxyy}) - C_{xyxy} \right] \sin^2 2\varphi = 0 . \quad (3.84)$$

Iz pogoja, da mora biti gornja enačba izpolnjena pri poljubnem kotu φ , sledi zveza

$$C_{xxxx} = C_{xxyy} + 2C_{xyxy} . \quad (3.85)$$

Za temperaturne koeficiente so pogoji izotropije izraženi z enačbami

$$\beta_{\xi\xi} = \beta_{xx} \cos^2 \varphi + \beta_{yy} \sin^2 \varphi = \beta_{xx} \quad (3.86)$$

$$\beta_{\eta\eta} = \beta_{xx} \sin^2 \varphi + \beta_{yy} \cos^2 \varphi = \beta_{yy} \quad (3.87)$$

$$\beta_{\zeta\zeta} = \beta_{zz} . \quad (3.88)$$

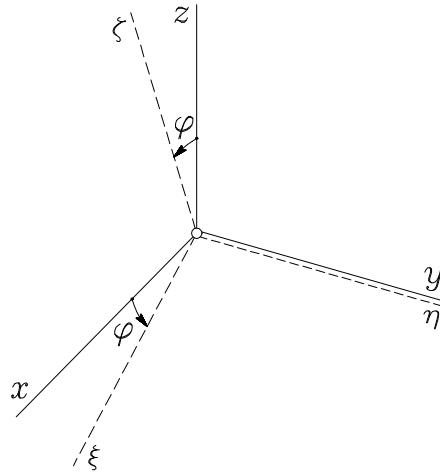
Iz enačb (3.86) in (3.87) sledi enakost

$$\beta_{xx} = \beta_{yy} , \quad (3.89)$$

enačba (3.88) pa je izpolnjena pri vsakem kotu φ .

Kot naslednjo možnost vzemimo zasuk koordinatne baze $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ okrog smeri y za poljuben kot φ v novo lego $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ (slika 3.14). Pripadajoča transformacijska matrika je

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} . \quad (3.90)$$



Slika 3.14

S podobnim sklepanjem kakor v prejšnjem primeru pridemo do naslednjih novih enakosti

$$\begin{aligned}
 C_{zzzz} &= C_{xxxx} \\
 C_{zzxx} &= C_{xxzz} \\
 C_{xxyy} &= C_{xxzz} \\
 C_{xyxy} &= C_{yzyz} \\
 C_{zzzz} &= C_{zzxx} + 2C_{zxzx}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

in

$$\beta_{zz} = \beta_{xx} . \tag{3.92}$$

Tretja možnost, ki se nanaša na poljuben zasuk koordinatne baze \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z okrog smeri x , ne pove nič novega. Ob upoštevanju enačb (3.79) do (3.92) se lahko hitro prepričamo, da je mogoče konstitucijski zakon linearno elastične izotropne snovi izraziti s tremi neodvisnimi materialnimi parametri. Zaradi enostavnejšega zapisa vpeljemo nove oznake

$$\lambda = C_{xxyy} = C_{xxzz} = C_{yyzz} = C_{yyxx} = C_{zzxx} = C_{zzyy} \tag{3.93}$$

$$\mu = C_{xyxy} = C_{yzyz} = C_{zxzx} \quad (3.94)$$

$$\beta_T = \beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz}. \quad (3.95)$$

Parametra μ in λ sta znana kot *Laméjevi*[†] konstanti linearno elastične izotropne snovi. Konstitucijske enačbe izotropne linearno elastične snovi preidejo s tem v naslednjo matrično obliko

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_T \\ \beta_T \\ \beta_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T. \quad (3.96)$$

Z uporabo oznake I_1^ε za prvo invarianto tenzorja majhnih deformacij

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (3.97)$$

lahko enačbe (3.96) zapišemo takole

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda I_1^\varepsilon - \beta_T \Delta T \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda I_1^\varepsilon - \beta_T \Delta T \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda I_1^\varepsilon - \beta_T \Delta T \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2\mu \varepsilon_{zx}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

[†] Gabriel Lamé, francoski inženir, 1795–1870.

Parametre μ , λ in β_T določimo s poskusi. Pri tem se izkaže, da je za določitev parametrov μ in λ pri izotropnem linearno elastičnem materialu dovolj, če poznamo rezultate enega samega enoosnega poskusa[†]. Ker so pri izotropnem materialu vse smeri enakovredne, lahko vzorce odvezamo v poljubnih smereh. Za rezultate enoosnega poskusa vzemimo, da se nanašajo na vzdolžno smer \mathbf{e}_x , tako da je

$$\sigma_{xx} \neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (3.99)$$

Iz dobljenega $\sigma - \varepsilon$ diagrama odčitamo modul elastičnosti E , tako da velja

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}. \quad (3.100)$$

Izmerimo tudi koeficient prečne kontrakcije ν , ki je zaradi izotropije enak v vseh smereh. Prečni deformaciji ε_{yy} in ε_{zz} sta zato enaki

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx}. \quad (3.101)$$

Prva invarianta deformacij je tako

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (1 - 2\nu) \varepsilon_{xx}. \quad (3.102)$$

Zapišimo sedaj prvo in drugo od enačb (3.98) za izotermni primer ($\Delta T = 0$). Ob upoštevanju enačb (3.100) in (3.102) dobimo

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} [2\mu + \lambda(1 - 2\nu)] = E \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} [-2\mu\nu + \lambda(1 - 2\nu)] = 0. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Zanima nas le primer, da je $\varepsilon_{xx} \neq 0$, zato sledi

$$\begin{aligned} 2\mu + \lambda(1 - 2\nu) &= E \\ -2\mu\nu + \lambda(1 - 2\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

[†] Praviloma gre pri tem za večje število meritev, iz katerih so z ustreznimi statističnimi metodami določene dovolj zanesljive vrednosti mehanskih parametrov obravnavanega materiala (modul elastičnosti, Poissonov količnik, meja plastičnega tečenja,...)

Od tod brez težav izrazimo Laméjevi konstanti μ in λ z elastičnim modulom E in Poissonovim količnikom ν

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (3.105)$$

V enačbah (3.98) smo izrazili napetosti kot funkcije deformacij in spremembe temperature. Pri številnih mehanskih nalogah pa je ugodneje, če poznamo deformacije v odvisnosti od napetosti in temperaturne spremembe. V obravnavanem primeru je izpeljava inverzne oblike enačb (3.98) zelo preprosta. Najprej seštejmo prve tri od teh enačb. Ob upoštevanju definicije prvih invariant napetosti I_1^σ in deformacij I_1^ε dobimo

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = I_1^\sigma = (2\mu + 3\lambda)I_1^\varepsilon - 3\beta_T \Delta T. \quad (3.106)$$

Če v skladu z enačbama (3.105) izrazimo Laméjevi konstanti μ in λ z elastičnim modulom E in Poissonovim količnikom ν , dobimo enakost

$$2\mu + 3\lambda = \frac{E}{1 - 2\nu} \quad (3.107)$$

in iz enačbe (3.106) sledi

$$I_1^\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{E} (I_1^\sigma + 3\beta_T \Delta T). \quad (3.108)$$

Iz prve od enačb (3.98) lahko sedaj določimo deformacijo ε_{xx}

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \frac{1 - 2\nu}{E} \beta_T \Delta T. \quad (3.109)$$

Iz gornje enačbe lahko tudi razberemo pomen temperaturnega parametra β_T v odvisnosti od temperaturnega razteznostnega koeficienta α_T . Ker pri neobteženem vzorcu ($\sigma_{ij} = 0$) spremembi temperature ΔT v skladu z enačbo (3.24) ustreza deformacija $\varepsilon_{xx} = \alpha_T \Delta T$, sledi

$$\beta_T = \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha_T. \quad (3.110)$$

Podobno kakor v enačbi (3.109) lahko z napetostmi izrazimo tudi deformaciji ε_{yy} in ε_{zz} , obrat zadnjih treh od enačb (3.98) pa je sploh preprost. Tako dobimo sistem šestih *Neumann*[†]–*Duhamelovih*[‡] enačb linearno elastične izotropne snovi v inverzni obliki

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx}.
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Enačbe (3.111) pogosto srečamo tudi v naslednji obliki

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zx}.
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Pri tem smo vpeljali običajno oznako G za strižni modul materiala

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{3.113}$$

[†] Carl Gottfried Neumann, nemški matematik, 1832–1925.

[‡] Jean Marie Constant Duhamel, francoski matematik, 1797–1872.

S sistemom linearnih algebrajskih enačb (3.98) oziroma z njegovo inverzno obliko (3.111) smo med seboj povezali deformacije, napetosti in spremembo temperature. Oba omenjena sistema lahko na kratko zapišemo z enačbama

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \delta_{ij} - \beta_T \Delta T \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma \delta_{ij} + \alpha_T \Delta T \delta_{ij}.\end{aligned}\quad (i, j = x, y, z) \quad (3.114)$$

Pri tem sta I_1^σ in I_1^ε prvi invarianti tenzorja napetosti oziroma tenzorja majhnih deformacij

$$I_1^\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad I_1^\varepsilon = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta_{ij} . \quad (3.115)$$

Pri izpeljavi konstitucijskih enačb smo z vpeljavo Cauchyjevega materialnega modela izhajali iz splošnega primera elastične anizotropne snovi. V drugem koraku smo se omejili na ortotropno snov in pokazali postopek določitve koeficientov konstitucijske matrike za ta primer. Z nadaljnjo omejitvijo na linearno elastično izotropno snov smo ugotovili, da so sovisnosti med deformacijami, napetostmi in spremembo temperature v tem primeru opisane z zgolj tremi materialnimi parametri E , ν in α_T , ki jih razmeroma preprosto določimo z enoosnim poskusom. V primeru, da bi se že vnaprej zanimali le za izotropno, linearno elastično snov, bi lahko konstitucijske enačbe (3.111) izpeljali na dosti krajši in preglednejši način. Izpeljava je prikazana v Zgledu 3.2.

Dodajmo še nekaj pojasnil v zvezi s hidrostatičnimi in deviatoričnimi napetostmi ter ustreznimi deformacijami. Tenzor napetosti smo razstavili na hidrostatični del σ_{ij}^H in deviatorični del s_{ij} z razcepom

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^H + s_{ij} \quad \text{oziorama} \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{3} I_1^\sigma \delta_{ij} + s_{ij}, \quad (3.116)$$

pri čemer je hidrostatični del definiran s povprečno normalno napetostjo $3\sigma^H = I_1^\sigma$. Podobno tudi tenzor majhnih deformacij razcepimo na

hidrostatični ali sferični del ε_{ij}^H in deviatorični ali *distorzijski* del d_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^H + d_{ij} \quad \text{ozioroma} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} I_1^\varepsilon \delta_{ij} + d_{ij}. \quad (3.117)$$

Kakor vemo, je pri majhnih deformacijah s prvo invarianto tenzorja deformacij izražena specifična sprememba prostornine $\varepsilon_V = I_1^\varepsilon$. Sedaj lahko enačbi (3.116) in (3.117) zapišemo v naslednji obliki

$$\sigma_{ij} = \sigma^H \delta_{ij} + s_{ij} \quad (3.118)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} + d_{ij}. \quad (3.119)$$

V nadaljevanju se omejimo na izotermni primer ($\Delta T = 0$) in vstavimo zvezo (3.119) v prvo od konstitucijskih enačb (3.114)

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} + d_{ij} \right) + \lambda \varepsilon_V \delta_{ij} = \frac{1}{3} (2\mu + 3\lambda) \varepsilon_V \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}. \quad (3.120)$$

Uporabimo enakost (3.107) in dobimo

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_V \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}. \quad (3.121)$$

Ulomek v prvem členu na desni je v mehaniki linearno elastične zvezne snovi znan kot *prostorninski modul (bulk modulus) K*

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.122)$$

S tem lahko enačbo (3.120) zapišemo v naslednji obliki

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_V \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}. \quad (3.123)$$

Spomnimo se povezave (3.108) med prvima invariantama napetosti in deformacij, ki se v izotermnem primeru ($\Delta T = 0$) glasi

$$I_1^\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E} I_1^\sigma. \quad (3.124)$$

Ker je $I_1^\varepsilon = \varepsilon_V$ in $I_1^\sigma = 3\sigma^H$, lahko pišemo

$$\varepsilon_V = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma^H, \quad (3.125)$$

oziroma glede na definicijo prostorninskega modula K

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma^H}{K}. \quad (3.126)$$

Ob upoštevanju zveze (3.123) lahko sedaj enačbo (3.118) zapišemo v zelo zgovorni obliki

$$\sigma^H \delta_{ij} + s_{ij} = K \varepsilon_V \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}, \quad (3.128)$$

kjer je

$$\sigma_{ij}^H = \sigma^H \delta_{ij} = K \varepsilon_V \delta_{ij} \quad (3.129)$$

$$s_{ij} = 2\mu d_{ij}. \quad (3.130)$$

Prišli smo do drugačnega zapisa že znanega dejstva, da je pri izotropnem, idealno elastičnem telesu hidrostatični del napetostnega stanja povezan zgolj s specifično spremembo prostornine, deviatorični del pa le z distorzijskim delom deformacijskega stanja, torej s spremembo oblike.

Na kratko se še pomudimo pri enačbi (3.126), ki je po obliki in vsebini podobna Hookovemu zakonu, saj deformacijski parameter ε_V povezuje s povprečno normalno napetostjo σ^H , sorazmernostni faktor pa predstavlja materialna konstanta K . Ista enačba v obliki (3.125) tudi pove, da lahko koeficient prečne kontrakcije ν zavzame vrednosti med 0 in 0.5

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (3.131)$$

Pri $\nu < 0$ bi namreč pri enoosni natezni obremenitvi podolgovatega vzorca raztežku v vzdolžni smeri ustrezal raztezek tudi v prečnih

smereh, kar bi bilo v nasprotju z osnovno fizikalno lastnostjo trdnih teles, da se upirajo spremembi prostornine. Prav tako bi pri $\nu > 0.5$ dobili fizikalno nesprejemljiv rezultat, da bi se v povprečju natezno obteženemu elementu telesa prostornina zmanjšala, ali obratno, da bi se tlačno obteženemu elementu prostornina povečala.

Tako ravnotežne kakor tudi kinematične enačbe, ki smo jih spoznali v prvih dveh poglavjih, smo razen v skalarni zapisali tudi v vektorski obliki. Zaradi enostavnejšega dela pri nekaterih izpeljavah, ki nas čakajo v nadaljevanju, je smiselno v vektorski obliki zapisati tudi konstitucijske enačbe. Enačbi (3.114) pomnožimo z \mathbf{e}_j in seštejemo po j

$$\begin{aligned}\sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j &= 2\mu \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j + \lambda I_1^\varepsilon \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j - \beta_T \Delta T \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j \\ \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j &= \frac{1+\nu}{E} \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j + \alpha_T \Delta T \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j.\end{aligned}\tag{3.132}$$

Ker je

$$\sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad \text{in} \quad \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i,\tag{3.133}$$

dobijo konstitucijske enačbe naslednjo vektorsko obliko

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_i &= 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_i + \lambda I_1^\varepsilon \mathbf{e}_i - \beta_T \Delta T \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_i - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma \mathbf{e}_i + \alpha_T \Delta T \mathbf{e}_i.\end{aligned}\tag{3.134}$$

$(i = x, y, z)$

Na podoben način lahko v vektorski obliki zapišemo enačbi (3.118) in (3.119)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_i &= \boldsymbol{\sigma}_i^H + \mathbf{s}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \boldsymbol{\varepsilon}_i^H + \mathbf{d}_i,\end{aligned}\tag{3.135}$$

kjer pomeni

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}_i^H &= \sum_j \sigma_{ij}^H \mathbf{e}_j = \sigma^H \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \sigma^H \mathbf{e}_i \\
 \mathbf{s}_i &= \sum_j s_{ij} \mathbf{e}_j \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_i^H &= \sum_j \varepsilon_{ij}^H \mathbf{e}_j = \frac{1}{3} \varepsilon_V \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \frac{1}{3} \varepsilon_V \mathbf{e}_i \\
 \mathbf{d}_i &= \sum_j d_{ij} \mathbf{e}_j .
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Ob upoštevanju vsega povedanega brez težav zapišemo v vektorski obliki tudi konstitucijski zvezi (3.129) in (3.130)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}_i^H &= K \varepsilon_V \mathbf{e}_i \\
 \mathbf{s}_i &= 2\mu \mathbf{d}_i .
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

Za kasnejšo rabo zapišimo v vektorski obliki še prvi invarianti napetostnega in deformacijskega tenzorja ter njuna prirastka pri infinitezimalni spremembi napetostnega oziroma deformacijskega stanja

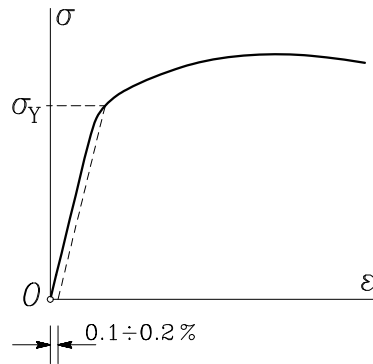
$$\begin{aligned}
 I_1^\sigma &= \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{e}_i & dI_1^\sigma &= \sum_i d\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{e}_i \\
 I_1^\varepsilon &= \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \mathbf{e}_i & dI_1^\varepsilon &= \sum_i d\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \mathbf{e}_i .
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

3.5 Pogoji za začetek plastičnega tečenja

V razdelku **3.3** smo pri splošnem opisu značilnega $\sigma - \varepsilon$ diagrama s točko T označili mejo med elastičnim in elastično-plastičnim delom $\sigma - \varepsilon$ diagrama in jo imenovali meja tečenja. Pri nekaterih materialih, na primer pri mehkem jeklu, je ta meja zelo izrazita in jo je mogoče razmeroma natančno določiti. Pri številnih drugih materialih (visokovredno jeklo, aluminij, beton, ...) pa je meja tečenja manj

poudarjena in jo je pogosto možno zgolj oceniti glede na obnašanje vzorca pri zaporednem obremenjevanju in razbremenjevanju.

V praksi običajno vzamemo, da je meja plastičnega tečenja pri kovinah določena z vzdolžno plastično deformacijo $0.1 \div 0.2 \%$ (slika 3.15). V nadaljevanju obravnavamo le snovi, pri katerih je meja tečenja pri enoosnem napetostnem stanju nedvoumno določena in v $\sigma-\varepsilon$ diagramu definirana z napetostjo σ_Y .



Slika 3.15

V prejšnjem razdelku smo z enačbami (3.98) do (3.138) vpeljali sovisnosti med napetostmi in deformacijami za splošni primer prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja v linearno elastičnem območju izotropne snovi. Iz $\sigma-\varepsilon$ diagrama sledi, da se snov linearno elastično obnaša le v določenem napetostnem območju, ki je pri enoosnem napetostnem stanju omejeno z vrednostjo normalne napetosti na meji tečenja σ_Y . S tem v zvezi se zastavi vprašanje, kako je linearno elastično območje omejeno pri prostorskem napetostnem stanju. Jasno je, da je v tem primeru meja med elastičnim in plastičnim območjem odvisna od vseh šestih komponent tenzorja napetosti, s katerim je opisano napetostno stanje obravnavanega delca.

Zamislimo si šest-dimenzijski napetostni prostor s koordinatami σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} . Vsako možno napetostno stanje delca je opisano s točko v tem napetostnem prostoru. Vzemimo, da je delec v

začetku neobremenjen ($\sigma_{ij}^0 = 0$), nato pa napetosti, v splošnem vsaka po svoje, naraščajo v odvisnosti od načina obteževanja telesa. Deformacije so sprva v celoti elastične, pri določenem napetostnem stanju pa se pojavijo tudi nepovratne, torej plastične deformacije. Za večino konstrukcijskih materialov (še posebej za kovine) velja, da povišana temperatura pospešuje začetek plastifikacije. To lastnost s pridom izkoristi na primer kovač, ki jeklo močno segreje in ga nato z lahkoto plastično preoblikuje. Kritično kombinacijo napetosti, pri kateri pri temperaturi T pride do prehoda iz elastičnega v plastično stanje, zapišemo v matematični obliki z enačbo

$$f(\sigma_{ij}, T) = 0. \quad (3.139)$$

V privzetem napetostnem prostoru predstavlja enačba (3.139) družino sklenjenih hiperploskev. Vsaki temperaturi T pripada namreč v splošnem drugačna hiperploskev. Oblika in parametri funkcije f so odvisni od vrste obravnavane snovi. Če napetostno stanje pri temperaturi T zadošča neenačbi

$$f(\sigma_{ij}, T) < 0, \quad (3.140)$$

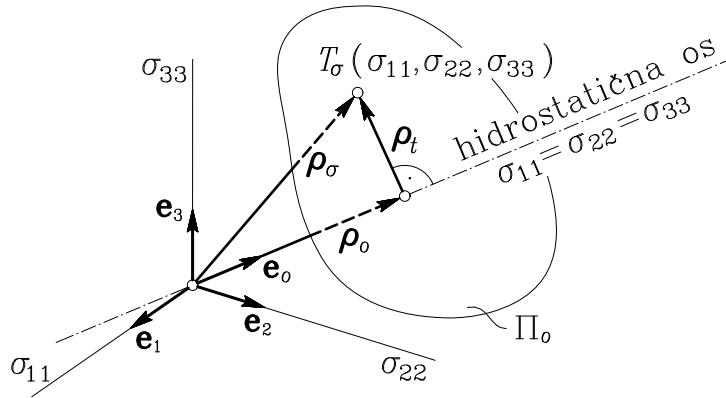
je delec še v elastičnem stanju, pri $f(\sigma_{ij}, T) = 0$ pa pride do prehoda iz elastičnega v plastično stanje. Omenjena hiperploskev torej razmejuje elastično od plastičnega območja pri temperaturi T . Zato jo imenujemo *ploskev plastičnega tečenja*, funkcijo $f(\sigma_{ij}, T)$ *funkcija plastičnega tečenja*, enačbo (3.139) pa *pogoj oziroma kriterij plastičnega tečenja* ali na kratko *pogoj tečenja*. V nadaljevanju obravnavamo izotermni primer, ko je temperatura ves čas enaka začetni temperaturi delca. Zato imamo opraviti le z eno ploskvijo tečenja in pogoj tečenja preide v enostavnejšo obliko

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (3.141)$$

V tem delu se omejimo na opis plastičnega obnašanja izotropnih snovi, pri katerih mehanske lastnosti niso odvisne od izbire koordinatnega sistema. Zato lahko pogoj tečenja zapišemo v odvisnosti od glavnih normalnih napetosti $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ ali v odvisnosti od invariant napetostnega tenzorja $I_1^\sigma, I_2^\sigma, I_3^\sigma$.

Haigh–Westergaardov napetostni prostor

Zelo pripravno je, če se odločimo za opis napetostnega stanja delca v Haigh[†]–Westergaardovem[‡] napetostnem prostoru, ki ga določajo glavni vektorji \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 obravnavanega napetostnega stanja. V tem prostoru je vsako možno napetostno stanje opisano s točko, ki je določena s tremi glavnimi normalnimi napetostmi σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} (slika 3.16). Tak način opisa omogoča tudi geometrijsko ponazoritev različnih napetostnih stanj in ploskev tečenja.



Slika 3.16

V Haigh–Westergaardovem napetostnem prostoru zapišemo pogoj plastičnega tečenja z enačbo

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) = 0. \quad (3.142)$$

Vpeljava Haigh–Westergaardovega napetostnega prostora omogoča tudi nekoliko podrobnejšo opredelitev oblike in lege ploskve tečenja. Naj bo napetostno stanje opisano s točko T_σ s koordinatami σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} . Lega točke T_σ v Haigh–Westergaardovem prostoru je določena s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{\rho}_\sigma$

$$\boldsymbol{\rho}_\sigma = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3. \quad (3.143)$$

[†] Bernard P. Haigh, angleški mehanik, 1884–1941.

[‡] Harald Malcolm Westergaard, danski inženir in mehanik, 1888–1950.

V razdelku **1.12** smo določili napetosti v oktaedrski ravnini. Normala \mathbf{e}_o oktaedrske ravnine Π_o

$$\mathbf{e}_o = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \quad (3.144)$$

očitno določa smer prostorske simetrale Haigh–Westergaardovega napetostnega prostora, ki je podana z enačbo

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}. \quad (3.145)$$

Primerjava enačb (1.278) in (3.143) pokaže, da je krajevni vektor $\boldsymbol{\rho}_\sigma$ prenosorazmeren napetostnemu vektorju $\boldsymbol{\sigma}_o$, ki pripada oktaedrski ravnini skozi obravnavani delec

$$\boldsymbol{\rho}_\sigma = \sqrt{3} \boldsymbol{\sigma}_o. \quad (3.146)$$

Vektor $\boldsymbol{\rho}_\sigma$ razstavimo na njegovi komponenti $\boldsymbol{\rho}_o$ in $\boldsymbol{\rho}_t$ glede na oktaedrsko ravnino skozi točko T_σ . Pri tem leži vektor $\boldsymbol{\rho}_o$ na prostorski simetrali \mathbf{e}_o , vektor $\boldsymbol{\rho}_t$ pa v obravnavani oktaedrski ravnini (*slika 3.16*)

$$\boldsymbol{\rho}_\sigma = \boldsymbol{\rho}_o + \boldsymbol{\rho}_t. \quad (3.147)$$

Projekcijo vektorja $\boldsymbol{\rho}_\sigma$ na smer prostorske simetrale \mathbf{e}_o lahko izrazimo s hidrostatično napetostjo σ^H

$$\boldsymbol{\rho}_\sigma \cdot \mathbf{e}_o = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \sqrt{3} \sigma^H. \quad (3.148)$$

Vektor $\boldsymbol{\rho}_o$ je zato

$$\boldsymbol{\rho}_o = \sqrt{3} \sigma^H \mathbf{e}_o = \sigma^H (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \quad (3.149)$$

Vektor $\boldsymbol{\rho}_t$ določimo iz enačb (3.147), (3.143) in (3.149) in ob upoštevanju enačb (1.266) dobimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_t &= \boldsymbol{\rho}_\sigma - \boldsymbol{\rho}_o = (\sigma_{11} - \sigma^H) \mathbf{e}_1 + (\sigma_{22} - \sigma^H) \mathbf{e}_2 + (\sigma_{33} - \sigma^H) \mathbf{e}_3 \\ \boldsymbol{\rho}_t &= s_{11} \mathbf{e}_1 + s_{22} \mathbf{e}_2 + s_{33} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Velikost vektorja $\boldsymbol{\rho}_t$ lahko ob upoštevanju enačb (3.150) in (1.285) izrazimo z glavnimi deviatoričnimi normalnimi napetostmi s_{11} , s_{22} , s_{33} oziroma s strižno napetostjo τ_o v oktaedrski ravnini

$$\rho_t = |\boldsymbol{\rho}_t| = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_t \cdot \boldsymbol{\rho}_t} = \sqrt{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2} = \sqrt{3} \tau_o. \quad (3.151)$$

Iz enačbe (3.149) sledi, da je hidrostatični del napetostnega stanja, ki je predstavljeno s točko T_σ , določen z vektorjem $\boldsymbol{\rho}_o$ na prostorski simetrali napetostnega prostora. Prostorsko simetralo ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$) zato imenujemo tudi *hidrostatična os*. Deviatorični del pa je, kakor kaže enačba (3.150), določen z vektorjem $\boldsymbol{\rho}_t$, ki leži v oktaedrski ravnini skozi točko T_σ . Zato to ravnino imenujemo *deviatorska ravnina*. Enačba deviatorske ravnine v napetostnem prostoru je

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3 \sigma^H. \quad (3.152)$$

Deviatorsko ravnino, ki gre skozi koordinatno izhodišče ($\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$), imenujemo Π -ravnina.

Kakor smo povedali že v splošnem delu, je za nekatere trdne snovi (predvsem za kovine) značilno, da pri hidrostatičnem napetostnem stanju ne pride do pojava plastičnih deformacij tudi pri zelo visokih vrednostih hidrostatične napetosti[†]. Za to skupino snovi, ki jih imenujemo *hidrostatično neobčutljive snovi*, je upravičena predpostavka, da na začetek in razvoj plastičnih deformacij vpliva le deviatorični del napetosti. To nadalje pomeni, da je odločitev o tem, ali je pri napetostnem stanju, opisanem s točko T_σ , prišlo do plastifikacije ali ne, odvisna le od velikosti vektorja $\boldsymbol{\rho}_t$, ne pa tudi od vektorja $\boldsymbol{\rho}_o$. Ploskev plastičnega tečenja, ki je v Haigh–Westergaardovem prostoru opisana z enačbo (3.142), je torej cilindrična, njene tvorilke pa so vzporedne s prostorsko simetralo \mathbf{e}_o .

[†] Ameriški raziskovalec Percy W. Bridgman (1882–1961) je leta 1952 ugotovil, da v jeklenem vzorcu pri hidrostatičnem tlaku 25000 barov (2500 MPa) še ne pride do začetka plastifikacije, čeprav je meja tečenja pri enoosnem poskusu okrog 300 MPa.

Navedene ugotovitve so pomembne pri iskanju funkcijskih oblik pogojev tečenja različnih snovi. Pri tem gre namreč za nedoločen problem, saj mora pogoj tečenja povezati tri koordinate σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} Haigh–Westergaardovega napetostnega prostora z enim samim podatkom, to je mejo tečenja σ_Y pri enoosnem poskusu. Pogoji tečenja torej predstavljajo le empirične domneve (hipoteze) o začetku plastifikacije različnih snovi in je njihovo ustreznost treba potrditi s poskusi.

Primerjalna ali ekvivalentna napetost

Pri enoosnem napetostnem stanju je začetek plastičnega tečenja enolično določen z mejo tečenja σ_Y . Pri prostorskem napetostnem stanju je prehod iz elastičnega v plastično področje opisan s pogojem tečenja (3.141). Pogoj tečenja lahko razumemo kot domnevo, da pride do začetka plastičnega tečenja tedaj, ko neka funkcija kombinacije napetosti $f^*(\sigma_{ij}) \geq 0$ doseže določeno, od vrste snovi odvisno, pozitivno vrednost k_s

$$f^*(\sigma_{ij}) = k_s. \quad (3.153)$$

Funkcijo kombinacije napetosti $f^*(\sigma_{ij})$, ki nastopa v tem pogoju, imenujemo *primerjalna ali ekvivalentna napetost* σ_e in predstavlja mero za napetostno stanje, ki jo lahko primerjamo z eksperimentalno določenim snovnim parametrom k_s . Pri izotropnih snoveh praviloma vzamemo za snovni parameter kar mejo tečenja pri enoosnem poskusu: $k_s = \sigma_Y$. Pogoj tečenja lahko s tem v splošni obliki zapišemo takole

$$\sigma_e = f^*(\sigma_{ij}) = \sigma_Y. \quad (3.154)$$

Če je $\sigma_e < \sigma_Y$, je obravnavani delec snovi v elastičnem stanju, pri $\sigma_e = \sigma_Y$ pa se začne plastično tečenje.

V Haigh–Westergaardovem prostoru je primerjalna napetost σ_e izražena z glavnimi normalnimi napetostmi σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} . Upošteva je ugotovitev, da hidrostatične napetosti ne vplivajo na začetek plastičnega tečenja, nastopajo v izrazu za primerjalno napetost le deviatorične

napetosti. V skladu z enačbo (1.264) lahko primerjalno napetost σ_e zapišemo kot funkcijo napetostnih razlik

$$\sigma_e = f_1^* [(\sigma_{11} - \sigma_{22}), (\sigma_{22} - \sigma_{33}), (\sigma_{33} - \sigma_{11})] . \quad (3.155)$$

V primeru, da je meja tečenja v tlaku po velikosti enaka meji tečenja v nategu, je $\sigma - \varepsilon$ diagram antisimetričen. To pomeni, da se primerjalna napetost σ_e ne sme spremeniti, če se spremenijo predznaki spremenljivk $(\sigma_{11} - \sigma_{22}), (\sigma_{22} - \sigma_{33}), (\sigma_{33} - \sigma_{11})$. Enačba (3.155) preide tedaj v naslednjo obliko

$$\sigma_e = f_1^* (|\sigma_{11} - \sigma_{22}|, |\sigma_{22} - \sigma_{33}|, |\sigma_{33} - \sigma_{11}|) . \quad (3.156)$$

Prizmatična ploskev tečenja, ki je v tem primeru določena z enačbo

$$f_1^* (|\sigma_{11} - \sigma_{22}|, |\sigma_{22} - \sigma_{33}|, |\sigma_{33} - \sigma_{11}|) - \sigma_Y = 0 , \quad (3.157)$$

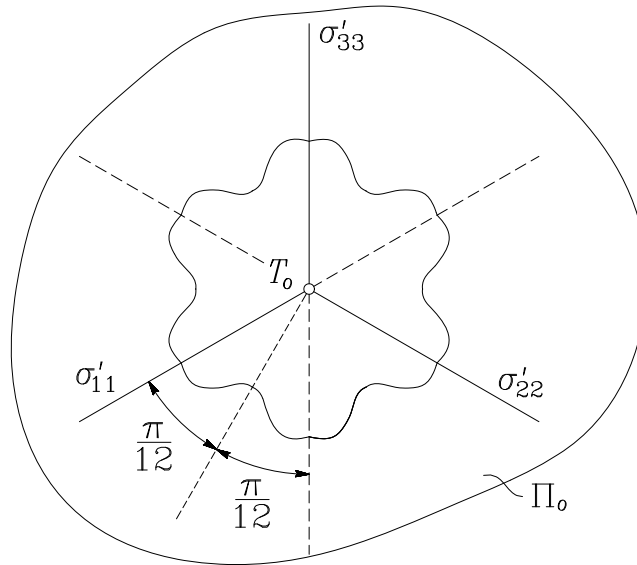
je simetrična tako glede na pozitivne, kakor tudi glede na negativne smeri napetostnih koordinatnih osi $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$. Presečna krivulja ploskve tečenja z oktaedrsko ravnino je zato prav tako simetrična glede na pravokotne projekcije napetostnih osi na oktaedrsko ravnino (*slika 3.17*).

Ob upoštevanju enačb (1.270)–(1.284) lahko primerjalno napetost izrazimo tudi v eni od naslednjih oblik

$$\begin{aligned} \sigma_e &= f_2^*(s_{11}, s_{22}, s_{33}) \\ \sigma_e &= f_3^*(I_2^s, I_3^s) \\ \sigma_e &= f_4^*(\tau_o) . \end{aligned} \quad (3.158)$$

Obravnavamo torej primer, omejen z naslednjimi predpostavkami: (i) snov je izotropna, (ii) hidrostatično napetostno stanje ne vpliva na začetek plastifikacije, (iii) meja plastičnega tečenja v nategu je po velikosti enaka meji plastičnosti v tlaku. V tem primeru je ploskev plastičnega tečenja cilindrična, njene tvorilke so vzporedne s prostorsko

simetralo Haigh–Westergaardovega napetostnega prostora, presečna krivulja te ploskve z deviatorsko ravnino pa je simetrična glede na pravokotne projekcije napetostnih osi na deviatorsko ravnino.



Slika 3.17

Na gornjih ugotovitvah temeljita dve osnovni hipotezi o začetku plastičnega tečenja, ki sta primerni predvsem za kovine. To sta Trescov[†] in Von Misesov[‡] pogoj plastičnega tečenja.

Trescov pogoj plastičnega tečenja

Trescov pogoj plastičnega tečenja (1864) je prvi znani kriterij za nastop plastičnih deformacij pri prostorskem napetostnem stanju. Izhaja iz domneve, da v obravnavani točki telesa pride do plastifikacije tedaj, ko največja strižna napetost $|\tau_{max}|$ doseže določeno, od vrste snovi odvisno vrednost k_T . Zato za Trescov pogoj tečenja pogosto uporabljamo tudi izraz *pogoj največje strižne napetosti*. Upoštevajoč enačbe (1.244) za

[†] Henry Eduard Tresca, francoski mehanik, 1814–1885.

[‡] Richard Von Mises, nemški matematik in mehanik, 1883–1953.

določanje ekstremnih strižnih napetosti lahko Trescov pogoj tečenja zapišemo v naslednji obliki

$$\max \left\{ \frac{1}{2} |\sigma_{11} - \sigma_{22}|, \frac{1}{2} |\sigma_{22} - \sigma_{33}|, \frac{1}{2} |\sigma_{33} - \sigma_{11}| \right\} = k_T. \quad (3.159)$$

Če razvrstimo glavne normalne napetosti po velikosti

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}, \quad (3.160)$$

preide Trescov pogoj tečenja v enostavno obliko

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{33}) = k_T. \quad (3.161)$$

Materialni parameter k_T določimo iz pogoja, da mora pogoj tečenja veljati tudi pri enoosnem napetostnem stanju, kjer je začetek plastifikacije določen z mejo tečenja σ_Y . Če vzamemo primer $\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, pride do začetka plastifikacije, ko je $\sigma_{11} = \sigma_Y$. Zato je

$$k_T = \frac{\sigma_Y}{2} \quad (3.162)$$

in Trescov pogoj je

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = \sigma_Y. \quad (3.163)$$

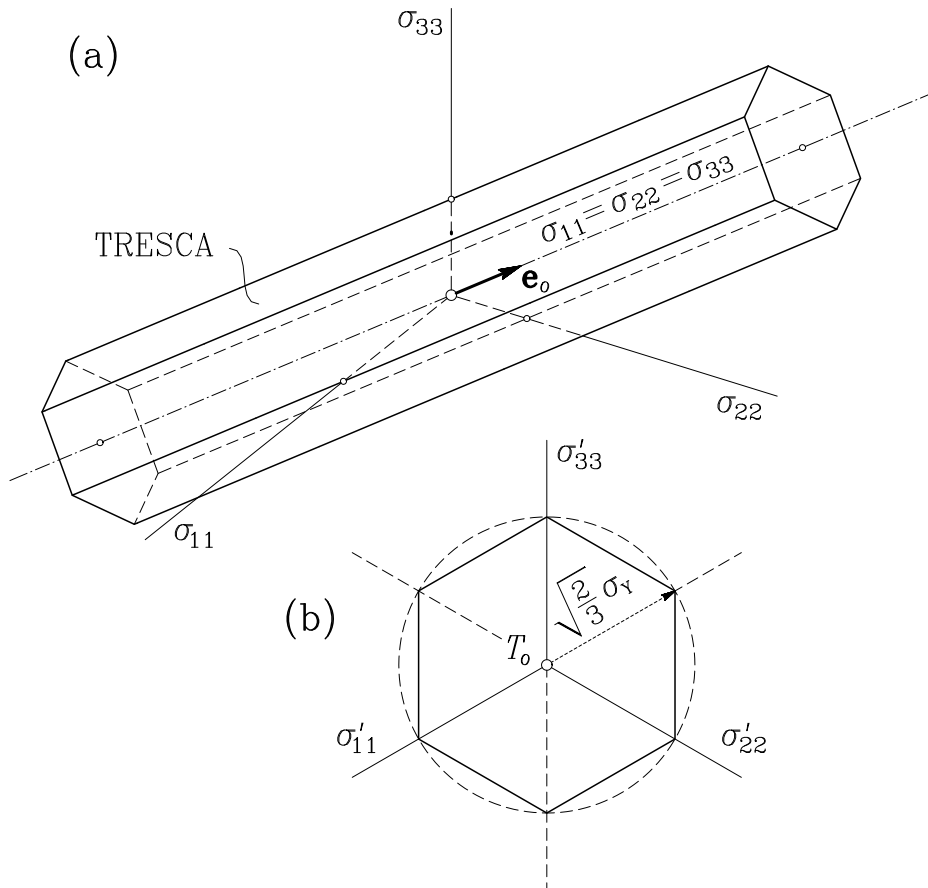
Leva stran enačbe (3.163) predstavlja Trescovo primerjalno napetost

$$\sigma_e^T = \sigma_{11} - \sigma_{33}. \quad (3.164)$$

V splošnem ni nujno, da bi bile glavne normalne napetosti razvrščene po velikosti. Zadregi se izognemo tako, da ob upoštevanju enačbe (3.156) zapišemo Trescov pogoj v splošnejši obliki

$$\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - \sigma_Y^2 \right] \left[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - \sigma_Y^2 \right] \left[(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 - \sigma_Y^2 \right] = 0. \quad (3.165)$$

V geometrijskem pogledu predstavlja Trescov pogoj tečenja v obliki (3.165) pravilno šesterokotno prizmo, katere vzdolžna simetrijska os se ujema s hidrostatsično osjo Haigh–Westergaardovega prostora (slika 3.18-a). Presečni lik ploskve tečenja z deviatorsko ravnino je pravilni šesterokotnik, včrtan krožnici s polmerom $\rho_t = \sqrt{2/3} \sigma_Y$ (slika 3.18-b).

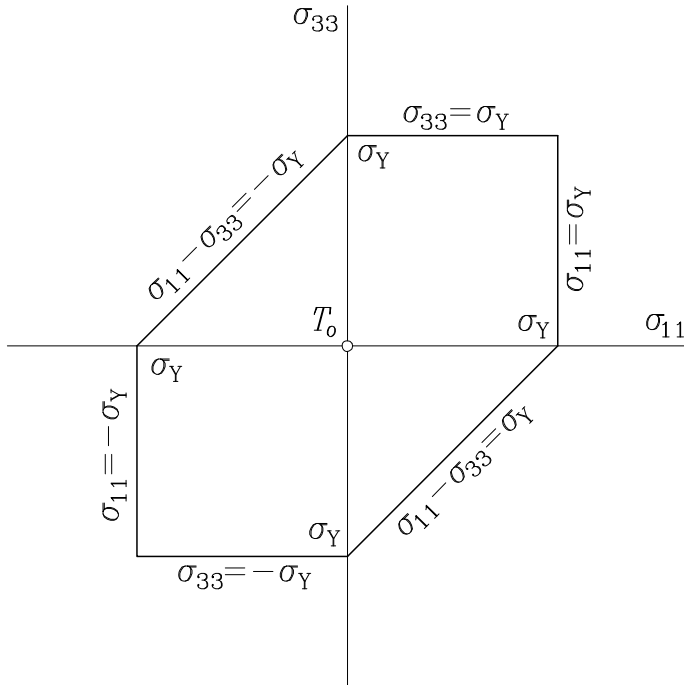


Slika 3.18

Oglejmo si še primer ravninskega napetostnega stanja ($\sigma_{22} = 0$), pri katerem je geometrijska upodobitev pogoja tečenja še bolj nazorna. Trescov pogoj tečenja lahko v obravnavanem primeru zapišemo v skladu

z enačbo (3.165) takole

$$(\sigma_{11}^2 - \sigma_Y^2) (\sigma_{33}^2 - \sigma_Y^2) \left[(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 - \sigma_Y^2 \right] = 0. \quad (3.166)$$



Slika 3.19

V 2-D napetostnem koordinatnem sistemu s koordinatama σ_{11} , σ_{33} predstavlja pogoj (3.166) šest enačb premic:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_Y \\ \sigma_{11} &= -\sigma_Y \\ \sigma_{33} &= \sigma_Y \\ \sigma_{33} &= -\sigma_Y \\ \sigma_{11} - \sigma_{33} &= \sigma_Y \\ \sigma_{11} - \sigma_{33} &= -\sigma_Y . \end{aligned} \quad (3.167)$$

Te premice omejujejo šesterokotno območje v ravini $(\sigma_{11}, \sigma_{33})$ (slika 3.19). Napetostna stanja, ki so opisana s točkami znotraj tega območja, so elastična, rob pa predstavlja mejo med elastičnim in plastičnim stanjem snovi.

Kakor vidimo, je Trescov pogoj plastičnega tečenja zelo preprost. Njegova pomanjkljivost je v tem, da pri prostorskem napetostnem stanju srednja glavna normalna napetost ne vpliva na primerjalno napetost. Zato je ta pogoj primeren predvsem za hitro oceno začetka plastičnega tečenja.

Von Misesov pogoj plastičnega tečenja

V primerjavi s Trescovim je von Misesov pogoj plastičnega tečenja (1913) bolj splošen, saj v njem nastopajo vse tri glavne normalne napetosti. Dejansko na ta pogoj naletimo že prej (Maxwell[†] v pismu Kelvinu[‡] 1856, Huber* 1904). Leta 1924 je Hencky* izrazil ta pogoj s preoblikovalnim deformacijskim delom. Zato je v literaturi znan tudi kot *Huber-Mises-Henckyjev pogoj plastičnega tečenja*, na kratko pa kar *Misesov pogoj tečenja*.

Misesov pogoj temelji na hipotezi, da pride do razvoja plastičnih deformacij tedaj, ko absolutna vrednost druge invariante deviatoričnega dela napetostnega tenzorja I_2^s doseže kritično vrednost k_M^2 . V splošni obliki ga zapišemo takole

$$f(I_2^s) = |I_2^s| - k_M^2 = 0. \quad (3.168)$$

Ob upoštevanju enačbe (1.264) dobimo

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 = 6k_M^2. \quad (3.169)$$

[†] James Clerk Maxwell, škotski naravoslovec, 1831–1879.

[‡] William Thompson Kelvin, irski matematik in fizik, 1824–1907.

* Maksymilian Tytus Huber, ukrajinski znanstvenik, 1872–1950.

* Heinrich Hencky, nemški mehanik, 1885–1952.

Pri tem je k_M snovni parameter, ki ga določimo iz pogoja, da je pri enoosnem napetostnem stanju prehod v plastično področje definiran z mejo tečenja σ_Y . Če, na primer, vzamemo enoosno napetostno stanje $\sigma_{11} = \sigma_Y$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, iz enačbe (3.169) sledi

$$2\sigma_{11}^2 = 2\sigma_Y^2 = 6k_M^2 \quad \rightarrow \quad k_M = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}. \quad (3.170)$$

Misesov pogoj tečenja se s tem glasi

$$\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] = \sigma_Y^2. \quad (3.171)$$

Misesova primerjalna napetost σ_e^M je torej

$$\sigma_e^M = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]}. \quad (3.172)$$

Ob upoštevanju enačbe (1.283) lahko Misesovo primerjalno napetost izrazimo tudi s strižno napetostjo τ_o v oktaedrski ravnini

$$\sigma_e^M = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_o. \quad (3.173)$$

Če izrazimo drugo invarianto deviatoričnega dela napetosti z enačbo (1.189), je tudi

$$\sigma_e^M = \sqrt{-3I_2^s} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_i \sum_j s_{ij} s_{ji}}. \quad (3.174)$$

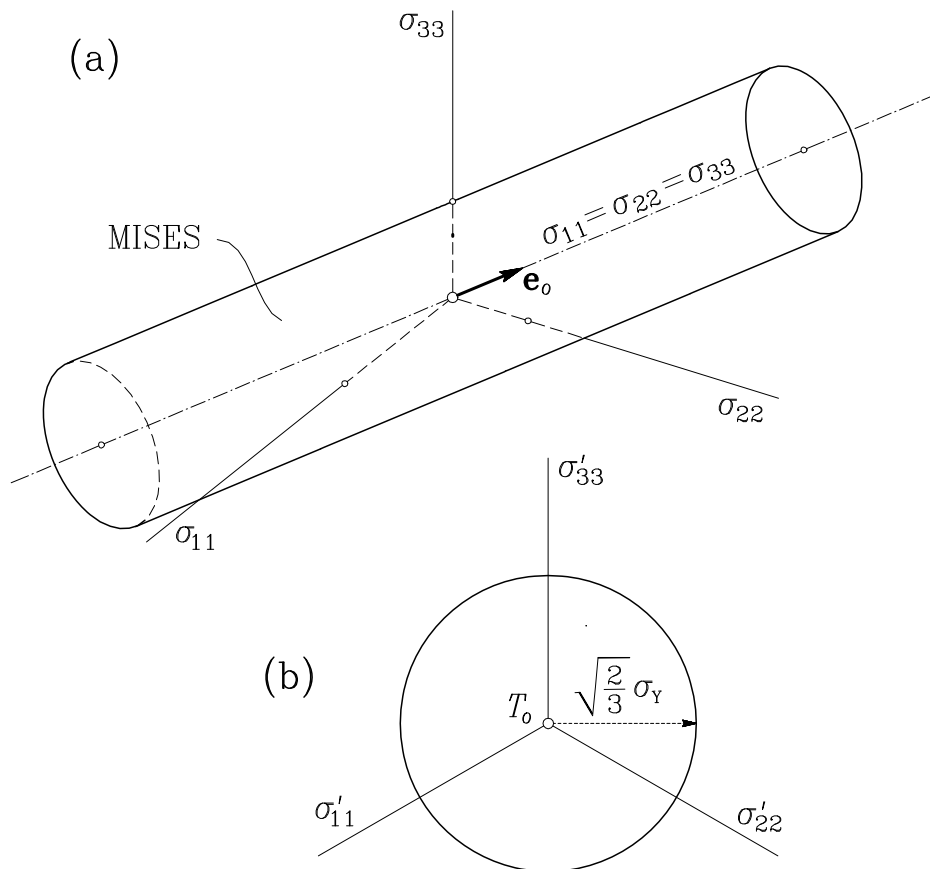
Zelo ugoden je tudi zapis Misesove primerjalne napetosti z glavnimi deviatorskimi napetostmi v skladu z drugo od enačb (1.270)

$$\sigma_e^M = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2)}. \quad (3.175)$$

Ploskev tečenja, ki ustreza Misesovemu pogoju, je pravilni valj, čigar vzdolžna os sovпада s hidrostatično osjo napetostnega prostora (*slika*

3.20 a). Presečnica ploskve tečenja z deviatorsko ravnino je torej krožnica (slika 3.20 b). Polmer ρ_t te krožnice določimo s primerjavo enačb (3.151) in (3.173)

$$\rho_t = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e^M = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y. \quad (3.176)$$



Slika 3.20

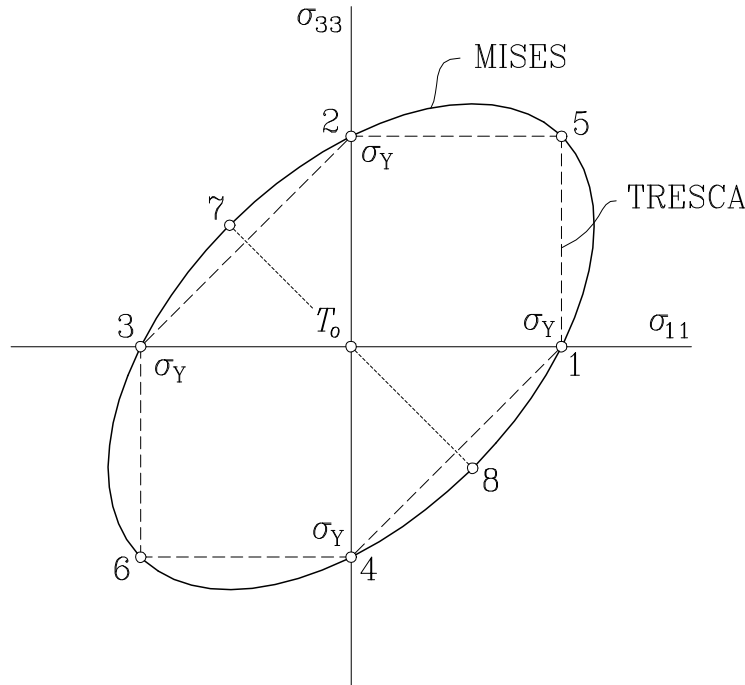
Oglejmo si še primer ravninskega napetostnega stanja ($\sigma_{22} = 0$), pri katerem preide Misesov pogoj tečenja (3.171) v naslednjo obliko

$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{33}^2 = \sigma_Y^2. \quad (3.177)$$

Zapis enačbe (3.177) v normirani obliki

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_Y}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{33}}{\sigma_Y\sigma_Y} + \left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_Y}\right)^2 = 1 \quad (3.178)$$

pokaže, da je Misesov pogoj tečenja v ravnini $(\sigma_{11}, \sigma_{33})$ opisan s poševno elipso, ki na koordinatnih oseh odreže odseke velikosti σ_Y (slika 3.21).



Slika 3.21

Opazimo lahko, da Trescov in Misesov pogoj tečenja sovpadata v šestih značilnih točkah. Točke 1, 2, 3 in 4 predstavljajo štiri možne primere enoosnega napetostnega stanja. S točkama 5 in 6 pa sta opisana primera izotropnega napetostnega stanja, pri katerih je strižna napetost v katerikoli ravnini enaka nič. Za napetostna stanja med omenjenimi šestimi točkami pa se krivulji tečenja razlikujeta. Pri tem Misesov pogoj tečenja dovoljuje večje mejne obremenitve materiala. Če za primer vzamemo, da je napetost σ_{11} konstantna ($0 < \sigma_{11} < \sigma_Y$), je Trescov pogoj

tečenja izpolnjen pri vrednosti $\sigma_{33} = \sigma_Y$, Misesov pogoj pa pri vrednosti $\sigma_{33} > \sigma_Y$.

Odstopanje med rezultati obeh omenjenih pogojev tečenja si oglejmo še na primeru čistega striga. Vzemimo, da gre za čisti strig v ravnini, ki jo določata glavna vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_3 . Ob upoštevanju rezultatov zgleada 1.12 je na meji tečenja pri čistem strigu $\sigma_{11} = -\sigma_{33} = \tau_Y$, $\sigma_{22} = 0$. V skladu s Trescovim pogojem tečenja (3.163) je strižna napetost τ_Y^T na meji tečenja

$$\tau_Y^T = \frac{\sigma_Y}{2}. \quad (3.179)$$

Do enakega rezultata pridemo z neposredno primerjavo največje strižne napetosti τ_{max} v ravnini ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$) s strižno napetostjo τ_Y na meji tečenja

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) = \tau_Y^T. \quad (3.180)$$

Primerjava z enačbo (3.163) spet pripelje do zveze (3.179).

Upoštevajoč Misesov pogoj tečenja pa v primeru čistega striga ($\sigma_{11} = -\sigma_{33} = \tau_Y$, $\sigma_{22} = 0$) določimo strižno napetost na meji tečenja τ_Y^M z enačbo (3.171)

$$\tau_Y^M = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}. \quad (3.181)$$

Slika 3.21 kaže, da je odstopanje med Trescovo in Misesovo krivuljo tečenja največje ravno v primeru čistega striga ($\sigma_{11} = -\sigma_{33}$), pri čemer Misesov pogoj predvideva višjo vrednost strižne napetosti na meji plastičnega tečenja kakor Trescov pogoj

$$\tau_Y^M = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau_Y^T \approx 1.155\tau_Y^T. \quad (3.182)$$

Veljavnost dobljenih rezultatov lahko preverimo, če za obravnavano snov poznamo rezultate strižnega poskusa. Praviloma se izkaže[†], da se pri kovinah Misesova strižna napetost na meji plastičnega tečenja

[†] G.I.Taylor in H. Quinney, Phil. Trans. Roy. Soc., A230 (1931)

τ_Y^M bolje ujema z rezultati strižnih poskusov kakor Trescova vrednost τ_Y^T .

Pogoji porušitve pri hidrostatično občutljivih snoveh

Trescov in Misesov pogoj plastičnega tečenja, ki smo ju spoznali v prejšnjih razdelkih, sta utemeljena z eksperimentalno potrjeno lastnostjo večine kovin, da začetek plastičnega tečenja ni odvisen od hidrostatičnega dela napetosti. Ustrezni ploskvi tečenja sta zato prizmatični oziroma valjasti, kar pomeni, da so njune tvorilke vzporedne s hidrostatično osjo Haigh–Westergaardovega napetostnega prostora.

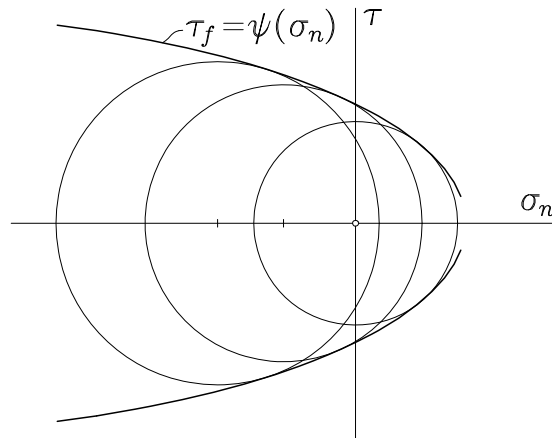
Za razliko od obnašanja kovin pa je za zemljine, skalo, beton in nekatere druge porozne snovi značilno, da hidrostatične napetosti pomembno vplivajo na začetek plastičnega tečenja. Pri teh snoveh praktično ne moremo opaziti utrditve, zato za začetek plastičnega tečenja pogosto uporabljamo kar izraz *porušitev*. Pri vpeljavi pogojev porušitve hidrostatično občutljivih snovi je praviloma treba upoštevati tudi prvo invarianto napetosti I_1^σ , ki v doslej obravnavanih Trescovem in Misesovem pogojju tečenja ne nastopa. V geometrijskem pogledu to pomeni, da ploskev tečenja ni več valjaste, temveč stožčaste ali piramidaste oblike.

Mohr–Coulombov pogoj porušitve

Mohrov pogoj tečenja (1900) lahko razumemo kot posplošitev Trescovega pogoja, saj oba vzameta največjo strižno napetost kot mero za nastop plastičnih deformacij, pri čemer v Trescovem pogojju nastopa konstantna mejna vrednost največje strižne napetosti ($\tau_{max} = \sigma_Y/2$). Mohrov pogoj pa predvideva, da je mejna vrednost strižne napetosti τ_f odvisna tudi od normalne napetosti σ_n v strižni ravnini

$$\tau_f = \psi(\sigma_n). \quad (3.183)$$

Funkcijska odvisnost $\psi(\sigma_n)$ je določena eksperimentalno. V primeru ravninskega napetostnega stanja lahko enačbo (3.183) grafično ponazorimo z ovojnico Mohrovih krogov, ki pripadajo napetostnim stanjem na meji porušitve (*slika 3.22*).



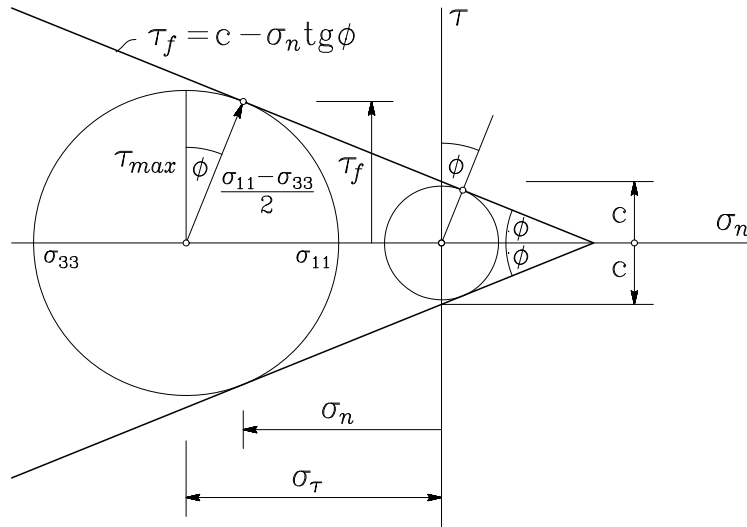
Slika 3.22

Pri tem predstavlja funkcija $\psi(\sigma_n)$ ovojnico porušnih Mohrovih krogov in s tem mejo med stabilnim in nestabilnim stanjem snovi. Najenostavnejša oblika Mohrove ovojnice je premica. Enačba te premice je znana kot *Coulombova*[†] enačba (1773)

$$\tau_f = c - \sigma_n \operatorname{tg} \phi \quad \left(0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.184)$$

kjer je $c \geq 0$ *kohezijska trdnost*, ϕ pa *kot notranjega trenja* obravnavane snovi (slika 3.23). Negativni predznak pri drugem členu v enačbi (3.184) opozarja na empirično ugotovitev, da je strižna nosilnost zemljin in podobnih materialov tem večja, čim večja je tlačna normalna obremenitev σ_n . Fizikalni pomen in način eksperimentalnega določanja kohezijske trdnosti c in kota notranjega trenja ϕ sta podrobneje opisana v literaturi s področja mehanike zemljin in skale.

[†] Charles Augustin de Coulomb, francoski inženir, 1736–1806.



Slika 3.23

Če razvrstimo glavne normalne napetosti po velikosti ($\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$), je največja strižna napetost τ_{max} določena z enačbo (3.161)

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33}),$$

pripadajoča normalna napetost σ_{τ} pa je po drugi od enačb (1.243)

$$\sigma_{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33}). \quad (3.185)$$

Iz slike 3.23 sledi

$$\begin{aligned} \tau_f &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \cos \phi \\ \sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \sin \phi. \end{aligned} \quad (3.186)$$

S tem lahko zapišemo *Mohr–Coulombov pogoj porušitve* (3.184) v naslednji obliki

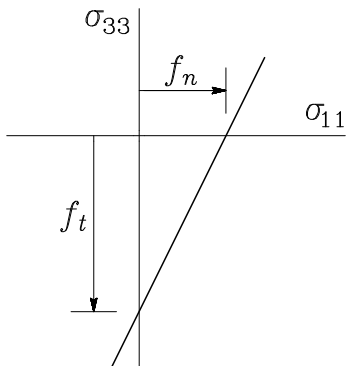
$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = 2c \cos \phi - (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \sin \phi. \quad (3.187)$$

Če to enačbo nekoliko preuredimo in vpeljemo oznaki

$$f_t = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad \text{in} \quad f_n = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi}, \quad (3.188)$$

dobimo

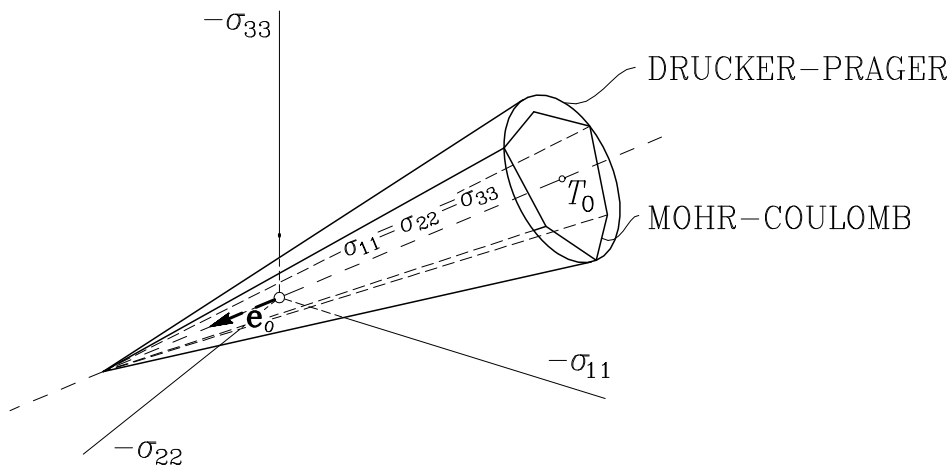
$$\frac{\sigma_{11}}{f_n} - \frac{\sigma_{33}}{f_t} = 1. \quad (3.189)$$



Slika 3.24

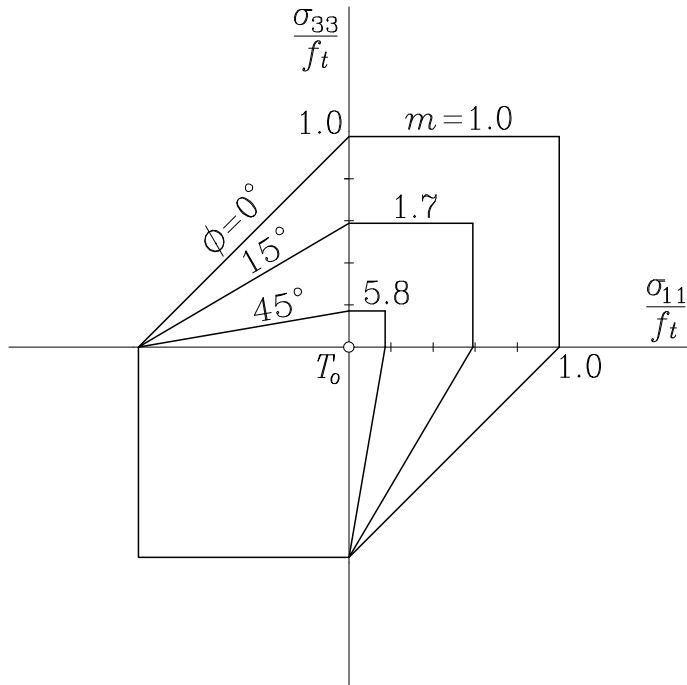
Upoštevajoč razvrstitev glavnih normalnih napetosti ($\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$) lahko hitro ugotovimo, da predstavlja parameter f_t enosno porušno trdnost snovi v tlačnem, parameter f_n pa enosno porušno trdnost v nateznem napetostnem območju (slika 3.24). Obe vrednosti sta pozitivni, pri čemer je porušna trdnost v tlaku očitno večja od porušne trdnosti v nategu ($f_t > f_n$).

Ta dobro znana lastnost hidrostatsično občutljivih snovi, predvsem zemljin, je razvidna tudi iz slike 3.23.



Slika 3.25

S podrobnejšo analizo lahko ugotovimo, da v Haigh–Westergaardovem napetostnem prostoru ustreza Mohr–Coulombovemu pogoju porušna ploskev v obliki nepravilne šesterostrane piramide z vrhom na hidrostatični osi (slika 3.25).



Slika 3.26

Oglejmo si še, kako je v smislu Mohr–Coulombove hipoteze omejeno elastično območje v primeru ravninskega napetostnega stanja ($\sigma_{22} = 0$). V ta namen vpeljemo oznako m za razmerje med tlačno in natezno trdnostjo snovi. To razmerje je očitno odvisno le od kota notranjega trenja ϕ , ne pa tudi od kohezije c

$$m = \frac{f_t}{f_n} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \geq 1. \quad (3.190)$$

Enačba (3.189) se s tem glasi

$$m \sigma_{11} - \sigma_{33} = f_t. \quad (3.191)$$

S podobnim sklepanjem kakor pri Trescovem pogoju tečenja dobimo tudi v obravnavanem primeru šesterokotno mejo med elastičnim in plastičnim območjem (slika 3.26). Pri tem smo enačbe (3.167) posplošili za primer, da porušni trdnosti v nategu in tlaku nista enaki med seboj

$$\begin{array}{lll}
 \sigma_{11} \geq \sigma_{33} \geq 0 & \dots & \sigma_{11} = \frac{f_t}{m} \\
 \sigma_{33} \geq \sigma_{11} \geq 0 & \dots & \sigma_{33} = \frac{f_t}{m} \\
 \sigma_{11} \geq 0, \sigma_{33} \leq 0 & \dots & m\sigma_{11} - \sigma_{33} = f_t \\
 \sigma_{11} \leq \sigma_{33} \leq 0 & \dots & \sigma_{11} = -f_t \\
 \sigma_{33} \leq \sigma_{11} \leq 0 & \dots & \sigma_{33} = -f_t \\
 \sigma_{11} \leq 0, \sigma_{33} \geq 0 & \dots & m\sigma_{33} - \sigma_{11} = f_t. \quad (3.192)
 \end{array}$$

Kakor vidimo, se pri $m = 1$ ($\phi = 0$) Mohr–Coulombov pogoj ujema s Trescovim pogojem, sicer pa je elastični del v nategu ustrezno zmanjšan v odvisnosti od kota notranjega trenja.

Drucker–Pragerjev pogoj porušitve

Drucker[†]–Pragerjev[‡] pogoj porušitve (1952) predstavlja posplošitev Misesovega pogoja tečenja. Z vpeljavo prve invariante napetostnega tenzorja v Misesov pogoj tečenja (3.168) je upoštevan tudi vpliv hidrostatičnih napetosti na začetek plastifikacije in s tem na porušitev

$$f(I_1^\sigma, I_2^s) = \alpha I_1^\sigma + \sqrt{|I_2^s|} - k = 0. \quad (3.193)$$

Pri tem sta α in k eksperimentalno določeni pozitivni konstanti obravnavane snovi. Če je $\alpha = 0$, je Drucker–Pragerjev pogoj porušitve

[†] Daniel C. Drucker, ameriški inženir, 1918–2001.

[‡] William Prager, nemški mehanik, 1903–1981.

identičen z Misesovim pogojem tečenja. Presečnica ploskve plastičnega tečenja oziroma porušitve z deviatorsko ravnino ($I_1^\sigma = 3\sigma^H = konst.$) je očitno spet krožnica, vendar se njen polmer spreminja v odvisnosti od hidrostatične napetosti. Porušna ploskev, ki ustreza Drucker–Pragerjevemu pogoj v Haigh–Westergaardovem napetostnem prostoru, je torej stožčaste oblike, njen vrh pa leži na hidrostatični osi (slika 3.25).

Pri analizi praktičnih problemov porušitve povzročča uporaba Mohr–Coulombove porušne ploskve v obliki šesterostrane piramide numerične težave, saj moramo za vsako kritično napetostno stanje najprej ugotoviti, na kateri od mejnih ploskev leži. V tem pogledu je Drucker–Pragerjeva gladka stožčasta porušna ploskev neprimerno ugodnejša. Pogosto je v rabi Drucker–Pragerjev pogoj v povezavi z Mohr–Coulombovim zakonom, za katerega je razmeroma preprosto eksperimentalno določiti materialni konstanti c in ϕ . Pri tem imamo dve skrajni možnosti. Če zahtevamo, naj se pri obeh pogojih ujemata porušni trdnosti v tlaku, dobimo

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \text{in} \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}. \quad (3.194)$$

Iz zahteve, naj se pri obeh pogojih ujemata porušni trdnosti v nategu, pa sledi

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad \text{in} \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}. \quad (3.195)$$

Izpeljava enačb (3.194) in (3.195) je razmeroma naporna, ker pa ne prispeva bistveno k razumevanju problema, se ji v tem delu odpovedujemo[†].

[†] Več o tem lahko bralec najde n. pr. v knjigah: W. F. Chen & D. J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer Verlag (1988) in A. S. Khan & S. Huang, *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, Inc. (1995).

Obremenitev in razbremenitev v napetostnem prostoru

V uvodu smo povedali, da je pogoj za začetek plastičnega tečenja izražen z enačbo ploskve tečenja v napetostnem prostoru

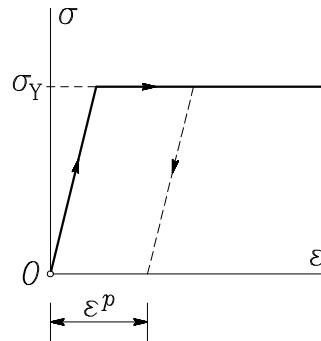
$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (3.196)$$

Ta ploskev razmejuje elastično od plastičnega napetostnega območja. Pogoj (3.196) postane še bolj nazoren, če ga zapišemo v obliki (3.153)

$$f(\sigma_{ij}) = f^*(\sigma_{ij}) - k_s = 0. \quad (3.197)$$

Snovni parameter k_s se v splošnem spreminja v odvisnosti od temperature in doseženega deformacijskega stanja. V tem poglavju obravnavamo le izotermne primere ($T = \text{konst.}$), zato je k_s neodvisen od temperature.

Najprej si oglejmo primer snovi brez utrditve, ki jo predstavimo z idealno elastičnim–idealno plastičnim materialnim modelom (slika 3.27).



Slika 3.27

V tem primeru je snovni parameter konstanta; ponavadi vzamemo kar $k_s = \sigma_Y$, kjer je σ_Y konstantna meja plastičnega tečenja. To pomeni, da imamo opraviti z eno samo (začetno) ploskvijo plastičnega tečenja. Obravnavani delec je v elastičnem stanju, vse dokler je $f(\sigma_{ij}) < 0$, pri $f(\sigma_{ij}) = 0$ pa se začne snov v njegovi bližnji okolici plastično deformirati. To pomeni, da leži točka $T_\sigma(\sigma_{ij})$, ki predstavlja doseženo napetostno stanje v napetostnem prostoru, na ploskvi plastičnega tečenja.

Sedaj se postavi vprašanje, kakšen bo nadaljnji razvoj deformacij, če se napetosti spremenijo za infinitezimalne vrednosti $d\sigma_{ij}$. Odgovor poiščemo ob upoštevanju dejstva, da ima gradient ploskve $f(\sigma_{ij}) = 0$ smer zunanje normale \mathbf{n}_f na to ploskev. Zaradi enostavnosti spet vzemimo, da je napetostno stanje podano z glavnimi normalnimi napetostmi v Haigh-Westergaardovem prostoru. Ploskev plastičnega tečenja naj bo opisana z enačbo

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) = f^*(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) - k_s = 0. \quad (3.198)$$

Normala tako definirane ploskve tečenja je določena z gradientom skalarne polja $f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$

$$\mathbf{n}_f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} \mathbf{e}_3 \quad (3.199)$$

oziroma, ker je k_s konstanta,

$$\mathbf{n}_f = \frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{11}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{22}} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{33}} \mathbf{e}_3. \quad (3.200)$$

Po vzoru krajevnega vektorja $\boldsymbol{\rho}_\sigma$, ki smo ga vpeljali z enačbo (3.143) in opisuje lego točke T_σ v Haigh–Westergaardovem prostoru, definirajmo še vektor prirastkov napetosti $d\boldsymbol{\rho}_\sigma$

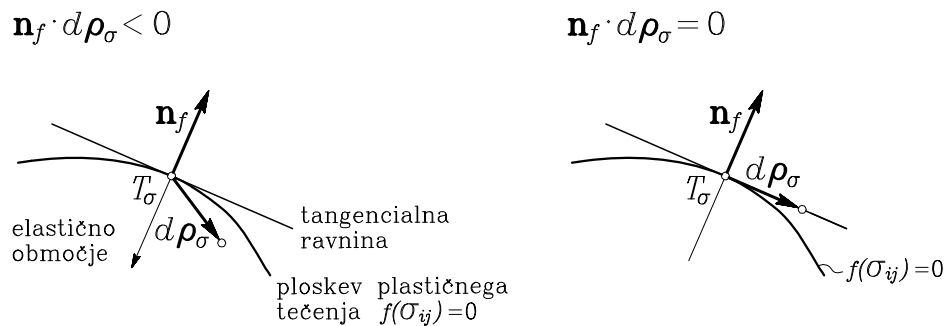
$$d\boldsymbol{\rho}_\sigma = d\sigma_{11} \mathbf{e}_1 + d\sigma_{22} \mathbf{e}_2 + d\sigma_{33} \mathbf{e}_3. \quad (3.201)$$

Skalarni produkt

$$\mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma = \frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{11}} d\sigma_{11} + \frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{22}} d\sigma_{22} + \frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{33}} d\sigma_{33} \quad (3.202)$$

pove, kam se pri spremembi napetosti za $d\boldsymbol{\rho}_\sigma$ premakne točka T_σ v napetostnem prostoru. Če je $\mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma < 0$, se točka T_σ premakne s ploskve tečenja v njeno notranjost. Pri tem smo v skladu s tako

imenovanim *Druckerjevimi postulatoma*[†] vzeli, da je ploskev plastičnega tečenja konveksna. To pomeni, da je po spremembi napetosti za $d\boldsymbol{\rho}_\sigma$ napetostno stanje spet elastično, pa tudi pripadajoča sprememba deformacije $d\varepsilon_{ij}$ je v celoti elastična. Zato tako spremembo napetosti imenujemo *elastična razbremenitev* ali kar *razbremenitev*. Preostane nam še možnost $\mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma = 0$, ki pove, da je prirastek napetosti $d\boldsymbol{\rho}_\sigma$ pravokoten na normalo \mathbf{n}_f ploskve tečenja. To pomeni, da točka T_σ tudi po spremembi napetosti za $d\boldsymbol{\rho}_\sigma$ leži na ploskvi tečenja oziroma na tangencialni ravnini te ploskve v obravnavani napetostni točki T_σ , novo napetostno stanje pa je še vedno plastično. Tako spremembo napetosti imenujemo *nevtralna obremenitev* v napetostnem prostoru. Primer $\mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma > 0$ pri snovi brez utrditve ni možen, saj se ploskev tečenja med obremenjevanjem in razbremenjevanjem delca nič ne spreminja.



Slika 3.28

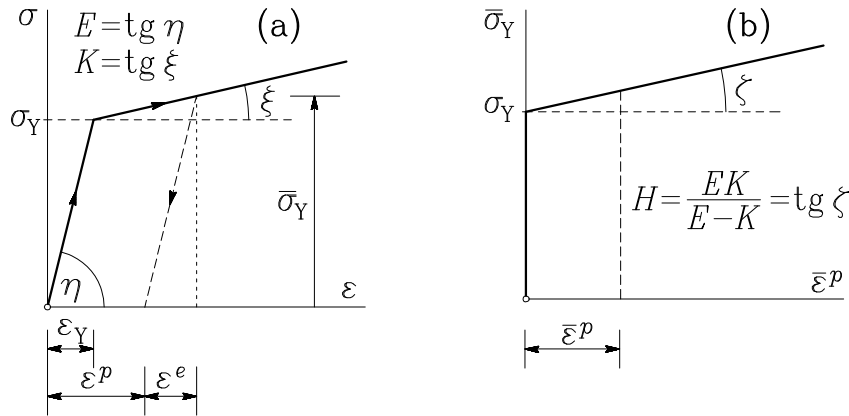
Premik točke T_σ pri spremembi napetosti za $d\sigma_{ij}$ je simbolično pojasnjen na *sliki 3.28*, ki prikazuje presek ploskve plastičnega tečenja in

[†] D. C. Drucker je leta 1951 vpeljal pojem stabilne plastične snovi, za katero velja, da je vsak, še tako majhen prirastek specifičnega dela, ki ga napetosti opravijo na plastičnih deformacijah, pozitiven. Iz te zahteve je mogoče izpeljati ugotovitev, da je pripadajoča ploskev plastičnega tečenja izbočena (konveksna), prirastek plastične deformacije pa je pravokoten na to ploskev. Dokaz presega zastavljeni obseg tega učbenika, zahtevnejši bralec pa lahko seže po številnih tujih knjigah, ki obravnavajo plastično obnašanje trdnih teles.

njene tangencialne ravnine z ravnino, ki jo določata vektorja \mathbf{n}_f in \mathbf{q}_σ . Ugotovitve o obremenitvi oziroma razbremenitvi v napetostnem prostoru lahko torej strnemo v naslednjih pogojih

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) < 0 & \quad \text{elastično stanje} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{n}_f \cdot d\mathbf{q}_\sigma = 0 & \quad \text{nevtralna obremenitev} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{n}_f \cdot d\mathbf{q}_\sigma < 0 & \quad \text{elastična razbremenitev.} \end{aligned}$$

Podobno opredelimo pogoje za obremenitev oziroma razbremenitev tudi pri snoveh z utrjevanjem, le da tedaj snovni parameter k_s ni več konstanta. Zato se ploskev tečenja spreminja, in sicer v odvisnosti od tega, kakšen način utrjevanja izkazuje opazovana snov.



Slika 3.29

Opis utrditve materiala si najprej oglejmo na preprostem primeru enoosnega napetostnega stanja. Vzemimo, da je material opisan z bilinearnim elastično-plastičnim modelom z modulom elastičnosti $E = \text{tg } \eta$ in stopnjo utrditve $K = \text{tg } \xi$ (slika 3.29-a). Kakor vidimo, meja plastičnega tečenja ni konstantna, temveč se večja z naraščajočo deformacijo. V tem primeru je najpreprosteje, če za snovni parameter vzamemo trenutno doseženo mejo plastičnega tečenja ($k_s = \bar{\sigma}_Y$), za parameter utrditve pa plastično deformacijo ε^p . Trenutno mejo plastičnega

tečenja $\bar{\sigma}_Y$ odčitamo iz *slike 3.29-a*

$$\bar{\sigma}_Y = \sigma_Y + K (\varepsilon^e + \varepsilon^p - \varepsilon_Y). \quad (3.203)$$

Pri tem je

$$\varepsilon^e = \frac{\bar{\sigma}_Y}{E} \quad \text{in} \quad \varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} \quad (3.204)$$

in odvisnost trenutne meje plastičnosti $\bar{\sigma}_Y$ od dosežene plastične deformacije ε^p je določena z enačbo

$$\bar{\sigma}_Y = \sigma_Y + \frac{EK}{E - K} \varepsilon^p. \quad (3.205)$$

Z enačbo (3.205) določamo trenutno mejo plastičnosti v primeru, da se material plastificira le v nateznem napetostnem območju. Podobno enačbo bi dobili tudi pri plastifikaciji samo v tlaku. Če pa želimo obravnavati tudi primere ciklične obtežbe, pri kateri pride do izmenične plastifikacije v nateznem in tlačnem napetostnem območju, moramo kot spremenljivko vpeljati celotno nakopičeno (kumulativno) plastično deformacijo $\bar{\varepsilon}^p$, ne glede na to, ali je bila dosežena v tlačnem ali nateznem območju

$$\bar{\varepsilon}^p = \int |d\varepsilon^p|. \quad (3.206)$$

Z okrajšavo

$$H = \frac{EK}{E - K} \quad (3.207)$$

lahko zakon utrjevanja (3.205) pri enoosnem napetostnem stanju zapišemo takole (*slika 3.29-b*)

$$\bar{\sigma}_Y = \sigma_Y + H \bar{\varepsilon}^p. \quad (3.208)$$

Podobno lahko opišemo utrditev materiala tudi pri prostorskem napetostnem stanju, le da kot parameter utrjevanja vzamemo nakopičeno ekvivalentno plastično deformacijo $\bar{\varepsilon}_e^p$. V ta namen najprej vpeljemo prirastek primerjalne plastične deformacije $d\varepsilon_e^p$, in sicer navadno v naslednji obliki

$$d\varepsilon_e^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{11}^p - d\varepsilon_{22}^p)^2 + (d\varepsilon_{22}^p - d\varepsilon_{33}^p)^2 + (d\varepsilon_{33}^p - d\varepsilon_{11}^p)^2}. \quad (3.209)$$

Nakopičena primerjalna plastična deformacija je tako

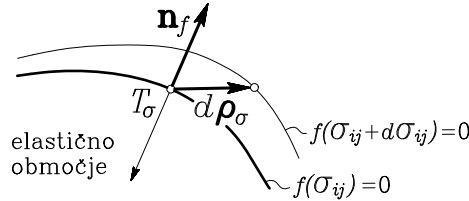
$$\bar{\varepsilon}_e^p = \int |d\varepsilon_e^p| . \quad (3.210)$$

Pogoj plastičnega tečenja (3.198) je sedaj

$$f(\sigma_{ij}) = f^*(\sigma_{ij}) - k_s(\bar{\varepsilon}_e^p) = 0 . \quad (3.211)$$

V tem primeru se ploskev plastičnega tečenja z naraščanjem primerjalne plastične deformacije širi v smeri svoje zunanje normale. Zato lahko razen doslej omenjenih možnosti nastopi tudi možnost $\mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma > 0$, ki pomeni, da se točka T_σ premakne na novo, "povečano" ploskev tečenja. Tako spremembo napetostnega stanja imenujemo *obremenitev v plastičnem območju* (slika 3.30).

$$\mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma > 0$$



Slika 3.30

Pri snoveh z utrditvijo lahko torej pogoje za obremenitev oziroma razbremenitev izrazimo takole

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) < 0 & \quad \text{elastično stanje} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma > 0 & \quad \text{obremenitev} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma = 0 & \quad \text{nevtralna obremenitev} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{n}_f \cdot d\boldsymbol{\rho}_\sigma < 0 & \quad \text{elastična razbremenitev} . \end{aligned}$$

Druga možnost je, da kot mero za opis utrditve materiala vzamemo *plastično deformacijsko delo*, to je delo, ki ga napetosti opravijo na plastičnih deformacijah[†].

[†] V literaturi je za opis utrjevanja z nakopičeno plastično deformacijo uveljavljen izraz "strain-hardening", za opis s plastičnim deformacijskim delom pa "work-hardening". Seveda gre v obeh primerih za isti pojav, ki pa ga lahko opišemo na en ali drug način.

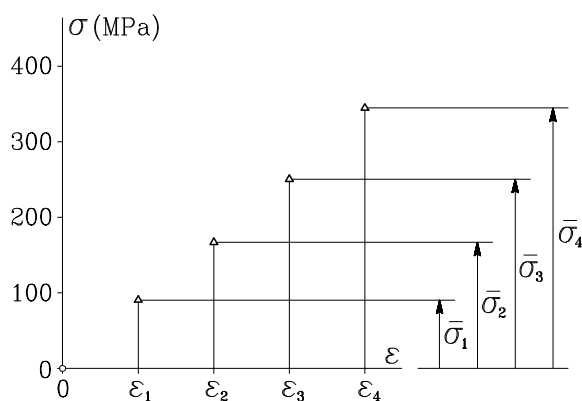
3.6 Sovisnosti med napetostmi in deformacijami - Zgledi

Zgled 3.1

Pri enoosnem poskusu jeklenega vzorca smo za elastično območje izmerili napetosti $\bar{\sigma}_i$ ($i = 1, \dots, 4$) pri štirih vrednostih vzdolžne deformacije ε_i ($i = 1, \dots, 4$) (slika Z-3.1 a). Izmerki so prikazani v preglednici 3-2. Aproximiraj konstitucijski zakon preizkušanca z linearno (Hookovo) funkcijo in z metodo najmanjših kvadratov določi njegov modul elastičnosti E .

Preglednica 3-2

i	$10^3 \varepsilon_i$	$\bar{\sigma}_i$
	—	MPa
1	0.4	85.1
2	0.8	169.0
3	1.2	253.1
4	1.6	340.7



Slika Z-3.1 a

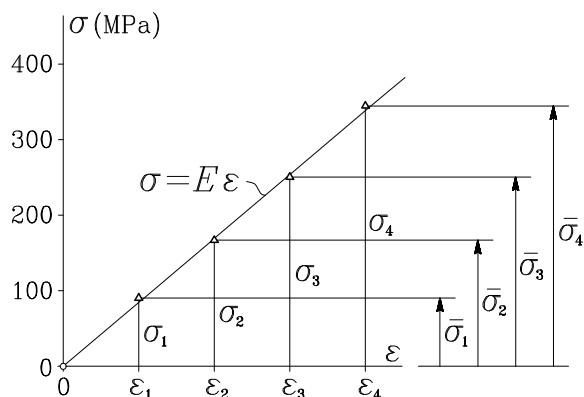
Slika izmerjenih napetosti $\bar{\sigma}_i$ pri deformacijah ε_i kaže, da je zveza med napetostjo in deformacijo v obravnavanem območju približno linearna. Zato za konstitucijski zakon preizkušanca privzamemo linearno funkcijo

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (a)$$

v kateri pa sorazmernostnega faktorja E zaenkrat ne poznamo (slika Z-3.1 b). Če bi za sorazmernostni faktor “uganili” ali kako drugače privzeli neko vrednost E , bi v merskih točkah $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ izračunali vrednosti napetosti

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = E \varepsilon_2, \quad \sigma_3 = E \varepsilon_3, \quad \sigma_4 = E \varepsilon_4, \quad (b)$$

ki se v splošnem ne bi ujemale z izmerjenimi vrednostmi $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_4$ (slika Z-3.1 b).



Slika Z-3.1 b

Ideja metode najmanjših kvadratov je v tem, da skušamo določiti parameter E tako, da bo vsota kvadratov razlik med izračunanimi in izmerjenimi vrednostmi napetosti najmanjša. Označimo to vsoto s Ψ in dobimo

$$\Psi = (\sigma_1 - \bar{\sigma}_1)^2 + (\sigma_2 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\sigma_3 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\sigma_4 - \bar{\sigma}_4)^2. \quad (c)$$

Ob upoštevanju enačb (b) lahko pišemo

$$\Psi = (E \varepsilon_1 - \bar{\sigma}_1)^2 + (E \varepsilon_2 - \bar{\sigma}_2)^2 + (E \varepsilon_3 - \bar{\sigma}_3)^2 + (E \varepsilon_4 - \bar{\sigma}_4)^2 = \Psi(E). \quad (č)$$

Vsota $\Psi(E)$ je najmanjša, če je izpolnjen pogoj

$$\frac{d\Psi}{dE} = 0. \quad (d)$$

Enačbo (č) odvajamo po E , vstavimo v pogoj (d) in po krajšanju z 2 dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{dE} &= \varepsilon_1 (E \varepsilon_1 - \bar{\sigma}_1) + \varepsilon_2 (E \varepsilon_2 - \bar{\sigma}_2) + \\ &\varepsilon_3 (E \varepsilon_3 - \bar{\sigma}_3) + \varepsilon_4 (E \varepsilon_4 - \bar{\sigma}_4) = 0. \end{aligned} \quad (e)$$

Od tod brez težav izračunamo elastični modul E

$$E = \frac{\varepsilon_1 \bar{\sigma}_1 + \varepsilon_2 \bar{\sigma}_2 + \varepsilon_3 \bar{\sigma}_3 + \varepsilon_4 \bar{\sigma}_4}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2} = \frac{\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \bar{\sigma}_i}{\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i^2}. \quad (f)$$

Količine, ki nastopajo v gornji enačbi, je najbolje izračunati v tabeli, še posebej, če imamo opraviti z velikim številom izmerkov. Za naš primer je postopek prikazan v preglednici 3-3

Preglednica 3-3

i	$10^3 \varepsilon_i$	$\bar{\sigma}_i$	$10^3 \varepsilon_i \bar{\sigma}_i$	$10^6 \varepsilon_i^2$
	–	MPa	MPa	–
1	0.4	85.1	34.04	0.16
2	0.8	169.0	135.20	0.64
3	1.2	253.1	303.72	1.44
4	1.6	340.7	545.12	2.56
Σ			1018.08	4.80

Modul elastičnosti je sedaj

$$E = \frac{1018.08 \cdot 10^{-3}}{4.80 \cdot 10^{-6}} = 212\,100 \text{ MPa}. \quad (g)$$

Kakor pri vseh statističnih metodah tudi pri metodi najmanjših kvadratov velja, da se natančnost rezultata povečuje s številom izmerkov. Seveda pa moramo tudi tu ravnati po zdravi pameti in izločiti eksperimentalne rezultate, ki zaradi napak pri merjenju ali slabih merilnih instrumentov očitno odstopajo od prevladujočih zakonitosti obnašanja preizkušanca.

Zgled 3.2

Za neko trdno snov smo s poskusi dokazali, da je izotropna. Z enoosnim nateznim poskusom smo tudi ugotovili, da se opazovani vzorec v določenem napetostnem območju obnaša linearno elastično in določili njegov modul elastičnosti E , Poissonov količnik ν in temperaturni razteznostni koeficient α_T .

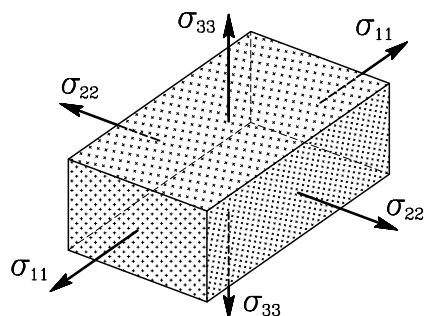
Izpelji zveze med deformacijami, napetostmi in spremembo temperature za splošni primer prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja obravnavane snovi v območju linearne elastičnosti.

V obravnavanem primeru lahko pri formulaciji konstitucijskih enačb za splošno prostorsko napetostno in deformacijsko stanje vpeljemo naslednje pomembne predpostavke:

- i* smeri glavnih normalnih deformacij se ujemajo s smermi glavnih normalnih napetosti (lastnost izotropije),
- ii* pri enoosnem napetostnem stanju je zveza med vzdolžno normalno napetostjo in vzdolžno normalno deformacijo opisana s Hookovim zakonom, prečna normalna deformacija pa je s Poissonovim količnikom sorazmerna vzdolžni normalni deformaciji,
- iii* velja zakon superpozicije (lastnost linearne elastičnosti).

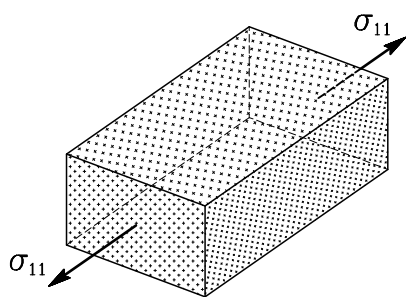
Zamislimo si elementarni kvader iz obravnavane snovi; orientiran naj bo tako, da se smeri njegovih stranic ujemajo s smermi glavnih baznih vektorjev \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 . Tedaj na mejne ploskve kvadra delujejo glavne normalne napetosti σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} (slika Z-3.2)

V skladu z zakonom superpozicije lahko obravnavano prostorsko napetostno stanje razumemo kot vsoto treh ločenih enoosnih napetostnih stanj NS1, NS2 in NS3. Za vsako od njih lahko ob upoštevanju predpostavke *i* in po analogiji z rezultati enoosnega poskusa določimo pripadajoče deformacijsko stanje:



Slika Z-3.2

NS1: $\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$



V tem primeru je

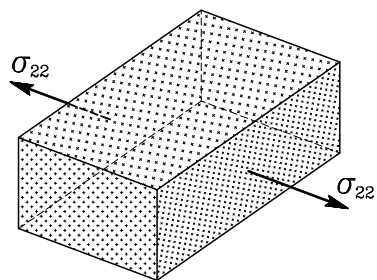
$$\sigma_l = \sigma_{11} \quad \varepsilon_l = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_t.$$

Zato dobimo

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}.$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E}.$$

NS2: $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0, \sigma_{22} \neq 0$



Tokrat je

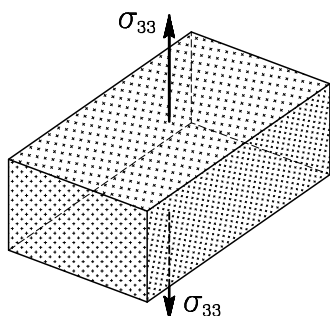
$$\sigma_l = \sigma_{22} \quad \varepsilon_l = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_t.$$

in sledi

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{22}}{E}$$

NS3: $\sigma_{33} \neq 0 \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$



Podobno kot v prvih dveh primerih dobimo

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_{33}}{E}$$

V skladu z zakonom superpozicije določimo deformacijsko stanje v prostorskem primeru s seštevanjem delnih deformacijskih stanj, kakor smo jih določili v primerih NS1, NS2 in NS3. Glavna normalna deformacija ε_{11} je na primer

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}(NS1) + \varepsilon_{11}(NS2) + \varepsilon_{11}(NS3) = \\ &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \\ &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}I_1^\sigma. \end{aligned} \quad (a)$$

Podobno določimo še preostali dve glavni normalni deformaciji.

Vpliv homogene spremembe temperature $\Delta T = T - T_0$ upoštevamo tako, da dobljenim izrazom za glavne normalne deformacije prištejemo še prispevke zaradi spremembe temperature

$$\varepsilon_{11}(\Delta T) = \varepsilon_{22}(\Delta T) = \varepsilon_{33}(\Delta T) = \alpha_T \Delta T. \quad (b)$$

Tako dobimo sistem treh konstitucijskih enačb, ki povezujejo deformacije z napetostmi in temperaturno spremembo v glavnem koordinatnem sistemu obravnavanega napetostnega stanja

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T.\end{aligned}\tag{c}$$

Da bi lahko vzpostavili zveze med napetostmi in deformacijami tudi v splošnem primeru, ko je napetostno stanje v poljubnem koordinatnem sistemu (x, y, z) opisano s polno napetostno matriko, moramo konstitucijske enačbe transformirati iz glavnega koordinatnega sistema z bazo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ v splošni koordinatni sistem z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Upoštevajoč transformacijske enačbe

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} e_{i\alpha} e_{j\beta} \\ \sigma_{ij} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} e_{i\alpha} e_{j\beta}\end{aligned}\quad (i, j = x, y, z; \alpha, \beta = 1, 2, 3)\tag{č}$$

dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{11} e_{x1}^2 + \varepsilon_{22} e_{x2}^2 + \varepsilon_{33} e_{x3}^2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{11} e_{x1} e_{y1} + \varepsilon_{22} e_{x2} e_{y2} + \varepsilon_{33} e_{x3} e_{y3} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\end{aligned}\tag{d}$$

in

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{11} e_{x1}^2 + \sigma_{22} e_{x2}^2 + \sigma_{33} e_{x3}^2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{11} e_{x1} e_{y1} + \sigma_{22} e_{x2} e_{y2} + \sigma_{33} e_{x3} e_{y3} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\end{aligned}\tag{e}$$

Deformacijo ε_{xx} določimo tako, da enačbe (c) po vrsti pomnožimo z $e_{x1}^2, e_{x2}^2, e_{x3}^2$ ter jih seštejemo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{11} e_{x1}^2 + \sigma_{22} e_{x2}^2 + \sigma_{33} e_{x3}^2) - \left[\frac{\nu}{E} I_1^\sigma - \alpha_T \Delta T \right] (e_{x1}^2 + e_{x2}^2 + e_{x3}^2). \quad (f)$$

Prva od enačb (e) pove, da je oklepaj v prvem členu na desni strani enak σ_{xx} , oklepaj v drugem členu pa je enak 1, saj gre za velikost enotskega vektorja \mathbf{e}_x . Podobno bi določili tudi deformaciji ε_{yy} in ε_{zz} . Deformacijo ε_{xy} pa dobimo tako, da seštejemo enačbe (c), ki smo jih po vrsti pomnožili s produkti $e_{x1} e_{y1}, e_{x2} e_{y2}, e_{x3} e_{y3}$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{11} e_{x1} e_{y1} + \sigma_{22} e_{x2} e_{y2} + \sigma_{33} e_{x3} e_{y3}) - \left[\frac{\nu}{E} I_1^\sigma - \alpha_T \Delta T \right] (e_{x1} e_{y1} + e_{x2} e_{y2} + e_{x3} e_{y3}). \quad (g)$$

Oklepaj v prvem členu na desni prepoznamo kot σ_{xy} , oklepaj v drugem členu pa predstavlja skalarni produkt baznih vektorjev \mathbf{e}_x in \mathbf{e}_y in je torej enak 0. Podobno določimo še kotni deformaciji ε_{yz} in ε_{zx} ter sestavimo končni sistem konstitucijskih enačb v splošnem koordinatnem sistemu z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$

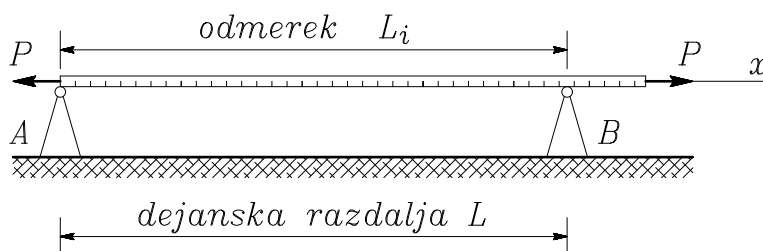
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (h)$$

Na neprimerno krajši in preglednejši način smo torej prišli do sistema Neumann-Duhamelovih enačb (3.111).

Zgled 3.3

Jeklen merilni trak je bil umerjen v breznapetostnem stanju pri temperaturi 20°C . Modul elastičnosti jekla E znaša $200\,000\text{ MPa}$, koeficient temperaturnega raztezanja je $\alpha_T = 1.25 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$, ploščina prečnega prereza traku je 4 mm^2 .

Na terenu želimo pri dejanski temperaturi ozračja 40°C izmeriti razdaljo med nepomičnima točkama A in B. V ta namen nategnemo merilni trak z vzdolžno silo $P = 200\text{ N}$ in na skali traku odčitamo izmerek $L_i = 24.000\text{ m}$ (slika Z-3.3). Kolikšna je dejanska razdalja L med točkama A in B?



Slika Z-3.3

Najprej se vprašajmo, ali je dejanska razdalja L večja ali manjša od izmerjene vrednosti L_i . Ker razdaljo merimo pri višji temperaturi od 20°C in ker je pri tem merilni trak še obtežen z natezno silo P , se trak raztegne. S tem se razdalje med oznakami merskih enot (na primer metrov) podaljšajo. Primer: dejanska geometrijska razdalja med začetno oznako 0 in oznako 1.00 m na nategnjenem in ogretem traku ni 1.00 m , ampak nekoliko več. To pomeni, da pri merjenju razdalje med dvema nepomičnima točkama odčitamo nekoliko manjšo vrednost od dejanske razdalje.

Najprej določimo specifično spremembo ε_{xx} dolžine traku zaradi natezne sile $P = 200 \text{ N}$ in temperaturne spremembe $\Delta T = 40 - 20 = 20 \text{ K}$. V našem primeru gre za enoosno napetostno stanje z edino vzdolžno normalno napetostjo σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A_x} = \frac{200}{4 \cdot 10^{-6}} = 50 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 50 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 50 \text{ MPa}.$$

Iz prve od konstitucijskih enačb (3.112) sledi

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_T \Delta T = \\ &= \frac{50 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} + 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 50 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Vzemimo, da se je dolžinska enota razdelbe na traku $e = 1$ po nategu in segretju traku spremenila v e' . Ta sprememba je z normalno deformacijo ε_{xx} povezana z enačbo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{e' - e}{e} = e' - 1 \quad \rightarrow \quad e' = 1 + \varepsilon_{xx}.$$

Povečana dolžina enote je torej

$$e' = 1 + 50 \cdot 10^{-5} = 1.0005.$$

Dejansko razdaljo L med točkama A in B sedaj določimo s preprostim sklepnim računom:

oznaka $e = 1$ na deformiranem traku pomeni dolžino e' na nedeformiranem merilu; kolikšno razdaljo na nedeformiranem merilu pomeni oznaka odmerka L_i na deformiranem traku? Z enačbo zapišemo vprašanje takole

$$\frac{1}{L_i} = \frac{e'}{L} \quad \rightarrow \quad L = L_i e'.$$

V našem primeru dobimo

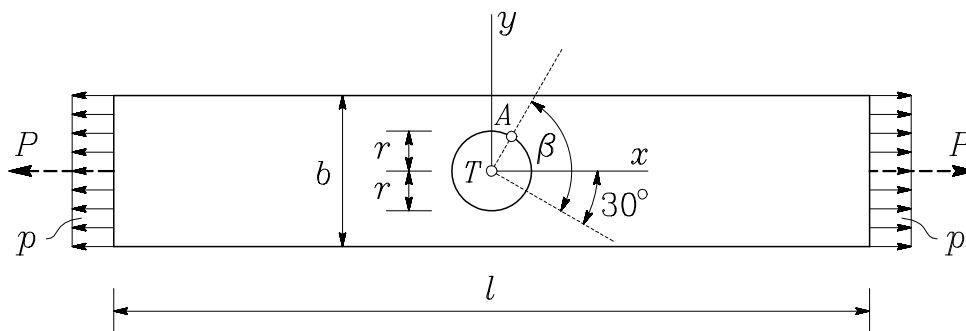
$$L = 24.000 \cdot 1.0005 \quad \rightarrow \quad L = 24.012 \text{ m}.$$

Če bi torej za razdaljo med točkama A in B nekritično vzeli kar odmerek L_i , bi se glede na točno vrednost zmotili za 1.2 cm (−5%).

Zgled 3.4

V sredini ravnega, linearno elastičnega kovinskega traku z dolžino $l = 100$ cm, širino $b = 10$ cm in debelino $d = 1$ mm narišemo krog s polmerom $r = 2$ cm. Na ožja konca traku deluje enakomerna obtežba p z rezultanto $P = 42$ kN. Pri tem se dolžina traku poveča za 2 mm, širina pa se zmanjša za 0.06 mm. Narisani krog se spremeni v pravilno elipso. Določiti:

- elastični modul E in koeficient prečne kontrakcije ν uporabljene kovine ter spremembo debeline traku,
- velikosti polosi dobljene elipse,
- spremembo pravega kota β ,
- č. novo dolžino polmera \overline{TA} !



Slika Z-4.1 a

- Ploščina A_x prečnega prereza traku je

$$A_x = bd = 10 \cdot 0.1 \quad \rightarrow \quad A_x = 1 \text{ cm}^2.$$

Ker je obtežba p na osnovnih ploskvah traku enakomerna, je vzdolžna normalna napetost σ_{xx} v vsakem prečnem prerezu konstantna

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A_x} = \frac{42}{1} \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx} = 42 \text{ kN/cm}^2.$$

(Tudi če bi konca traku obtežili s točkovnima silama P , bi lahko v okolici točke T upoštevali konstantno napetost σ_{xx} . Dvodimenzionalna analiza obravnavanega primera namreč pokaže, da je porazdelitev obtežbe enakomerna že v prečnem prerezu, ki je približno toliko oddaljen od konca traku, kolikor znaša njegova širina b . Ta ugotovitev je zajeta v tako imenovani *Saint-Venantovi hipotezi*, ki pravi, da je vpliv lokalnih mehanskih motenj omejen na neposredno okolico njihovega izvora.)

V obravnavanem primeru gre torej za enoosno napetostno stanje

$$\sigma_{xx} = 42 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

in iz enačb (3.112) sledi

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0.$$

Iz podatkov o začetnih dimenzijah traku in njihovih spremembah lahko izračunamo specifični spremembi dolžin v smereh x in y

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{0.2}{100} & \rightarrow & \varepsilon_{xx} = 0.0020 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{-0.006}{10} & \rightarrow & \varepsilon_{yy} = -0.0006. \end{aligned}$$

Modul elastičnosti E lahko sedaj izračunamo iz Hookovega zakona (3.18)

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{42}{0.002} \quad \rightarrow \quad E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2,$$

Poissonov koeficient prečne kontrakcije pa iz enačbe (3.20), kjer upoštevamo, da je ε_{xx} vzdolžna, ε_{yy} pa prečna deformacija

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{0.0006}{0.002} \quad \rightarrow \quad \nu = 0.3.$$

Pri izotropnem materialu je kontrakcija v obeh prečnih smereh enaka

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} = \frac{\Delta d}{d};$$

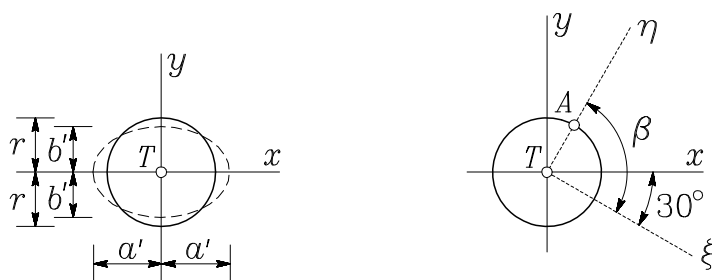
od tod določimo spremembo debeline traku Δd

$$\Delta d = d \varepsilon_{yy} = 0.1 \cdot (-0.0006) \quad \rightarrow \quad \Delta d = -6 \cdot 10^{-5} \text{ cm.}$$

b. Polosi elipse, v katero se med deformiranjem spremeni prikazana krožnica, označimo z a' in b' in ob upoštevanju enačb (2.134) dobimo

$$a' = r(1 + \varepsilon_{xx}) = 2 \cdot 1.0020 \quad \rightarrow \quad a' = 2.0040 \text{ cm}$$

$$b' = r(1 + \varepsilon_{yy}) = 2 \cdot 0.9994 \quad \rightarrow \quad b' = 1.9988 \text{ cm.}$$



Slika Z-3.4 b

c. Smeri, ki pred obtežitvijo traku določata pravi kot β , označimo s ξ in η . Polovična sprememba pravega kota med njima je določena z deformacijsko komponento $\varepsilon_{\xi\eta}$. Izračunamo jo z enačbo (2.118), kjer upoštevamo, da je $e_{\xi z} = e_{\eta z} = 0$

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{xx} e_{\xi x} e_{\eta x} + \varepsilon_{xy} (e_{\xi x} e_{\eta y} + e_{\xi y} e_{\eta x}) + \varepsilon_{yy} e_{\xi y} e_{\eta y}.$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned} e_{\xi x} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & e_{\eta x} &= \frac{1}{2} \\ e_{\xi y} &= -\frac{1}{2} & e_{\eta y} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

in sledi

$$\varepsilon_{\xi\eta} = 0.0020 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0.0006 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.001126.$$

Sprememba pravega kota β je tako

$$\Delta\beta = 2\varepsilon_{\xi\eta} = 0.00225 = 0.13^\circ.$$

To pomeni, da se pravi kot β med deformiranjem traku zmanjša za 0.13° .

č. Specifična sprememba dolžine v smeri \overline{TA} je pri majhnih deformacijah enaka vrednosti $\varepsilon_{\eta\eta}$

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{xx}e_{\eta x}^2 + 2\varepsilon_{xy}e_{\eta x}e_{\eta y} + \varepsilon_{yy}e_{\eta y}^2.$$

V našem primeru dobimo

$$\varepsilon_{\eta\eta} = 0.0020 \cdot \frac{1}{4} - 0.0006 \cdot \frac{3}{4} = 0.00005.$$

Nova dolžina \overline{TA}' polmera \overline{TA} je tedaj

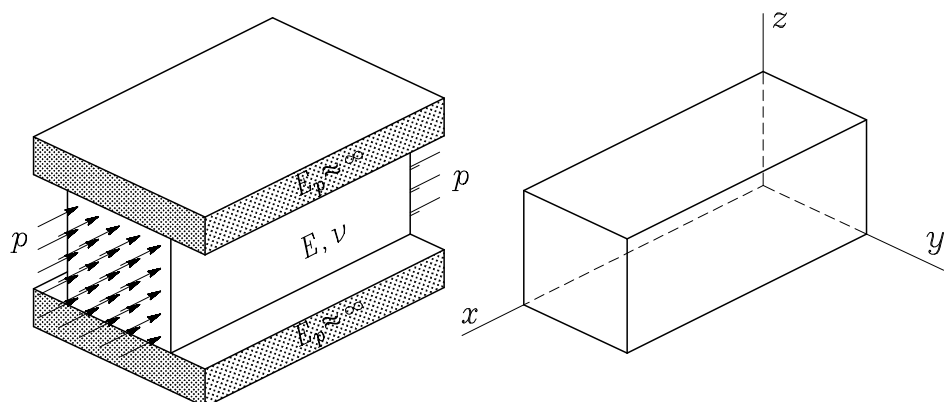
$$\overline{TA}' = \overline{TA}(1 + \varepsilon_{\eta\eta}) = 2(1 + 0.00005) \quad \rightarrow \quad \overline{TA}' = 2.0001 \text{ cm}.$$

Zgled 3.5

Jeklena prizma je brez trenja vstavljena med dve absolutno togi in nepremični plošči. Po osnovnih ploskvah jo enakomerno obtežimo s pravokotno obtežbo p .

- Določi napetosti v prizmi, specifične spremembe dolžin stranic ter specifično spremembo prostornine!
- Kolikšne so napetosti in specifična sprememba prostornine, če obtežemo prizmo segrejemo za 90 K ?
- Določi spremembo temperature, pri kateri se obtežena prizma tesno, vendar brez napetosti dotika obeh togih plošč!

$$p = 160 \text{ MPa} \\ E = 200\,000 \text{ MPa} \quad \nu = 0.3 \quad \alpha_T = 1.25 \cdot 10^{-5} / \text{K}.$$



Slika Z-3.5

a. Ker med prizmo in togima ploščama ni trenja in ker je obtežba pravokotna na osnovni ploskvi, v prizmi ni strižnih napetosti ($\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$). Stranski ploskvi z normalama $-\mathbf{e}_y$ in \mathbf{e}_y sta neobteženi in nepodprti, zato je tudi $\sigma_{yy} = 0$. Osnovna ploskev z normalo \mathbf{e}_x je obtežena s specifično površinsko obtežbo $\mathbf{p}_x = -p\mathbf{e}_x$, ki je z napetostmi povezana z ravnotežnim pogojem (1.138)

$$\mathbf{p}_x = \sigma_x e_{xx} + \sigma_y e_{xy} + \sigma_z e_{xz}.$$

Ker je $e_{xx} = 1$ in $e_{xy} = e_{xz} = 0$, dobimo

$$-p\mathbf{e}_x = \sigma_{xx}\mathbf{e}_x \quad \text{in} \quad \sigma_{xx} = -p.$$

Do enake ugotovitve pridemo z zapisom ravnotežnega pogoja na drugi osnovni ploskvi ali pa kar s preprostim fizikalnim razmislekom.

Glede na način delovanja zunanje obtežbe pričakujemo, da se bo prizma v vzdolžni smeri x skrčila, v smereh y in z pa bi se zaradi učinka prečne kontrakcije raztegnila. Vendar ji obe togi plošči raztezek v smeri z preprečujeta, zato se na stranskih ploskvah z normalama $-\mathbf{e}_z$ in \mathbf{e}_z pojavi tlačna interakcijska napetost σ_{zz} (če bi prizmo v vzdolžni smeri

obtežili z natezno obtežbo, bi bila interakcijska napetost seveda nič). Napetost σ_{zz} določimo iz pogoja, da je specifična sprememba dolžine ε_{zz} v smeri z enaka nič. Pri konstantni temperaturi ($\Delta T = 0$) iz tretje od konstitucijskih enačb (3.112) sledi

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} + \nu p) = 0 \\ \sigma_{zz} &= -\nu p = -0.3 \cdot 160 \quad \rightarrow \quad \sigma_{zz} = -48 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Iz prvih dveh od konstitucijskih enačb (3.112) lahko sedaj določimo še specifični spremembi dolžin v smereh x in y

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = -\frac{p}{E} (1 - \nu^2) = -\frac{160}{200\,000} (1 - 0.3^2) \\ \varepsilon_{xx} &= -7.28 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] = \frac{p\nu}{E} (1 + \nu) = \frac{160 \cdot 0.3}{200\,000} (1 + 0.3) \\ \varepsilon_{yy} &= 3.12 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Pri majhnih deformacijah je specifična sprememba prostornine določena s prvo invarianto tenzorja majhnih deformacij

$$\begin{aligned}\varepsilon_V &= I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -\frac{p}{E} (1 + \nu) (1 - 2\nu) \\ \varepsilon_V &= -4.16 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Prva invarianta napetostnega tenzorja pa je

$$\begin{aligned}I_1^\sigma &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -(1 + \nu) p \\ I_1^\sigma &= -208 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Za kontrolo lahko specifično spremembo prostornine določimo še z enačbo (3.124)

$$\varepsilon_V = I_1^\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{E} I_1^\sigma \quad \rightarrow \quad \varepsilon_V = -4.16 \cdot 10^{-4}.$$

b. V primeru, da obteženo prizmo enakomerno segrejemo za ΔT , iz tretje od konstitucijskih enačb (3.112) sledi

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} + \nu p) + \alpha_T \Delta T = 0$$

$$\sigma_{zz} = -(\nu p + E\alpha_T \Delta T) = -(0.3 \cdot 160 + 200\,000 \cdot 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot 90)$$

$$\sigma_{zz} = -273 \text{ MPa}.$$

Prva invarianta napetosti je v tem primeru

$$I_1^\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{zz} = -(1 + \nu) p - E\alpha_T \Delta T \quad \rightarrow \quad I_1^\sigma = -433 \text{ MPa}$$

in iz enačbe (3.108) ob upoštevanju zveze (3.110) sledi

$$\varepsilon_V = I_1^\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{E} I_1^\sigma + 3\alpha_T \Delta T \quad \rightarrow \quad \varepsilon_V = 25.09 \cdot 10^{-4}.$$

Čeprav je prva invarianta napetosti negativna in je torej hidrostaticna napetost tlačna, je specifična sprememba prostornine pozitivna. To kaže, da v obravnavanem primeru povečanje prostornine zaradi segrevanja prevlada nad vplivom tlačne hidrostaticne napetosti.

c. Ob upoštevanju ugotovitev iz točke b. lahko pogoj, da se obtežena prizma tesno, vendar brez napetosti dotika togih plošč (tedaj je seveda tudi $\varepsilon_{zz} = 0$), zapišemo z enačbo

$$\sigma_{zz} = -(\nu p + E\alpha_T \Delta T) = 0,$$

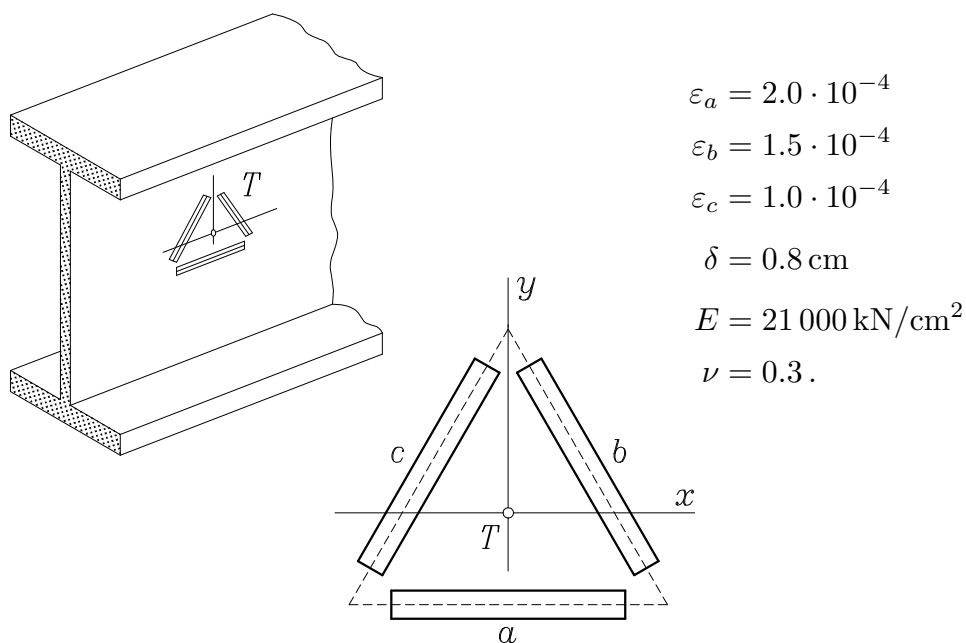
od koder sledi

$$\Delta T = -\frac{\nu p}{E\alpha_T} = -\frac{0.3 \cdot 160}{200\,000 \cdot 1.25 \cdot 10^{-5}} \quad \rightarrow \quad \Delta T = -19.2 \text{ K}.$$

Zgled 3.6

Na enakostranični Δ -rozeti, sestavljeni iz treh enakih merilnih lističev ("strain-gauge"), so bile v točki T na površini tanke stojine jeklenega polnostenskega nosilca izmerjene specifične spremembe dolžin v treh smereh, kakor kaže *slika Z-3.6 a*. V smeri pravokotno na svojo ravnino stojina ni obtežena ali podprta in ostane ravna tudi po deformaciji.

- Določi komponente tenzorja majhnih deformacij v točki T glede na koordinatni sistem (x, y, z) ! Za koliko se spremeni začetna debelina stojine $\delta = 8 \text{ mm}$ v točki T ?
- Določi ravnine in velikosti glavnih normalnih in glavnih strižnih napetosti!



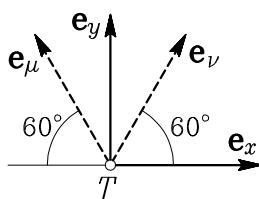
Slika Z-3.6 a

- Ker ostane stojina ravna tudi po deformaciji, ni kotnih deformacij v ravninah (x, z) in (y, z)

$$\varepsilon_{xz} = 0 \quad \text{in} \quad \varepsilon_{yz} = 0.$$

Merilni lističi tvorijo enakostranični trikotnik, torej oklepajo med seboj kote 60° . Če označimo smeri merilnih lističev b in c po vrsti z \mathbf{e}_μ in \mathbf{e}_ν (slika Z-3.6 b), velja

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\mu &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y & \dots & \quad \varepsilon_{\mu\mu} = \varepsilon_b = 1.5 \cdot 10^{-4} \\ \mathbf{e}_\nu &= \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y & \dots & \quad \varepsilon_{\nu\nu} = \varepsilon_c = 1 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$



Slika Z-3.6 b

Normalni deformaciji $\varepsilon_{\mu\mu}$ in $\varepsilon_{\nu\nu}$ sta s komponentami tenzorja majhnih deformacij v koordinatnem sistemu (x, y, z) povezani z enačbo (2.120)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\mu} &= \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{\mu i} e_{\mu j} \\ \varepsilon_{\nu\nu} &= \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{\nu i} e_{\nu j} \end{aligned} \quad (i, j = x, y, z).$$

Upoštevamo, da je $e_{\mu z} = 0$ in $e_{\nu z} = 0$ in dobimo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\mu} &= \varepsilon_{xx} e_{\mu x}^2 + 2\varepsilon_{xy} e_{\mu x} e_{\mu y} + \varepsilon_{yy} e_{\mu y}^2 \\ \varepsilon_{\nu\nu} &= \varepsilon_{xx} e_{\nu x}^2 + 2\varepsilon_{xy} e_{\nu x} e_{\nu y} + \varepsilon_{yy} e_{\nu y}^2. \end{aligned}$$

V gornjih enačbah poznamo deformacije ε_{xx} , $\varepsilon_{\mu\mu}$ in $\varepsilon_{\nu\nu}$ ter vse nastopajoče smerne kosinuse. Z vstavitvijo ustreznih vrednosti dobimo po ureditvi sistem dveh enačb za neznan deformaciji ε_{yy} in ε_{xy}

$$\begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 3 \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Rešitvi sta

$$\varepsilon_{xy} = -0.2887 \cdot 10^{-4} \quad \text{in} \quad \varepsilon_{yy} = 1 \cdot 10^{-4}.$$

Specifično spremembo debeline stojine ε_{zz} določimo iz pogoja, da je normalna napetost σ_{zz} enaka nič. Pri linearno elastičnem izotropnem materialu dobimo

$$\sigma_{zz} = 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = 0.$$

Pri tem sta μ in λ Laméjevi konstanti

$$2\mu = \frac{E}{1 + \nu} = \frac{21\,000}{1 + 0.3} = 16\,154 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{0.3 \cdot 21\,000}{(1 + 0.3)(1 - 2 \cdot 0.3)} = 12\,115 \text{ kN/cm}^2.$$

Tako dobimo

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = -\frac{12\,115}{16\,154 + 12\,115} (2 + 1) \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_{zz} = -1.2857 \cdot 10^{-4}.$$

Sedaj lahko določimo celotno spremembo $\Delta\delta$ debeline stojine v točki T

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta\delta}{\delta} \quad \dots \quad \Delta\delta = \delta \varepsilon_{zz} = -0.8 \cdot 1.2887 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta\delta = -1.0286 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

Specifična sprememba prostornine v točki T je pri majhnih deformacijah enaka prvi invarianti deformacijskega tenzorja

$$\varepsilon_V = I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 10^{-4}(2 + 1 - 1.2857)$$

$$\varepsilon_V = 1.7143 \cdot 10^{-4}.$$

b. Določimo še napetosti

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda I_1^\varepsilon \\ &= 10^{-4} \cdot (16\,154 \cdot 2 + 12\,115 \cdot 1.7143) = 5.308 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda I_1^\varepsilon \\ &= 10^{-4} \cdot (16\,154 \cdot 1 + 12\,115 \cdot 1.7143) = 3.692 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy} = -10^{-4} \cdot 16\,154 \cdot 0.2887 = -0.466 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = 2\mu \varepsilon_{yz} = 0 \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = 2\mu \varepsilon_{zx} = 0.\end{aligned}$$

Matriki napetosti in majhnih deformacij sta sedaj

$$\begin{aligned}[\sigma_{ij}] &= \begin{bmatrix} 5.308 & -0.466 & 0 \\ -0.466 & 3.692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2 \\ [\varepsilon_{ij}] &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 2 & -0.2887 & 0 \\ -0.2887 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2857 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Iz oblike matrike napetosti vidimo, da vlada v točki T ravninsko napetostno stanje. Ravnina (x, y) je torej ena od glavnih ravnin, pripadajoča glavna normalna napetost pa je enaka nič. Označimo jo na primer s σ_{33}

$$\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z \quad \dots \quad \sigma_{33} \equiv \sigma_{zz} = 0.$$

Zato lahko glavne normalne napetosti v ravnini (x, y) določimo kar z enačbo (1.314)

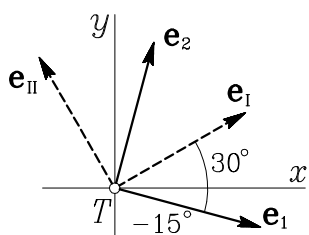
$$\begin{aligned}\sigma_{11,22} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \\ &= \frac{5.308 + 3.692}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5.308 - 3.692}{2}\right)^2 + 0.466^2} \\ \sigma_{11} &= 5.432 \text{ kN/cm}^2 & \sigma_{22} &= 3.567 \text{ kN/cm}^2.\end{aligned}$$

Določimo še enotska vektorja ravnin, v katerih delujeta glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22}

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\sigma} = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \cdot (-0.466)}{5.308 - 3.692} = -0.577.$$

$$2\alpha_{\sigma} = -30^{\circ} \quad \rightarrow \quad \alpha_{\sigma} = -15^{\circ}.$$

Ker je $\sin(-15^{\circ}) = -0.259$ in $\cos(-15^{\circ}) = 0.966$, sledi (slika Z-3.6 c)



$$\mathbf{e}_1 = 0.966 \mathbf{e}_x - 0.259 \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_2 = 0.259 \mathbf{e}_x + 0.966 \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z.$$

Slika Z-3.6 c

Da sta σ_{11} in σ_{22} res glavni normalni napetosti v smereh \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 , se tokrat prepričajmo z uporabo transformacijske formule (1.163)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{xx} e_{1x}^2 + \sigma_{yy} e_{1y}^2 + 2\sigma_{xy} e_{1x}e_{1y} \\ &= 5.308 \cdot 0.966^2 + 3.692 \cdot 0.259^2 + 2 \cdot 0.466 \cdot 0.966 \cdot 0.259 \\ &= 5.432 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \sigma_{xx} e_{2x}^2 + \sigma_{yy} e_{2y}^2 + 2\sigma_{xy} e_{2x}e_{2y} \\ &= 5.308 \cdot 0.259^2 + 3.692 \cdot 0.966^2 - 2 \cdot 0.466 \cdot 0.259 \cdot 0.966 \\ &= 3.567 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_{xx} e_{1x}e_{2x} + \sigma_{yy} e_{1y}e_{2y} + \sigma_{xy} (e_{1x}e_{2y} + e_{2x}e_{1y}) \\ &= 5.308 \cdot 0.966 \cdot 0.259 - 3.692 \cdot 0.259 \cdot 0.966 - \\ &\quad 0.466 (0.966^2 - 0.259^2) = 0. \end{aligned}$$

Ekstremno strižno napetost v ravnini (x, y) izračunamo z enačbo (1.324)

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \frac{1}{2}(5.432 - 3.567) \quad \rightarrow \quad \tau = 0.933 \text{ kN/cm}^2.$$

Enotska vektorja normal ravnin ekstremnih strižnih napetosti v ravnini (x, y) določimo z enačbami (1.319) in (1.325)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}} = -\frac{5.308 - 3.692}{2 \cdot (-0.466)} = 1.732.$$

$$\alpha_\tau = 30^\circ \pm \frac{k\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha_\tau^{k=0} = 30^\circ.$$

$$\mathbf{e}_\tau = \cos \alpha_\tau \mathbf{e}_x + \sin \alpha_\tau \mathbf{e}_y \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_\tau = 0.866 \mathbf{e}_x + 0.500 \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{t}_\tau = \sin \alpha_\tau \mathbf{e}_x - \cos \alpha_\tau \mathbf{e}_y. \quad \rightarrow \quad \mathbf{t}_\tau = 0.500 \mathbf{e}_x - 0.866 \mathbf{e}_y.$$

Končno določimo še normalni napetosti v ravninah z normalama \mathbf{e}_τ in \mathbf{t}_τ . Uporabimo enačbo (1.326) in dobimo

$$\sigma_\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{2}(5.432 + 3.567) \quad \rightarrow \quad \sigma_\tau = 4.500 \text{ kN/cm}^2.$$

Za dobro mero naredimo še kontrolo in izračunajmo napetosti glede na bazo $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{t}_\tau$ s transformacijsko enačbo (1.163). Zaradi boljše preglednosti označimo normalno napetost v ravnini z normalo \mathbf{e}_τ s σ_{ee} , normalno napetost v ravnini z normalo \mathbf{t}_τ s σ_{tt} , pripadajočo strižno napetost pa s σ_{et} . Tedaj je

$$\begin{aligned} \sigma_{ee} &= \sigma_{xx} e_{ex}^2 + \sigma_{yy} e_{ey}^2 + 2\sigma_{xy} e_{ex}e_{ey} \\ &= 5.308 \cdot 0.866^2 + 3.692 \cdot 0.500^2 - 2 \cdot 0.466 \cdot 0.866 \cdot 0.500 \\ &= 4.500 \text{ kN/cm}^2 \equiv \sigma_\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{tt} &= \sigma_{xx} e_{tx}^2 + \sigma_{yy} e_{ty}^2 + 2\sigma_{xy} e_{tx}e_{ty} \\ &= 5.308 \cdot 0.500^2 + 3.692 \cdot 0.866^2 + 2 \cdot 0.466 \cdot 0.500 \cdot 0.866 \\ &= 4.500 \text{ kN/cm}^2 \equiv \sigma_\tau \end{aligned}$$

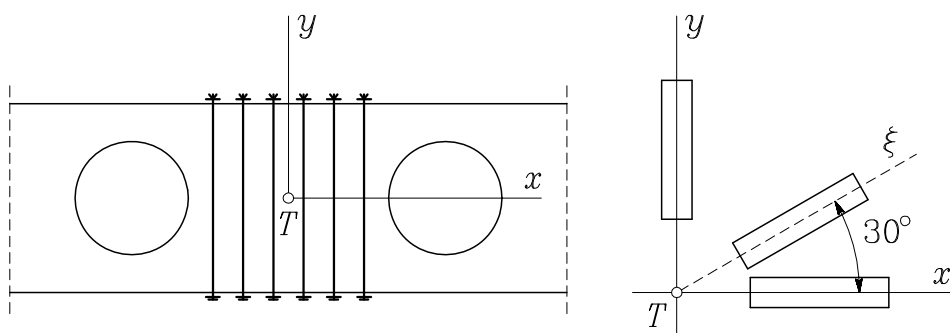
$$\begin{aligned} \sigma_{et} &= \sigma_{xx} e_{ex}e_{tx} + \sigma_{yy} e_{ey}e_{ty} + \sigma_{xy} (e_{ex}e_{ty} + e_{tx}e_{ey}) \\ &= 5.308 \cdot 0.866 \cdot 0.500 - 3.692 \cdot 0.500 \cdot 0.866 - \\ &\quad 0.466 (-0.866^2 + 0.500^2) = 0.933 \text{ kN/cm}^2 \equiv \tau. \end{aligned}$$

Zgled 3.7

V točki T prednapetega tankostenskega betonskega nosilca vlada ravninsko napetostno stanje ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$). Vz dolžna normalna napetost je $\sigma_{xx} = -4$ MPa, strižna napetost pa $\sigma_{xy} = 10$ MPa.

- Določi prečno normalno napetost σ_{yy} , s katero moramo v prečni smeri enakomerno prednapeti območje med krožnima odprtinama, da v točki T ne bo natez nih napetosti v nobeni smeri!
- Napetostno stanje v točki T kontroliramo z baterijo merilnih lističev, kakor kaže skica. Kolikšne specifične spremembe dolžin posameznih lističev pričakujemo po izvršenem prečnem prednapenjanju?

Podatki o materialu: $E = 32\,000$ MPa, $\nu = 0.17$.



Slika Z-3.7

- Pogoj naloge bo izpolnjen, če večja od obeh glavnih normalnih napetosti ne bo pozitivna

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2} \leq 0.$$

Enačbo kvadriramo in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 &\leq \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{yy} &\leq \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{yy} \leq -\frac{10^2}{4} = -25 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Nosilec moramo prečno prednapeti tako, da v ravnini $y = 0$ nastopi tlačna normalna napetost velikosti 25 MPa ali večja.

b. Deformacije, ki ustrezajo vzpostavljenemu napetostnemu stanju, določimo z enačbami (3.112). Ker je $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$, dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = \frac{1}{32\,000} (-4 + 0.17 \cdot 25) = 7.8125 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = \frac{1}{32\,000} (-25 + 0.17 \cdot 4) = -760.0000 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{0.17}{32\,000} (-4 - 25) = 154.0625 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{1 + 0.17}{32\,000} \cdot 10 = 365.6250 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = 0.\end{aligned}$$

Matrika majhnih deformacij v točki T je torej

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-6} \begin{bmatrix} 7.8125 & 365.6250 & 0 \\ 365.6250 & -760.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 154.0625 \end{bmatrix}.$$

Specifično spremembo dolžine v smeri ξ določimo z enačbo (2.118) kot diagonalno komponento tenzorja majhnih deformacij v smeri ξ

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} e_{\xi i} e_{\xi j} \quad (i, j = x, y, z).$$

Ker je v našem primeru

$$e_{\xi x} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e_{\xi y} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad e_{\xi z} = 0,$$

sledi

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{xx} e_{\xi x}^2 + 2\varepsilon_{xy} e_{\xi x} e_{\xi y} + \varepsilon_{yy} e_{\xi y}^2 \\ &= 10^{-6} \left(7.8125 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot 365.6250 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - 760.0000 \cdot \frac{1}{4} \right) \\ \varepsilon_{\xi\xi} &= 132.5000 \cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Ob pravilnem prednapenjanju in meritvi bi torej morali na merski bateriji odmeriti naslednje specifične spremembe dolžin

$$D_{xx} \approx \varepsilon_{xx} = 7.8125 \cdot 10^{-6}$$

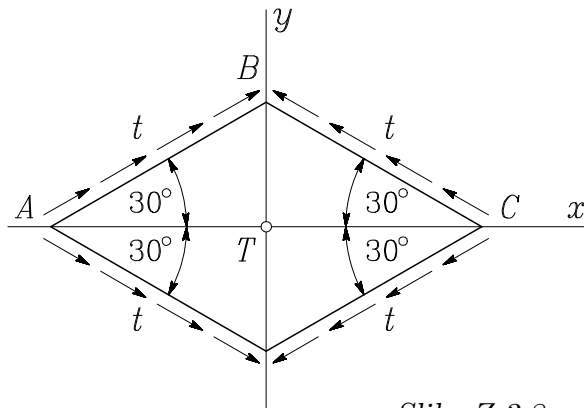
$$D_{yy} \approx \varepsilon_{yy} = -760.0000 \cdot 10^{-6}$$

$$D_{\xi\xi} \approx \varepsilon_{\xi\xi} = 132.5000 \cdot 10^{-6}.$$

Zgled 3.8

Na robove tanke jeklene stene, v kateri vlada homogeno ravninsko napetostno stanje ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$), deluje le enakomerna tangencialna površinska obtežba t , kakor kaže *slika Z-3.8 a*.

- Dokaži, da v simetrijskih ravninah $x = 0$ in $y = 0$ ni strižnih napetosti!
- Določi komponente tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$!
- Določi specifično spremembo dolžine robu \overline{AB} !



$$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

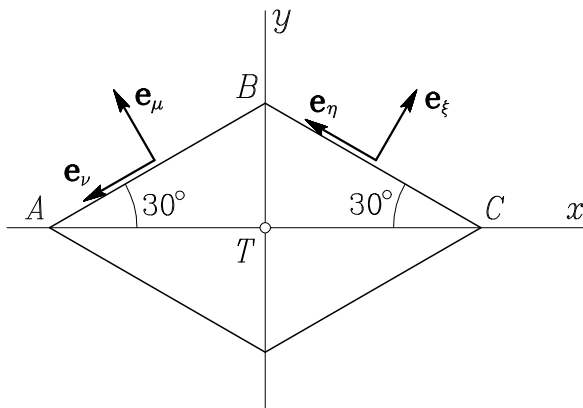
$$\nu = 0.3$$

$$t = 50\sqrt{3} \text{ MPa}$$

Slika Z-3.8 a

- Normalo in tangento na rob \overline{AB} definiramo z enotskima vektorjema \mathbf{e}_μ in \mathbf{e}_ν , normalo in tangento na rob \overline{BC} pa z enotskima vektorjema \mathbf{e}_ξ in \mathbf{e}_η (*slika Z-3.8 b*). Najprej si oglejmo rob \overline{AB} , kjer je

$$\mathbf{e}_\mu = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_\nu = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y. \quad (a)$$



Slika Z-3.8 b

Obtežbo robu \overline{AB} izrazimo v bazi $(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$

$$\mathbf{p}_n \equiv \mathbf{p}_\mu = -t \mathbf{e}_\nu. \quad (b)$$

V isti bazi zapišemo tudi robni ravnotežni pogoj

$$\overline{AB} : \quad \mathbf{p}_\mu = \boldsymbol{\sigma}_\mu = \sigma_{\mu\mu} \mathbf{e}_\mu + \sigma_{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu. \quad (c)$$

Primerjava z enačbo (b) pokaže, da je

$$\sigma_{\mu\mu} = 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{\mu\nu} = -t, \quad (\check{c})$$

kar bi sicer lahko tudi neposredno odčitali s *slike Z-3.8 a*.

Da bi dobili zvezo s komponentami napetosti v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$, izrazimo napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ v tej bazi

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \sigma_{\mu x} \mathbf{e}_x + \sigma_{\mu y} \mathbf{e}_y. \quad (d)$$

Njegove komponente določimo z enačbo (1.150)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\mu x} \\ \sigma_{\mu y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{\mu x} \\ e_{\mu y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\mu x} \\ \sigma_{\mu y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -\sigma_{xx} + \sqrt{3}\sigma_{yx} \\ -\sigma_{xy} + \sqrt{3}\sigma_{yy} \end{Bmatrix}. \quad (e)$$

Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ je tako

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \frac{1}{2} \left(-\sigma_{xx} + \sqrt{3}\sigma_{yx} \right) \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \left(-\sigma_{xy} + \sqrt{3}\sigma_{yy} \right) \mathbf{e}_y. \quad (f)$$

Njegovi komponenti v smereh \mathbf{e}_μ in \mathbf{e}_ν morata zadoščati pogoja (č)

$$\sigma_{\mu\mu} = \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{e}_\mu = \frac{1}{4} \left(\sigma_{xx} - 2\sqrt{3}\sigma_{xy} + 3\sigma_{yy} \right) = 0 \quad (g)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \frac{1}{4} \left(\sqrt{3}\sigma_{xx} - 2\sigma_{xy} - \sqrt{3}\sigma_{yy} \right) = -t. \quad (h)$$

Postopek ponovimo še na robu \overline{BC} , kjer je

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\eta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y \quad (i)$$

in

$$\mathbf{p}_n \equiv \mathbf{p}_\xi = t \mathbf{e}_\eta. \quad (j)$$

Podobno kakor v prejšnjem primeru določimo napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_\xi$ in po skalarnem množenju z enotskima vektorjema \mathbf{e}_ξ in \mathbf{e}_η dobimo

$$\sigma_{\xi\xi} = \boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi = \frac{1}{4} \left(\sigma_{xx} + 2\sqrt{3}\sigma_{xy} + 3\sigma_{yy} \right) = 0 \quad (k)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \boldsymbol{\sigma}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta = \frac{1}{4} \left(-\sqrt{3}\sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} + \sqrt{3}\sigma_{yy} \right) = t. \quad (l)$$

Z odštevanjem enačb (g) in (k) dobimo

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0, \quad (m)$$

kar je bilo treba dokazati. Enak rezultat dobimo s primerjavo enačb (h) in (l).

b. Če ugotovitev (m) upoštevamo v enačbah (g) in (h), lahko določimo še napetosti σ_{xx} in σ_{yy}

$$\sigma_{xx} = -t\sqrt{3} \quad \text{in} \quad \sigma_{yy} = t\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (n)$$

Matrika napetosti v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ je sedaj

$$[\sigma_{ij}] = \frac{t}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}. \quad (o)$$

Kakor vidimo, so smeri $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ že kar glavne smeri, napetosti σ_{xx}, σ_{yy} in σ_{zz} pa glavne normalne napetosti obravnavanega napetostnega stanja

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &\equiv \mathbf{e}_1 & \dots & \sigma_{xx} \equiv \sigma_{11} = -150 \text{ MPa} \\ \mathbf{e}_y &\equiv \mathbf{e}_2 & \dots & \sigma_{yy} \equiv \sigma_{22} = 50 \text{ MPa} \\ \mathbf{e}_z &\equiv \mathbf{e}_3 & \dots & \sigma_{zz} \equiv \sigma_{33} = 0. \end{aligned} \quad (p)$$

Glavne normalne deformacije določimo z enačbami (3.111). V našem primeru je

$$\begin{aligned} I_1^\sigma &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -150 + 50 = -100 \text{ MPa} \\ \frac{1+\nu}{E} &= \frac{1+0.3}{210\,000} = 0.619 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1} \\ \frac{\nu}{E} I_1^\sigma &= \frac{0.3}{210\,000} \cdot (-100) = -14.286 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (q)$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma = (-0.619 \cdot 150 + 14.286) \cdot 10^{-5} = -78.57 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma = (0.619 \cdot 50 + 14.286) \cdot 10^{-5} = 45.24 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma = 14.29 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (r)$$

Zaradi zvez (p) je tudi

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &\equiv \varepsilon_{11} = -78.57 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{yy} &\equiv \varepsilon_{22} = 45.24 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{zz} &\equiv \varepsilon_{33} = 14.29 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0.\end{aligned}\tag{s}$$

Matrika majhnih deformacij je tako

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-5} \begin{bmatrix} -78.57 & 0 & 0 \\ 0 & 45.24 & 0 \\ 0 & 0 & 14.29 \end{bmatrix}.\tag{\varepsilon}$$

c. Specifična sprememba dolžine robu \overline{AB} je pri majhnih deformacijah približno enaka komponenti $\varepsilon_{\nu\nu}$ tenzorja majhnih deformacij. Ob upoštevanju enačbe (2.115) dobimo

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\nu} = \boldsymbol{\varepsilon}_x e_{\nu x} + \boldsymbol{\varepsilon}_y e_{\nu y} + \boldsymbol{\varepsilon}_z e_{\nu z}.\tag{t}$$

Ker je $e_{\nu z} = 0$, sledi

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\nu} = \varepsilon_{xx} e_{\nu x} \mathbf{e}_x + \varepsilon_{yy} e_{\nu y} \mathbf{e}_y\tag{u}$$

in normalna deformacija $\varepsilon_{\nu\nu}$ je

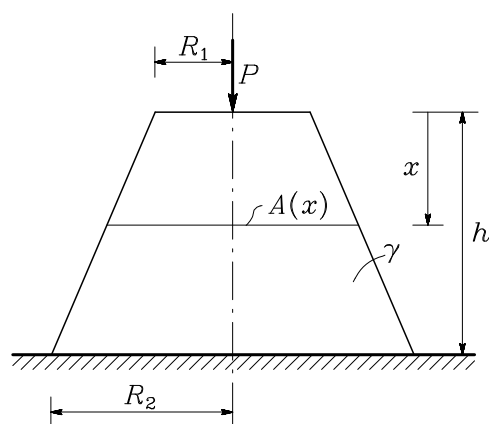
$$\begin{aligned}\varepsilon_{\nu\nu} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{\nu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} = \varepsilon_{xx} e_{\nu x}^2 + \varepsilon_{yy} e_{\nu y}^2 = 10^{-5} \left(-78.57 \cdot \frac{3}{4} + 45.24 \cdot \frac{1}{4} \right) \\ \varepsilon_{\nu\nu} &= -47.62 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}\tag{v}$$

Specifična sprememba $D_{\nu\nu}$ dolžine robu \overline{AB} je sedaj

$$D_{\nu\nu} \approx \varepsilon_{\nu\nu} = -47.62 \cdot 10^{-5}.\tag{w}$$

Zgled 3.9

Odsekan stožčast steber je po zgornji osnovni ploskvi obtežen z enakomerno površinsko obtežbo p . Rezultanta te obtežbe je navpična sila velikosti P . Specifična teža materiala je γ .



$$P = 40 \text{ kN}$$

$$\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$R_1 = 0.2 \text{ m}$$

$$R_2 = 0.5 \text{ m}$$

$$h = 8 \text{ m}$$

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

Slika Z-3.9 a

Ob predpostavki, da v vsakem vodoravnem krožnem prečnem prerezu stebra nastopa le enakomerna vzdolžna normalna napetost σ_{xx} , določi:

- ekstremno normalno napetost ter prečni prerez, v katerem nastopa!
- navpični pomik zgornje osnovne ploskve (prijemališča sile P)!

a. Pogoji za ravnotežje vseh sil, ki delujejo na del stebra $\Delta V(x)$ v smeri vzdolžne osi x (slika Z-3.9 b), je

$$P + \gamma \Delta V(x) + \sigma_{xx}(x) A(x) = 0.$$

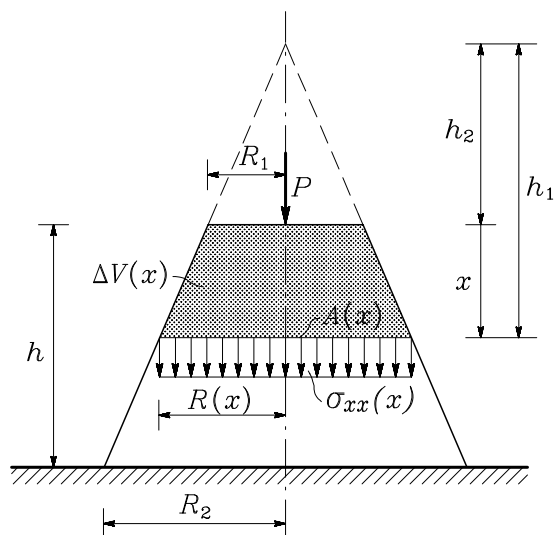
Pri tem lahko s slike Z-3.9 b odčitamo naslednje geometrijske zveze

$$A(x) = \pi R^2$$

$$R = R(x) = R_1 + \frac{x}{h}(R_2 - R_1)$$

$$h_1 = \frac{Rh}{R_2 - R_1} \quad h_2 = \frac{R_1 h}{R_2 - R_1}$$

$$\Delta V(x) = \frac{\pi}{3} (R^2 h_1 - R_1^2 h_2) = \frac{\pi h}{3(R_2 - R_1)} (R^3 - R_1^3).$$



Slika Z-3.9 b

Vzdolžno normalno napetost σ_{xx} v poljubnem vodoravnem prečnem prerezu $A(x)$ izračunamo iz ravnotežnega pogoja za $\Delta V(x)$

$$\sigma_{xx}(x) = -\frac{1}{A(x)} [P + \gamma \Delta V(x)]$$

$$\sigma_{xx}(x) = -\frac{1}{\pi R^2} \left[P + \frac{\pi \gamma h}{3(R_2 - R_1)} (R^3 - R_1^3) \right].$$

Koordinato x_m prečnega prereza, v katerem nastopa ekstremna normalna napetost, določimo iz pogoja

$$\left. \frac{d\sigma_{xx}}{dx} \right|_{x=x_m} = 0.$$

Ker je σ posredna funkcija spremenljivke $R(x)$, velja

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{d\sigma_{xx}}{dR} \frac{dR}{dx}.$$

Pri tem je ($R_2 \neq R_1$)

$$\frac{dR}{dx} = \frac{R_2 - R_1}{h} \neq 0$$

in pogoj za nastop ekstremne vrednosti napetosti lahko zapišemo takole

$$\left. \frac{d\sigma_{xx}}{dR} \right|_{R=R_m} = 0.$$

Z odvajanjem enačbe za σ_{xx} po R dobimo

$$\frac{1}{R_m^3} \left[\frac{2P}{\pi} - \frac{2\gamma h R_1^3}{3(R_2 - R_1)} \right] - \frac{\gamma h}{3(R_2 - R_1)} = 0$$

$$R_m = \sqrt[3]{\frac{6P(R_2 - R_1)}{\pi \gamma h} - 2R_1^3} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 40 \cdot (0.5 - 0.2)}{\pi \cdot 25 \cdot 8} - 2 \cdot 0.2^3}$$

$$R_m = 0.462 \text{ m}$$

$$x_m = \frac{h}{R_2 - R_1} (R_m - R_1) = \frac{8}{0.5 - 0.2} (0.462 - 0.2)$$

$$x_m = 6.986 \text{ m}.$$

Ekstremna vzdolžna normalna napetost σ_{xx}^m nastopa torej v prečnem prerezu pri $x_m = 6.986 \text{ m}$ s polmerom $R_m = 0.462 \text{ m}$ in znaša

$$\sigma_{xx}^m = -\frac{1}{\pi \cdot 0.462^2} \left[40 + \frac{\pi \cdot 25 \cdot 8}{3(0.5 - 0.2)} (0.462^3 - 0.2^3) \right]$$

$$\sigma_{xx}^m = -153.99 \text{ kN/m}^2.$$

Ugotoviti moramo še, ali gre pri ekstremni normalni napetosti za maksimalno ali minimalno vrednost. V ta namen izračunamo drugi odvod napetosti σ_{xx}

$$\frac{d^2\sigma_{xx}}{dR^2} = \frac{1}{R^4} \left[-\frac{6P}{\pi} + \frac{2\gamma h R_1^3}{R_2 - R_1} \right].$$

Izraz v oglatem oklepaju ima konstantno vrednost

$$\left[-\frac{6P}{\pi} + \frac{2\gamma h R_1^3}{R_2 - R_1} \right] = \left[-\frac{6 \cdot 40}{\pi} + \frac{2 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 0.2^3}{0.5 - 0.2} \right] = -65.73.$$

Drugi odvod napetosti σ_{xx} je torej negativen po celotni višini stebra, zato ima funkcija $\sigma_{xx}(x)$ pri $R = R_m$ oziroma pri $x = 0.462$ m maksimum. Ker je napetost tlačna, torej negativna, dobimo pri $R = R_m$ po absolutni vrednosti najmanjšo tlačno napetost.

(Bralcu prepuščamo v razmislek naslednji vprašanji:

- določi silo P tako, da bo napetost σ_{xx} linearna funkcija koordinate x ,
- določi mesto in vrsto ekstremne normalne napetosti, če na steber deluje le lastna teža!)

b. Ob predpostavki, da gre za enoosno napetostno stanje, je vzdolžna specifična sprememba dolžine ε_{xx} določena kar s Hookovim zakonom. Upoštevajoč dobljeni izraz za vzdolžno normalno napetost σ_{xx} dobimo

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{\sigma_{xx}(x)}{E} = -\frac{1}{\pi E R^2} \left[P + \frac{\pi \gamma h}{3(R_2 - R_1)} (R^3 - R_1^3) \right].$$

Vzdolžni pomik u_x je z deformacijo ε_{xx} povezan s kinematično enačbo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx},$$

ki jo po preureditvi zapišemo takole

$$du_x = - \left[\frac{P}{\pi E R^2} + \frac{\gamma h}{3E(R_2 - R_1)} \left(R - \frac{R_1^3}{R^2} \right) \right] dx.$$

Da bi določili potek pomika u_x vzdolž stebra, bi morali to enačbo integrirati po x v mejah od 0 do poljubne vrednosti x . Delo se poenostavi, če vpeljemo novo integracijsko spremenljivko ϱ tako, da je

$$\varrho = R_1 + \frac{x}{h}(R_2 - R_1) \quad \rightarrow \quad dx = \frac{h}{R_2 - R_1} d\varrho,$$

$$\varrho(x=0) = R_1, \quad \varrho(x) = R, \quad \varrho(x=h) = R_2.$$

Navpični pomik $u_x(x=0)$ prijemališča sile P označimo z u_x^0 in z integriranjem dobimo

$$u_x = u_x^0 - \frac{Ph}{\pi E(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^R \frac{d\varrho}{\varrho^2} - \frac{\gamma h^2}{3E(R_2 - R_1)^2} \int_{R_1}^R \left(\varrho - \frac{R_1^3}{\varrho^2} \right) d\varrho.$$

Po izvrednotenju nastopajočih integralov sledi

$$u_x = u_x^0 - \frac{Ph(R - R_1)}{\pi E(R_2 - R_1)RR_1} - \frac{\gamma h^2(R - R_1)^2(R + 2R_1)}{6E(R_2 - R_1)^2R}.$$

Kakor vidimo, se tako navpični pomik zaradi točkovne sile P kakor tudi navpični pomik zaradi lastne teže spreminjata vzdolž stebra po hiperboličnem zakonu. Pomik u_x^0 prijemališča sile P določimo iz pogoja, da je pomik v podpori enak nič

$$u_x(x=h) = u_x(R=R_2) = 0.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} u_x^0 &= \frac{Ph}{\pi ER_1R_2} + \frac{\gamma h^2(2R_1 + R_2)}{6ER_2} \\ &= \frac{40 \cdot 8}{\pi \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0.2 \cdot 0.5} + \frac{25 \cdot 8^2(2 \cdot 0.2 + 0.5)}{6 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0.5} \\ u_x^0 &= 7.493 \cdot 10^{-5} \text{ m.} \end{aligned}$$

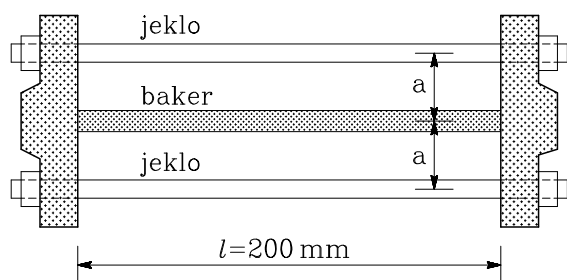
Naloga je s tem končana, zaradi popolnosti pa zapišimo še končni izraz za potek navpičnega pomika u_x vzdolž stebra

$$u_x = \frac{h(R_2 - R)}{E(R_2 - R_1)RR_2} \left[\frac{P}{\pi} + \frac{\gamma h(RR_2^2 + R^2R_2 - 2R_1^3)}{6(R_2 - R_1)} \right].$$

Zgled 3.10

Med dva toga odlitka, ki sta spojena z dvema jeklenima vijakoma premera 10 mm in dolžine 200 mm, moramo vstaviti bakreno palico s prečnim prerezom $A_b = 600 \text{ mm}^2$ in dolžino 200.2 mm.

- Za koliko moramo ohladiti bakreno palico, da jo je mogoče vstaviti med odlitka? (Temperatura jeklenih vijakov se pri tem ne spremeni.)
- Določi razdaljo med odlitkoma ter napetosti v jeklenih vijakih in bakrenem vložku, ko se temperatura bakrene palice spet izenači s temperaturo okolja in jeklenih vijakov!



$$E_j = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\alpha_j = 1.2 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

$$E_b = 1.0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\alpha_b = 1.7 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

Slika Z-3.10 a

- Začetna dolžina bakrene palice je $l_0 = 200.2 \text{ mm}$, po deformaciji zaradi ohladitve pa je nova dolžina $l = 200 \text{ mm}$. Specifična sprememba dolžine bakrene palice ε , ki ustreza temu skrčku, je

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} .$$

Med ohlajevanjem v bakreni palici ni napetosti, zato je celotna deformacija posledica spremembe temperature

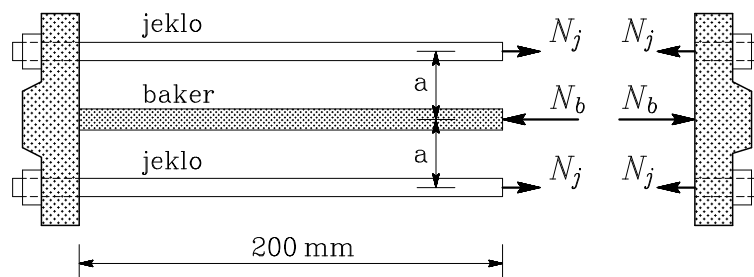
$$\varepsilon = \alpha_b \Delta T_b .$$

Obe enačbi izenačimo in izrazimo potrebno spremembo temperature ΔT_b

$$\Delta T_b = \frac{l - l_0}{l_0 \alpha_b} = \frac{200.0 - 200.2}{200.2 \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}}$$

$$\Delta T_b = -58.8 \text{ K}.$$

b. Ko se po namestitvi bakrene palice med oba toga odlitka njena temperatura začne izenačevati s temperaturo okolja oziroma preostalega dela sestava ($\Delta T_b = +58.8 \text{ K}$), se prične bakrena palica raztezati.



Slika Z-3.10 b

Ker sta odlitka toga, se v jeklenih vijakih pojavita natezni sili velikosti N_j , v bakreni palici pa tlačna sila N_b (slika Z-3.10 b). Iz pogoja za ravnotežje odlitka sledi

$$N_b - 2N_j = 0 \quad \rightarrow \quad N_b = 2N_j.$$

Po izenačitvi temperatur bakrene palice in jeklenih vijakov so dolžine vseh treh elementov enake. V tem delu naloge je začetna dolžina $l_b = l_j = l = 200 \text{ mm}$, končni dolžini pa označimo z l'_b in l'_j

$$l'_b = l_b + \Delta l_b = l(1 + \varepsilon_b)$$

$$l'_j = l_j + \Delta l_j = l(1 + \varepsilon_j).$$

Ker je

$$\varepsilon_b = -\frac{N_b}{E_b A_b} + \alpha_b \Delta T_b$$

in

$$\varepsilon_j = \frac{N_j}{E_j A_j},$$

sledi po izenačitvi $l'_b = l'_j$

$$-\frac{N_b}{E_b A_b} + \alpha_b \Delta T_b = \frac{N_j}{E_j A_j}.$$

Upoštevamo, da je $N_b = 2N_j$, in po ureditvi dobimo

$$N_j = \frac{E_b E_j A_b A_j}{E_b A_b + 2E_j A_j} \alpha_b \Delta T_b.$$

Izračunati moramo še ploščino prečnega prereza jeklenega vijaka A_j

$$A_j = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad A_j = 78.5 \text{ mm}^2.$$

Tako dobimo

$$N_j = \frac{1.0 \cdot 10^5 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot 600 \cdot 78.5}{10^5 (1.0 \cdot 600 + 2 \cdot 2.1 \cdot 78.5)} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5} \cdot 58.8 = 10\,632 \text{ N}$$

$$N_b = 2N_j = 2 \cdot 10\,632 = 21\,264 \text{ N}.$$

Vzdolžne normalne napetosti v elementih obravnavanega sestava so sedaj

$$\sigma_b = -\frac{N_b}{A_b} = -\frac{21\,264}{600} \quad \rightarrow \quad \sigma_b = -35.46 \text{ MPa}$$

$$\sigma_j = \frac{N_j}{A_j} = \frac{10\,632}{78.5} \quad \rightarrow \quad \sigma_j = 135.37 \text{ MPa}.$$

Po izenačitvi temperatur je razdalja med odlitkoma l' enaka novi dolžini bakrene palice l'_b oziroma novi dolžini jeklenega vijaka l'_j

$$l' = l'_j = l \left(1 + \frac{N_j}{E_j A_j} \right) = 200 \left(1 + \frac{10\,632}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 78.5} \right)$$

$$l' = 200.129 \text{ mm}.$$

Naredimo še kontrolo

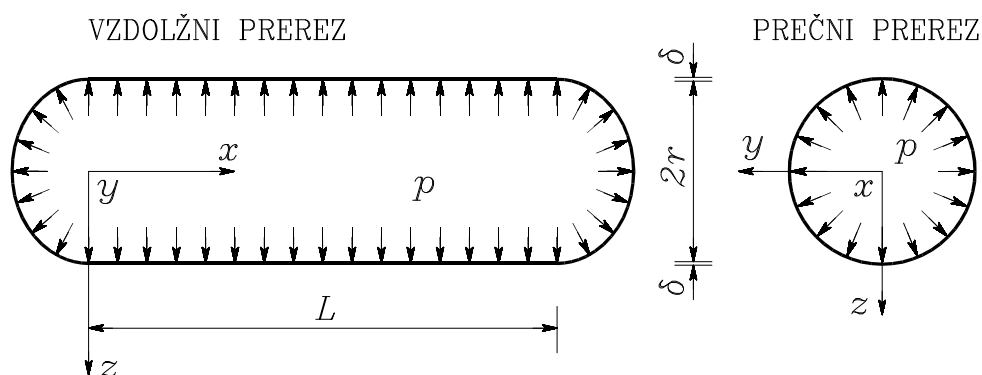
$$l' = l'_b = l \left(1 - \frac{N_b}{E_b A_b} + \alpha_b \Delta T_b \right) =$$

$$200 \left(1 - \frac{21\,264}{1.0 \cdot 10^5 \cdot 600} + 1.7 \cdot 10^{-5} \cdot 58.8 \right)$$

$$l' = 200.129 \text{ mm.}$$

Zgled 3.11

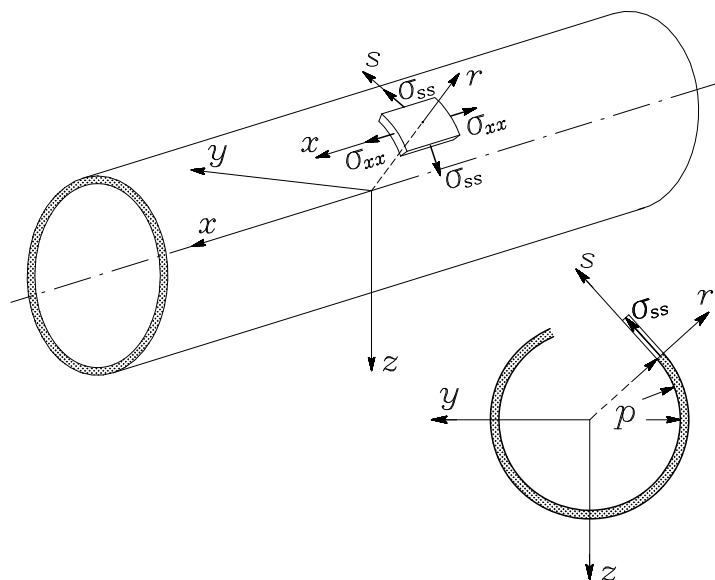
Določi napetosti in deformacije v tankostenski krožno valjasti posodi z rotacijskima kalotama pri hidrostatičnem notranjem tlaku p (slika Z-3.11 a)! Lastno težo posode in vsebine lahko zanemarimo.



slika Z-3.11 a

Posodo ali kakšno drugo konstrukcijo obravnavamo kot tankostensko v primeru, da je debelina stene δ majhna v primerjavi z ostalimi značilnimi dimenzijami, na primer v primerjavi s polmerom in dolžino posode ($\delta \ll r$, $\delta \ll L$). S tovrstnimi nalogami se srečamo pri dimenzioniranju parnih kotlov, toplovodov, tlačnih cevovodov in rezervoarjev.

V tehniški praksi je običajna predpostavka, da gre za tenkostensko posodo, če je razmerje med polmerom r in debelino stene δ večje od 10 ($r \geq 10 \delta$). V takih primerih je umestno predpostaviti, da so napetosti enakomerno razporejene po debelini stene.

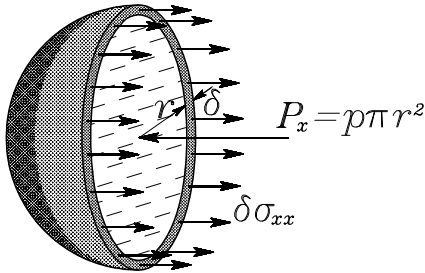


Slika Z-3.11 b

V pravokotnem prečnem prerezu cevi nastopa enakomerna vzdolžna normalna napetost σ_{xx} , v radialnem prerezu tangentska normalna napetost σ_{ss} , v tangencialni ravnini katerekoli točke na notranji površini posode pa radialna normalna napetost $\sigma_{rr} = -p$. Ustrezna radialna normalna napetost na zunanji, neobteženi površini posode je enaka nič. Pri tem smo razen osnovnega kartezijskega koordinatnega sistema (x, y, z) vpeljali še naravni, prav tako kartezijski koordinatni sistem (x, r, s) , ki v poljubni točki notranje mejne črte prečnega prereza posode opisuje vzdolžno, radialno in tangencialno smer (slika Z-3.11 b). (Strožja analiza pokaže, da so v resnici tangentske normalne napetosti σ_{ss} na notranjem plašču cevi nekoliko večje kakor na zunanjem, vendar je ta razlika pri omenjenih geometrijskih lastnostih cevi zanemarljivo majhna.)

Ker gre v obravnavanem primeru za osnosimetrično geometrijo in enakomerno osno simetrično hidrostatično obtežbo, ki je povsod pravokotna na notranjo površino posode, se pod obtežbo spremenijo le dimenzije, ne pa tudi oblika posode. To pomeni, da so vse kotne deformacije in s tem tudi vse strižne napetosti glede na koordinatni sistem (x, r, s) enake nič

$$\varepsilon_{xr} = \varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sx} = 0, \quad \text{in} \quad \sigma_{xr} = \sigma_{rs} = \sigma_{sx} = 0.$$



Slika Z-3.11 c

Oglejmo si del posode, ki ga določa prečni prerez z ravnino $(x = 0)$, in ga obravnavajmo z vsebovano tekočino ali plinom vred (slika Z-3.11 c)! Na notranji del prerezne ploskve s polmerom r deluje hidrostatični tlak p z rezultanto $P_x = p\pi r^2$, na prerez stene posode pa enakomerna vzdolžna normalna napetost σ_{xx} .

Iz pogoja za ravnotežje sil v smeri x

$$\sigma_{xx} [\pi(r + \delta)^2 - \pi r^2] - p\pi r^2 = 0$$

sledi

$$\sigma_{xx} = p \frac{r^2}{\delta(2r + \delta)}.$$

Če je izpolnjena predpostavka, da je $\delta \ll r$, lahko v oklepaju v imenovalcu zanemarimo debelino cevi δ v primerjavi s premerom $2r$ in dobimo

$$\sigma_{xx} \cong p \frac{r}{2\delta}.$$

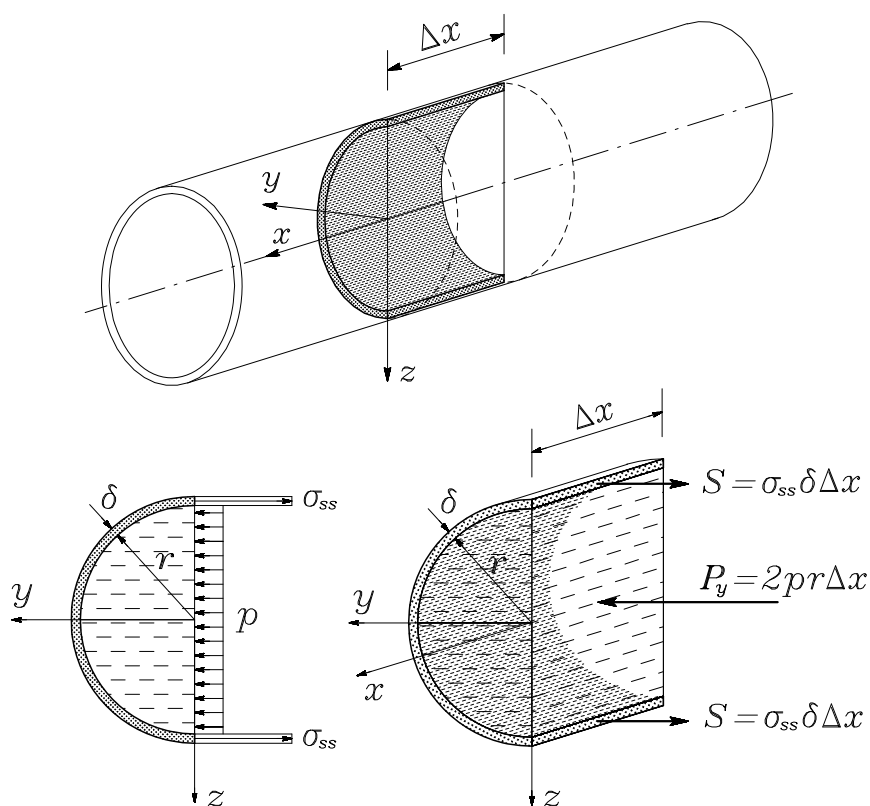
Podobno obravnavamo elementarni del posode, ki ga določajo dva na os x pravokotna prečna prereza na medsebojni razdalji Δx in radialni prerez z ravnino $y = 0$ (slika Z-3.11 d). Rezultanta hidrostatičnega tlaka na radialnem prerezu je $P_y = 2pr\Delta x$, rezultanta tangentskih normalnih napetosti σ_{ss} na ustreznem radialnem prerezu stene posode pa je $S = \sigma_{ss}\delta\Delta x$. V obeh čelnih prerezih ni strižnih napetosti, zato se ravnotežni pogoj za sile v smeri osi y glasi

$$P_y - 2S = 0 \quad \rightarrow \quad 2pr\Delta x - 2\sigma_{ss}\delta\Delta x = 0.$$

Od tod sledi tako imenovana “kotelna formula” za določevanje tangentialnih normalnih napetosti

$$\sigma_{ss} = p \frac{r}{\delta}.$$

Kakor vidimo, je normalna napetost v smeri tangente na vodilno krožnico valjaste posode dvakrat večja od vzdolžne normalne napetosti. (S tem si lahko razložimo vsaki gospodinji dobro znan pojav, da hrenovka pri kuhanju vedno počí podolgem).



Slika Z-3.11 d

Dobljeni enačbi določata normalne napetosti v steni cevi pri zaprti posodi z notranjim hidrostatičnim tlakom p . Pri posebnih konstruk-

cijskih izvedbah (meandrirane toplovodne cevi z gibkimi koleni, cevi hidravličnih naprav z neodvisnimi bati in podobno) je možno vzdolžne normalne napetosti σ_{xx} zmanjšati na zanemarljivo velikost ($\sigma_{xx} \approx 0$), tangentne normalne napetosti σ_{ss} pa praviloma računamo po kotelni formuli.

Za linearno elastično napetostno–deformacijsko področje določimo deformacije izotropnega materiala s Hookovim zakonom. V poljubni točki na notranji površini valjastega dela posode je $\sigma_{rr} = -p$, zato velja

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{ss})] = \frac{1}{E}\left[p \frac{r}{2\delta} - \nu\left(-p + p \frac{r}{\delta}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{p}{E}\left[\frac{r}{2\delta} + \nu\left(1 - \frac{r}{\delta}\right)\right].$$

V gornji enačbi lahko v okroglem oklepaju zanemarimo vrednost 1 v primerjavi z ulomkom r/δ in dobimo preprost približen izraz za določitev deformacije ε_{xx}

$$\varepsilon_{xx} \cong p \frac{r(1 - 2\nu)}{2\delta E}.$$

Podobno določimo deformacijo ε_{ss}

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{E}[\sigma_{ss} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{rr})] = \frac{1}{E}\left[p \frac{r}{\delta} - \nu\left(p \frac{r}{2\delta} - p\right)\right]$$

$$\varepsilon_{ss} = \frac{p}{E}\left[\frac{r}{\delta} + \nu\left(1 - \frac{r}{2\delta}\right)\right].$$

Tudi tu lahko v okroglem oklepaju zanemarimo vrednost 1 v primerjavi z ulomkom $r/2\delta$ in dobimo

$$\varepsilon_{ss} \cong p \frac{r(2 - \nu)}{2\delta E}.$$

Določimo še normalno deformacijo v radialni smeri

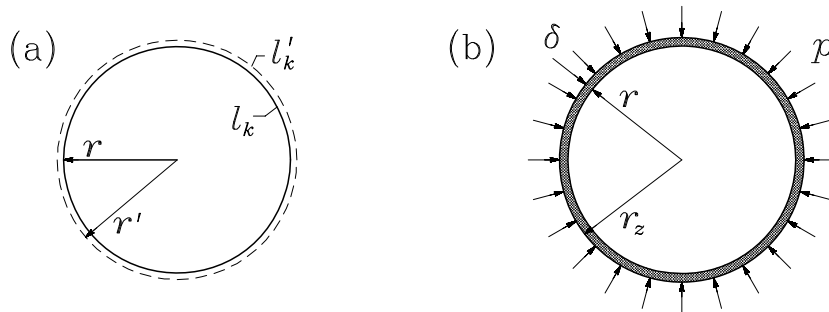
$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}[\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{ss})] = \frac{1}{E} \left[-p - \nu \left(p \frac{r}{2\delta} + p \frac{r}{\delta} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{p}{E} \left(1 + \frac{3r\nu}{2\delta} \right).$$

Če tudi v gornji enačbi zanemarimo vrednost 1 v primerjavi z ulomkom $3r\nu/2\delta$, sledi

$$\varepsilon_{rr} \cong -p \frac{3r\nu}{2\delta E}.$$

Nekoliko podrobneje si oglejmo deformacijo ε_{ss} , ki predstavlja specifično spremembo dolžine notranje mejne črte prečnega prereza cevnega dela posode.



Slika Z-3.11 e

To specifično spremembo dolžine lahko izrazimo kot razmerje celotne spremembe dolžine notranje konture $\Delta l_k = l'_k - l_k$ in začetne dolžine konture l_k (slika Z-3.11 e/a)

$$\varepsilon_{ss} = D_{ss} = \frac{l'_k - l_k}{l_k} = \frac{2\pi r' - 2\pi r}{2\pi r}$$

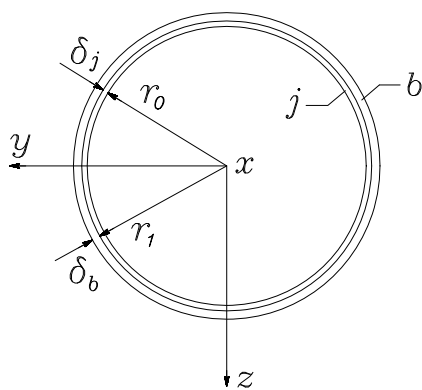
$$\varepsilon_{ss} = \frac{r'}{r} - 1.$$

Tako smo torej linearno deformacijo ε_{ss} notranje konture izrazili s spremembo notranjega polmera prečnega prereza cevnega dela posode.

Vse dobljene enačbe lahko smiselno uporabimo tudi v primeru, da je posoda izpostavljena hidrostatičnemu tlaku z zunanje strani (slika Z-3.11 e/b), le da sta tedaj napetosti σ_{xx} in σ_{ss} tlačni, notranji polmer r pa moramo nadomestiti z zunanjim polmerom $r_z = r + \delta$.

Zgled 3.12

Podvodni cevovod je sestavljen iz jeklene notranje in varovalne bakrene zunanje cevi, ki se tesno, vendar brez napetosti, prilegata med seboj (slika Z-3.12 a). Konstrukcijska izvedba cevovoda je takšna, da so vzdolžne normalne napetosti v prečnem prerezu cevi zanemarljivo majhne.



$$r_0 = 50 \text{ cm}$$

$$\delta_j = 1 \text{ cm}$$

$$\delta_b = 1.5 \text{ cm}$$

$$E_j = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu_j = 0.30$$

$$E_b = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu_b = 0.34$$

Slika Z-3.12 a

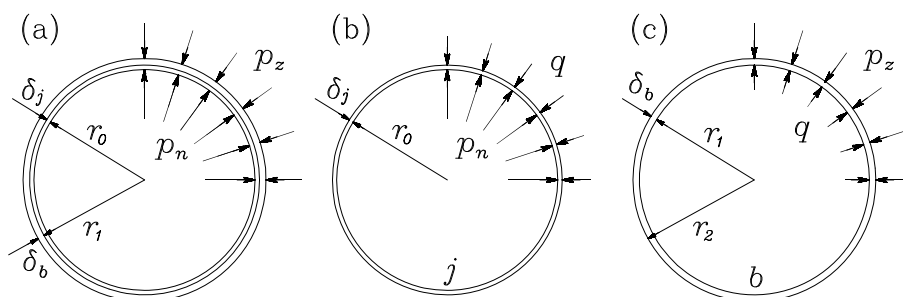
Določi normalne napetosti v tangencialni smeri glede na vodilno krožnico v obeh ceveh v naslednjih primerih:

- pri tlačnem preizkusu cevovoda na kopnem z notranjim hidrostatičnim tlakom velikosti 5.5 MPa,
- pri praznem cevovodu v globini 50 m pod vodo,
- med obratovanjem cevovoda z notranjim tlakom 1.4 MPa v globini 50 m pod vodo!

Za kasnejšo rabo določimo polmer skupne konture obeh cevi r_1 in zunanji polmer bakrene cevi r_2

$$r_1 = r_0 + \delta_j = 51 \text{ cm}, \quad r_2 = r_0 + \delta_j + \delta_b = 52.5 \text{ cm}.$$

Obravnavajmo najprej splošni primer, da je cevovod izpostavljen notranjemu hidrostaticnemu tlaku p_n in zunanjemu hidrostaticnemu tlaku p_z (slika Z-3.12 b/a).



Slika Z-3.12 b

Zaradi različnih deformabilnostnih lastnosti bakrene in jeklene cevi se na stični ploskvi obeh cevi pojavi osnosimetrična interakcijska obtežba q (sliki Z-3.12 b/b in b/c). vzdolžne in radialne normalne napetosti v poljubni točki stične mejne ploskve obeh cevi so

$$\sigma_{xx}^j = \sigma_{xx}^b = 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{rr}^j = \sigma_{rr}^b = -q.$$

Normalna napetost v tangencialni smeri na vodilno krožnico jeklene cevi je po kotelni formuli

$$\sigma_{ss}^j = p_n \frac{r_0}{\delta_j} - q \frac{r_1}{\delta_j} = \frac{1}{\delta_j} (p_n r_0 - q r_1),$$

v bakreni cevi pa

$$\sigma_{ss}^b = q \frac{r_1}{\delta_b} - p_z \frac{r_2}{\delta_b} = \frac{1}{\delta_b} (q r_1 - p_z r_2).$$

Interakcijsko obtežbo q na stični ploskvi obeh cevi določimo iz pogoja, da se cevi tudi pod vplivom obtežbe tesno prilegata med seboj. To pomeni, da mora biti zunanji polmer deformirane jeklene cevi enak notranjemu polmeru deformirane bakrene cevi

$$r'_1(\text{jeklene cevi}) = r'_1(\text{bakrene cevi}).$$

V zgledu 3.11 smo ugotovili, da lahko gornji pogoj enakovredno izrazimo z zahtevo, da sta specifični spremembi dolžin skupne konture jeklene oziroma bakrene cevi enaki med seboj

$$\varepsilon_{ss}^j = \varepsilon_{ss}^b.$$

Pri tem je ($\sigma_{xx}^j = \sigma_{xx}^b = 0$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^j &= \frac{1}{E_j} (\sigma_{ss}^j - \nu_j \sigma_{rr}^j) = \frac{1}{E_j} \left[\frac{1}{\delta_j} (p_n r_0 - q r_1) + \nu_j q \right] \\ \varepsilon_{ss}^b &= \frac{1}{E_b} (\sigma_{ss}^b - \nu_b \sigma_{rr}^b) = \frac{1}{E_b} \left[\frac{1}{\delta_b} (q r_1 - p_z r_2) + \nu_b q \right]. \end{aligned}$$

Zaradi enostavnejšega pisanja vpeljemo okrajšavo

$$\beta = \frac{E_j}{E_b},$$

izenačimo obe linearni deformaciji in po ureditvi dobimo

$$q = \frac{p_n r_0 \delta_b + \beta p_z r_2 \delta_j}{\beta \delta_j (r_1 + \nu_b \delta_b) + \delta_b (r_1 - \nu_j \delta_j)}.$$

V našem primeru je

$$\beta = \frac{E_j}{E_b} = \frac{2 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} = 2$$

in imenovalec v enačbi za interakcijsko obtežbo q lahko izračunamo neodvisno od obtežnega primera

$$\begin{aligned} & \beta \delta_j (r_1 + \nu_b \delta_b) + \delta_b (r_1 - \nu_j \delta_j) = \\ & 2 \cdot 0.01 \cdot (0.51 + 0.34 \cdot 0.015) + 0.015 \cdot (0.51 - 0.30 \cdot 0.01) = \\ & 179.07 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Interakcijska obtežba in normalne napetosti v tangencialni smeri v obravnavanih treh obtežnih primerih so:

a. $p_n = 5.5 \text{ MPa}$, $p_z = 0$

$$\begin{aligned} q &= \frac{5.5 \cdot 0.50 \cdot 0.015}{179.07 \cdot 10^{-4}} = 2.304 \text{ MPa} \\ \sigma_{ss}^j &= \frac{1}{0.01} (5.5 \cdot 0.50 - 2.30 \cdot 0.51) = 157.518 \text{ MPa} \\ \sigma_{ss}^b &= \frac{1}{0.015} \cdot 2.30 \cdot 0.51 = 78.321 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

b. Hidrostatični tlak v globini $h = 50 \text{ m}$ je ($\gamma_v = 0.01 \text{ MN/m}^3$)

$$p_h = h\gamma_v = 50 \cdot 0.01 = 0.5 \text{ MPa},$$

zato je $p_n = 0$, $p_z = 0.5 \text{ MPa}$.

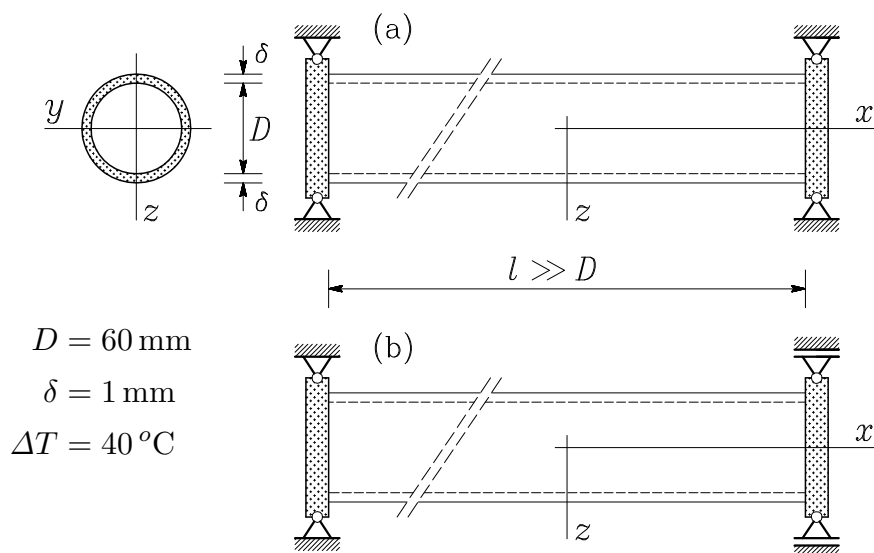
$$\begin{aligned} q &= \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 0.525 \cdot 1}{179.07 \cdot 10^{-4}} = 0.293 \text{ MPa} \\ \sigma_{ss}^j &= \frac{1}{0.01} (0 - 0.29 \cdot 0.51) = -14.952 \text{ MPa} \\ \sigma_{ss}^b &= \frac{1}{0.015} (0.29 \cdot 0.51 - 0.5 \cdot 0.525) = -7.532 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

c. $p_n = 1.4 \text{ MPa}$, $p_z = 0.5 \text{ MPa}$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1.4 \cdot 0.50 \cdot 0.015 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.525 \cdot 0.01}{179.07 \cdot 10^{-4}} = 0.880 \text{ MPa} \\ \sigma_{ss}^j &= \frac{1}{0.01} (1.4 \cdot 0.50 - 0.88 \cdot 0.51) = 25.143 \text{ MPa} \\ \sigma_{ss}^b &= \frac{1}{0.015} (0.88 \cdot 0.51 - 0.5 \cdot 0.525) = 12.405 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Zgled 3.13

Dolgo valjasto aluminijasto jedro je tesno, vendar brez napetosti, obdano s tanko jekleno cevjo, ki je na koncih zaprta z absolutno togima ploščama.



Slika Z-3.13 a

$E_j = 22\,000 \text{ kN/cm}^2$	$\nu_j = 0.30$	$\alpha_j = 1.2 \cdot 10^{-5} / \text{K}$
$E_a = 7\,000 \text{ kN/cm}^2$	$\nu_a = 0.34$	$\alpha_a = 2.353 \cdot 10^{-5} / \text{K}$

Opisani sestav enakomerno segrejemo za ΔT . Obravnaj dva primera:

- razdalja med čelnima ploščama se med segrevanjem ne spremeni (slika Z-3.13 a/a),
- desna plošča se lahko prosto premika skupaj z valjem in cevjo (slika Z-3.13 a/b).

V obeh primerih določi vzdolžne in prečne normalne napetosti v aluminijastem valju ter normalne vzdolžne in normalne tangencialne napetosti v cevi! Pri tem upoštevaj ugotovitve iz zglada 3.11! Lastno težo valja in cevi, trenje med valjem in cevjo ter motnje na priključkih cevi na čelni plošči zanemarimo.

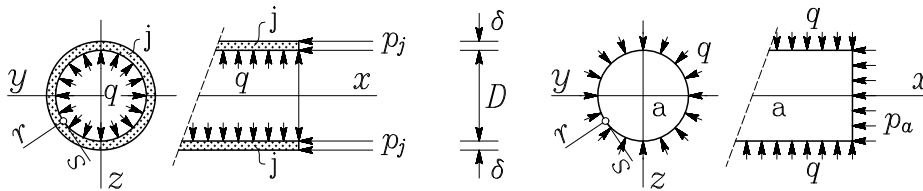
Primer a:

Ker se pri segrevanju aluminijasto jedro in jekleni plašč ne moreta neovirano deformirati, se med njima in nepodajno podlago pojavi interakcijska obtežba. Preprost fizikalni razmislek pove, da je ta obtežba tlačna. Interakcijsko obtežbo med osnovno ploskvijo jeklene cevi in podlago označimo s p_j , interakcijsko obtežbo med osnovno ploskvijo aluminijastega jedra in podlago pa s p_a . Razen tega se zaradi različnih deformabilnostnih lastnosti aluminija in jekla med cevjo in valjem pojavi tudi osnosimetrična interakcijska obtežba q (slika Z-3.13 b).

Napetosti v poljubni točki stične ploskve cevi in valja so:

Jeklena cev :	$\sigma_{xx}^j = -p_j$ $\sigma_{ss}^j = q \frac{D}{2\delta}$ $\sigma_{rr}^j = -q$	Aluminijasti valj :	$\sigma_{xx}^a = -p_a$ $\sigma_{yy}^a = -q$ $\sigma_{zz}^a = -q$
------------------	---	------------------------	--

(a)



Slika Z-3.13 b

V obravnavanem primeru ostane dolžina sestava po spremembi temperature nespremenjena, kar pomeni, da sta vzdolžni deformaciji jeklene cevi ε_{xx}^j in aluminijastega jedra ε_{xx}^a enaki nič.

$$\varepsilon_{xx}^j = \frac{1}{E_j} [\sigma_{xx}^j - \nu_j (\sigma_{ss}^j + \sigma_{rr}^j)] + \alpha_j \Delta T = 0$$

$$\varepsilon_{xx}^a = \frac{1}{E_a} [\sigma_{xx}^a - \nu_a (\sigma_{yy}^a + \sigma_{zz}^a)] + \alpha_a \Delta T = 0.$$

(b)

Upoštevamo enačbe (a) in po ureditvi dobimo

$$p_j + q\nu_j \left(\frac{D}{2\delta} - 1 \right) = E_j \alpha_j \Delta T \quad (c)$$

$$p_a - 2q\nu_a = E_a \alpha_a \Delta T.$$

Po vstavitvi podatkov sledi

$$p_j = 10.5600 - 8.7000 q \quad (\check{c})$$

$$p_a = 6.5884 + 0.6800 q.$$

V zgledu 3.11 smo pokazali, da je specifična sprememba dolžine notranje konture cevi enaka specifični spremembi dolžine notranjega premera cevi. Če upoštevamo, da je $D = 2r$ in $D' = 2r'$, dobimo

$$\varepsilon_{ss}^j = \frac{D'}{D} - 1. \quad (d)$$

V našem primeru predstavlja desna stran gornje enačbe specifično spremembo dolžine premera aluminijastega valja. Ker gre za osnosimetričen primer, je ta deformacija enaka v vseh smereh v ravnini (y, z) , na primer

$$\varepsilon_{yy}^a = \varepsilon_{zz}^a = \frac{D'}{D} - 1. \quad (e)$$

Zahtevo, da se cev in valj tudi po deformaciji med seboj tesno prilegata, torej izrazimo z enačbo

$$\varepsilon_{ss}^j = \varepsilon_{yy}^a. \quad (f)$$

V obravnavanem primeru sta deformaciji ε_{ss}^j in ε_{yy}^a določeni z enačbama

$$\varepsilon_{ss}^j = \frac{1}{E_j} [\sigma_{ss}^j - \nu_j (\sigma_{xx}^j + \sigma_{rr}^j)] + \alpha_j \Delta T$$

$$\varepsilon_{yy}^a = \frac{1}{E_a} [\sigma_{yy}^a - \nu_a (\sigma_{xx}^a + \sigma_{zz}^a)] + \alpha_a \Delta T. \quad (g)$$

Enačbi izenačimo, upoštevamo zveze (a) in po ureditvi dobimo

$$q \left[E_a \left(\frac{D}{2\delta} + \nu_j \right) + E_j (1 - \nu_a) \right] + E_a \nu_j p_j - E_j \nu_a p_a = (\alpha_a - \alpha_j) E_j E_a \Delta T. \quad (h)$$

Ko vstavimo konkretne podatke, sledi

$$226\,620 q + 2\,100 p_j - 7\,480 p_a = 71\,024.8. \quad (i)$$

Ob upoštevanju enačb (č) lahko iz enačbe (i) izračunamo interakcijsko obtežbo q

$$q = 0.4598 \text{ kN/cm}^2. \quad (j)$$

Iz enačb (č) tako sledi

$$p_j = 6.5601 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{in} \quad p_a = 6.9010 \text{ kN/cm}^2. \quad (k)$$

Napetosti v cevi in valju so sedaj

$$\begin{aligned} \text{Jeklena cev :} \quad & \sigma_{xx}^j = -6.5601 \text{ kN/cm}^2 \\ & \sigma_{ss}^j = 13.7929 \text{ kN/cm}^2 \\ & \sigma_{rr}^j = -0.4600 \text{ kN/cm}^2 \\ \\ \text{Aluminijasti valj :} \quad & \sigma_{xx}^a = -6.9010 \text{ kN/cm}^2 \\ & \sigma_{yy}^a = -0.4600 \text{ kN/cm}^2 \\ & \sigma_{zz}^a = -0.4600 \text{ kN/cm}^2. \end{aligned} \quad (l)$$

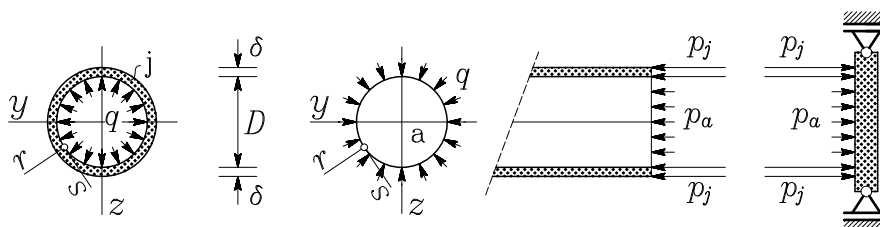
Določimo še skupno silo R , s katero sestav deluje na nepodajno podlago. Ta sila je enaka rezultanti interakcijskih obtežb p_j in p_a na osnovnih ploskvah cevi in valja

$$\begin{aligned} R &= p_j \frac{\pi}{4} \left[(D + 2\delta)^2 - D^2 \right] + p_a \frac{\pi D^2}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \left[4p_j \delta (D + \delta) + p_a D^2 \right] \end{aligned} \quad (m)$$

$$R = 207.6928 \text{ kN}.$$

Primer b.

Tudi v tem primeru se med osnovnima ploskvama cevi in valja ter priključnima ploščama pojavita interakcijski obtežbi p_j in p_a , med cevjo in valjem pa osnosimetrična interakcijska obtežba q . Vendar tokrat desna plošča ni nepodajno pritrjena na podlago, zato mora biti rezultanta R interakcijskih obtežb p_j in p_a , s katerima sestav deluje na priključno ploščo, enaka nič (slika Z-3.13 c).



Slika Z-3.13 c

Upoštevajoč enačbo (m) lahko tedaj poiščemo zvezo med obtežbama p_j in p_a

$$R = \frac{\pi}{4} [4p_j\delta(D + \delta) + p_a D^2] = 0 \quad (n)$$

$$p_j = -\frac{D^2}{4\delta(D + \delta)} p_a$$

Zaradi preprostejših zapisov vpeljemo označbo

$$\psi = \frac{D^2}{4\delta(D + \delta)} = 14.7541 \quad (o)$$

in zapišemo

$$p_j = -\psi p_a. \quad (p)$$

Ker sta priključni plošči absolutno togi, mora biti vzdolžna deformacija jeklene cevi ε_{xx}^j enaka vzdolžni deformaciji aluminijastega jedra ε_{xx}^a

$$\varepsilon_{xx}^j = \varepsilon_{xx}^a. \quad (q)$$

Ob upoštevanju enačb (b) ter zvez (a) in (p) lahko pogoj (q) zapišemo v naslednji obliki

$$p_a (E_j + \psi E_a) - q \left[2E_j \nu_a + E_a \nu_j \left(\frac{D}{2\delta} - 1 \right) \right] = \quad (r)$$

$$(\alpha_a - \alpha_j) E_j E_a \Delta T .$$

Seveda mora biti tudi v tem primeru izpolnjen pogoj (f), ki ga ob upoštevanju enačb (g) ter zvez (a) in (p) zapišemo takole

$$-p_a (E_j \nu_a + \psi E_a \nu_j) + q \left[E_j (1 - \nu_a) + E_a \left(\frac{D}{2\delta} + \nu_j \right) \right] = \quad (s)$$

$$(\alpha_a - \alpha_j) E_j E_a \Delta T .$$

V dobljeni enačbi (r) in (s) vstavimo podatke naloge in po ureditvi dobimo

$$p_a - 0.6055 q = 0.5669 \quad (š)$$

$$-p_a + 5.8918 q = 1.8465 .$$

Rešitvi dobljenega sistema enačb sta

$$p_a = 0.8434 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{in} \quad q = 0.4566 \text{ kN/cm}^2, \quad (t)$$

iz enačbe (p) pa sledi še

$$p_j = -12.4435 \text{ kN/cm}^2 . \quad (u)$$

Upoštevajoč enačbe (a) lahko določimo napetosti za primer b.

Jeklena cev :	$\sigma_{xx}^j = 12.4435 \text{ kN/cm}^2$
	$\sigma_{ss}^j = 13.6967 \text{ kN/cm}^2$
	$\sigma_{rr}^j = -0.4566 \text{ kN/cm}^2$
Aluminijasti valj :	$\sigma_{xx}^a = -0.8434 \text{ kN/cm}^2$
	$\sigma_{yy}^a = -0.4566 \text{ kN/cm}^2$
	$\sigma_{zz}^a = -0.4566 \text{ kN/cm}^2 .$

Zgled 3.14

Zapiši Misesov pogoj za začetek plastičnega tečenja za prikazani primer napetostnega stanja!

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ob upoštevanju enačb (3.168) in (3.170) izrazimo Misesov pogoj plastičnega tečenja z drugo invarianto deviatoričnega dela tenzorja napetosti

$$|I_2^D| = \frac{1}{3} \sigma_Y^2. \quad (a)$$

V obravnavanem primeru je

$$I_1^\sigma = \sigma_{xx} \quad \text{in} \quad \sigma^H = \frac{\sigma_{xx}}{3}. \quad (b)$$

Matrika deviatoričnih napetosti je torej

$$[\sigma_{ij}^D] = [\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma^H] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma_{xx} & 0 & 3\sigma_{xz} \\ 0 & -\sigma_{xx} & 0 \\ 3\sigma_{xz} & 0 & -\sigma_{xx} \end{bmatrix}, \quad (c)$$

njena druga invarianta pa je

$$I_2^D = \frac{1}{9} \left(\begin{vmatrix} -\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & -\sigma_{xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\sigma_{xx} & 3\sigma_{xz} \\ 3\sigma_{xz} & -\sigma_{xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & -\sigma_{xx} \end{vmatrix} \right)$$

$$I_2^D = - \left(\frac{\sigma_{xx}^2}{3} + \sigma_{xz}^2 \right). \quad (č)$$

Misesov pogoj plastičnega tečenja (a) je tako

$$\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xz}^2 = \sigma_Y^2. \quad (d)$$

Po korenjenju lahko pogoj tečenja izrazimo s primerjalno napetostjo σ_e^M

$$\sigma_e^M = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xz}^2} = \sigma_Y. \quad (e)$$

Zgled 3.15

Napetostno stanje delca \mathcal{D} je opisano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na koordinatni sistem (x, y, z) .

- Dokaži, da je ravnina Π_ζ , katere normala \mathbf{e}_ζ oklepa enake kote z osmi x, y, z , ena od glavnih ravnin podanega napetostnega stanja! Določi preostali dve glavni ravnini in vse glavne normalne napetosti!
- Obravnavano telo je narejeno iz bilinearnega elastično-plastičnega materiala. Pri enoosnem napetostnem stanju je prehod iz elastičnega v plastično stanje določen z mejo plastičnega tečenja σ_Y . Upoštevajoč Misesov pogoj tečenja določi napetost q_Y , pri kateri pri podanem prostorskem napetostnem stanju delca \mathcal{D} nastopijo prve plastične deformacije! Napetost q_Y izrazi v odvisnosti od vrednosti σ_Y !

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} q & 2q & 2q \\ 2q & q & 2q \\ 2q & 2q & q \end{bmatrix}$$

-
- Ker smer \mathbf{e}_ζ oklepa enake kote s smermi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, velja

$$e_{\zeta x} = e_{\zeta y} = e_{\zeta z}$$

in iz pogoja, da mora biti \mathbf{e}_ζ enotski vektor, sledi

$$e_{\zeta x}^2 + e_{\zeta y}^2 + e_{\zeta z}^2 = 1$$

$$3e_{\zeta x}^2 = 1 \quad \rightarrow \quad e_{\zeta x} = e_{\zeta y} = e_{\zeta z} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Privzamemo kar pozitivne predznake smernih kosinusov in dobimo

$$\mathbf{e}_\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) .$$

Komponente napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_\zeta$, ki pripada ravnini Π_ζ z normalo \mathbf{e}_ζ , določimo upoštevajoč enačbo (1.150)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\zeta x} \\ \sigma_{\zeta y} \\ \sigma_{\zeta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 2q & 2q \\ 2q & q & 2q \\ 2q & 2q & q \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{5q}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ,$$

tako da je

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta = \frac{5q}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \quad \text{ozroma} \quad \boldsymbol{\sigma}_\zeta = 5q \mathbf{e}_\zeta .$$

Kakor vidimo, ima napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_\zeta$ le normalno komponento

$$\sigma_{\zeta\zeta} = 5q, \quad \sigma_{\zeta\xi} = \sigma_{\zeta\eta} = 0 .$$

S tem je dokaz končan.

Napetost $\sigma_{\zeta\zeta}$ je torej že kar ena od glavnih normalnih napetosti, smer \mathbf{e}_ζ pa pripadajoča glavna smer. Označimo jo na primer z \mathbf{e}_3

$$\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_3 \quad \rightarrow \quad \sigma_{\zeta\zeta} = \sigma_{33} = 5q .$$

Da bi določili še preostali dve glavni normalni napetosti, moramo rešiti karakteristično enačbo podanega napetostnega stanja. Invariante tenzorja napetosti so

$$I_1^\sigma = 3q, \quad I_2^\sigma = -9q^2, \quad I_3^\sigma = 5q^3 .$$

Karakteristična enačba je tako

$$\sigma^3 - 3q\sigma^2 - 9q^2\sigma - 5q^3 = 0.$$

Ker je $\sigma_{33} = 5q$ eden od korenov te enačbe, lahko brez ostanka izpeljemo deljenje

$$(\sigma^3 - 3q\sigma^2 - 9q^2\sigma - 5q^3) : (\sigma - 5q) = \sigma^2 + 2q\sigma + q^2.$$

Iz zahteve

$$\sigma^2 + 2q\sigma + q^2 = (\sigma + q)^2 = 0$$

sledita preostali dve glavni normalni napetosti

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -q.$$

Očitno gre za osnosimetrično napetostno stanje v ravnini, ki je pravokotna na smer \mathbf{e}_ζ . Glavna vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 sta torej poljubna medsebojno pravokotna vektorja v ravnini Π_ζ .

b. V obravnavanem primeru je najugodnejše, če Misesov pogoj plastičnega tečenja zapišemo v obliki (3.171)

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 = 2\sigma_Y^2.$$

Če v pogoj plastičnosti vstavimo dobljene vrednosti glavnih normalnih napetosti, sledi

$$(-q + q)^2 + (-q - 5q)^2 + (5q + q)^2 = 2\sigma_Y^2.$$

Vrednost napetosti q , pri kateri je izpolnjen pogoj plastičnosti, označimo s q_Y in dobimo

$$q_Y = \frac{\sigma_Y}{6}.$$

**OSNOVNE ENAČBE TRDNEGA TELESA.
ROBNI PROBLEM**

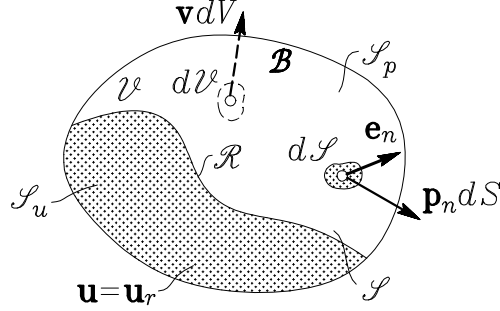
4.1 Osnovne enačbe trdnega telesa

V prvih treh poglavjih smo izpeljali tri skupine osnovnih enačb, ki določajo mehansko stanje trdnega telesa pri statični zunanji obtežbi. Prvo skupino sestavljajo ravnotežne enačbe, ki povezujejo specifično površinsko obtežbo \mathbf{p}_n in specifično prostorninsko obtežbo \mathbf{v} obravnavanega telesa z napetostmi σ_{ij} . V kartezijskem koordinatnem sistemu z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ morajo biti znotraj območja \mathcal{V} izpolnjeni pogoji

$$\mathcal{V} : \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + v_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + v_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + v_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pri tem smo z upoštevanjem simetrije strižnih napetosti ($\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$, $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$) izpolnili tudi momentni ravnotežni pogoj. Dobili smo torej tri parcialne diferencialne enačbe za šest neodvisnih skalarnih funkcij napetosti. Posebno rešitev teh enačb dobimo z upoštevanjem robnih pogojev, ki zahtevajo, da je v ravnotežju tudi vsak delec na mejni ploskvi telesa. V razdelku **1.3** smo s specifično zunanjo površinsko obtežbo \mathbf{p}_n zajeli celotno obtežbo, ki prek mejne ploskve \mathcal{S} deluje na telo. Omenili smo, da je aktivni del te obtežbe predpisan, pasivni del pa deluje na telo na podprtih delih mejne ploskve. Da

bi lahko natančneje opredelili robne pogoje, v nadaljevanju simbolično razdelimo mejno ploskev \mathcal{S} na dva dela (slika 4.1)



Slika 4.1

Z \mathcal{S}_p označimo tisti del zunanje mejne ploskve, na katerem je predpisana aktivna zunanja obtežba \mathbf{p}_n , z \mathcal{S}_u pa tisti del, na katerem so zaradi podpiranja ali na kak drugačen način predpisani pomiki \mathbf{u} in zasuki $\boldsymbol{\omega}$. Oba dela sta z robom \mathcal{R} povezana v ploskev \mathcal{S}

$$\mathcal{S}_p \cup \mathcal{S}_u = \mathcal{S} \quad \mathcal{S}_p \cap \mathcal{S}_u = \mathcal{R}.$$

Na delu \mathcal{S}_p morajo biti torej izpolnjeni pogoji

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p : \quad p_{nx} &= \sigma_{xx}e_{nx} + \sigma_{xy}e_{ny} + \sigma_{zx}e_{nz} \\ p_{ny} &= \sigma_{xy}e_{nx} + \sigma_{yy}e_{ny} + \sigma_{yz}e_{nz} \\ p_{nz} &= \sigma_{zx}e_{nx} + \sigma_{yz}e_{ny} + \sigma_{zz}e_{nz} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Na kratko lahko ravnotežne enačbe (4.1) in pripadajoče robne pogoje (4.2) zapišemo z vsotama

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad \sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + v_j &= 0 \\ \mathcal{S}_p : \quad p_{nj} &= \sum_i \sigma_{ij} e_{ni} \end{aligned} \quad (i, j = x, y, z). \quad (4.3)$$

Drugo skupino sestavljajo kinematične enačbe, ki povezujejo komponente simetričnega tenzorja majhnih deformacij s pomiki

$$\mathcal{V} : \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Gre torej za šest parcialnih diferencialnih enačb, v katerih nastopa devet neznanih skalarnih funkcij: šest deformacij in trije pomiki. Na kratko jih zapišemo z enačbo

$$\mathcal{V} : \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = x, y, z). \quad (4.5)$$

Razen enačb (4.4) so s kinematiko materialnega delca povezane še tri “pomožne kinematične enačbe”, ki določajo povprečne zasuke okrog koordinatnih osi s prvimi parcialnimi odvodi pomikov

$$\begin{aligned} \omega_{xy} \equiv \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\omega_{yx} \\ \omega_{yz} \equiv \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\omega_{zy} \\ \omega_{zx} \equiv \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -\omega_{xz}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

O pomožnih kinematičnih enačbah govorimo zato, ker jih, kakor bomo pokazali v nadaljevanju, praviloma lahko rešujemo ločeno od tako imenovanega sistema osnovnih mehanskih enačb. V tem sistemu pa nujno

nastopajo enačbe (4.4), ki jih rešujemo ob predpisanih kinematičnih robnih pogojih. Ti povedo, kako je obravnavano telo podprto, kakšni so torej pomiki in zasuki na delu mejne ploskve \mathcal{S}_u

$$\mathcal{S}_u : \quad \begin{aligned} u_i &= u_i^r \\ (\omega_i &= \omega_i^r) \end{aligned} \quad (i = x, y, z). \quad (4.7)$$

Glede na povedano smo kinematične robne pogoje, ki predpisujejo zasukе, zapisali v oklepaju, saj jih ob upoštevanju zvez (4.6) lahko izrazimo s pomiki.

Če poznamo pomike kot funkcije koordinat, lahko iz enačb (4.4) brez težav izračunamo deformacije. V nasprotnem primeru, če poznamo deformacije in želimo iz enačb (4.4) izračunati pomike, morajo deformacije zadoščati dodatnim šestim kompatibilnostnim pogojem, ki zagotavljajo enolično določljivost treh pomikov iz šestih kinematičnih enačb. Za enkrat sovisna območja so potrebni in zadostni pogoji za enoličnost pomikov izraženi z enačbami

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial yz} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial zx} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial xy} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sovisnosti med napetostmi in deformacijami opisuje tretja skupina osnovnih enačb, ki jih imenujemo konstitucijske ali materialne enačbe.

Če se omejimo na obravnavanje linearno elastičnih teles, so zveze med napetostmi in deformacijami določene z Neumann-Duhamelovimi enačbami

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda I_1^\varepsilon - \beta_T \Delta T \\
 \sigma_{yy} &= 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda I_1^\varepsilon - \beta_T \Delta T \\
 \sigma_{zz} &= 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda I_1^\varepsilon - \beta_T \Delta T \\
 \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= 2\mu\varepsilon_{yz} \\
 \sigma_{zx} &= 2\mu\varepsilon_{zx} .
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Gre za šest linearnih algebrajskih enačb, ki jih lahko zapišemo tudi v inverzni obliki

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}I_1^\sigma + \alpha_T \Delta T \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{zx} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zx} .
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Zapišimo enačbe (4.9) in (4.10) še v zgoščeni obliki

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}I_1^\varepsilon - \beta_T\delta_{ij}\Delta T \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}I_1^\sigma + \delta_{ij}\alpha_T\Delta T .
 \end{aligned} \quad (i, j = x, y, z) \tag{4.11}$$

Enačbe (4.1), (4.4) in (4.9) s pripadajočimi robnimi pogoji sestavljajo sistem petnajstih enačb za petnajst neznanih funkcij (šest napetosti, šest deformacij in trije pomiki), ki v statičnem primeru določajo mehansko stanje telesa. Če nam uspe kot del rešitve tega sistema določiti pomike u_i , lahko z enačbami (4.6) brez težav izračunamo tudi zasuke

ω_{ij} . Zato smo enačbe (4.6) upravičeno obravnavali kot pomožne kinematične enačbe.

Seveda pa smo z navedenimi enačbami opisali le najpreprostejši splošni primer izotropnega, linearno elastičnega trdnega telesa pri statični obtežbi. Pri izpeljavi ravnotežnih enačb smo namreč vzeli, da so pomiki in zasuki obravnavanega telesa tako majhni, da lahko ravnotežne pogoje izrazimo kar glede na začetno, nedeformirano stanje telesa. V kinematičnih enačbah smo dodatno omejili še velikosti parcialnih odvodov pomikov, specifičnih sprememb dolžin in sprememb pravih kotov. To nam je omogočilo, da smo specifične spremembe dolžin in spremembe pravih kotov izrazili kar s komponentami simetričnega tenzorja majhnih deformacij, ki so linearne glede na parcialne odvode pomikov. Navedene ravnotežne in kinematične enačbe predstavljajo tako imenovano *teorijo prvega reda*, ki skupaj s konstitucijskimi enačbami linearno elastične snovi omogoča razmeroma preprosto analizo obsežnega razreda mehan-skih problemov.

Za obravnavanje bolj zapletenih nalog, pri katerih navedene predpostavke o geometrijskih spremembah niso izpolnjene, je treba vpeljati bolj stroge pogoje. Kot najstrožjo možnost omenimo tako imenovano *teorijo tretjega reda*, pri kateri zapišemo ravnotežne pogoje za deformirano stanje telesa, specifične spremembe dolžin, spremembe pravih kotov in spremembe elementarnih ploščin pa izrazimo s komponentami tenzorja velikih deformacij. Tak pristop praviloma vodi k sistemu nelinearnih ravnotežnih in kinematičnih enačb. Med obema omenjenima skrajnima teorijama so v rabi številne različice *teorije drugega reda*, ki jih dobimo z vpeljavo različnih poenostavitev v teorijo tretjega reda.

Ne glede na to, kako natančno navedene enačbe opisujejo geometrijske in obtežne razmere obravnavanega problema, v splošnem veljajo za poljuben material, ki ustreza konceptu zvezne snovi. Seveda pa pri velikih deformacijah napetosti le redko ostanejo v elastičnem območju, kar pomeni, da moramo upoštevati tudi neelastično obnašanje obravnavanega telesa.

Vrnimo se k našemu najpreprostejšemu primeru, pri katerem enačbe (4.1), (4.4) ter (4.9) oziroma (4.10) sestavljajo tako imenovani *sistem osnovnih enačb linearno elastičnega telesa* in jih zato imenujemo tudi *osnovne enačbe teorije elastičnosti*. Kljub temu, da ta sistem enačb opisuje poenostavljen primer, je njegovo reševanje še vedno zelo zahtevna matematična naloga. Razen šestih linearnih algebrajskih konstitucijskih enačb nastopa v nalogi še devet linearnih parcialnih diferencialnih enačb 1. reda, ki jih moramo reševati ob predpisanih robnih pogojih (4.2) in (4.7). V matematiki tako nalogo imenujemo *robni problem*. Analitično rešitev našega robnega problema lahko pričakujemo le v najpreprostejših primerih obtežbe, geometrije in načina podpiranja obravnavanega telesa. V večini drugih, bolj splošnih primerov se zatekamo k numeričnim postopkom, pri katerih zadostimo osnovnim enačbam le v končni množici preišljeno izbranih diskretnih točk obravnavanega telesa. V vsakem primeru pa je ugodno, če z vnaprejšnjo izločitvijo nekaterih izmed neznank problema zmanjšamo red sistema osnovnih enačb. V ta namen sta v rabi dve pomembni metodi: *metoda pomikov* in *metoda napetosti*. Pri metodi pomikov izločimo iz sistema osnovnih enačb vse neznanke razen pomikov, pri metodi napetosti pa celoten sistem izrazimo le z napetostmi. Znane pa so tudi različne *mešane metode*, pri katerih kot osnovne neznanke nastopajo nekateri pomiki in nekatere napetosti, ostale pa s primernim postopkom izločimo.

4.2 Metoda pomikov. Navier[†]-Laméjeve enačbe

Osnovna ideja metode pomikov je v tem, da skušamo tri ravnotežne enačbe izraziti s tremi komponentami vektorja pomikov. V prvem koraku povežemo prvo od enačb (4.11) z enačbo (4.5) in tako izrazimo napetosti s pomiki

[†] Claude Louis Navier, francoski inženir, 1785-1836.

$$\mathcal{V} : \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_T \delta_{ij} \Delta T. \quad (4.12)$$

Pri tem smo upoštevali zvezo med prvo invarianto tenzorja majhnih deformacij in pomiki

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (4.13)$$

Enačbo (4.12) vstavimo v ravnotežni pogoj (4.3) in dobimo

$$\sum_i \left[\mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \right) + \lambda \sum_k \delta_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} - \beta_T \delta_{ij} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_i} \right] + v_j = 0. \quad (4.14)$$

Prvi člen dobljene vsote lahko izrazimo z Laplaceovim diferencialnim operatorjem[†] $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2$

$$\sum_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} = \Delta u_j = \nabla^2 u_j. \quad (4.15)$$

Upoštevajoč lastnosti Kroneckerjevega tenzorja δ_{ij} in zamenljivost sumacijskih indeksov lahko še pišemo

$$\sum_i \sum_k \delta_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} = \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.16)$$

in

$$\sum_i \delta_{ij} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_i} = \frac{\partial \Delta T}{\partial x_j}. \quad (4.17)$$

[†] Glej n. pr. Bronštejn–Semendjajev, Matematični priročnik, str. 363.

Pri tem smo vzeli, da je temperaturna sprememba ΔT funkcija koordinat obravnavanega delca

$$\Delta T = \Delta T(x, y, z) = \Delta T(x_j). \quad (4.18)$$

Ravnotežni pogoj (4.14) lahko sedaj zapišemo takole

$$\mathcal{V} : \quad \mu \nabla^2 u_j + (\mu + \lambda) \sum_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + v_j - \beta_T \frac{\partial \Delta T}{\partial x_j} = 0. \quad (4.19)$$

To so znane *Navier–Laméjeve enačbe* (pogosto jim rečemo kar *Laméjeve enačbe*), ki predstavljajo ravnotežne pogoje, izražene s pomiki. Kot vidimo, smo sistem petnajstih osnovnih enačb trdnega telesa skrčili na sistem treh linearnih parcialnih diferencialnih enačb 2. reda, v katerih kot neznanke nastopajo tri komponente vektorja pomikov. V razviti obliki dobimo za območje \mathcal{V}

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_x + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + v_x - \beta_T \frac{\partial \Delta T}{\partial x} &= 0 \\ \mu \nabla^2 u_y + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + v_y - \beta_T \frac{\partial \Delta T}{\partial y} &= 0 \\ \mu \nabla^2 u_z + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + v_z - \beta_T \frac{\partial \Delta T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Laméjeve enačbe rešujemo ob upoštevanju statičnih robnih pogojev, ki jih moramo prav tako izraziti s pomiki. Če v drugo od enačb (4.3) vstavimo izraz (4.12) in upoštevamo lastnosti Kroneckerjevega tenzorja δ_{ij} , dobimo za del mejne ploskve \mathcal{S}_p naslednje pogoje

$$p_{nj} = \mu \sum_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) e_{ni} + \left(\lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_T \Delta T \right) e_{nj} \quad (4.21)$$

oziroma v razviti obliki

$$\begin{aligned}
 p_{nx} &= \left[2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \beta_T \Delta T \right] e_{nx} + \\
 &\quad \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) e_{ny} + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) e_{nz} \\
 p_{ny} &= \left[2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \beta_T \Delta T \right] e_{ny} + \\
 &\quad \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) e_{nz} + \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) e_{nx} \\
 p_{nz} &= \left[2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \beta_T \Delta T \right] e_{nz} + \\
 &\quad \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) e_{nx} + \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) e_{ny}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Vse navedene enačbe bi seveda lahko izpeljali tudi z neposrednim upoštevanjem posameznih zvez (4.4) v enačbah (4.9) in z vstavljanjem dobljenih izrazov v enačbe (4.1) oziroma (4.2). To nalogo prepuščamo bralcu.

Če se nam posreči iz Laméjevih enačb ob upoštevanju robnih pogojev določiti rešitve $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$, je nadaljnji postopek čisto preprost. Najprej izračunamo parcialne odvode pomikov in iz kinematičnih enačb (4.4) in (4.6) določimo deformacije $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ in zasuke $\omega_{ij}(x, y, z)$. Deformacije vstavimo v konstitucijske enačbe (4.9), dobimo napetosti $\sigma_{ij}(x, y, z)$ in naloga je končana.

Žal se problem ponavadi zaplete pri izpolnjevanju robnih pogojev, v katerih razen zunanje obtežbe nastopajo tudi parcialni odvodi pomikov. Zato je metoda pomikov prikladna predvsem v primerih dovolj preprostih geometrijskih oblik telesa in enostavnih obtežnih razmer.

4.3 Metoda napetosti. Beltrami–Michellove enačbe

V primeru, da želimo sistem osnovnih enačb trdnega telesa izraziti z napetostmi, naletimo na problem enolične določitve pomikov iz kinematičnih enačb. Če namreč s konstitucijske enačbami (4.10) povežemo napetosti z deformacijami in jih vstavimo v ravnotežne enačbe (4.1), dobimo tri enačbe za šest neznanih deformacij. Vzemimo, da nam uspe najti še tri dodatne enačbe, tako da lahko izračunamo šest deformacij, ki nastopajo v kinematičnih enačbah (4.4). Za določitev treh pomikov bi torej dobili šest enačb, kar pomeni, da deformacije ne morejo biti docela neodvisne med seboj. Povezavo med njimi določajo kompatibilnostni pogoji. Tri manjkajoče enačbe za določitev deformacij moramo torej preiščeno izbrati izmed šestih kompatibilnostnih pogojev. Pri tem je možno dokazati, da so v primeru, da izpolnimo primerno trojico izmed kompatibilnostnih pogojev (4.8), identično izpolnjeni tudi preostali trije. Dokaz presega okvir tega učbenika; navedimo le, da moramo izmed komponent tenzorja kompatibilnosti

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

izenačiti z nič tri take komponente, ki nimajo skupnega indeksa. Med možnimi dvajsetimi izbirami trojic kompatibilnostnih pogojev je sedemnajst takih, da so ob izpolnjenih treh kompatibilnostnih enačbah identično zadoščene tudi preostale tri. Izjemo predstavljajo trije primeri, pri katerih imajo vse tri izbrane komponente tenzorja kompatibilnosti en indeks enak

1. primer : $K_{xx} = K_{xy} = K_{zx} = 0$
2. primer : $K_{xy} = K_{yy} = K_{yz} = 0$
3. primer : $K_{zx} = K_{yz} = K_{zz} = 0$.

To medsebojno odvisnost kompatibilnostnih enačb si lahko razložimo

z dejstvom, da morajo komponente tenzorja kompatibilnosti ustrezati pogojem (2.218)*.

Pri metodi napetosti gre torej za določitev šestih funkcij napetosti iz sistema šestih enačb, ki ga sestavimo iz treh ravnotežnih in primernih treh kompatibilnostnih pogojev. Pri tem moramo kompatibilnostne pogoje prav tako izraziti z napetostmi. Z napetostmi izraženi kompatibilnostni pogoji so znani kot *Beltrami†–Michellove‡ enačbe*. V splošnem prostorskem primeru imajo Beltrami–Michellove enačbe predvsem študijski in zgodovinski pomen, kot praktično zelo uporabne pa se izkažejo pri obravnavanju ravninskih problemov.

Vzemimo kar izotermni primer ($\Delta T = 0$) in izrazimo kompatibilnostne pogoje v obliki (2.227), torej z zahtevo, da morajo biti vse komponente Riemannovega kompatibilnostnega tenzorja enake nič. Ob upoštevanju enačbe (2.225) dobimo

$$R_{ijkl} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = 0, \\ (i, j, k, l = x, y, z) \quad (4.24)$$

Nastopajoče deformacije povežemo z napetostmi s konstitucijskimi enačbami (4.11). Po krajšanju z E in ureditvi dobimo

$$\frac{1 + \nu}{\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \sigma_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} \right) - \\ \left(\delta_{jk} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_i \partial x_l} + \delta_{il} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k} - \delta_{jl} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_l} \right) = 0, \quad (4.25)$$

* Glej n. pr. knjigo: Saje, Srpčič, *Osnove nelinearne mehanike trdnih teles*, Ljubljana, 1993.

† Eugenio Beltrami, italijanski matematik, 1835–1900

‡ Henry Michell, avstralski matematik, 1863–1940.

kjer je I_1^σ prva komponenta tenzorja napetosti

$$I_1^\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sum_i \sigma_{ii}. \quad (4.26)$$

Kot smo povedali že v razdelku **2.9**, je med 81 enačbami (4.25) le šest medsebojno neodvisnih. Dobimo jih na primer tako, da indeks l spremenimo v i in dobljene enačbe seštejemo po i

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{\nu} \sum_i \left(\frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{ji}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_i} \right) - \\ \sum_i \left(\delta_{jk} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_i \partial x_i} + \delta_{ii} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k} - \delta_{ji} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

O tem se z nekoliko potrpežljivosti prepričamo tako, da opisano operacijo naredimo že v enačbi (4.24) in s skalarnim zapisom dobljenega izraza dobimo ravno šest neodvisnih kompatibilnostnih pogojev (4.8).

Prvi in peti člen enačbe (4.27) lahko zapišemo z Laplaceovim diferencialnim operatorjem ∇^2

$$\sum_i \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial z^2} = \nabla^2 \sigma_{jk} \quad (4.28)$$

$$\sum_i \delta_{jk} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_i \partial x_i} = \delta_{jk} \nabla^2 I_1^\sigma. \quad (4.29)$$

Ob upoštevanju lastnosti Kroneckerjevega tenzorja velja tudi

$$\sum_i \delta_{ii} = \delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz} = 3 \quad (4.30)$$

$$\sum_i \delta_{ji} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k} \quad (4.31)$$

$$\sum_i \delta_{ik} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (4.32)$$

Zaradi enačbe (4.26) je še

$$\sum_i \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (4.33)$$

Enačba (4.27) se s tem glasi

$$\nabla^2 \sigma_{jk} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{jk} \nabla^2 I_1^\sigma - \sum_i \frac{\partial^2 \sigma_{ji}}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_i \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_i} = 0. \quad (4.34)$$

Dobljeno enačbo lahko poenostavimo, če četrti in peti člen ob upoštevanju ravnotežnih pogojev (4.3) izrazimo z zunanjo obtežbo. Zaradi simetrije napetosti lahko ravnotežno enačbo (4.3) zapišemo takole

$$\sum_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} = -v_j. \quad (4.35)$$

Enačbo parcialno odvajamo po x_k in dobimo

$$\sum_i \frac{\partial^2 \sigma_{ji}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \quad (4.36)$$

in podobno

$$\sum_i \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_i} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad (4.37)$$

kjer smo upoštevali, da vrstni red odvajanja zaradi zvezne odvedljivosti napetosti ni pomemben. Enačba (4.34) preide s tem v naslednjo obliko

$$\nabla^2 \sigma_{jk} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{jk} \nabla^2 I_1^\sigma = -\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (j, k = x, y, z). \quad (4.38)$$

Dobljena enačba ima dva prosta indeksa, torej predstavlja devet skalarnih enačb. Vendar je med njimi zaradi simetrije glede na indeksa j in k le šest medsebojno neodvisnih. Na tem mestu bi izpeljavo

lahko končali, saj nam je že uspelo kompatibilnostne pogoje izraziti z napetostmi. Vendar se izkaže, da je mogoče enačbo (4.38) še nadalje poenostaviti. V ta namen v enačbi (4.25) izenačimo indekse $i = l$ in $j = k$ ter seštejemo po k in l

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{\nu} \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_l \partial x_l} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{kl}}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{lk}}{\partial x_k \partial x_l} \right) - \\ & \sum_k \sum_l \left(\delta_{kk} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_l \partial x_l} + \delta_{ll} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_k \partial x_k} - \delta_{kl} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_l \partial x_k} - \delta_{lk} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_k \partial x_l} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Z uporabo podobnih zvez kot v dosedanjem izvajanju dobimo

$$\nabla^2 I_1^\sigma = \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \sigma_{kl}}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (4.40)$$

Podobno kot v enačbi (4.36) pa je tudi

$$\sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \sigma_{kl}}{\partial x_k \partial x_l} = - \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = - \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (4.41)$$

in zato

$$\nabla^2 I_1^\sigma = - \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (4.42)$$

Z vstavitvijo dobljene zveze v enačbo (4.40) dobimo končno obliko Beltrami–Michellovih enačb

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{jk} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x_j \partial x_k} = - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{jk} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ (i, j, k = x, y, z). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Opazimo lahko, da v posebnem, vendar v praksi zelo pogostem primeru homogene specifične prostorninske obtežbe \mathbf{v} , ko ta torej ni funkcija koordinat x_i , postanejo Beltrami–Michellove enačbe homogene parcialne

diferencialne enačbe, kar občutno olajša njihovo reševanje. Zapišimo te enačbe še v skalarni obliki

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= \\
 - 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= \\
 - 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= \tag{4.44} \\
 - 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
 \nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= - \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \\
 \nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= - \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\
 \nabla^2 \sigma_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= - \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

Za rešitev robnega problema po metodi napetosti moramo torej vzeti tri ravnotežne enačbe (4.1) ter primerne (dopustne) tri od Beltrami–Michellovih enačb (4.44), na primer kar prve tri. Ta sistem šestih parcialnih diferencialnih enačb rešujemo ob upoštevanju robnih pogojev (4.2). Kot rešitev bi načeloma dobili šest napetosti $\sigma_{ij}(x, y, z)$. Z vstavitvijo v sistem šestih linearnih algebrskih konstitucijskih enačb (4.10) bi brez težav določili šest deformacij $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$. Pomike $u_i(x, y, z)$ in zasuke $\omega_{ij}(x, y, z)$ bi sedaj določili z enačbami (2.192) in (2.193). Pri tem bi zagotovo dobili enolične rešitve, saj so izpolnjeni kompatibilnostni pogoji.