

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Stane Srpčič

Trdnost II



STANE SRPČIČ

TRDNOST II

*V spomin na spoštovanega učitelja in dragega prijatelja
Dragoša Jurišića*

Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*



STANE SRPČIČ
TRDNOST II

LJUBLJANA
2023

TRDNOST II

Univerzitetni učbenik

Avtor: *Stane Srpčič*

Recenzenta: *Igor Planinc, Boris Štok*

Jezikovni pregled: *Milvana Berce*

Oblikovanje in prelom: *Stane Srpčič*

Naslovnica: *Jure Srpčič*

Založnik: *Založba Univerze v Ljubljani (University of Ljubljana Press)*

Za založbo: *Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani*

Izdajatelj: *Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani*

Za izdajatelja: *Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za
gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani*

Ljubljana, 2023

Prva e-izdaja.

Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na: <https://ebooks.uni-lj.si>

DOI: 10.15292/9789612971670

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 164195587

ISBN 978-961-297-167-0 (PDF)



To delo je ponujeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna licenca./ This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 International License.

VSEBINA

5. RAVEN LINIJSKI NOSILEC	1
5.1 Splošno o linijskih nosilcih	1
5.2 Ravnotežni pogoji za element ravnega nosilca	3
5.3 Upogib ravnega nosilca z osno silo	11
Kinematične enačbe	13
Konstitucijski zakon	15
Notranje sile	16
Nevtralna os. Jedro prereza	24
Strižne in prečne normalne napetosti	28
Vpliv spremembe temperature na linijski nosilec	39
5.4 Uklon ravnega grednega nosilca	45
Splošno o stabilnostnih problemih	45
Nelinearni model linijskega nosilca	49
Ravnotežni pogoji za element deformiranega nosilca	51
Klasična uklonska enačba	54
Prvi osnovni uklonski primer	66
Drugi osnovni uklonski primer	69
Tretji osnovni uklonski primer	71
Četrty osnovni uklonski primer	72
Eulerjeva uklonska sila, uklonska dolžina, uklonska vitkost	74
5.5 Enakomerna torzija ravnega nosilca	77
Konstitucijske enačbe	78
Ravnotežne enačbe	78
Kinematične enačbe	79
Metoda pomikov	83
Metoda napetosti pri enakomerni torziji	84

Enakomerna torzija nosilca z votlim eliptičnim prerezom	92
Enakomerna torzija nosilca z ozkim pravokotnim prečnim prerezom	98
Enakomerna torzija nosilca s splošnim pravokotnim prečnim prerezom	101
Odprt prečni prerez, sestavljen iz pravokotnih podprerezov	103
Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim enoceličnim tankostenskim prečnim prerezom	106
Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim večceličnim tankostenskim prečnim prerezom	112
Izbočitvena funkcija	117
Izbočitev odprtih tankostenskih profilov	121
Koordinati torzijskega središča. Referenčna vrednost izbočitvene funkcije	124
5.6 Raven linijski nosilec - Zgledi	133

6. ENERGIJSKE METODE V MEHANIKI

KONSTRUKCIJ	205
6.1 Uvod v energijske metode	205
6.2 Osnove variacijskega računa	206
Osnovni izrek variacijskega računa	207
Ekstremi funkcije ene spremenljivke	209
Osnovni problem variacijskega računa. Minimizacija funkcionala	211
Naravni robni pogoji	216
Funkcionalni z več neodvisnimi funkcijami	217
Funkcionalni z višjimi odvodi	219
Variacije. Operator delta	222
6.3 Energijske metode. Osnovni pojmi	226
Fizikalna definicija mehanskega dela	226
Deformacijsko delo (deformacijska energija)	227

Dopolnilno deformacijsko delo (dopolnilna deformacijska energija)	232
Castiglianov izrek	234
Virtualno delo. Izrek o virtualnih pomikih	235
Dopolnilno virtualno delo. Izrek o virtualnih silah	239
6.4 Deformacijska energija elastičnega telesa	242
6.5 Dopolnilna deformacijska energija elastičnega telesa	247
6.6 Posplošene sile in posplošeni pomiki	249
6.7 Izrek o virtualnih pomikih (izrek o virtualnem delu)	255
6.8 Izrek o virtualnih silah (izrek o dopolnilnem virtualnem delu)	259
6.9 Določanje pomikov in zasukov z izrekom o virtualnih silah	262
6.10 Pomiki in zasuki diskretnih točk linijskega nosilca	264
Prispevki osne sile, upogibnih momentov in prečnih sil	265
Prispevek torzijskega momenta	270
Prispevki linearno elastičnih vzmeti	273
Prispevek linearne spremembe temperature	279
Linijska konstrukcija, sestavljena iz n linijskih elementov	281
6.11 Metoda Vereščagina	281
6.12 Metoda sil pri statično nedoločenih linijskih konstrukcijah	284
6.13 Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela	296
6.14 Maxwelllov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov	298
6.15 Castiglianov izrek	305
6.16 Deformacijska energija linijske konstrukcije	308
6.17 Dopolnilna deformacijska energija linijske konstrukcije	314
6.18 Izrek o minimumu potencialne energije	315
6.19 Izrek o minimumu dopolnilne potencialne energije	322
6.20 Energijske metode - Zgledi	327
 VIRI	 383

*Praksa naj bo vedno podprta
s temeljitim poznavanjem teorije.*

*Leonardo da Vinci,
italijanski renesančni arhitekt, izumitelj, inženir, kipar in slikar,
1452-1519*

RAVEN LINIJSKI NOSILEC

5.1 Splošno o linijskih nosilcih

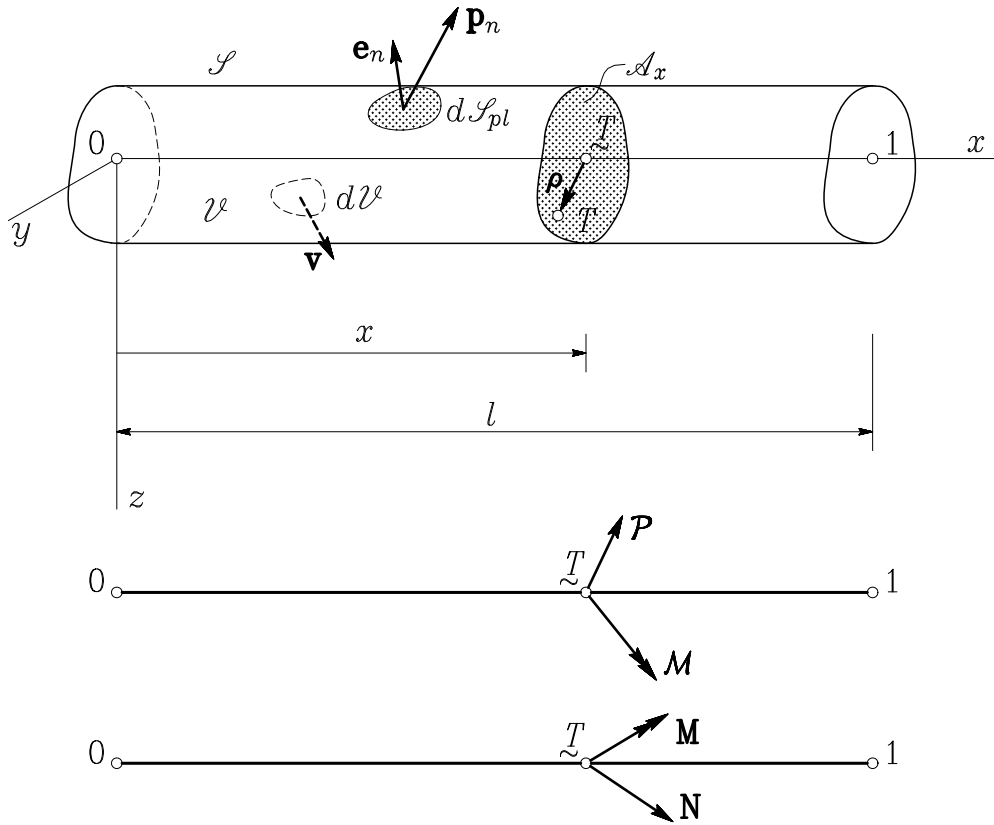
V konstrukcijski mehaniki imamo pogosto opravka z izrazito podolgovatimi telesi, kot so gredi, preklade, stebri, lokovi in podobno. Za ta telesa je značilno, da je ena od njihovih razsežnosti dosti večja od drugih dveh. Za obravnavanje takih elementov praviloma vpeljemo *računski model linijskega nosilca*. To pomeni, da dejansko trirazsežno telo nadomestimo z enorazsežnim računskim modelom in s tem občutno poenostavimo reševanje osnovnih enačb mehanskega stanja. V tej knjigi se omejimo na take konstrukcijske elemente, ki jih lahko v geometrijskem pogledu opišemo z *ravnim linijskim nosilcem* (slika 5.1). Osnovne enačbe nosilca zapišemo v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu, ki ga dosledno izberemo tako, da se njegova os x ujema z vzdolžno težiščno osjo obravnavanega elementa. Osi y in z sta torej težiščni osi prečnega prereza \mathcal{A}_x , ki ga dobimo, če nosilec prerežemo z ravnino $x = konst.$ Težišče prečnega prereza označimo s $\tilde{T}(x, 0, 0)$, poljubno točko prečnega prereza pa s $T(x, y, z)$. Lega točke T je glede na težišče \tilde{T} podana s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{\rho}$

$$\boldsymbol{\rho} = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z . \quad (5.1)$$

Vpeljava linijskega računskega modela je upravičena v primeru, da je največja prečna dimenzija nosilca veliko manjša od njegove dolžine. Tedaj za katerokoli točko T velja

$$|\boldsymbol{\rho}| \ll l . \quad (5.2)$$

Pri tem smo z l označili dolžino nosilca v nedeformiranem stanju B .



Slika 5.1

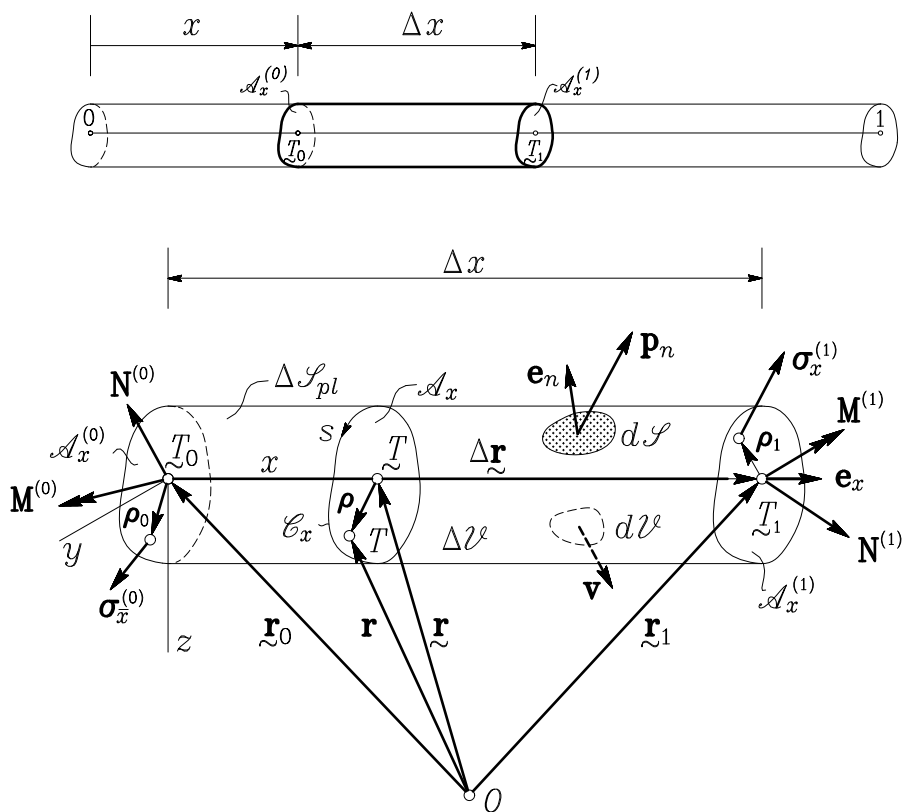
Glede na lastnost (5.2) v nadaljevanju vzamemo, da se med deformiranjem nosilca velikost in oblika njegovega prečnega prereza A_x zanemarljivo malo spremenita. To pomeni, da zanemarimo specifični spremembi dolžin v smereh y in z ter spremembo pravega kota v ravnini (y, z) . V območju majhnih deformacij tedaj velja

$$\varepsilon_{yy} \approx \varepsilon_{zz} \approx 0 \quad \text{in} \quad \varepsilon_{yz} \approx 0. \quad (5.3)$$

To predpostavko potrjujejo opazovanja obnašanja linijskih nosilcev pri eksperimentih, kakor tudi pri njihovi uporabi v vsakdanji praksi.

5.2 Ravnotežni pogoji za element ravnega nosilca

Povezavo med zunanjo obtežbo \mathbf{p}_n in \mathbf{v} elementarnega dela grednega nosilca in notranjimi silami v njegovih krajiščih izpeljemo iz ravnotežnih pogojev. Obravnavamo elementarni del nosilca, ki ga omejujeta prečna prereza skozi točki $\tilde{T}_0(x, 0, 0)$ in $\tilde{T}_1(x + \Delta x, 0, 0)$; njegova dolžina je torej Δx . Obravnavani elementarni del nosilca zavzema v prostoru območje $\Delta\mathcal{V}$, ki ga ograjuje sklenjena ploskev $\Delta\mathcal{S}$ (slika 5.2).



Slika 5.2

Pogoj, da je rezultanta vseh sil, ki delujejo na obravnavani element, enaka nič, zapišemo takole

$$\oint_{\Delta\mathcal{S}} \mathbf{p}_n dS + \int_{\Delta\mathcal{V}} \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Sklenjena mejna ploskev $\Delta\mathcal{S}$ je sestavljena iz čelnih mejnih ploskev $\mathcal{A}_x^{(0)}$ in $\mathcal{A}_x^{(1)}$ ter iz plašča $\Delta\mathcal{S}_{pl}$. Glede na to zapišemo enačbo (5.4) na naslednji način

$$\int_{\mathcal{A}_x^{(0)}} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}^{(0)} dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^{(1)}} \boldsymbol{\sigma}_x^{(1)} dA_x + \int_{\Delta\mathcal{S}_{pl}} \mathbf{p}_n dS_{pl} + \int_{\Delta\mathcal{V}} \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

Prva dva sumanda v gornji enačbi predstavljata rezultanti napetosti v mejnih prečnih prerezi obravnavanega elementarnega dela nosilca. Določimo ju z enačbo (1.100), kjer upoštevamo, da je na $\mathcal{A}_x^{(0)}$ $\mathbf{e}_{\bar{n}} = -\mathbf{e}_x$, na $\mathcal{A}_x^{(1)}$ pa $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_x$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_x^{(0)}} \boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}^{(0)} dA_x &= -\mathbf{N}^{(0)} = -\mathbf{N}(x) \\ \int_{\mathcal{A}_x^{(1)}} \boldsymbol{\sigma}_x^{(1)} dA_x &= \mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{N}(x + \Delta x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Pri tem smo pri vektorjih notranjih sil zaradi preglednejšega pisanja opustili spodnji indeks, saj je ta v našem primeru vedno $(\cdot)_x$.

Ploščino dS_{pl} elementarne ploskvice $d\mathcal{S}_{pl}$ na plašču $\Delta\mathcal{S}_{pl}$ in prostornino dV elementa $d\mathcal{V}$ znotraj območja $\Delta\mathcal{V}$ lahko izrazimo s prirastkom ds dolžine konture \mathcal{C}_x oziroma z elementarno ploščino dA_x prečnega prereza \mathcal{A}_x ter s prirastkom dx vzdolžne koordinate x

$$dS_{pl} = ds dx \quad \text{in} \quad dV = dA_x dx. \quad (5.7)$$

Ravnotežni pogoj (5.4) lahko sedaj zapišemo takole

$$\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x) + \int_{\Delta x} \left[\oint_{\mathcal{C}_x} \mathbf{p}_n ds + \int_{\mathcal{A}_x} \mathbf{v} dA_x \right] dx = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

Če vpeljemo oznako

$$\mathbf{P}(x) = \oint_{\mathcal{C}_x} \mathbf{p}_n ds + \int_{\mathcal{A}_x} \mathbf{v} dA_x, \quad (5.9)$$

se enačba (5.8) glasi

$$\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x) + \int_{\Delta x} \mathbf{P}(x) dx = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Pri tem predstavlja vektor $\mathbf{P}(x)$ nadomestno zunanjo obtežbo linijskega računskega modela glede na začetno nedeformirano dolžino elementa [N/m]. Z uporabo izreka o povprečni vrednosti integrala [†] lahko enačbo (5.10) zapišemo na naslednji način

$$\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x) + \mathbf{P}(x + \xi) \Delta x = \mathbf{0} \quad (0 \leq \xi \leq \Delta x). \quad (5.11)$$

Enačbo (5.11) delimo z Δx , in izvedemo limitni proces, pri katerem gre dolžina obravnavanega elementarnega dela nosilca proti nič

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)}{\Delta x} + \mathbf{P}(x + \xi) \right] = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Limita ulomka v oglatem oklepaju je po definiciji prvi odvod notranje sile \mathbf{N} po x ; ko gre Δx proti nič, gre proti nič tudi ξ in tako dobimo končno obliko ravnotežnega pogoja (5.4)

$$\frac{d\mathbf{N}}{dx} + \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (5.13)$$

Zapišimo še drugi ravnotežni pogoj, ki zahteva, da je rezultirajoči statični moment vseh sil, ki delujejo na obravnavani del nosilca, enak nič

$$\oint_{\Delta \mathcal{S}} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dS + \int_{\Delta \mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \mathbf{0}. \quad (5.14)$$

[†] Glej: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlig, Matematični priročnik (1997), str. 328

Z \mathbf{r} smo označili krajevne vektorje delcev elementarnega dela nosilca glede na poljubno mirujočo točko O . Krajevni vektor \mathbf{r} splošne točke $T(x, y, z)$ lahko sestavimo iz krajevnega vektorja $\underline{\mathbf{r}}$ težišča $\underline{\mathcal{T}}(x, 0, 0)$ prečnega prereza \mathcal{A}_x , v katerem leži obravnavana točka, ter iz vektorja $\underline{\boldsymbol{\rho}}$, ki določa lego točke T glede na težišče $\underline{\mathcal{T}}$

$$\mathbf{r} = \underline{\mathbf{r}} + \underline{\boldsymbol{\rho}}. \quad (5.15)$$

Razen tega izrazimo krajevni vektor $\underline{\mathbf{r}}_1$ točke $\underline{\mathcal{T}}_1$ kot vsoto krajevnega vektorja $\underline{\mathbf{r}}_0$ točke $\underline{\mathcal{T}}_0$ ter spremembe krajevnega vektorja $\Delta\underline{\mathbf{r}}$ med točkama $\underline{\mathcal{T}}_0$ in $\underline{\mathcal{T}}_1$

$$\underline{\mathbf{r}}_1 = \underline{\mathbf{r}}_0 + \Delta\underline{\mathbf{r}}. \quad (5.16)$$

S tem lahko zapišemo enačbo (5.14) takole

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}_x^{(0)}} (\underline{\mathbf{r}}_0 + \underline{\boldsymbol{\rho}}_0) \times \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{x}}^{(0)} dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^{(1)}} (\underline{\mathbf{r}}_0 + \Delta\underline{\mathbf{r}} + \underline{\boldsymbol{\rho}}_1) \times \underline{\boldsymbol{\sigma}}_x^{(1)} dA_x + \\ & \int_{\Delta\mathcal{S}_{pl}} (\underline{\mathbf{r}} + \underline{\boldsymbol{\rho}}) \times \underline{\mathbf{p}}_n dS_p + \int_{\Delta\mathcal{V}} (\underline{\mathbf{r}} + \underline{\boldsymbol{\rho}}) \times \underline{\mathbf{v}} dV = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Rezultirajoča momenta v mejnih prečnih prerezih obravnavanega elementa glede na težišči $\underline{\mathcal{T}}_0$ oziroma $\underline{\mathcal{T}}_1$ sta

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}_x^{(0)}} \underline{\boldsymbol{\rho}}_0 \times \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{x}}^{(0)} dA_x = -\mathbf{M}^{(0)} = -\mathbf{M}(x) \\ & \int_{\mathcal{A}_x^{(1)}} \underline{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \underline{\boldsymbol{\sigma}}_x^{(1)} dA_x = \mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}(x + \Delta x). \end{aligned} \quad (5.18)$$

S tem in ob upoštevanju enačb (5.6), (5.7) in (5.9) preide enačba (5.17) v naslednjo obliko

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(x + \Delta x) - \mathbf{M}(x) + \underline{\mathbf{r}}_0 \times [\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)] + \\ & \Delta\underline{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}(x + \Delta x) + \int_{\Delta x} \underline{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{P}}(x) dx + \int_{\Delta x} \underline{\mathcal{M}}(x) dx = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pri tem smo z $\mathcal{M}(x)$ označili nadomestno momentno zunanjo obtežbo linijskega računkega modela glede na začetno nedeformirano dolžino elementa [Nm/m].

$$\mathcal{M}(x) = \oint_{\mathcal{C}_x} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p}_n ds + \int_{\mathcal{A}_x} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} dA_x. \quad (5.20)$$

Z uporabo izreka o povprečni vrednosti integrala lahko enačbo (5.19) zapišemo takole

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(x + \Delta x) - \mathbf{M}(x) + \underline{\mathbf{r}}(x) \times [\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)] + \\ & \Delta \underline{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}(x + \Delta x) + \underline{\mathbf{r}}(x + \xi_1) \times \mathcal{P}(x + \xi_1) \Delta x + \mathcal{M}(x + \xi_2) \Delta x = \mathbf{0} \\ & (0 \leq \xi_1 \leq \Delta x, 0 \leq \xi_2 \leq \Delta x), \end{aligned} \quad (5.21)$$

kjer smo upoštevali, da je $\underline{\mathbf{r}}_0 = \underline{\mathbf{r}}(x)$. Če delimo gornjo enačbo z Δx in izvedemo limitni proces, pri katerem gre dolžina elementa Δx proti nič, dobimo

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{M}(x + \Delta x) - \mathbf{M}(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \underline{\mathbf{r}}}{\Delta x} \times \mathbf{N}(x + \Delta x) + \mathcal{M}(x + \xi_2) + \right. \\ & \left. \underline{\mathbf{r}}(x) \times \frac{\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)}{\Delta x} + \underline{\mathbf{r}}(x + \xi_1) \times \mathcal{P}(x + \xi_1) \right] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Od tod sledi

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} + \frac{d\underline{\mathbf{r}}}{dx} \times \mathbf{N} + \mathcal{M} + \underline{\mathbf{r}} \times \left(\frac{d\mathbf{N}}{dx} + \mathcal{P} \right) = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Ob upoštevanju enačbe (5.13) in ker je v skladu z enačbo (2.18)

$$\frac{d\underline{\mathbf{r}}}{dx} = \mathbf{e}_x,$$

sledi končna oblika momentnega ravnotežnega pogoja

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} + \mathbf{e}_x \times \mathbf{N} + \mathcal{M} = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

V enačbah (5.13) in (5.24) smo ravnotežne pogoje elementarnega dela linijskega nosilca izrazili z nadomestno linijsko zunanjo obtežbo \mathcal{P} oziroma \mathcal{M} in z nadomestno notranjo silo \mathbf{N} oziroma z nadomestnim notranjim momentom \mathbf{M} . V ta namen smo z enačbama (5.9) in (5.20) dejansko zunanjo obtežbo $\mathbf{p}_n(x, y, z)$ in $\mathbf{v}(x, y, z)$, ki deluje na obravnavano trirazsežno nosilno telo, nadomestili s statično enakovredno obtežbo $\mathcal{P}(x)$ in $\mathcal{M}(x)$ linijskega računskega modela

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathcal{P}_x \mathbf{e}_x + \mathcal{P}_y \mathbf{e}_y + \mathcal{P}_z \mathbf{e}_z \\ \mathcal{M} &= \mathcal{M}_x \mathbf{e}_x + \mathcal{M}_y \mathbf{e}_y + \mathcal{M}_z \mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Komponente nadomestne zunanje obtežbe dobimo ob upoštevanju zvez (1.73), (1.76) in (5.1) z zapisom enačb (5.9) in (5.20) v skalarni obliki

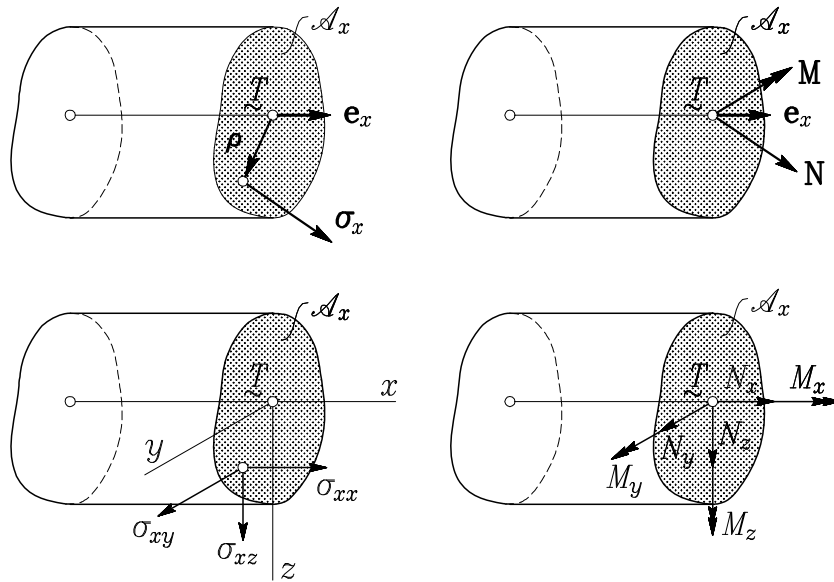
$$\begin{aligned}\mathcal{P}_x &= \oint_{\mathcal{C}_x} p_{nx} ds + \int_{\mathcal{A}_x} v_x dA_x \\ \mathcal{P}_y &= \oint_{\mathcal{C}_x} p_{ny} ds + \int_{\mathcal{A}_x} v_y dA_x \\ \mathcal{P}_z &= \oint_{\mathcal{C}_x} p_{nz} ds + \int_{\mathcal{A}_x} v_z dA_x \\ \mathcal{M}_x &= \oint_{\mathcal{C}_x} (y p_{nz} - z p_{ny}) dA_x + \int_{\mathcal{A}_x} (y v_z - z v_y) dA_x \\ \mathcal{M}_y &= \oint_{\mathcal{C}_x} z p_{nx} ds + \int_{\mathcal{A}_x} z v_x dA_x \\ \mathcal{M}_z &= - \oint_{\mathcal{C}_x} y p_{nx} ds - \int_{\mathcal{A}_x} y v_x dA_x.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Prav tako smo napetosti $\boldsymbol{\sigma}_x$, katerih razporeditve po prečnem prerezu \mathcal{A}_x v splošnem ne poznamo, nadomestili z njihovo rezultanto \mathbf{N} in z rezultirajočim momentom \mathbf{M} glede na težišče prečnega prereza \mathcal{A}_x

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= N_x \mathbf{e}_x + N_y \mathbf{e}_y + N_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{M} &= M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z.\end{aligned}\quad (5.27)$$

Za prečni prerez $\mathcal{A}_x(x = \text{konst.})$ z zunanjo normalo \mathbf{e}_x v splošnem velja

$$\mathbf{N} = \int_{\mathcal{A}_x} \boldsymbol{\sigma}_x dA_x \quad \text{in} \quad \mathbf{M} = \int_{\mathcal{A}_x} \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\sigma}_x dA_x. \quad (5.28)$$



Slika 5.3

Z zapisom enačb (5.28) v skalarni obliki dobimo

$$\begin{aligned}N_x &= \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x & M_x &= \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x \\ N_y &= \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xy} dA_x & M_y &= \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x \\ N_z &= \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xz} dA_x & M_z &= - \int_{\mathcal{A}_x} y \sigma_{xx} dA_x.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Enačbe (5.29) bi lahko zapisali tudi neposredno, izhajajoč iz *slike 5.3*. Glede na smisel njenega delovanja imenujemo notranjo silo N_x *osna sila*, notranji sili N_y in N_z sta *prečni sili v smereh y in z* , notranji moment M_x je *torzijski moment*, notranja momenta M_y in M_z pa sta *upogibna momenta okrog osi y in z* .

Končno zapišimo v skalarni obliki še ravnotežni enačbi (5.13) in (5.24), ki povezujeta notranje sile linijskega nosilca z nadomestno obtežbo njegove računske osi

$$\frac{dN_x}{dx} + \mathcal{P}_x = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{dN_y}{dx} + \mathcal{P}_y = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{dN_z}{dx} + \mathcal{P}_z = 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{dM_x}{dx} + \mathcal{M}_x = 0 \quad (5.33)$$

$$\frac{dM_y}{dx} - N_z + \mathcal{M}_y = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{dM_z}{dx} + N_y + \mathcal{M}_z = 0. \quad (5.35)$$

Enačbi (5.34) in (5.35) pogosto zapišemo v priročnejši obliki, ki neposredno povezuje upogibna momenta z zunanjo obtežbo. V ta namen omenjeni enačbi odvajamo po x in upoštevamo zvezi (5.31) in (5.32)

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + \mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} - \mathcal{P}_y + \frac{d\mathcal{M}_z}{dx} = 0. \quad (5.37)$$

Ravnotežni pogoji (5.30) do (5.35) tvorijo sistem šestih navadnih linearnih diferencialnih enačb, ki jih rešujemo ob upoštevanju tako ime-

novanih *statičnih robnih pogojev*[†]. Ker so komponente nadomestne zunanje obtežbe neodvisne med seboj, lahko hitro ugotovimo, da gre pri tem za štiri neodvisne skupine enačb. Enačba (5.30) določa osno silo N_x v odvisnosti od vzdolžne obtežbe \mathcal{P}_x , ki sicer ne nastopa v nobeni od preostalih ravnotežnih enačb. Prav tako lahko ločeno rešujemo enačbo (5.33), ki povezuje torzijski moment M_x s torzijsko obtežbo \mathcal{M}_x . Preostaneta nam dva para enačb, ki ju rešujemo vsakega posebej. Enačbi (5.31) in (5.37) kažeta, da sta prečna sila N_y in upogibni moment M_z odvisna le od nadomestne zunanje obtežbe \mathcal{P}_y in \mathcal{M}_z . Sistem enačb (5.32) in (5.36) pa povezuje prečno silo N_z in upogibni moment M_y z zunanjo obtežbo \mathcal{P}_z in \mathcal{M}_y . Opisana lastnost sistema ravnotežnih enačb je posledica dejstva, da smo ravnotežne pogoje zapisali za nedeformirano stanje nosilca.

5.3 Upogib ravnega nosilca z osno silo

V tem razdelku izpeljemo osnovne enačbe tako imenovane *elementarne* ali *inženirske teorije upogiba ravnega nosilca*. Obravnavamo primer, pri katerem v nosilcu v splošnem nastopajo vse notranje sile razen torzijskega momenta ($\mathcal{M}_x = 0$ in $M_x = 0$). Z opazovanjem obnašanja nosilcev pri tovrstni obtežbi lahko ugotovimo, da pride do izrazitih raztezkov oziroma skrčkov robnih vlaken nosilca, medtem ko se pravi koti med telesnimi koordinatnimi črtami zanemarljivo malo spremenijo. Ravninski primer upogibne deformacije nosilca je prikazan na *sliki 5.4*. Upoštevajoč opisano ugotovitev vpeljemo razen predpostavk (5.3) še dodatno poenostavitev

$$\varepsilon_{xy} \approx \varepsilon_{xz} \approx 0. \quad (5.38)$$

Ta predpostavka terja tudi dodatno pojasnilo. Če bi jo vzeli dobesedno, bi namreč iz konstitucijskih enačb (4.10) sledilo, da v nosilcu praktično ni strižnih napetosti σ_{xy} in σ_{xz}

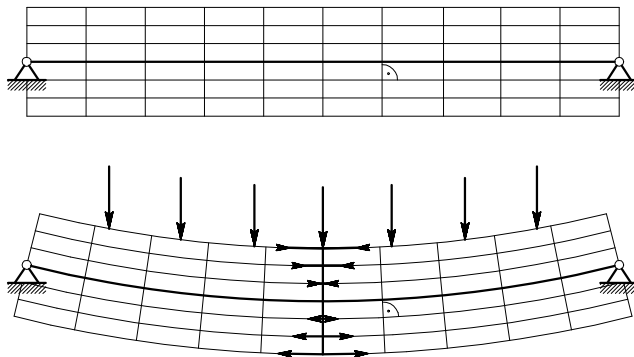
[†] Reševanje ravnotežnih enačb pri linijskih nosilcih je podrobno obdelano v knjigah Stanek, Turk: Statika I in Statika II, FGG, Ljubljana (1996)

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \approx 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} \approx 0, \quad (5.39)$$

zaradi druge od predpostavk (5.3) pa tudi velja

$$\sigma_{yz} = 2G \varepsilon_{yz} \approx 0. \quad (5.40)$$

To pomeni, da bi bil nosilec lahko izdelan iz materiala brez strižne trdnosti, saj med delci oziroma prerezi ni strižnih napetosti. Upoštevajoč enačbe (5.30) do (5.37) takega napetostnega stanja seveda ne moremo pričakovati, razen v posebnem primeru čistega upogiba ($N_y = N_z = 0$). Zato moramo poenostavitve (5.3) in (5.38) razumeti kot eksperimentalno potrjeno predpostavko, da se v upogibnem nosilcu sicer pojavijo tudi spremembe pravih kotov in pripadajoče strižne napetosti, vendar zanemarljivo malo vplivajo na siceršnje mehansko stanje nosilca. Kot kažejo poskusi, je omenjena predpostavka toliko bolj upravičena, kolikor bolj je izpolnjen pogoj (5.2), torej kolikor večja je dolžina nosilca v primerjavi z izmerami njegovega prečnega prereza.



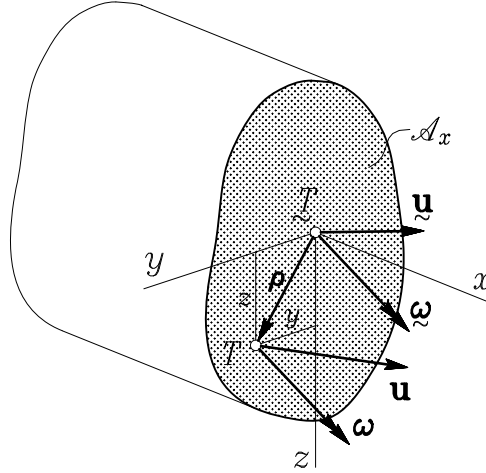
Slika 5.4

S predpostavkami (5.3) in (5.38) smo dejansko vzeli, da je od šestih neodvisnih komponent tenzorja majhnih deformacij pomembna le komponenta ε_{xx} , ki predstavlja specifično spremembo dolžine v vzdolžni smeri nosilca in je v splošnem funkcija telesnih koordinat

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x, y, z). \quad (5.41)$$

Kinematične enačbe

Na predpostavki (5.38) o zanemarljivem vplivu kotnih deformacij ε_{xy} in ε_{xz} na mehansko stanje linijskega nosilca je zasnovana *Bernoulli*[†]-*Navierova hipoteza*, ki pravi, da ravninski prečni prerezi, ki so v začetnem, nedeformiranem stanju pravokotni na vzdolžno os nosilca, ostanejo ravninski in pravokotni na vzdolžno os tudi po deformaciji zaradi upogibne in osne obtežbe.



Slika 5.5

Skupaj s predpostavko (5.3) to pomeni, da lahko prečni prerez nosilca obravnavamo kot togo telo z neskončno majhno debelino (slika 5.5). Takemu telesu pravimo *toga šipa*, njegove pomike in zasuke pa določamo s poenostavljeno Rodriguesovo enačbo (1.346) in z enačbo (1.347). V tem primeru je za referenčno točko umestno izbrati kar težišče \mathcal{T} prečnega prereza \mathcal{A}_x . Vektorja pomika in zasuka v težišču \mathcal{T} označimo z $\underline{\mathbf{u}}$ in $\underline{\boldsymbol{\omega}}$

$$\mathbf{u}(\mathcal{T}) \equiv \underline{\mathbf{u}} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z \quad (5.42)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathcal{T}) \equiv \underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z = \boldsymbol{\omega}(T) \quad (5.43)$$

Za skalarne komponente pomika $\underline{\mathbf{u}}$ težišča \mathcal{T} smo zaradi preglednosti vpeljali nove oznake

[†] Jacob (Jacques) Bernoulli, švicarski inženir in astronom, 1654-1705.

$$\begin{aligned} u &= u_x(x, 0, 0) = u(x) \\ v &= u_y(x, 0, 0) = v(x) \\ w &= u_z(x, 0, 0) = w(x). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Z u , v in w smo torej označili pomike linijskega računskega modela nosilca, ki so zato funkcije zgolj vzdolžne koordinate x . Pomik

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z \quad (5.45)$$

poljubne točke T , ki je podana z relativnim krajevnim vektorjem $\boldsymbol{\rho}$ glede na težišče \tilde{T}

$$\boldsymbol{\rho} = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \quad (5.46)$$

izračunamo z Rodriguesovo enačbo, ki smo jo ob predpostavki, da so zasuki majhne količine, izpeljali v razdelku **1.15**

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}. \quad (5.47)$$

V gornjo enačbo vstavimo izraze (5.42), (5.43) in (5.46), izračunamo vektorski produkt in po ureditvi dobimo

$$\mathbf{u} = (u + z\omega_y - y\omega_z) \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z. \quad (5.48)$$

Iz primerjave z enačbo (5.45) sledi

$$\begin{aligned} u_x &= u + z\omega_y - y\omega_z \\ u_y &= v \\ u_z &= w. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Ob upoštevanju predpostavke (5.38) lahko zasuka ω_y in ω_z izrazimo z odvodi pomikov linijskega računskega modela

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{dv}{dx} - \omega_z = 0 &\quad \rightarrow \quad \omega_z = \frac{dv}{dx} \\ 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{dw}{dx} + \omega_y = 0 &\quad \rightarrow \quad \omega_y = -\frac{dw}{dx}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Linijski računski model, pri katerem sta zasuka ω_y in ω_z z upogibkoma v in w povezana z enačbama (5.50), imenujemo *Bernoullijev nosilec* in predstavlja najpreprostejši možni model za opis mehanskega stanja grednega nosilca. Vzdolžni pomik u_x poljubne točke prečnega prereza lahko sedaj zapišemo v odvisnosti od pomikov linijskega računkega modela

$$u_x(x, y, z) = u(x) - y \frac{dv(x)}{dx} - z \frac{dw(x)}{dx}. \quad (5.51)$$

Pri tem smo poudarili, da so pomiki u , v in w funkcije koordinate x . V izbranem prečnem prerezu, torej pri $x = konst.$, je vzdolžni pomik u_x poljubne točke T linearna funkcija prereznih koordinat y in z .

S parcialnim odvajanjem pomika u_x po x ob upoštevanju prve od kinematičnih enačb (4.4) določimo specifično spremembo dolžine ε_{xx} materialnega vlakna v vzdolžni smeri nosilca

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (5.52)$$

Konstitucijski zakon

Pri povezavi dobljenih deformacij z napetostmi vpeljemo novo pomembno poenostavitev. Kakor smo ugotovili v 3. poglavju, pripada enoosnemu deformacijskemu stanju, s kakršnim imamo opraviti v našem primeru ($\varepsilon_{xx} \neq 0$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$), prostorsko napetostno stanje

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_{xx} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{xx} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Vendar v nadaljevanju vzamemo, da je tudi napetostno stanje enoosno in zapišemo konstitucijski zakon v preprosti obliki

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}. \quad (5.54)$$

To pomeni, da smo v konstitucijskih enačbah (5.53) zanemarili vpliv prečne kontrakcije ($\nu \approx 0$), kar je v skladu z osnovno predpostavko (5.3). Upoštevajoč zvezo (5.54) lahko tudi vzdolžno normalno napetost σ_{xx} izrazimo s pomiki računske osi nosilca

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E \left(\frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} \right). \quad (5.55)$$

Notranje sile

Z ravnotežnimi enačbami (5.30) do (5.35) smo določili notranje sile v poljubnem prečnem prerezu linijskega nosilca v odvisnosti od nadomestne zunanje obtežbe linijskega računskega modela. Zato lahko te sile pogojno imenujemo *ravnotežne notranje sile*. Enačbe (5.29) pa povedo, kako so notranje sile povezane z napetostmi v prečnem prerezu $\mathcal{A}_x(x)$

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x = \\ & E \frac{du}{dx} \int_{\mathcal{A}_x} dA_x - E \frac{d^2v}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x - E \frac{d^2w}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x \\ M_y &= \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x = \\ & E \frac{du}{dx} \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x - E \frac{d^2v}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x - E \frac{d^2w}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x \\ M_z &= - \int_{\mathcal{A}_x} y \sigma_{xx} dA_x = \\ & - E \frac{du}{dx} \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x + E \frac{d^2v}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x + E \frac{d^2w}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Preostale tri od enačb (5.29) trenutno niso pomembne. Iz četrte od njih bi ob upoštevanju zvez (5.53) dobili $M_x = 0$, kar je razumljivo, saj nimamo torzijske obtežbe. Druga in tretja od enačb (5.29) pa pripeljeta do vprašljivega rezultata $N_y = N_z = 0$. V splošnem primeru poljubno obteženega in poljubno podprtega nosilca seveda ne moremo pričakovati, da bi bili prečni sili N_y in N_z nič povsod na nosilcu. Dobljeni rezultat nas še enkrat opozori, da smo pri izpeljavi osnovnih enačb upogibnega nosilca zanemarili vpliv strižnih napetosti in s tem tudi vpliv prečnih sil.

V enačbah (5.56) smo notranje sile izrazili z vzdolžno normalno napetostjo σ_{xx} , ki smo jo s konstitucijsko enačbo (5.54) povezali s predpostavljenim deformacijskim stanjem nosilca. Zato lahko notranje sile, določene z enačbami (5.56), pogojno imenujemo *konstitucijske notranje sile*. Spomnimo se razdelkov **1.5** in **1.6**, kjer smo ugotovili, da iz ravnotežnih enačb, izraženih z napetostmi, ni mogoče določiti velikosti in razporeditve napetosti v prerezu telesa z namišljeno ploskvijo, lahko pa z ravnotežnimi enačbami (1.102) in (1.103) oziroma (1.108) in (1.109) določimo rezultante napetosti na prerezni ploskvi. To smo z enačbami (5.30) do (5.37) naredili tudi pri obravnavanem nosilcu. Da bi določili razporeditev napetosti po prerezu \mathcal{A}_x , smo morali vpeljati dodatne kinematične predpostavke (5.3) in (5.38), ki so nas pripeljale do linearnega poteka vzdolžne deformacije ε_{xx} in vzdolžne normalne napetosti σ_{xx} po prerezu. Koeficienti linearnega nastavka za napetost σ_{xx} so izraženi z odvodi pomikov računske osi, določili pa jih bomo ob pogoju, da morajo biti konstitucijske notranje sile enake ravnotežnim. Ta pristop tudi sicer predstavlja osnovno načelo pri reševanju problemov konstrukcijske mehanike, ne glede na to, ali obravnavamo linijsko, ploskovno ali splošno prostorsko konstrukcijo.

Vrnimo se k enačbam (5.56), v katerih smo upoštevali, da pomiki u, v, w in njihovi odvodi niso odvisni od koordinat y in z in da se torej pri integriranju po prečnem prerezu \mathcal{A}_x obnašajo kot konstante. Integrali, ki nastopajo v enačbah (5.56), so očitno odvisni le od oblike in velikosti

prečnega prereza, zato jih s skupnim imenom imenujemo *geometrijske karakteristike prečnega prereza* \mathcal{A}_x . Zanje vpeljemo naslednje oznake

$$\begin{aligned}
 A_x &= \int_{\mathcal{A}_x} dA_x && \dots \text{ ploščina prečnega prereza } \mathcal{A}_x \\
 S_y &= \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x && \dots \text{ statični moment prečnega prereza } \\
 &&& \mathcal{A}_x \text{ glede na os } y \\
 S_z &= \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x && \dots \text{ statični moment prečnega prereza } \\
 &&& \mathcal{A}_x \text{ glede na os } z \\
 I_{yy} &= \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x && \dots \text{ vztrajnostni moment prečnega } \\
 &&& \text{ prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } y \\
 I_{zz} &= \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x && \dots \text{ vztrajnostni moment prečnega } \\
 &&& \text{ prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } z \\
 I_{yz} &= - \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x && \dots \text{ deviacijski vztrajnostni moment } \\
 &&& \text{ prečnega prereza } \mathcal{A}_x.
 \end{aligned}$$

Enačbe (5.56) lahko sedaj zapišemo takole

$$\begin{aligned}
 N_x &= EA_x \frac{du}{dx} - ES_z \frac{d^2v}{dx^2} - ES_y \frac{d^2w}{dx^2} \\
 M_y &= ES_y \frac{du}{dx} + EI_{yz} \frac{d^2v}{dx^2} - EI_{yy} \frac{d^2w}{dx^2} \\
 M_z &= -ES_z \frac{du}{dx} + EI_{zz} \frac{d^2v}{dx^2} - EI_{yz} \frac{d^2w}{dx^2}.
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

V našem primeru sta osi y in z težiščni osi prečnega prereza \mathcal{A}_x , zato sta statična momenta prereza S_y in S_z enaka nič

$$S_y = S_z = 0. \tag{5.58}$$

Enačbe (5.57) se s tem poenostavijo

$$\begin{aligned}
 N_x &= EA_x \frac{du}{dx} \\
 M_y &= EI_{yz} \frac{d^2v}{dx^2} - EI_{yy} \frac{d^2w}{dx^2} \\
 M_z &= EI_{zz} \frac{d^2v}{dx^2} - EI_{yz} \frac{d^2w}{dx^2}.
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Tako smo dobili zveze med notranjimi silami in pomiki računske osi upogibnega nosilca. Pri praktičnem delu je navadno ugodnejša inverzna oblika sistema enačb (5.59)

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA_x} \tag{5.60}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z I_{yy} - M_y I_{yz}}{E (I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \tag{5.61}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{-M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{E (I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)}. \tag{5.62}$$

Vzdolžna normalna napetost v poljubni točki izbranega prečnega prereza je sedaj

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - y \frac{M_z I_{yy} - M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} + z \frac{M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}. \tag{5.63}$$

Enačbe (5.61) do (5.63) se občutno poenostavijo, če težiščni osi y in z izberemo tako, da se ujemata z glavnima vztrajnostnima osema prečnega prereza \mathcal{A}_x [†]. Tedaj je $I_{yz} = 0$ in enačbi (5.61) in (5.62) preideta v enostavno obliko

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_{zz}} \tag{5.64}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_{yy}} \tag{5.65}$$

[†] Pri prerezih, ki imajo vsaj eno simetrijsko os, je ta že kar ena od glavnih vztrajnostnih osi (primeri: pravokotnik, krog, elipsa, I-, T-, U-profil, ...).

oziroma zaradi enačb (5.50)

$$\frac{d\omega_z}{dx} = \frac{M_z}{EI_{zz}} \quad (5.66)$$

$$\frac{d\omega_y}{dx} = \frac{M_y}{EI_{yy}}. \quad (5.67)$$

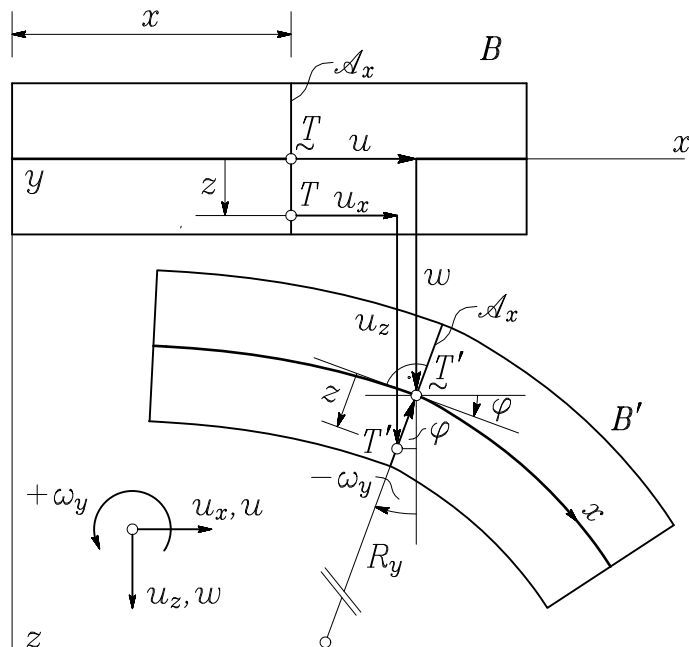
Vzdolžno normalno napetost pa v primeru, da je $I_{yz} = 0$, izračunamo z enačbo

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - y \frac{M_z}{I_{zz}} + z \frac{M_y}{I_{yy}}. \quad (5.68)$$

Dobljene enačbe so zelo pomembne, saj predstavljajo osnovno orodje za reševanje praktičnih nalog v mehaniki linijskih konstrukcij. Navadni diferencialni enačbi drugega reda (5.64) in (5.65) imenujemo *enačbi upogibnice*. Povezujeta namreč prečna pomika v in w , ki ju imenujemo tudi *upogibka* ali *povesa*, z upogibnima momentoma okrog osi z in y . Enačbe rešujemo ob upoštevanju *kinematičnih robnih pogojev*, ki opisujejo način podpiranja nosilca. Ob izključitvi torzijskega delovanja nosilca ima vsaka točka linijskega računskega modela v splošnem prostorskem primeru pet *prostostnih stopenj*: pomike u , v in w ter zasuka ω_y in ω_z . Če so kinematični robni pogoji izraženi z zasuki, na primer pri vpetih podporah, jih vpeljemo z enačbama (5.50).

Enačbe (5.60) do (5.62) kažejo, da lahko vzdolžni pomik u določimo neodvisno od prečnih pomikov v in w . V primeru, da je $I_{yz} = 0$, sta tudi pomika v in w neodvisna drug od drugega. Upoštevajoč pojasnila o ločljivosti ravnotežnih enačb (5.30) do (5.37) lahko ugotovimo, da je vzdolžni pomik u odvisen le od vzdolžne zunanje obtežbe \mathcal{P}_x . Pri $I_{yz} = 0$ je upogibek v odvisen le od obtežbe \mathcal{P}_y in \mathcal{M}_z , upogibek w pa le od obtežbe \mathcal{P}_z in \mathcal{M}_y . Kot smo že omenili, je tako preprosta medsebojna odvisnost pomikov in zunanje obtežbe posledica zapisa ravnotežnih pogojev na nedeformiranem telesu. Uporaba prikazanih ravnotežnih enačb in enačb za pomike je zato upravičena le tedaj, če so dejanski pomiki zelo majhni v primerjavi z dolžino nosilca, odvodi pomikov in zasuki pa v primerjavi z enoto.

Da bi boljše razumeli enačbo upogibnice ter geometrijski pomen prvih in drugih odvodov upogibkov, si oglejmo primer upogiba v ravnini (x, z) .



Slika 5.6

Tedaj je $\mathcal{P}_y = 0$ in $\mathcal{M}_z = 0$ in zato tudi $v = 0$ in $\omega_z = 0$. Vzemimo poljuben element linijskega nosilca in njegov prečni prerez $\mathcal{A}_x(x)$ (slika 5.6), ki naj bo simetričen glede na os z . Rešitvi enačb (5.60) in (5.65) sta funkciji $u(x)$ in $w(x)$, ki določata deformirano obliko nosilca v ravnini (x, z) . Razen težišča $\tilde{T}(x, 0, 0)$ opazujemo še poljubno točko $T(x, y, z)$ v tem prerezu. V skladu z vpeljanimi oznakami opišemo pomik točke \tilde{T} s komponentama u in w , pomik splošne točke T pa s komponentama u_x in u_z . Ob predpostavkah (5.3) se razdalja z točke T od težišča preza \tilde{T} med deformiranjem ne spremeni. Krivuljo, ki določa deformirano obliko linijskega računskega modela, imenujemo *upogibnica*. V točki \tilde{T} je naklon tangente na upogibnico glede na os x določen s kotom φ . V prikazanem primeru je prvi odvod funkcije $w(x)$ po x pozitiven, saj se

poves pri naraščajočem x povečuje

$$\frac{dw}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (5.69)$$

Ker je $\varepsilon_{xz} = 0$, je prečni prerez \mathcal{A}_x pravokoten na računsko os nosilca tudi v deformiranem stanju \mathbf{B}' , njegov zasuk okrog osi y pa je $\omega_y = -\varphi$. Upoštevali smo, da je zasuk prereza v našem primeru negativen. Iz enačbe (5.69) s tem sledi

$$\frac{dw}{dx} = \operatorname{tg}(-\omega_y) = -\operatorname{tg} \omega_y. \quad (5.70)$$

Pri majhnih deformacijah, s kakršnimi imamo opraviti v našem primeru, je zasuk ω_y majhna količina v primerjavi z enoto ($|\omega_y| \ll 1$), zato je $\operatorname{tg} \omega_y \approx \omega_y$ in iz enačbe (5.70) sledi

$$\omega_y = -\frac{dw}{dx}. \quad (5.71)$$

Kakor razberemo iz *slike 5.6*, lahko pomika u_x in u_z splošne točke T izrazimo takole

$$\begin{aligned} u_x &= u - z \sin \varphi \\ u_z &= w - z + z \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Ker je φ majhen kot ($\varphi = |\omega_y| \ll 1$), je $\sin \varphi \approx \varphi$ in $\cos \varphi \approx 1$ in ob upoštevanju enačbe (5.71) lahko pomika splošne točke zapišemo zgolj s pomiki linijskega računskega modela, pri čemer lahko opazimo ujemanje z enačbami (5.49) za ravninski primer ($v = 0$, $\omega_z = 0$)

$$\begin{aligned} u_x &= u - z \frac{dw}{dx} \\ u_z &= w. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Drugi odvod upogibka lahko povežemo z ukrivljenostjo deformirane težiščne osi nosilca. Iz diferencialne geometrije[‡] vemo, da je v ravnini (x, y) ukrivljenost κ_y krivulje, ki jo določata pomika $u(x)$ in $w(x)$ (slika 5.6), definirana kot recipročna vrednost krivinskega polmera R_y

$$\kappa_y = \frac{1}{R_y} = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^3}}. \quad (5.74)$$

V našem primeru smo vzeli, da sta zasuk ω_y in s tem tudi prvi odvod povesa w majhni količini, zato lahko v imenovalcu na desni strani enačbe (5.74) zanemarimo kvadrat prvega odvoda povesa v primerjavi z enoto. Pri majhnih zasukih lahko torej ukrivljenost deformirane osi nosilca razmeroma natančno opišemo kar z drugim odvodom povsov $w(x)$

$$\kappa_y = \frac{1}{R_y} \approx \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (5.75)$$

Za upogib v ravnini (x, y) bi na enak način dobili

$$\kappa_z = \frac{1}{R_z} \approx \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (5.76)$$

Primerjava z enačbama (5.64) in (5.65) pripelje do koristne ugotovitve, da je upogibni moment M_y premosorazmeren ukrivljenosti κ_y , upogibni moment M_z pa ukrivljenosti κ_z

$$\begin{aligned} M_y &\approx -EI_{yy} \kappa_y = -\frac{EI_{yy}}{R_y} \\ M_z &\approx EI_{zz} \kappa_z = \frac{EI_{zz}}{R_z}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

[‡] Glej: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlig, Matematični priročnik (1997), str. 196.

Nevtralna os. Jedro prereza

Če sta koordinatni osi y in z težiščni in glavni vztrajnostni osi prečnega prereza \mathcal{A}_x , je potek vzdolžne normalne napetosti σ_{xx} po prerezu podan z enačbo (5.68). V odvisnosti od velikosti in medsebojnega razmerja notranjih sil kakor tudi od oblike prečnega prereza je napetost σ_{xx} lahko po celotnem prerezu natezna ali tlačna, lahko pa je na delu prereza natezna, na drugem delu pa tlačna. V zadnjem primeru je meja med območjem tlačnih in območjem nateznih napetosti določena s pogojem

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - y \frac{M_z}{I_{zz}} + z \frac{M_y}{I_{yy}} = 0. \quad (5.78)$$

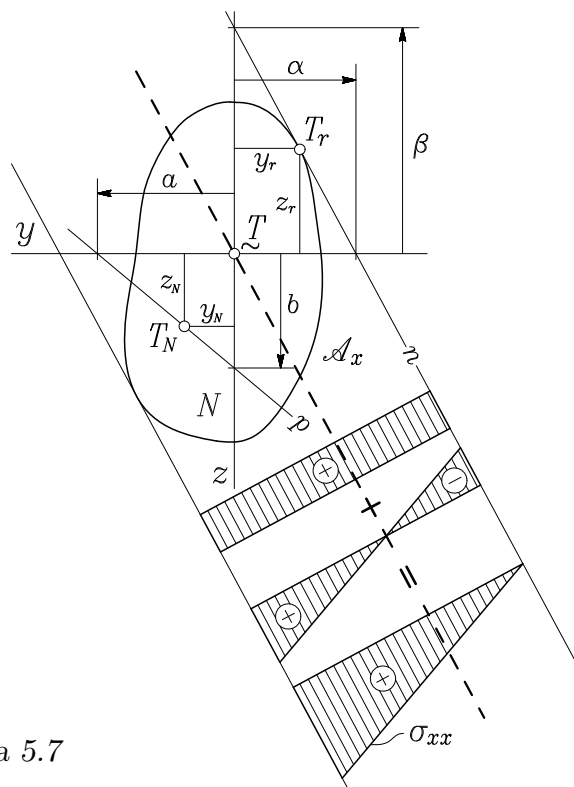
Pri znanih vrednostih notranjih sil in znanih geometrijskih karakteristik prečnega prereza \mathcal{A}_x gre očitno za enačbo premice v ravnini (y, z) . To premico imenujemo *nevtralna os n* , njena lega pa se v odvisnosti od poteka notranjih sil vzdolž nosilca v splošnem spreminja od prereza do prereza. Enačbo nevtralne osi (5.78) lahko preoblikujemo z uvedbo novih geometrijskih karakteristik i_y in i_z , ki ju imenujemo *vztrajnostna polmera prečnega prereza glede na osi y in z*

$$i_y^2 = \frac{I_{yy}}{A_x} \quad \text{in} \quad i_z^2 = \frac{I_{zz}}{A_x}. \quad (5.79)$$

S tem se enačba nevtralne osi n po ureditvi in krajšanju z A_x glasi

$$n : \quad N_x - y \frac{M_z}{i_z^2} + z \frac{M_y}{i_y^2} = 0. \quad (5.80)$$

V primeru, da nevtralna os seka ravnino (y, z) zunaj prečnega prereza \mathcal{A}_x , je vzdolžna normalna napetost po celotnem prerezu enakega predznaka, torej bodisi natezna bodisi tlačna. S praktičnega konstruktorskega stališča so zanimive tiste kombinacije osne sile in obeh upogibnih momentov, pri katerih se nevtralna os v eni ali več točkah dotika mejne krivulje \mathcal{C}_x prereza \mathcal{A}_x . Tedaj je namreč vzdolžna normalna napetost σ_{xx} v dotikalni točki enaka nič, po celotnem prerezu \mathcal{A}_x pa je enakega predznaka (*slika 5.7*)

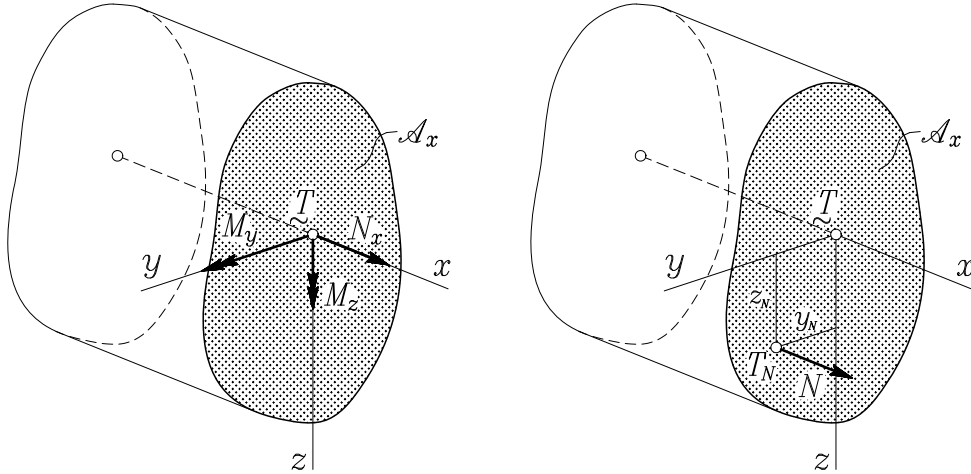


Slika 5.7

Ker smo za prečni prerez predpostavili, da se obnaša kot toga šipa, lahko na vprašanje, pri katerih kombinacijah osne sile in upogibnih momentov dobimo opisano napetostno sliko, odgovorimo ob upoštevanju pravila za vzporedni premik sile, ki smo ga spoznali v statiki togega telesa[†]. Po tem pravilu lahko osno silo N_x in upogibna momenta M_y in M_z , ki navidezno delujejo v težišču T , statično enakovredno predstavimo s silo N , ki deluje v točki T_N s koordinatama y_N in z_N (slika 5.8). Točko $T_N(y_N, z_N)$, v kateri deluje *izsredna* (ekscentrična) sila N , izberemo tako, da so izpolnjeni pogoji statične enakovrednosti

$$N_x = N, \quad M_y = z_N N \quad \text{in} \quad M_z = -y_N N. \quad (5.81)$$

[†] Glej na primer učbenik M. Stanek, G. Turk, Statika I, FGG, Ljubljana (1996)



Slika 5.8

Te pogoje vstavimo v enačbo (5.80) in po krajšanju z N zapišemo enačbo nevtralne osi n v naslednji obliki

$$n : \quad 1 + y \frac{y_N}{i_z^2} + z \frac{z_N}{i_y^2} = 0. \quad (5.82)$$

Z oznakama

$$\alpha = -\frac{i_z^2}{y_N} \quad \text{in} \quad \beta = -\frac{i_y^2}{z_N} \quad (5.83)$$

lahko enačbo nevtralne osi zapišemo v segmentni obliki, torej glede na njena odseka α in β na koordinatnih oseh y in z

$$n : \quad \frac{y}{\alpha} + \frac{z}{\beta} = 1. \quad (5.84)$$

Enačbe (5.83) in (5.84) kažejo, da se s približevanjem prijemališča T_N težišču prereza \mathcal{T} nevtralna os oddaljuje od težišča in narobe.

Začetno vprašanje, pri katerih kombinacijah notranjih sil N_x , M_y in M_z so pripadajoče nevtralne osi ravno tangente na mejno krivuljo \mathcal{C}_x prereza \mathcal{A}_x , lahko sedaj zastavimo takole: katera množica prijemališč T_N nadomestne sile N ustreza pogoju, da so pripadajoče napetosti σ_{xx}

po celotnem prerezu enakega predznaka? To množico imenujemo *jedro prereza* \mathcal{J} . Jedro prereza ni prazna množica, saj zagotovo vsebuje vsaj težišče prereza $\mathcal{T}(0, 0)$. Nas pa zanima *rob jedra prereza*, ki ga določa podmnožica prijemališč T_N , pri katerih se pripadajoče nevtralne osi ravno dotikajo mejne krivulje \mathcal{C}_x .

Vzemimo, da točka T_N ustreza pogoju naloge in da je pripadajoča nevtralna os n tangenta na mejno krivuljo \mathcal{C}_x v robni točki $T_r(y_r, z_r)$. Kakor kaže *slika 5.7*, je v prikazanem primeru vzdolžna normalna napetost σ_{xx} v točki T_r enaka nič, sicer pa je natezna po celotnem prerezu \mathcal{A}_x . Ker točka T_r leži na nevtralni osi n , je izpolnjena enačba

$$1 + y_r \frac{y_N}{i_z^2} + z_r \frac{z_N}{i_y^2} = 0. \quad (5.85)$$

Sedaj pa si zamislimo, da sila N deluje v točki T_r . Pripadajočo nevtralno os, imenujmo jo premica p , določimo z enačbo

$$p : \quad 1 + y \frac{y_r}{i_z^2} + z \frac{z_r}{i_y^2} = 0. \quad (5.86)$$

Enačba (5.85) pove, da točka T_N leži na premici p , saj velja

$$1 + y_N \frac{y_r}{i_z^2} + z_N \frac{z_r}{i_y^2} = 0. \quad (5.87)$$

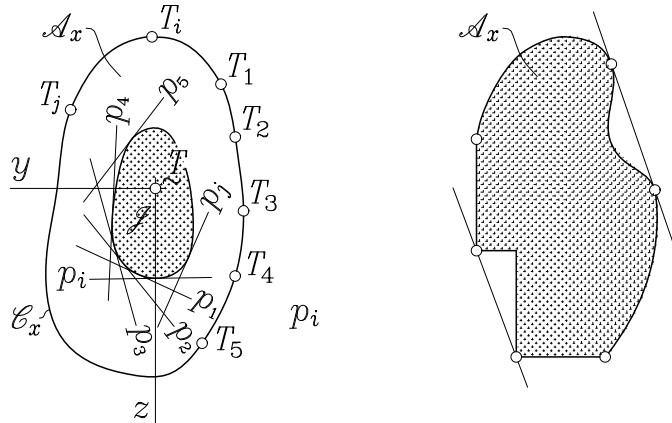
Ugotovili smo torej, da točka T_N kot element meje jedra prereza leži na premici, ki bi jo dobili kot nevtralno os prereza, če bi sila N delovala v robni točki T_r . Za prečne prereze s konveksnim robom lahko od tod izpeljemo razmeroma preprosto pravilo za določitev meje jedra prereza: množici robnih točk $T_r \in \mathcal{C}_x$ priredimo množico premic p , ki tvorijo ovojnico jedra prereza. V ta namen je enačbo (5.86) ugodno zapisati v segmentni obliki

$$p : \quad \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1, \quad (5.88)$$

kjer je

$$a = -\frac{i_z^2}{y_r} \quad \text{in} \quad b = -\frac{i_y^2}{z_r}. \quad (5.89)$$

Načeloma bi torej morali za vsako iz neskončne množice točk T_r konture prereza \mathcal{C}_x konstruirati pripadajočo premico p .



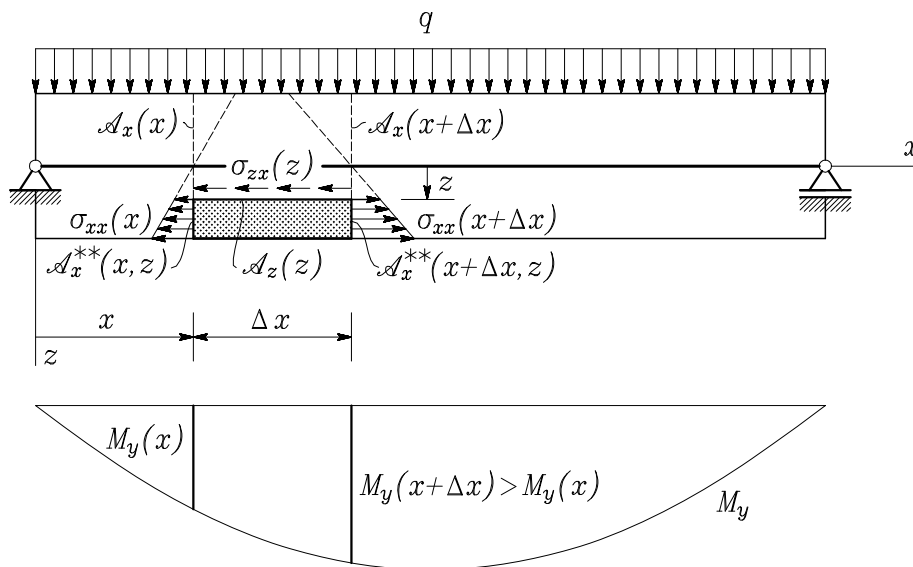
Slika 5.9

Vendar se pri prerezih z mejnimi črtami poligonalne oblike izkaže, da je dovolj, če določimo le tiste premice p , ki pripadajo ogliščem poligona. Premice p , ki pripadajo vmesnim točkam med oglišči, se namreč zgolj v eni točki dotikajo meje jedra prereza, na njeno obliko pa ne vplivajo. Pri prerezih, katerih mejne črte \mathcal{C}_x imajo tudi konkavne odseke, so za določitev meje jedra prereza pomembne samo tiste robne točke, skozi katere lahko narišemo tangento na rob \mathcal{C}_x , ki ne seka prečnega prereza (slika 5.9). Jedro prereza smo namreč definirali ravno z zahtevo, da so nevtralne osi, ki pripadajo prijemališčem ekscentrične osne sile na robu jedra prereza, tangente na robno krivuljo \mathcal{C}_x in je torej ne smejo sekati. Pri prerezih poligonalne oblike podobno velja, da mejo jedra prereza določajo le tista oglišča, ki jih lahko povežemo s premico, ki ne seka prečnega prereza.

Strižne in prečne normalne napetosti

V dosedanjih izvajanjih smo zanemarili vpliv strižnih in prečnih normalnih napetosti na pomike in vzdolžne normalne napetosti linijskega nosilca. Zato doslej tudi nismo upoštevali ravnotežnih pogojev za delec znotraj nosilca; jasno je namreč, da poljuben elementarni del nosilca

brez strižne trdnosti pri splošni obtežbi ne bi bil v ravnotežju. O tem se lahko prepričamo na preprostem primeru prostoležečega nosilca z enakomerno obtežbo $\mathcal{P}_z = q$ (slika 5.10).



Slika 5.10

Oglejmo si elementarni del nosilca, ki ga določajo prerezi $\mathcal{A}_x(x)$, $\mathcal{A}_x(x + \Delta x)$ in $\mathcal{A}_z(z)$. Enačba (5.68) pove, da je vzdolžna normalna napetost σ_{xx} linearno razporejena po prečnem prerezu, pri čemer je natezna normalna napetost na spodnjem robu v prerezu $\mathcal{A}_x(x + \Delta x)$ večja od robne natezne normalne napetosti v prerezu $\mathcal{A}_x(x)$. Zato je tudi rezultanta vzdolžnih normalnih napetosti na delnem prerezu $\mathcal{A}_x^{**}(x + \Delta x, z)$ večja od rezultante na delnem prerezu $\mathcal{A}_x^{**}(x, z)$. Če torej v prerezu $\mathcal{A}_z(z)$ ne bi bilo strižne napetosti σ_{zx} , obravnavani elementarni del nosilca ne bi bil v ravnotežju. Rezultanta strižnih napetosti $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$ v prerezu $\mathcal{A}_z(z)$ mora zato uravnovežiti razliko resultant normalnih napetosti v obeh čelnih delnih prerezih.

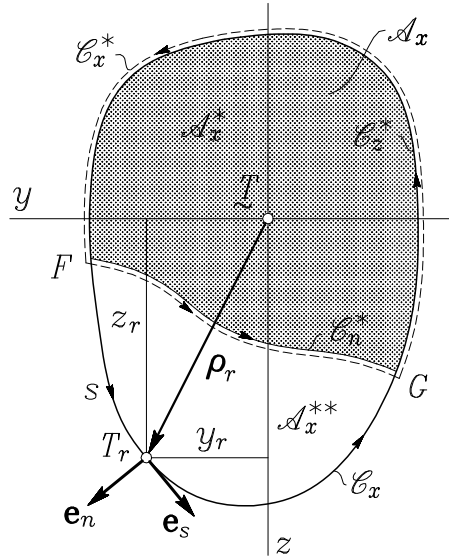
Zahtevajmo torej, naj bo za vsak delec iz območja \mathcal{V} izpolnjen ravnotežni pogoj (1.122)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.90)$$

na plašču \mathcal{S}_{pl} pa robni pogoj (1.138)

$$\sigma_x e_{nx} + \sigma_y e_{ny} + \sigma_z e_{nz} = \mathbf{p}_n. \quad (5.91)$$

Pri izpeljavi prečnih napetosti se omejimo na nosilce valjaste ali prizmatične oblike, pri katerih se velikost in oblika prečnega prereza \mathcal{A}_x vzdolž nosilca ne spreminjata. Zunanja normala \mathbf{e}_n plašča \mathcal{S}_{pl} je zato vseskozi pravokotna na vzdolžno os nosilca ($e_{nx} = 0$).



Slika 5.11

Nosilec presekamo z namišljeno premonosno ploskvijo \mathcal{E} , katere tvorilke so vzporedne z računsko osjo x . Presečnica prečnega prereza \mathcal{A}_x s ploskvijo \mathcal{E} razdeli prečni prerez na dva dela \mathcal{A}_x^* in \mathcal{A}_x^{**} (slika 5.11).

Oglejmo si del \mathcal{A}_x^* , ki je ograjen s krivuljo $\widetilde{FG} = \mathcal{C}_n^*$ in delom $\widetilde{GF} = \mathcal{C}_z^*$ zunanje mejne krivulje \mathcal{C}_x . Omenjena odseka torej sestavljata sklenjeno krivuljo $\mathcal{C}_n^* \cup \mathcal{C}_z^* = \mathcal{C}_x^*$. Ravnotežna enačba (5.90) pove, da sta oba

dobljena dela nosilca vsak zase v ravnotežju. Integrirajmo ravnotežni pogoj (5.90) po delnem prerezu \mathcal{A}_x^*

$$\int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^*} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^*} \mathbf{v} dA_x = \mathbf{0}. \quad (5.92)$$

Drugi integral v enačbi (5.92) pretvorimo z *Greenovim*[†] *integralskim izrekom* v integral po sklenjeni krivulji \mathcal{C}_x^* , ki ograjuje delni prerez \mathcal{A}_x^* . Greenov izrek predstavlja poseben primer zapisa Stokesovega izreka v ravnini. Za ravnino prečnega prereza (y, z) dobimo Greenov izrek tako, da v Stokesovem izreku (2.196) vzamemo $dx = 0$ ter $e_{nx} = 1$, $e_{ny} = e_{nz} = 0$

$$\oint_{\mathcal{C}_x^*} (\mathbf{P}_y dy + \mathbf{P}_z dz) = \int_{\mathcal{A}_x^*} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial z} \right) dA_x \quad (5.93)$$

oziroma v skalarni obliki

$$\oint_{\mathcal{C}_x^*} (P_y dy + P_z dz) = \int_{\mathcal{A}_x^*} \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) dA_x. \quad (5.94)$$

V našem primeru je tako

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_x^*} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dA_x &= \oint_{\mathcal{C}_x^*} (-\sigma_z dy + \sigma_y dz) = \\ &= \int_{\mathcal{C}_n^*} (-\sigma_z dy + \sigma_y dz) + \int_{\mathcal{C}_z^*} (-\sigma_z dy + \sigma_y dz), \end{aligned} \quad (5.95)$$

kjer smo integral po sklenjeni krivulji \mathcal{C}_x^* izrazili kot vsoto integralov po krivuljah \mathcal{C}_n^* in \mathcal{C}_z^* . Integriranje po delu \mathcal{C}_z^* mejne krivulje prereza \mathcal{C}_x se občutno poenostavi, če vpeljemo dolžino mejne krivulje od poljubne začetne točke na tej krivulji kot ločno koordinato s . Poljubna točka T_r

[†] George Green, angleški matematik (1793–1841).

ima glede na koordinatni osi y in z koordinati y_r in z_r , ki sta v izbranem prečnem prerezu $\mathcal{A}_x(x = konst.)$ odvisni le od ločne koordinate s

$$y_r = y_r(s) \quad \text{in} \quad z_r = z_r(s). \quad (5.96)$$

Krajevni vektor $\boldsymbol{\rho}_r$ točke T_r glede na težišče prereza \mathcal{T} je tako

$$\boldsymbol{\rho}_r = y_r \mathbf{e}_y + z_r \mathbf{e}_z = \boldsymbol{\rho}_r(s). \quad (5.97)$$

Z odvajanjem krajevnega vektorja $\boldsymbol{\rho}_r$ po ločni koordinati s dobimo enotski vektor \mathbf{e}_s tangente na mejno krivuljo v točki T_r

$$\mathbf{e}_s = \frac{d\boldsymbol{\rho}_r}{ds} = \frac{dy_r}{ds} \mathbf{e}_y + \frac{dz_r}{ds} \mathbf{e}_z. \quad (5.98)$$

Enotski vektor \mathbf{e}_n zunanje normale na plašč nosilca v točki T_r najlažje določimo kot vektorski produkt tangenta vektorja \mathbf{e}_s in baznega vektorja \mathbf{e}_x (slika 5.11), pri čemer upoštevamo, da je $\mathbf{e}_x \perp \mathcal{A}_x$.

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_x = \left(\frac{dy_r}{ds} \mathbf{e}_y + \frac{dz_r}{ds} \mathbf{e}_z \right) \times \mathbf{e}_x = \frac{dz_r}{ds} \mathbf{e}_y - \frac{dy_r}{ds} \mathbf{e}_z. \quad (5.99)$$

Ker je sicer $\mathbf{e}_n = e_{nx} \mathbf{e}_x + e_{ny} \mathbf{e}_y + e_{nz} \mathbf{e}_z$, iz primerjave z enačbo (5.99) sledi

$$e_{nx} = 0 \quad e_{ny} = \frac{dz_r}{ds} \quad e_{nz} = -\frac{dy_r}{ds}. \quad (5.100)$$

Vzdolž mejne krivulje \mathcal{C}_x , kjer je $y = y_r$ in $z = z_r$, lahko torej prirastka dy in dz kartezijskih koordinat izrazimo s prirastkom ds ločne koordinate s

$$\mathcal{C}_x : \quad dy = -e_{nz} ds \quad \text{in} \quad dz = e_{ny} ds. \quad (5.101)$$

Vrnimo se k enačbi (5.95), v kateri lahko integral po delu \mathcal{C}_z^* mejne krivulje \mathcal{C}_x^* ob upoštevanju enačb (5.100), (5.101) in (5.91) zapišemo takole

$$\int_{\mathcal{C}_z^*} (-\sigma_z dy + \sigma_y dz) = \int_{\mathcal{C}_z^*} (\sigma_y e_{ny} + \sigma_z e_{nz}) ds = \int_{\mathcal{C}_z^*} \mathbf{p}_n ds. \quad (5.102)$$

Enačba (5.92) se s tem glasi

$$\int_{\mathcal{C}_n^*} (\sigma_z dy - \sigma_y dz) = \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA_x + \int_{\mathcal{C}_z^*} \mathbf{p}_n ds + \int_{\mathcal{A}_x^*} \mathbf{v} dA_x. \quad (5.103)$$

Kakor lahko ugotovimo s primerjavo z enačbo (5.9), predstavlja vsota zadnjih dveh členov na desni strani enačbe (5.103) tisti del nadomestne zunanje linijske obtežbe \mathcal{P} , ki pripada delnemu prerezu \mathcal{A}_x^* . Zato v skladu z enačbo (5.9) vpeljemo okrajšavo

$$\mathcal{P}^* = \int_{\mathcal{C}_z^*} \mathbf{p}_n ds + \int_{\mathcal{A}_x^*} \mathbf{v} dA_x \quad (5.104)$$

in enačbo (5.103) zapišemo v preglednejši obliki

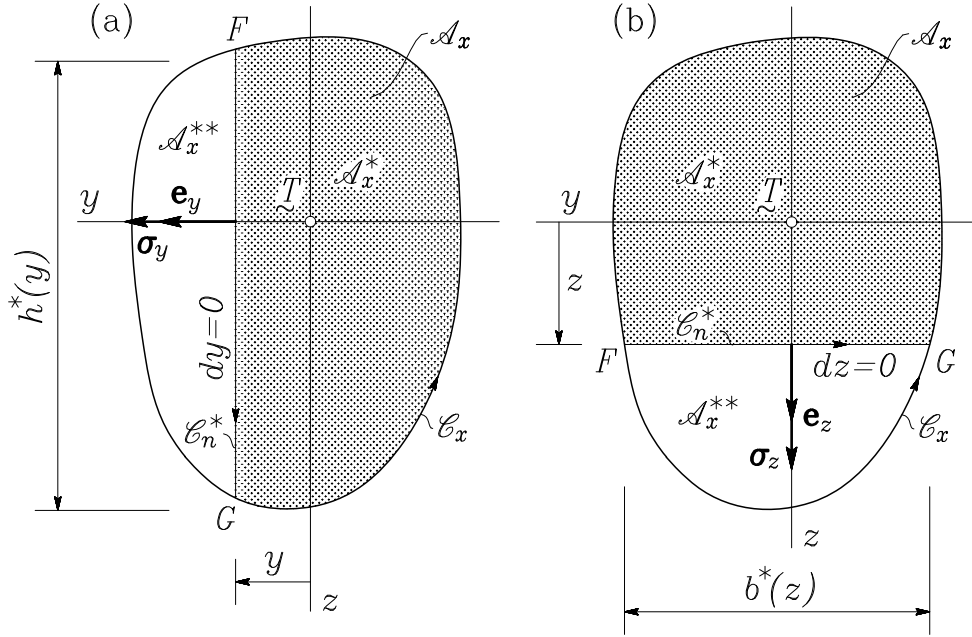
$$\int_{\mathcal{C}_n^*} (\sigma_z dy - \sigma_y dz) = \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA_x + \mathcal{P}^*. \quad (5.105)$$

Z enačbo (5.105) določimo napetostni vektor σ_y tako, da kot prerezno ploskev \mathcal{E} izberemo ravnino $y = konst.$ z normalo \mathbf{e}_y (slika 5.12-a). Tedaj je presečnica $\mathcal{C}_n^* = \overline{FG}$ s prečnim prerezom \mathcal{A}_x ravna in vzporedna z osjo z . Vzdolž presečnice \mathcal{C}_n^* je zato $dy = 0$. Upoštevajoč, da so razsežnosti prečnega prereza majhne v primerjavi z dolžino nosilca, vpeljemo še predpostavko, da se napetostni vektor σ_y vzdolž presečnice \mathcal{C}_n^* zanemarljivo malo spreminja. Tedaj je

$$\int_{\mathcal{C}_n^*} (\sigma_z dy - \sigma_y dz) = - \int_F^G \sigma_y dz \approx -\sigma_y \int_F^G dz = -h^*(y) \sigma_y, \quad (5.106)$$

kjer smo poudarili, da je dolžina presečnice h^* odvisna od koordinate y . Prav tako sta od koordinate y odvisna delni prečni prerez \mathcal{A}_x^* in nadomestna obtežba \mathcal{P}^* , ki mu pripada. S tem lahko iz enačbe (5.105) izračunamo napetostni vektor σ_y v ravnini z normalo \mathbf{e}_y

$$\sigma_y = -\frac{1}{h^*(y)} \left[\int_{\mathcal{A}_x^*(y)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA_x + \mathcal{P}^*(y) \right]. \quad (5.107)$$



Slika 5.12

Podobno določimo napetostni vektor σ_z , le da tokrat kot presečno ploskev izberemo ravnino $z = konst.$ z normalo \mathbf{e}_z (slika 5.12-b). Vz-dolž presečnice \mathcal{C}_n^* je v tem primeru $dz = 0$ in iz enačbe (5.105) dobimo

$$\int_{\mathcal{C}_n^*} (\sigma_z dy - \sigma_y dz) = \int_F^G \sigma_z dy \approx -\sigma_z \int_G^F dy = -b^*(z) \sigma_z. \quad (5.108)$$

Napetostni vektor σ_z v ravnini z normalo \mathbf{e}_z je tako

$$\sigma_z = -\frac{1}{b^*(z)} \left(\int_{\mathcal{A}_x^*(z)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA_x + \mathcal{P}^*(z) \right). \quad (5.109)$$

Če napetostna vektorja σ_y in σ_z skalarno pomnožimo z \mathbf{e}_x , dobimo strižni napetosti σ_{yx} in σ_{zx} v ravninah z normalama \mathbf{e}_y oziroma \mathbf{e}_z .

Upoštevajoč simetrijo napetostnega tenzorja sta s tem določeni tudi strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} v ravnini z normalo \mathbf{e}_x , torej v prečnem prerezu \mathcal{A}_x

$$\boldsymbol{\sigma}_y \cdot \mathbf{e}_x = \sigma_{yx} = \sigma_{xy} = -\frac{1}{h^*(y)} \left(\int_{\mathcal{A}_x^*(y)} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA_x + \mathcal{P}_x^*(y) \right) \quad (5.110)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z \cdot \mathbf{e}_x = \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = -\frac{1}{b^*(z)} \left(\int_{\mathcal{A}_x^*(z)} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA_x + \mathcal{P}_x^*(z) \right), \quad (5.111)$$

kjer je \mathcal{P}_x^* vzdolžna komponenta nadomestne obtežbe nosilca, ki pripada delnemu prerezu \mathcal{A}_x^*

$$\mathcal{P}_x^* = \int_{\mathcal{C}_z^*} p_{nx} ds + \int_{\mathcal{A}_x^*} v_x dA_x. \quad (5.112)$$

V enačbi (5.110) nastopa parcialni odvod vzdolžne normalne napetosti σ_{xx} po x . Napetost σ_{xx} izrazimo z enačbo (5.68), ki smo jo sicer izpeljali ob predpostavki, da je vpliv strižnih napetosti na pomike in vzdolžne normalne napetosti zanemarljiv. Upoštevamo še, da so notranje sile N_x , M_y in M_z odvisne le od koordinate x , geometrijske karakteristike prečnega prereza A_x , I_{yy} in I_{zz} pa so v našem primeru konstante, saj smo vzeli, da se prečni prerez vzdolž nosilca ne spreminja. Tedaj je

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{1}{A_x} \frac{dN_x}{dx} + \frac{z}{I_{yy}} \frac{dM_y}{dx} - \frac{y}{I_{zz}} \frac{dM_z}{dx}. \quad (5.113)$$

Ob upoštevanju ravnotežnih enačb (5.30), (5.34) in (5.35) lahko enačbo (5.113) zapišemo tudi takole

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{1}{A_x} \mathcal{P}_x + \frac{z}{I_{yy}} (N_z - \mathcal{M}_y) + \frac{y}{I_{zz}} (N_y + \mathcal{M}_z). \quad (5.114)$$

S tem iz enačb (5.110) in (5.111) po ureditvi sledi

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{h^*(y)} \left[\mathcal{P}_x \frac{A_x^*(y)}{A_x} - \mathcal{P}_x^*(y) - (N_z - \mathcal{M}_y) \frac{S_y^*(y)}{I_{yy}} - (N_y + \mathcal{M}_z) \frac{S_z^*(y)}{I_{zz}} \right] \quad (5.115)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{b^*(z)} \left[\mathcal{P}_x \frac{A_x^*(z)}{A_x} - \mathcal{P}_x^*(z) - (N_z - \mathcal{M}_y) \frac{S_y^*(z)}{I_{yy}} - (N_y + \mathcal{M}_z) \frac{S_z^*(z)}{I_{zz}} \right]. \quad (5.116)$$

Tako smo izpeljali pomembni enačbi, ki določata strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} v poljubnem prečnem prerezu $\mathcal{A}_x(x)$ kot funkciji koordinat y oziroma z . Pri tem smo s S_y^* in S_z^* označili statična momenta delnega prereza \mathcal{A}_x^* glede na osi y in z .

V praksi pogosto uporabljamo poenostavljeno obliko enačb (5.115) in (5.116). Dobimo jo v posebnem primeru, ko je površinska obtežba p_{nx} na plašču \mathcal{S}_{pl} enaka nič, prostorninska obtežba v_x pa je neodvisna od koordinat y in z , torej je $v_x = v_x(x)$. V tem primeru s primerjavo prve od enačb (5.26) z enačbo (5.112) dobimo

$$\mathcal{P}_x \frac{A_x^*}{A_x} - \mathcal{P}_x^* = 0, \quad (5.117)$$

iz pete in šeste od enačb (5.26) pa lahko hitro ugotovimo, da je tedaj tudi $\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_z = 0$. Enačbi (5.115) in (5.116) preideta s tem v priročajšo obliko

$$\sigma_{xy}(x, y) = -N_y(x) \frac{S_z^*(y)}{h^*(y)I_{zz}} - N_z(x) \frac{S_y^*(y)}{h^*(y)I_{yy}} \quad (5.118)$$

$$\sigma_{xz}(x, z) = -N_y(x) \frac{S_z^*(z)}{b^*(z)I_{zz}} - N_z(x) \frac{S_y^*(z)}{b^*(z)I_{yy}}. \quad (5.119)$$

Prikazane izpeljave se nanašajo na izbrani prečni prerez $\mathcal{A}_x(x)$, pri čemer se moramo zavedati, da se prečni sili N_y in N_z spreminjata vzdolž nosilca in sta torej funkciji koordinate x . Zato smo v enačbah (5.118) in (5.119) nastopajoče funkcijske odvisnosti posebej poudarili.

Končno določimo še prečni normalni napetosti σ_{yy} in σ_{zz} . Enačbo (5.107) skalarno pomnožimo z \mathbf{e}_y , enačbo (5.109) pa z \mathbf{e}_z in dobimo

$$\boldsymbol{\sigma}_y \cdot \mathbf{e}_y = \sigma_{yy} = -\frac{1}{h^*(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*(y)} \sigma_{xy} dA_x + \mathcal{P}_y^*(y) \right) \quad (5.120)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z \cdot \mathbf{e}_z = \sigma_{zz} = -\frac{1}{b^*(z)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*(z)} \sigma_{xz} dA_x + \mathcal{P}_z^*(z) \right), \quad (5.121)$$

kjer sta \mathcal{P}_y^* in \mathcal{P}_z^* prečni komponenti nadomestne obtežbe nosilca, ki pripada delnemu prerezu \mathcal{A}_x^*

$$\mathcal{P}_y^* = \int_{\mathcal{C}_z^*} p_{ny} ds + \int_{\mathcal{A}_x^*} v_y dA_x \quad (5.122)$$

$$\mathcal{P}_z^* = \int_{\mathcal{C}_z^*} p_{nz} ds + \int_{\mathcal{A}_x^*} v_z dA_x.$$

Upoštevajoč ravnotežni enačbi (5.31) in (5.32) ter enačbi (5.118) in (5.119) lahko prečni normalni napetosti σ_{yy} in σ_{zz} v prerezu $\mathcal{A}_x(x)$ povežemo neposredno z nadomestno zunanjo obtežbo računske osi

$$\sigma_{yy} = -\frac{1}{h^*(y)} \left[\frac{\mathcal{P}_y}{I_{zz}} \int_{\mathcal{A}_x^*(y)} \frac{S_z^*(\tilde{y})}{h^*(\tilde{y})} dA_x + \frac{\mathcal{P}_z}{I_{yy}} \int_{\mathcal{A}_x^*(y)} \frac{S_y^*(\tilde{y})}{h^*(\tilde{y})} dA_x + \mathcal{P}_y^*(y) \right] \quad (5.123)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{b^*(z)} \left[\frac{\mathcal{P}_y}{I_{zz}} \int_{\mathcal{A}_x^*(z)} \frac{S_z^*(\tilde{z})}{b^*(\tilde{z})} dA_x + \frac{\mathcal{P}_z}{I_{yy}} \int_{\mathcal{A}_x^*(z)} \frac{S_y^*(\tilde{z})}{b^*(\tilde{z})} dA_x + \mathcal{P}_z^*(z) \right] \quad (5.124)$$

ali, če poudarimo še odvisnost od vzdolžne koordinate x ,

$$\sigma_{yy}(x, y) = -\frac{1}{h^*(y)} \left[\mathcal{P}_y(x) \frac{\chi_z^*(y)}{I_{zz}} + \mathcal{P}_z(x) \frac{\chi_y^*(y)}{I_{yy}} + \mathcal{P}_y^*(x, y) \right] \quad (5.125)$$

$$\sigma_{zz}(x, z) = -\frac{1}{b^*(z)} \left[\mathcal{P}_y(x) \frac{\chi_z^*(z)}{I_{zz}} + \mathcal{P}_z(x) \frac{\chi_y^*(z)}{I_{yy}} + \mathcal{P}_z^*(x, z) \right]. \quad (5.126)$$

Pri tem smo s χ_y^* in χ_z^* označili nove geometrijske karakteristike delnega prečnega prereza \mathcal{A}_x^* , z \tilde{y} in \tilde{z} pa integracijske spremenljivke za integriranje po \mathcal{A}_x^*

$$\begin{aligned} \chi_y^*(y) &= \int_{\mathcal{A}_x^*(y)} \frac{S_y^*(\tilde{y})}{h^*(\tilde{y})} dA_x & \chi_y^*(z) &= \int_{\mathcal{A}_x^*(z)} \frac{S_y^*(\tilde{z})}{b^*(\tilde{z})} dA_x \\ \chi_z^*(y) &= \int_{\mathcal{A}_x^*(y)} \frac{S_z^*(\tilde{y})}{h^*(\tilde{y})} dA_x & \chi_z^*(z) &= \int_{\mathcal{A}_x^*(z)} \frac{S_z^*(\tilde{z})}{b^*(\tilde{z})} dA_x. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Do enakih rezultatov seveda pridemo, če ponovimo postopek določanja prečnih napetosti za primer, da ravnotežno enačbo (5.90) integriramo po delnem prerezu \mathcal{A}_x^{**} (slika 5.11).

Očitno je računsko določanje prečnih normalnih napetosti občutno težja in zamudnejša naloga kakor računanje strižnih napetosti. K sreči je pri ravnih linijskih nosilcih vpliv prečnih normalnih napetosti pomemben kvečjemu lokalno na območju delovanja prečne površinske obtežbe, medtem ko je njihov vpliv na globalno obnašanje nosilca praviloma zanemarljiv. Bistveno drugačna pa je slika pri ukrivljenih nosilcih, pri katerih so tako imenovane radialne normalne napetosti pogosto celo vzrok porušitve.

Vpliv spremembe temperature na linijski nosilec

Konstrukcije so pogosto izpostavljene temperaturnim spremembam. Naštejmo nekaj značilnih primerov: segrevanje zaradi sproščanja hidratacijske toplote pri strjevanju svežega betona, osončenje, asfaltiranje, vpliv izvorov toplote na nosilne konstrukcije industrijskih peči, vpliv požara in podobno. V prvih treh omenjenih primerih gre za zmerne temperaturne spremembe, v zadnjih dveh pa so temperaturne spremembe lahko zelo velike (tudi do 1000 K ali več). Temperaturne spremembe vplivajo na konstrukcije podobno kot mehanska obtežba; povzročajo namreč deformiranje konstrukcijskih elementov, lahko pa se v njih pojavijo tudi napetosti. Zato temperaturne spremembe pogosto imenujemo kar *temperaturna obtežba*.

Naloga, ki zahteva določitev mehanskega stanja konstrukcije pri časovno in prostorsko spremenljivi temperaturi okolja (na primer okolnega zraka), združuje tri zapletene, medsebojno povezane fizikalne probleme. Za boljše razumevanje vzemimo nosilno konstrukcijo, ki je izpostavljena naravnemu požaru. V prvem delu računskega postopka moramo ob upoštevanju fizikalnih lastnosti zgradbe, vrste in zaloge gorilnega materiala, možnosti dotoka svežega zraka, morebitnega gašenja in drugih okoliščin določiti, kako se v odvisnosti od časa spreminja temperatura zraka v okolici obravnavane konstrukcije. Ta del naloge je praviloma najtežji, predvsem zaradi nezanesljivosti podatkov o termodinamičnih lastnostih in robnih pogojih problema. V praksi si največkrat pomagamo s kombinacijo statističnih in empiričnih metod, s katerimi termodinamične razmere v zračnem prostoru okrog konstrukcije opišemo s primernim spektrom časovno–temperaturnih funkcij. Te funkcije nastopajo kot vhodni podatki za drugi del računskega postopka, ki zahteva rešitev enačbe nestacionarnega prevajanja toplote po konstrukciji[†]. S tem ugotovimo, kako temperatura posameznih delov konstrukcije sledi segrevanju in ohlajevanju okolnega zraka. To pomeni, da v poljubnem

[†] Glej na primer knjigo: Stanek M., Turk G., Osnove mehanike trdnih teles, FGG, Ljubljana, 1998.

času med trajanjem požara poznamo razporeditev temperatur po konstrukciji. Ti podatki so osnova za tretji del računa, v katerem določamo mehanski odziv konstrukcije: napetosti, deformacije in pomike. V splošnem moramo pri tem upoštevati, da se zaradi visokih temperatur občutno spreminjajo mehanske lastnosti materiala; modul elastičnosti in meja plastičnega tečenja se pri povišanih temperaturah zmanjšujeta, tako da hitro pride do plastifikacije bolj obremenjenih delov konstrukcije. Razen tega se pri visokih temperaturah pri večini tehniških materialov občutneje razvijajo viskozne in druge časovno odvisne deformacije. Posledica so velike geometrijske spremembe, kar zahteva tudi upoštevanje nelinearnih zvez med deformacijami in pomiki.

Čeprav so omenjeni problemi v fizikalnem pogledu medsebojno povezani, bi bila računska analiza vseh treh hkrati prezahtevna. Zato jih v praksi praviloma obravnavamo ločeno, drugega za drugim. V tem razdelku obravnavamo zelo poenostavljen primer, pri katerem so temperaturne spremembe tako majhne, da lahko zanemarimo spremembe mehanskih lastnosti materiala. Razen tega vzamemo, da poznamo rezultate drugega od omenjenih treh računskih postopkov. To pomeni, da v izbranem času poznamo razporeditev temperature po vsakem prečnem prerezu nosilca. Ta je v splošnem sicer nelinearna, vendar jo lahko pri izrazito podolgovatem nosilcu dovolj natančno opišemo kar z linearnim nastavkom

$$\Delta T(x, y, z) = \Delta T_x(x) + y \Delta T_y(x) + z \Delta T_z(x). \quad (5.128)$$

Poudarili smo, da se koeficienti ΔT_x , ΔT_y in ΔT_z v splošnem lahko spreminjajo vzdolž nosilca v odvisnosti od trenutnega temperaturnega stanja.

Vzdolžno deformacijo ε_{xx} smo z enačbo (5.52) izrazili kot linearno funkcijo nad prečnim prerezom nosilca

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (5.129)$$

Deformacijo ε_{xx} pogosto imenujemo “geometrijska deformacija” ε_{xx}^g , saj gre za specifično spremembo dolžine v vzdolžni smeri, ki jo lahko izmerimo. Neumann-Duhamelove enačbe (3.111) povedo, da je geometrijska deformacija ε_{xx}^g sestavljena iz mehanskega in temperaturnega dela [†]

$$\varepsilon_{xx}^g \equiv \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^m + \varepsilon_{xx}^T = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_T \Delta T. \quad (5.130)$$

Nastavek (5.128) vstavimo v desno stran enačbe (5.130) in to izenačimo z desno stranjo enačbe (5.129). Tako dobimo

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = E \left(\frac{du}{dx} - \alpha_T \Delta T_x \right) - y E \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha_T \Delta T_y \right) - \\ z E \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha_T \Delta T_z \right). \end{aligned} \quad (5.131)$$

Nadaljnji postopek je enak kot v enačbah (5.56) do (5.68). V primeru, da sta osi y in z glavni vztrajnostni osi prečnega prereza, dobimo

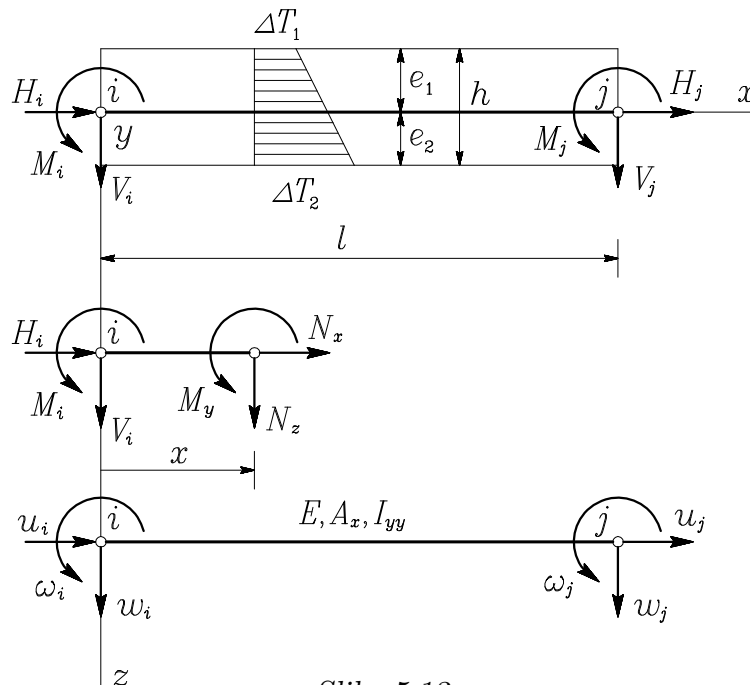
$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{N_x}{EA_x} + \alpha_T \Delta T_x \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M_z}{EI_{zz}} + \alpha_T \Delta T_y \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= -\frac{M_y}{EI_{yy}} - \alpha_T \Delta T_z. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Kakor vidimo, so enačbe za določanje pomikov analogne enačbam (5.60) ter (5.64) in (5.65), le da razen vpliva notranjih sil zajemajo tudi vpliv linearne temperaturne spremembe.

[†] V splošnem gre pri tem za uporabo tako imenovanega adicijskega načela, ki pravi, da lahko pri majhnih deformacijah geometrijsko deformacijo izrazimo kot vsoto mehanske, temperaturne, viskozne in morebitnih drugih deformacij (na primer krčenje in nabrekanje, mehano-sorptivne deformacije lesa, ...). Pri velikih deformacijah velja adicijsko načelo kvečjemu za infitezimalne prirastke deformacij.

V ilustracijo izpeljanih enačb si oglejmo primer določitve zvez med spremembo temperature in vozliščnimi silami ter pomiki in zasuki krajišč linijskega nosilca. Omejimo se na ravninski primer, pri katerem se lahko linijski element premika in upogiba zgolj v ravnini (x, z) . Element je izpostavljen spremembi temperature ΔT , ki je vzdolž nosilca in v smeri y enakomerna, po višini prečnega prereza pa se linearno spreminja.

Vpliv podpor oziroma sosednjih delov konstrukcije opišemo s točkovnimi silami in z dvojicama v krajiščih elementa, sicer pa nosilec ni mehansko obtežen (slika 5.13).



Slika 5.13

Vzemimo, da smo računsko ali kako drugače ocenili spremembi temperature na zgornji in spodnji površini prizmatičnega nosilca in dobili vrednosti ΔT_1 na zgornjem in ΔT_2 na spodnjem robu poljubnega prečnega prereza. Nastavek za ΔT je v našem primeru

$$\Delta T = \Delta T_x + z\Delta T_z. \quad (5.133)$$

Da bi lahko uporabili izpeljane enačbe, moramo najprej določiti koeficienta ΔT_x in ΔT_z linearnega nastavka za spremembo temperature v odvisnosti od “inženirskih” podatkov ΔT_1 in ΔT_2

$$\left. \begin{array}{l} z = -e_1 \quad \dots \quad \Delta T = \Delta T_1 \\ z = e_2 \quad \dots \quad \Delta T = \Delta T_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \Delta T_x = \frac{e_2 \Delta T_1 + e_1 \Delta T_2}{h} \\ \Delta T_z = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{h} . \end{array} \quad (5.134)$$

Vozliščne sile in dvojici, kakor tudi notranje sile v poljubnem prečnem prerezu, morajo zadoščati ravnotežnim pogojem

$$\begin{array}{ll} H_j = -H_i & N_x = -H_i \\ V_j = -V_i & N_z = -V_i \\ M_j = -M_i - V_i l & M_y = -M_i - V_i x . \end{array} \quad (5.135)$$

Izraza za osno silo N_x in upogibni moment M_y vstavimo v prvo oziroma v tretjo od enačb (5.132) in po integriranju dobimo

$$\begin{aligned} u &= -\frac{H_i}{EA_x} x + \alpha_T \Delta T_x x + C_1 \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{2EI_{yy}} (V_i x^2 + 2M_i x) - \alpha_T \Delta T_z x + C_2 \\ w &= \frac{1}{6EI_{yy}} (V_i x^3 + 3M_i x^2) - \alpha_T \Delta T_z \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 . \end{aligned} \quad (5.136)$$

Integracijske konstante C_1 , C_2 , C_3 določimo iz kinematičnih robnih pogojev za vozlišče i ob upoštevanju druge od enačb (5.50)

$$\begin{array}{ll} u = u_i & C_1 = u_i \\ x = 0 \quad \dots \quad \omega_y = -\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \omega_i & \rightarrow C_2 = -\omega_i \\ w = w_i & C_3 = w_i . \end{array} \quad (5.137)$$

Potek pomikov u in w ter zasuka ω_y vzdolž nosilca lahko sedaj opišemo z enačbami

$$\begin{aligned} u &= u_i - H_i \frac{x}{EA_x} + \alpha_T \Delta T_x x \\ \omega_y &= \omega_i - V_i \frac{x^2}{2EI_{yy}} - M_i \frac{x}{EI_{yy}} + \alpha_T \Delta T_z x \\ w &= w_i - \omega_i x + V_i \frac{x^3}{6EI_{yy}} + M_i \frac{x^2}{2EI_{yy}} - \alpha_T \Delta T_z \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Končno uporabimo še kinematične robne pogoje vozlišča j

$$\begin{aligned} u &= u_j \\ x = l \quad \dots \quad \omega_y &= - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = \omega_j \\ w &= w_j \end{aligned} \quad (5.139)$$

in dobimo

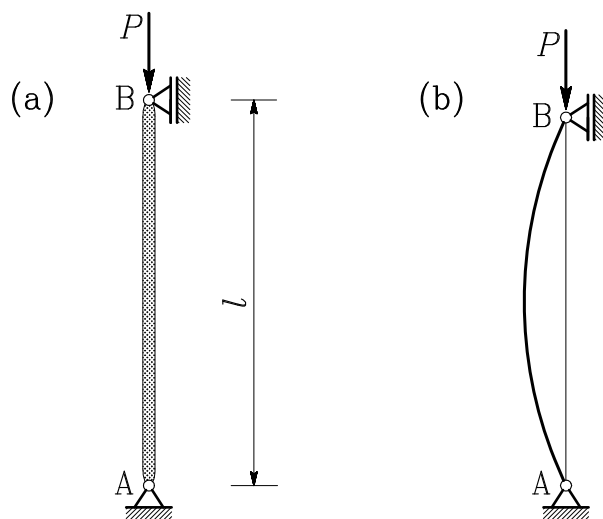
$$\begin{aligned} u_j &= u_i - H_i \frac{l}{EA_x} l + \alpha_T \Delta T_x l \\ \omega_j &= \omega_i - V_i \frac{l^2}{2EI_{yy}} - M_i \frac{l}{EI_{yy}} + \alpha_T \Delta T_z l \\ w_j &= w_i - \omega_i l + V_i \frac{l^3}{6EI_{yy}} + M_i \frac{l^2}{2EI_{yy}} - \alpha_T \Delta T_z \frac{l^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Enačbe (5.140) skupaj z levo trojico enačb (5.135) sestavljajo sistem šestih enačb, ki povezujejo pomike in zasuke krajišč elementa nosilca z vozliščnimi silami in momenti ter z enakomerno linearno spremembo temperature, ki je podana s parametroma ΔT_x in ΔT_z . Enačbe v prikazani obliki omogočajo upoštevanje poljubnih kinematičnih robnih pogojev v krajiščih nosilca. Praktična uporaba izpeljanih zvez v mehanski analizi linijskega nosilca pri temperaturni obtežbi je prikazana v zgledu 5.11.

5.4 Uklon ravnega grednega nosilca

Splošno o stabilnostnih problemih

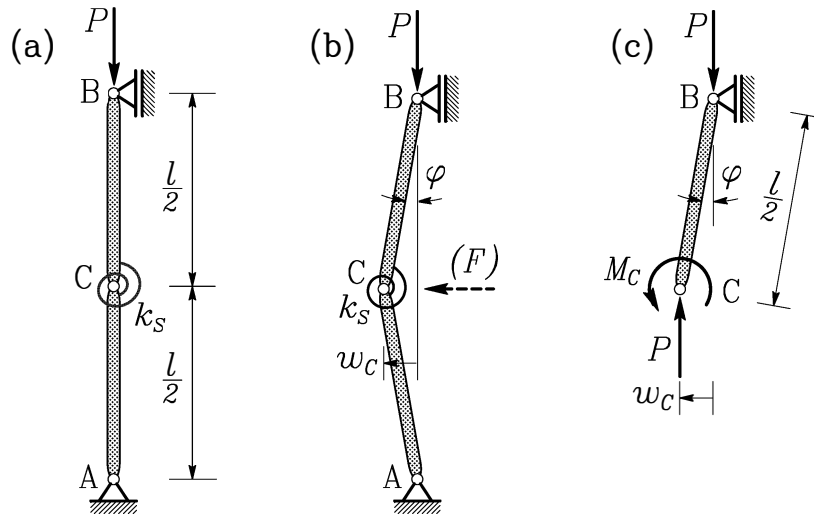
Iz vsakdanje izkušnje poznamo primer, da se naslonimo na tenko, na primer leskovo palico, pa se ta nenadoma izkloni. Primer lahko ponazorimo z ravnim nosilcem - palico, obteženo le s točkovno tlačno vzdolžno silo v pomični podpori (slika 5.14).



Slika 5.14

Čim bolj “čokata” je palica (slika 5.14-a), tem večjo vzdolžno silo lahko prevzame, ne da bi se izklonila. Nasprotno pa pri “vitkejši” palici (slika 5.14-b) prej pride do izklona. S preprostim poskusom se lahko tudi prepričamo, da se pri manjši obtežbi izkloni palica, ki ni popolnoma ravna ali ima nepravilno rast, grče, razpoke ali druge nepopolnosti. Pojavu, da tlačno obtežen linijski element nenadoma preskoči iz dotedanje v drugačno ravnotežno lego, pravimo *uklon*. Do podobnih pojavov pride tudi pri tlačno obteženih tankih stenah in lupinah, le da tedaj govorimo o *izbočitvi*. Vse tovrstne pojave pa s skupnim imenom imenujemo *stabilnostni problemi*.

Osnovni koncept nestabilnosti lahko ponazorimo s preprostim uklonskim modelom, ki ga sestavimo iz dveh enakih togih ravnih nosilcev, povezanih z upogibnim členkom C (slika 5.15-a).



Slika 5.15

Razen tega sta oba dela v členku povezana s spiralno (polžasto, rotacijsko) vzmetjo s togostjo k_S , ki zagotavlja stabilno začetno obliko sestava. V pomični podpori začnemo sestav obteževati s točkovno vzdolžno silo P , kakor kaže slika. Gre pravzaprav za nosilec s slike 5.14, le da je vsa njegova prečna deformabilnost “skoncentrirana” v spiralni vzmeti. V začetnem stanju sta vzdolžni osi obeh nosilcev idealno poravnani s smerjo sile, zato je spiralna vzmet neobremenjena, v obeh nosilcih pa nastopa le tlačna osna sila. Sedaj pa predpostavimo, da na členek C delujemo z majhno prečno silo F , tako da se za majhno vrednost $w_C \ll l$ izmakne iz začetne lege (slika 5.15-b). S tem se oba toga nosilca zasučeta za majhen kot $\varphi \ll 1$. Spiralna vzmet pri tem doživi zasuk 2φ in sedaj deluje na vsakega od nosilcev s povratnim momentom $M_C = 2k_S \varphi$. Preprost fizikalni razmislek pove, da povratni moment vzmeti zmanjšuje pomik členka iz začetne lege, obtežba P pa ga

povečuje. Če sedaj prečno obtežbo F odstranimo, imamo dve možnosti: če povratni moment prevlada nad vplivom vzdolžne sile P , se sestav povrne v začetno, ravno obliko. Takemu stanju sestava pravimo *stabilno stanje*. V nasprotnem primeru, če prevlada vpliv vzdolžne sile, se prečni pomik členka hitro poveča in sestav se poruši. Tako stanje imenujemo *nestabilno stanje*. Pri izbranih geometrijskih in materialnih lastnostih sestava je očitno le od velikosti sile P odvisno, ali je sestav stabilen ali nestabilen. Pri postopnem obteževanju sestava je jasno, da je ta v začetku stabilen, pri določeni velikosti sile P pa postane nestabilen. To vrednost imenujemo *kritična sila* in jo označimo s P_{kr} .

Kritično silo P_{kr} določimo iz pogojev ravnotežja v izmaknjeni legi. Začnimo s pogojem, da mora biti vsota vseh statičnih momentov glede na podporo A enaka nič. Pogoj pove, da v drsni podpori B ni prečne reakcije ($H_B = 0$). Sedaj pa si oglejmo zgornji del obravnavanega sestava (*slika 5.15-c*) in zapišimo pogoj, da mora biti vsota statičnih momentov glede na podporo B enaka nič

$$M_C - P w_C = 0. \quad (5.141)$$

Pri tem je $M_C = 2k_S \varphi$ in ker je φ majhen kot, velja

$$w_C = \frac{l}{2} \sin \varphi \approx \frac{l}{2} \varphi. \quad (5.142)$$

S tem iz pogoja (5.141) sledi

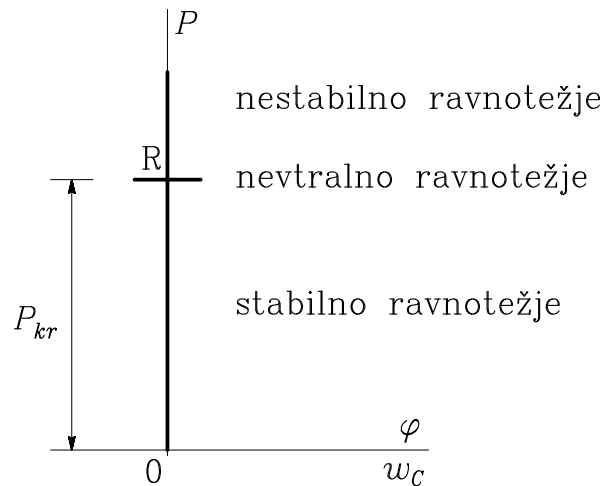
$$\varphi \left(2k_S - \frac{Pl}{2} \right) = 0. \quad (5.143)$$

Ta enačba je izpolnjena v dveh primerih. Prva rešitev je $\varphi = 0$, kar pomeni, da je sestav v ravnotežju pri $w_C = 0$, ne glede na velikost sile P . Vendar bi bila ta rešitev možna le pri idealno izdelani in poravnani konstrukciji, pri absolutno centrično nameščenih podporah in vmesnem členku ter ob absolutno centrično in v smeri vzdolžne osi delujoči obtežbi P . V naravi tako idealnih konstrukcij ni, zato nas bolj zanima

druga rešitev, ki jo dobimo z zahtevo, da je izraz v oklepaju enak nič. Od tod dobimo kritično silo P_{kr} , pri kateri je ravnotežje možno tudi v izklonjeni legi sestava

$$2k_S - \frac{P_{kr} l}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad P_{kr} = \frac{4k_S}{l}. \quad (5.144)$$

V obravnavanem primeru predstavlja kritična sila P_{kr} edino vrednost obtežbe P , pri kateri je sestav v izklonjeni legi v ravnotežju. Kritična sila torej določa mejo med stabilnim in nestabilnim obnašanjem konstrukcije.



Slika 5.16

Če je obtežba manjša od kritične sile ($P < P_{kr}$), je sestav stabilen. Tudi če se pojavi motnja, na primer majhen impulz prečne zunanje sile F , ki povzroči majhen izklon sestava iz idealno ravne začetne lege, povratni moment spiralne vzmeti prevlada nad vplivom vzdolžne obtežbe P in po odstranitvi motnje se sestav povrne v začetno, ravno obliko. Pri vrednosti $P = P_{kr}$ je sestav v ravnotežju tako v začetni ravni obliki ($\varphi = 0$), kakor tudi pri majhnem izklonu za kot $\varphi \ll 1$. V tem stanju torej ne moremo govoriti niti o stabilnem niti o nestabilnem ravnotežju in ga zato imenujemo *nevtralnno ravnotežje*. Če pa je obtežba večja od

kritične sile ($P > P_{kr}$), je konstrukcija *nestabilna*. V idealnih razmerah, torej pri $\varphi = 0$, bi obtežbo sicer lahko povečevali tudi nad vrednostjo P_{kr} , vendar bi vsaka motnja, na primer majhen prečni impulz sile F , povzročila izklon in v nadaljevanju porušitev konstrukcije. Kakor smo pokazali zgoraj, bi namreč v tem stanju vpliv vzdolžne sile prevladal nad vplivom povratnega momenta spiralne vzmeti in prečni pomik bi se povečal čez vse meje.

Opisani mehanizem lahko ponazorimo s sovisnico med velikostjo nastopajoče obtežbe P in zasučnim kotom φ oziroma prečnim pomikom w_C (slika 5.16). Točko R, v kateri je možna tako ravna kakor tudi izklonjena ravnotežna lega, imenujemo *razvejišče* ali *bifurkacija*.



Slika 5.17

Za boljše razumevanje pa posamezne vrste ravnotežja predstavimo še s klasično fizikalno skico kroglice v različnih ravnotežnih položajih glede na razgibano podlago (slika 5.17). Ta skica nas med drugim tudi opozori na zelo pomembno dejstvo, da je pojem ravnotežja v vseh treh primerih povezan z majhnimi premiki iz ravnotežne lege. Če bi se namreč kroglica iz nevtralne lege premaknila preveč v levo, bi prešla iz nevtralnega v stabilno ravnotežno stanje, pri velikem premiku v desno pa v stanje nestabilnega ravnotežja.

Nelinearni model linijskega nosilca

Vrnimo s k tlačnemu ravnemu nosilcu, s katerim smo začeli to podglavje (slika 5.14). Vzemimo, da smo koordinatni osi y in z v prečnem

prerezu nosilca izbrali tako, da sta I_{yy} in I_{zz} glavna upogibna vztrajnostna momenta, pri čemer je vztrajnostni moment glede na os y manjši od vztrajnostnega momenta glede na os z ($I_{yy} < I_{zz}$). V tem primeru imenujemo vztrajnostni moment I_{yy} *minimalni vztrajnostni moment*, os y pa *šibka vztrajnostna os*, saj je umestno pričakovati, da se nosilec pri dovolj veliki sili P ukloni ravno okrog osi y .

Za uvod pogledjmo, kam nas pripeljejo enačbe, ki smo jih izpeljali v prejšnjih razdelkih v okviru elementarne teorije upogiba z osno silo. Zapis ravnotežnih pogojev za nosilec v nedeformirani legi pripelje do sklepa, da v nosilcu nastopa le tlačna osna sila $N_x = -P$, vse ostale notranje sile, torej upogibna momenta in obe prečni sili pa so enaki nič ($M_y = M_z = 0$ in $N_y = N_z = 0$). Enačba upogibnice v ravnini (y, z) je tedaj

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_{yy}} = 0 \quad (5.145)$$

in po dvakratnem integriranju dobimo splošno rešitev

$$w(x) = C_1 x + C_2. \quad (5.146)$$

Integracijski konstanti C_1 in C_2 določimo iz kinematičnih robnih pogojev

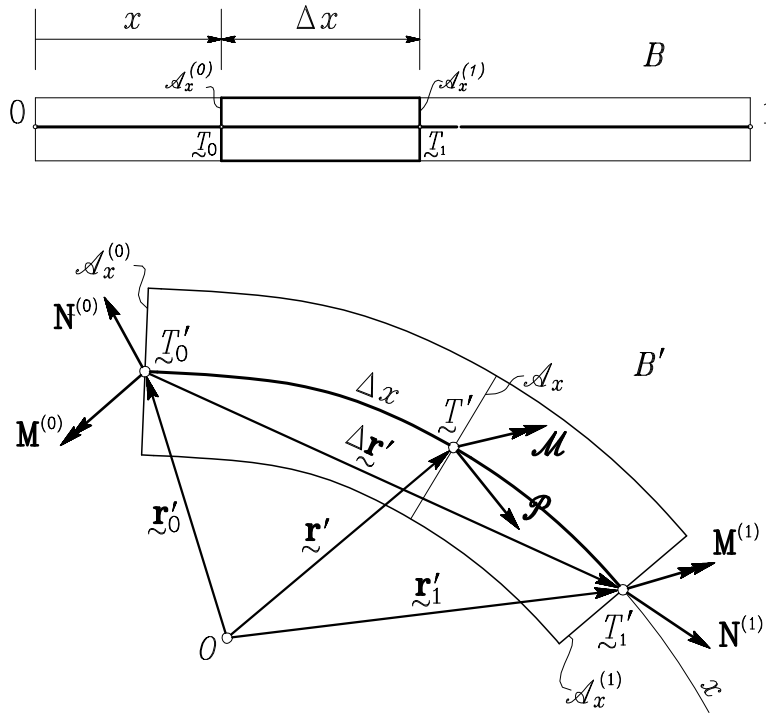
$$\begin{aligned} x = 0 \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \\ x = l \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.147)$$

tako da je $w = 0$ na celotni dolžini nosilca in to ne glede na velikost obtežbe P . Z ravnotežnimi enačbami, ki smo jih izpeljali na nedeformirani obliki nosilca in ki zato ne upoštevajo vpliva vzdolžne obtežbe na upogibna momenta, torej ne moremo zajeti pojava uklona, čeprav nas po drugi strani izkušnja uči, da ta pojav v naravi dejansko nastopa.

To pomeni, da moramo za obravnavanje uklonskih problemov vpeljati bolj strog matematični model nosilca, ki bo zajel medsebojni vpliv osne sile in upogibnega momenta. Kot prvi korak v tej smeri bomo zapisali ravnotežne pogoje nosilca v deformiranem stanju.

Ravnotežni pogoji za element deformiranega nosilca

Obravnavajmo element ravnega linijskega nosilca, ki ga omejujeta prečna prereza v točkah $\tilde{T}_0(x, 0, 0)$ in $\tilde{T}_1(x + \Delta x, 0, 0)$. Zunanja obtežba je v našem primeru opisana z nadomestnima linijskima obtežbama $\mathcal{P}(x)$ in $\mathcal{M}(x)$, za kateri predpostavimo, da sta konservativni in da torej med deformiranjem ohranjata svojo smer in velikost. Pod vplivom te obtežbe se obravnavani element deformira, kakor je prikazano na *sliki 5.18*.



Slika 5.18

V Lagrangevem opisu deformiranja ostanejo telesne koordinate posameznih točk nosilca nespremenjene med celotnim deformacijskim procesom, zato je končna razlika vzdolžnih telesnih koordinat obravnavanega elementa tudi po deformaciji številsko enaka Δx . Prostorske lege točk \tilde{T}_0, \tilde{T}_1 in poljubne točke \tilde{T} po deformaciji opišemo s krajevnimi vektorji

\mathbf{r}'_0 , \mathbf{r}'_1 in \mathbf{r}' glede na nepomično točko 0. Pri tem je

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_0 + \Delta \mathbf{r}' \quad \text{ozioroma} \quad \mathbf{r}'(x + \Delta x) = \mathbf{r}'(x) + \Delta \mathbf{r}'. \quad (5.148)$$

Za notranje sile in dvojice, s katerimi v točkah T_0 in T_1 preostali del nosilca deluje na obravnavani element, velja

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(0)} = -\mathbf{N}(x) & \quad \text{in} \quad \mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{N}(x + \Delta x) \\ \mathbf{M}^{(0)} = -\mathbf{M}(x) & \quad \mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}(x + \Delta x). \end{aligned} \quad (5.149)$$

Pri predznakih notranjih sil v točki T_0 smo upoštevali, da ima prečni prerez $\mathcal{A}_x^{(0)}$ "negativno" normalo $\mathbf{e}'_n = -\mathbf{e}'_x$.

Zapišimo najprej pogoj, da mora biti rezultanta vseh sil, ki v deformiranem stanju \mathbf{B}' delujejo na obravnavani element nosilca, enaka nič

$$\mathbf{N}^{(0)} + \mathbf{N}^{(1)} + \int_{\Delta x} \mathbf{P}(x) dx = \mathbf{0}. \quad (5.150)$$

Ob upoštevanju zvez (5.149) in izreka o povprečni vrednosti integrala[†] lahko enačbo (5.150) zapišemo na naslednji način

$$\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x) + \mathbf{P}(x + \xi) \Delta x = \mathbf{0} \quad (0 \leq \xi \leq \Delta x). \quad (5.151)$$

Enačbo (5.151) delimo z Δx , in izvedemo limitni proces, pri katerem gre dolžina obravnavanega elementarnega dela nosilca proti nič

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)}{\Delta x} + \mathbf{P}(x + \xi) \right] = \mathbf{0}. \quad (5.152)$$

Limita ulomka v oglatem oklepaju je po definiciji prvi odvod notranje sile \mathbf{N} po x ; ko gre Δx proti nič, gre proti nič tudi ξ in tako dobimo končno obliko ravnotežnega pogoja (5.150)

[†] Glej: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühligh, Matematični priročnik (1997), str. 328

$$\frac{d\mathbf{N}}{dx} + \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (5.153)$$

Kakor vidimo, smo dobili formalno povsem enako obliko ravnotežnega pogoja kot v primeru, ko smo ga zapisali na nedeformiranem elementu nosilca.

Zapišimo še drugi ravnotežni pogoj, ki zahteva, da je rezultirajoči statični moment vseh sil, ki delujejo na obravnavani del nosilca, enak nič

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{(0)} + \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{r}'_0 \times \mathbf{N}^{(0)} + \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{N}^{(1)} + \\ & \int_{\Delta x} \mathbf{r}' \times \mathbf{P}(x) dx + \int_{\Delta x} \mathbf{M}(x) dx = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.154)$$

Upoštevamo zveze (5.148) in (5.149) ter izrek o povprečni vrednosti integrala in s tem enačbo (5.154) zapišemo kot sledi

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(x + \Delta x) - \mathbf{M}(x) + \mathbf{r}'(x) \times [\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)] + \\ & \Delta \mathbf{r}' \times \mathbf{N}(x + \Delta x) + \mathbf{r}'(x + \xi_1) \times \mathbf{P}(x + \xi_1) \Delta x + \mathbf{M}(x + \xi_2) \Delta x = \mathbf{0} \\ & (0 \leq \xi_1 \leq \Delta x, 0 \leq \xi_2 \leq \Delta x). \end{aligned} \quad (5.155)$$

Enačbo delimo z Δx in izvedemo limitni proces, pri katerem gre dolžina elementa Δx proti nič. Tako dobimo

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{M}(x + \Delta x) - \mathbf{M}(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta x} \times \mathbf{N}(x + \Delta x) + \mathbf{M}(x + \xi_2) + \right. \\ & \left. \mathbf{r}'(x) \times \frac{\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)}{\Delta x} + \mathbf{r}'(x + \xi_1) \times \mathbf{P}(x + \xi_1) \right] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.156)$$

Od tod sledi

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} + \frac{d\mathbf{r}'}{dx} \times \mathbf{N} + \mathbf{M} + \mathbf{r}' \times \left(\frac{d\mathbf{N}}{dx} + \mathbf{P} \right) = \mathbf{0}. \quad (5.157)$$

Ob upoštevanju enačbe (5.153) in ker iz poglavja o deformabilnem telesu vemo, da je

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dx} = \mathbf{e}'_x, \quad (5.158)$$

kjer smo poudarili, da gre za vektor deformirane telesne baze, ki pripada težišču prereza \mathcal{T} , sledi končna oblika momentnega ravnotežnega pogoja

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} + \mathbf{e}'_x \times \mathbf{N} + \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (5.159)$$

Tudi momentna ravnotežna enačba deformiranega elementa se od tiste, ki smo jo izpeljali na nedeformiranem elementu, razlikuje le po tem, da v njej namesto vektorja \mathbf{e}_x nastopa vektor \mathbf{e}'_x deformirane telesne koordinatne baze. Kakor se bo izkazalo v nadaljevanju, pa ima ta razlika daljnosežne posledice pri izpeljavi uklonskih enačb.

Klasična uklonska enačba

Uvodoma smo za šibko vztrajnostno os izbrali os y , kar pomeni, da pričakujemo uklon nosilca okrog osi y . Zato v nadaljevanju obravnavamo primer upogiba v ravnini (z, x) , kakor je prikazano na *sliki 5.19*. V tem primeru je $N_y = 0$, $M_x = M_z = 0$ ter $u_y = 0$, $\omega_x = \omega_z = 0$. Upoštevati moramo, da gre pri uklonu za majhno spremembo oblike nosilca, zato je tudi v tem primeru umestna predpostavka, da so prvi parcialni odvodi pomikov in specifične spremembe dolžin majhne količine v primerjavi z enoto

$$\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right| \ll 1 \quad \text{in} \quad |D_{ii}| \ll 1. \quad (5.160)$$

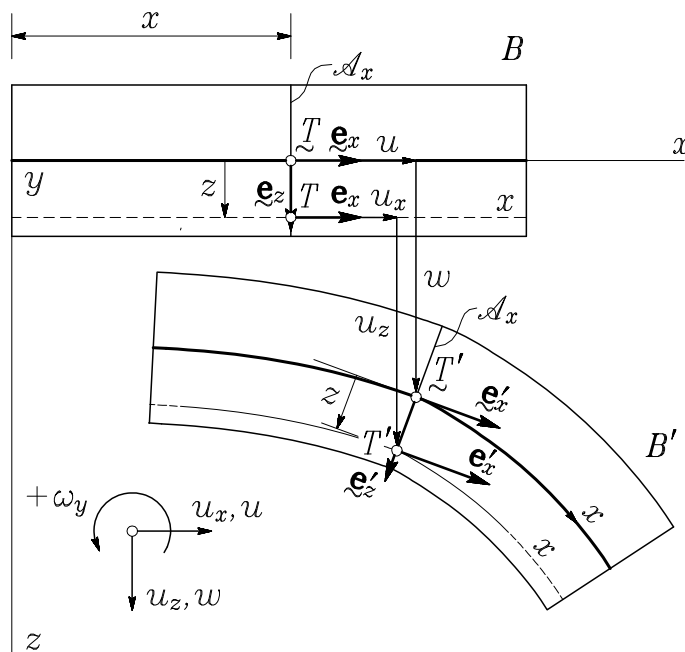
Pojav uklona je značilen za vitke nosilce, pri katerih je vpliv prečnih sil na povese in vzdolžne normalne napetosti zanemarljiv, zato privzamemo Bernoullijev model nosilca. Kakor smo ugotovili v okviru elementarne teorije, so pri upogibu z osno silo v ravnini (x, z) kartezijske

komponente pomika poljubne točke Bernoullijevega nosilca povezane s pomiki linijskega računskega modela z izrazi (5.73)

$$u_x = u - z \frac{dw}{dx}, \quad u_z = w. \quad (5.161)$$

Vektor pomika poljubne točke nosilca je tako

$$\mathbf{u} = \left(u - z \frac{dw}{dx} \right) \mathbf{e}_x + w \mathbf{e}_z. \quad (5.162)$$



Slika 5.19

V poglavju o deformabilnem telesu smo izpeljali formulo (2.22) za določitev baznih vektorjev deformirane telesne koordinatne baze

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}. \quad (5.163)$$

Deformirani telesni bazni vektor \mathbf{e}'_x je tako

$$\mathbf{e}'_x = \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}'_x = \left(1 + \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}\right) \mathbf{e}_x + \frac{dw}{dx} \mathbf{e}_z. \quad (5.164)$$

V skladu s prvo od predpostavk (5.160) lahko v koeficientu pri \mathbf{e}_x zanemarimo prvi parcialni odvod pomika u v primerjavi z enoto in dobimo

$$\mathbf{e}'_x = \left(1 - z \frac{d^2 w}{dx^2}\right) \mathbf{e}_x + \frac{dw}{dx} \mathbf{e}_z. \quad (5.165)$$

V momentni ravnotežni enačbi (5.159) nastopa deformirani bazni vektor $\underline{\mathbf{e}}'_x$, ki pripada težišču prereza \mathcal{T}

$$\underline{\mathbf{e}}'_x = \mathbf{e}'_x|_{z=0} \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{e}}'_x = \mathbf{e}_x + \frac{dw}{dx} \mathbf{e}_z. \quad (5.166)$$

Vektorski produkt, ki nastopa v enačbi (5.159), je tedaj

$$\underline{\mathbf{e}}'_x \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & \frac{dw}{dx} \\ N_x & 0 & N_z \end{vmatrix} = \left(N_x \frac{dw}{dx} - N_z\right) \mathbf{e}_y. \quad (5.167)$$

Zaradi popolnosti določimo še deformirani bazni vektor $\underline{\mathbf{e}}'_z$

$$\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}'_z = \underline{\mathbf{e}}'_z = -\frac{dw}{dx} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z. \quad (5.168)$$

Brez težav se prepričamo, da je vektor $\underline{\mathbf{e}}'_y$, ki pripada deformirani telesni koordinatni bazi, kar enak baznemu vektorju \mathbf{e}_y . Velja tudi

$$\underline{\mathbf{e}}'_x \cdot \underline{\mathbf{e}}'_y = \underline{\mathbf{e}}'_y \cdot \underline{\mathbf{e}}'_z = \underline{\mathbf{e}}'_z \cdot \underline{\mathbf{e}}'_x = 0. \quad (5.169)$$

To pomeni, da ostanejo telesni bazni vektorji, ki pripadajo točkam linijskega računskega modela, tudi po deformaciji pravokotni med seboj, kar je posledica privzete Bernoullijeve hipoteze. Očitno pa vektorja $\underline{\mathbf{e}}'_x$ in $\underline{\mathbf{e}}'_z$ nista več enotska vektorja.

Sedaj lahko zapišemo ravnotežne enačbe (5.153) in (5.159) deformiranega nosilca v skalarni obliki. Če notranjo silo \mathbf{N} in notranji moment \mathbf{M} kakor tudi nadomestni zunanji linijski obtežbi \mathcal{P} in \mathcal{M} zapišemo z njihovimi komponentami glede na začetno koordinatno bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, dobimo

$$\frac{dN_x}{dx} + \mathcal{P}_x = 0 \quad (5.170)$$

$$\frac{dN_z}{dx} + \mathcal{P}_z = 0 \quad (5.171)$$

$$\frac{dM_y}{dx} + N_x \frac{dw}{dx} - N_z + \mathcal{M}_y = 0. \quad (5.172)$$

V momentni ravnotežni enačbi sedaj nastopa tudi komponenta N_x notranje sile \mathbf{N} v smeri \mathbf{e}_x .

Ugodnejšo obliko enačbe (5.172) dobimo, če jo odvajamo po x in upoštevamo zvezo (5.171)

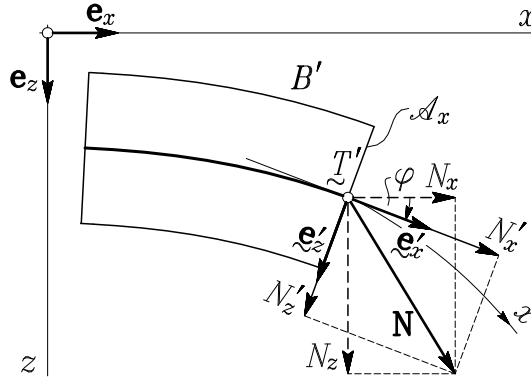
$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(N_x \frac{dw}{dx} \right) = - \left(\mathcal{P}_z + \frac{dM_y}{dx} \right). \quad (5.173)$$

Poudarili smo, da je N_x zgolj projekcija vektorja \mathbf{N} na smer enotskega baznega vektorja \mathbf{e}_x . *Fizikalno osno silo*, ki pripada obravnavanemu prečnemu prerezu \mathcal{A}_x v deformirani legi nosilca, označimo z N'_x in jo izračunamo kot rezultanto vzdolžnih normalnih napetosti σ_{xx} , katerih smer je določena z deformiranim baznim vektorjem $\underline{\mathbf{e}}'_x$. Po enaki logiki ima fizikalna prečna sila N'_z smer deformiranega baznega vektorja $\underline{\mathbf{e}}'_z$ (slika 5.20).

Rezultirajočo notranjo silo \mathbf{N} lahko torej enakovredno zapišemo tako v začetni bazi $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ kakor tudi v deformirani bazi $(\underline{\mathbf{e}}'_x, \underline{\mathbf{e}}'_z)$, ki pa jo moramo normirati, saj se pojem fizikalnih notranjih sil nanaša na enotske bazne vektorje

$$\mathbf{N} = N_x \mathbf{e}_x + N_z \mathbf{e}_z = N'_x \frac{\underline{\mathbf{e}}'_x}{|\underline{\mathbf{e}}'_x|} + N'_z \frac{\underline{\mathbf{e}}'_z}{|\underline{\mathbf{e}}'_z|}. \quad (5.174)$$

Pri upogibnem momentu ni težav z razlikovanjem komponent, saj je $\underline{\mathbf{e}}'_y = \mathbf{e}_y$ in zato tudi $\mathbf{M} = M_y \mathbf{e}_y$.



Slika 5.20

Enačba (5.169) pove, da je tudi normirana deformirana baza kartezijska, zato lahko povezavo med komponentami notranje sile v obeh bazah poiščemo na razmeroma preprost način. Enačbo (5.174) skalarno pomnožimo najprej z normiranim deformiranim baznim vektorjem $\underline{\mathbf{e}}'_x$ in nato še z normiranim vektorjem $\underline{\mathbf{e}}'_z$ ter dobimo

$$\begin{aligned} N'_x &= N_x \mathbf{e}_x \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_x}{|\underline{\mathbf{e}}'_x|} + N_z \mathbf{e}_z \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_x}{|\underline{\mathbf{e}}'_x|} \\ N'_z &= N_x \mathbf{e}_x \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_z}{|\underline{\mathbf{e}}'_z|} + N_z \mathbf{e}_z \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_z}{|\underline{\mathbf{e}}'_z|}. \end{aligned} \quad (5.175)$$

Glede na *sliko 5.20* lahko skalarne produkte, ki nastopajo v gornjih enačbah izrazimo v odvisnosti od naklonskega kota φ

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_x}{|\underline{\mathbf{e}}'_x|} &= \cos \varphi & \mathbf{e}_z \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_x}{|\underline{\mathbf{e}}'_x|} &= \sin \varphi \\
 \mathbf{e}_x \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_z}{|\underline{\mathbf{e}}'_z|} &= -\sin \varphi & \mathbf{e}_z \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}'_z}{|\underline{\mathbf{e}}'_z|} &= \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{5.176}$$

in enačbi (5.175) preideta v naslednjo obliko

$$\begin{aligned}
 N'_x &= N_x \cos \varphi + N_z \sin \varphi \\
 N'_z &= -N_x \sin \varphi + N_z \cos \varphi.
 \end{aligned} \tag{5.177}$$

Enačbi (5.177) lahko še nadalje poenostavimo. Ob upoštevanju zvez (5.166) in (5.168) ter omejitve (5.160) ugotovimo, da sta dolžini $|\underline{\mathbf{e}}'_x|$ in $|\underline{\mathbf{e}}'_z|$ enaki med seboj in da se zanemarljivo malo razlikujeta od enote

$$|\underline{\mathbf{e}}'_x| = |\underline{\mathbf{e}}'_z| = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \approx 1. \tag{5.178}$$

S tem lahko enačbi (5.175) zapišemo kot sledi

$$\begin{aligned}
 N'_x &= N_x + N_z \frac{dw}{dx} \\
 N'_z &= N_z - N_x \frac{dw}{dx}.
 \end{aligned} \tag{5.179}$$

Do te povezave lahko pridemo tudi tako, da v enačbah (5.177) upoštevamo zveze (5.69) do (5.71), razvijemo funkciji $\sin \varphi$ in $\cos \varphi$ v potenčno vrsto in obdržimo le linearne člene.

S prvo od dobljenih enačb in z ravnotežnima pogojema (5.170) in (5.171) lahko torej določimo osno silo N'_x , z ravnotežnim pogojem (5.172) oziroma (5.173) pa tudi upogibni moment M_y . Normalne napetosti σ_{xx} v prečnem prerezu moramo sedaj določiti tako, da bo njihova rezultanta enaka osni sili N'_x , njihov rezultirajoči statični moment glede na težišče pa upogibnemu momentu M_y . Z enoosnim poskusom

smo normalno napetost σ_{xx} povezali s specifično spremembo dolžine vzorca D_{xx} . V poenostavljenem primeru, ko so vse deformacijske količine zelo majhne v primerjavi z enoto, smo specifično spremembo dolžine kot realno fizikalno količino nadomestili z diagonalno komponento ε_{xx} simetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov, ki je po svoji naravi formalna matematična količina, fizikalni pomen pa ji lahko pripišemo le v primeru majhnih deformacij. V okviru našega strožjega računskega modela nosilca pa vzamemo konstitucijski zakon v obliki, ki ustreza enoosnemu poskusu

$$\sigma_{xx} = ED_{xx}. \quad (5.180)$$

V poglavju o deformabilnem telesu smo specifične spremembe dolžin izrazili s komponentami tenzorja velikih deformacij E_{ij} . Za vlakno, ki je bilo pred deformacijo vzporedno osi x , tako dobimo

$$D_{xx} = \sqrt{1 + 2E_{xx}} - 1. \quad (5.181)$$

Na obeh straneh enačbe (5.181) prištejemo 1 in jo kvadriramo

$$1 + 2D_{xx} + D_{xx}^2 = 1 + 2E_{xx}. \quad (5.182)$$

Upoštevajoč predpostavko (5.160) lahko zanemarimo D_{xx}^2 v primerjavi z $2D_{xx}$. Tako ugotovimo, da je specifična sprememba dolžine D_{xx} približno enaka komponenti E_{xx} tenzorja velikih deformacij, ki jo lahko izrazimo s parcialnimi odvodi pomikov

$$D_{xx} \approx E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2. \quad (5.183)$$

Pri tem smo upoštevali, da je v našem primeru $u_y = 0$. Ob predpostavki (5.160) lahko drugi člen zanemarimo v primerjavi s prvim

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \ll \left| \frac{\partial u_x}{\partial x} \right| \quad (5.184)$$

in z upoštevanjem zvez (5.161) dobimo

$$D_{xx} = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2. \quad (5.185)$$

Vzdolžna normalna napetost v poljubni točki prečnega prereza je tako

$$\sigma_{xx} = E \left[\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]. \quad (5.186)$$

Sedaj lahko zapišemo pogoja, da mora biti rezultanta normalnih napetosti σ_{xx} enaka osni sili N'_x , njihov rezultirajoči statični moment glede na težišče pa upogibnemu momentu M_y , ki smo ju predhodno določili iz ravnotežnih pogojev

$$\begin{aligned} N'_x &= \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x = \\ &E \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \int_{\mathcal{A}_x} dA_x - E \frac{d^2w}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x \end{aligned} \quad (5.187)$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x = \\ &E \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x - E \frac{d^2w}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x. \end{aligned} \quad (5.188)$$

Ker je

$$\int_{\mathcal{A}_x} dA_x = A_x, \quad \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x = S_y = 0, \quad \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x = I_{yy}, \quad (5.189)$$

iz enačb (5.187) in (5.188) sledi

$$N'_x = EA_x \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (5.190)$$

$$M_y = -EI_{yy} \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (5.191)$$

Zveza (5.191) je v mehaniki konstrukcij znana kot *enačba elastike* in je očitno neodvisna od tega, ali zapišemo ravnotežne pogoje na deformiranem ali na nedeformiranem nosilcu. To je razumljivo, saj gre dejansko za zvezo med upogibnim momentom in ukrivljenostjo nosilca, ki je zgolj geometrijski pojem in je pri majhnih spremembah oblike nosilca dovolj natančno opisana z drugim odvodom povesa w . Zvezo (5.191) vstavimo v momentno ravnotežno enačbo (5.173) in dobimo

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_{yy} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(N_x \frac{dw}{dx} \right) = \left(\mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} \right). \quad (5.192)$$

Tako smo dobili strožjo obliko enačbe upogibnice, ki posredno vključuje tudi vpliv osne sile na upogibke $w(x)$.

V nadaljevanju si oglejmo tri različne možnosti uporabe te enačbe. Najprej vzemimo, da na nosilec razen nadomestne linijske obtežbe \mathcal{P}_z in \mathcal{M}_y deluje še natezna osna obtežba v krajiščih nosilca, tako da je komponenta N_x pozitivna in konstantna po dolžini nosilca

$$N_x = N > 0 = \textit{konst.}$$

Zaradi preglednejšega pisanja vpeljemo okrajšavo

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI_{yy}}} \quad (5.193)$$

in za primer, da je upogibna togost EI_{yy} konstantna vzdolž nosilca, dobimo

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{EI_{yy}} \left(\mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} \right). \quad (5.194)$$

Splošna rešitev dobljene enačbe je

$$w(x) = C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx + C_3 x + C_4 + w_p, \quad (5.195)$$

kjer je w_p partikularna rešitev, odvisna od desne strani enačbe (5.194). Natančnejša matematična analiza pokaže, da dobljena enačba nima singularnih točk. To je razumljivo, saj si zlahka predstavljamo, da natezna osna sila kvečjemu zmanjšuje povese zaradi prečne obtežbe.

Kot drugo si oglejmo možnost, da v nosilcu vlada konstantna tlačna sila

$$N_x = -P = konst.$$

Z okrajšavo

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI_{yy}}} \quad (5.196)$$

in pri konstantni upogibni togosti se enačba (5.192) glasi

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{EI_{yy}} \left(\mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} \right). \quad (5.197)$$

V tem primeru nastopajo v homogenem delu splošne rešitve trigonometrične funkcije

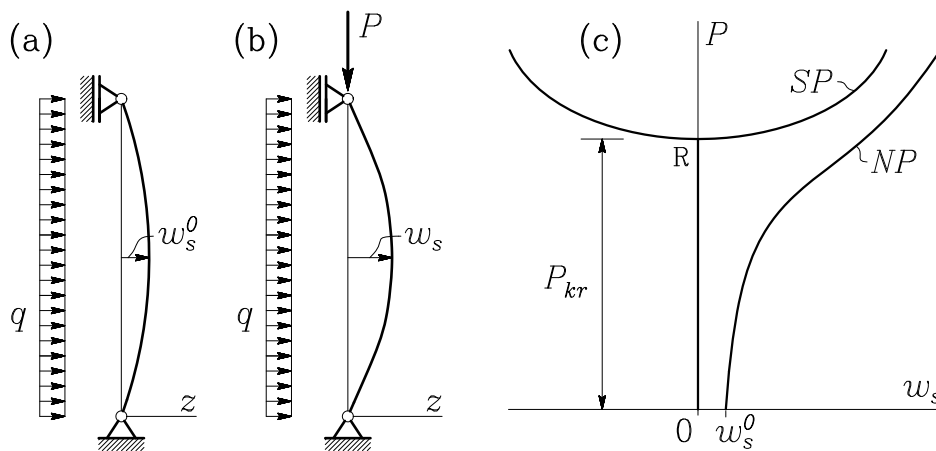
$$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 + w_p. \quad (5.198)$$

Nadaljnja analiza je odvisna od tega, kakšna je desna stran dobljene enačbe. V primeru, da na nosilec deluje od nič različna prečna obtežba ($\mathcal{P}_z \neq 0$ in $\mathcal{M}_y \neq 0$), je desna stran različna od nič in nosilec se deformira že pri vzdolžni obtežbi $P = 0$. Začetni pomik w^0 se z naraščanjem sile P povečuje, kar pomeni, da ravna ravnotežna oblika nosilca ni možna. Zato tudi ne pride do uklona nosilca v smislu preskoka iz ravne v upognjeno ravnotežno lego. Tak primer mehanskega stanja imenujemo *napetostni problem* za razliko od *stabilnostnega problema*, s kakršnim imamo opraviti v primeru, da je prečna obtežba enaka nič.

Kot poučen primer za ilustracijo obeh omenjenih pojmov si oglejmo prostoležeč nosilec, ki ga v prvem koraku obtežimo s prečno obtežbo $\mathcal{P}_z = q$ (slika 5.21-a). Povese na sredini nosilca, ki ga povzroči ta

obtežba, označimo z w_s^0 . Nato nosilec v pomičnem krajišču obtežimo še z vzdolžno tlačno silo P , ki jo postopoma povečujemo od vrednosti nič do predpisane končne vrednosti (slika 5.21-b). Začetni povos w_s^0 se ob zveznem povečevanju vzdolžne sile zvezno povečuje, torej ima nosilec v istem trenutku eno samo možno ravnotežno lego. Tak primer imenujemo *napetostni problem* (NP).

O *stabilnostnem problemu* (SP) pa govorimo tedaj, ko nosilec ni prečno obtežen ($q = 0$) in ga v ravni začetni obliki začnemo obteževati z vzdolžno tlačno silo P . Tedaj namreč nosilec ostane raven, vse dokler sila P ne doseže kritične vrednosti P_{kr} , pri kateri lahko nosilec trenutno preide v izklonjeno ravnotežno lego. Sovisnici med karakterističnim povosom w_s in nastopajočo vzdolžno obtežbo P sta za oba možna primera prikazani na sliki 5.21-c.



Slika 5.21

V nadaljevanju nas torej zanima stabilnostni problem, pri katerem je

$$\mathcal{P}_z = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{M}_y = 0$$

in enačba (5.197) preide v homogeno obliko

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (5.199)$$

Ob upoštevanju vpeljanih predpostavk in okrajšave (5.196) lahko iz enačbe (5.172) izrazimo tudi komponento N_z

$$N_z = -EI_{yy} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + k^2 \frac{dw}{dx} \right). \quad (5.200)$$

Enačbo (5.199) imenujemo *klasična uklonska enačba*, saj omogoča določitev kritične uklonske sile v klasičnih uklonskih primerih. V matematičnem pogledu gre za razmeroma preprosto navadno linearno homogeno diferencialno enačbo s konstantnim koeficientom, ki jo brez težav rešimo s primerno zamenjavo spremenljivk. Splošna rešitev je

$$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4. \quad (5.201)$$

Če določimo prve štiri odvode pomika w

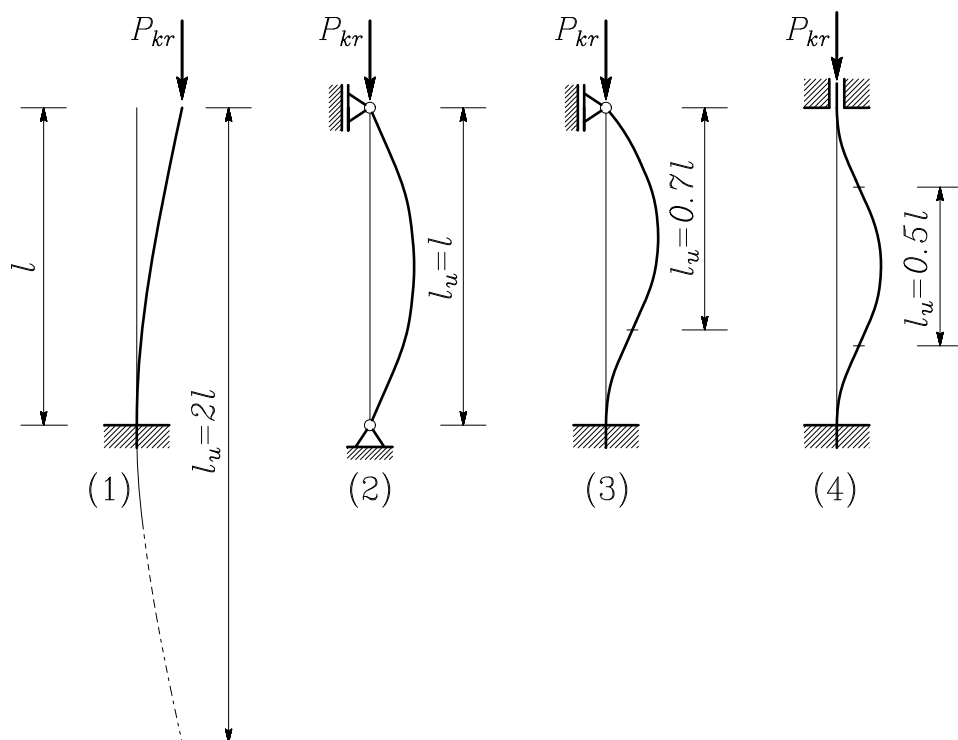
$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_3 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= -k^3 C_1 \cos kx + k^3 C_2 \sin kx \\ \frac{d^4 w}{dx^4} &= k^4 C_1 \sin kx + k^4 C_2 \cos kx, \end{aligned} \quad (5.202)$$

se lahko hitro prepričamo, da je nastavek (5.201) rešitev uklonske enačbe (5.199). Pri tem so C_1, \dots, C_4 integracijske konstante, ki jih moramo določiti iz ustreznih kinematičnih in statičnih robnih pogojev za vsak primer podpiranja nosilca posebej. Da bi lahko zapisali tudi kinematične robne pogoje v podporah, kjer je preprečen upogibni zasuk, se spomnimo še zveze med povosom w in zasukom ω_y

$$\omega_y = -\frac{dw}{dx}. \quad (5.203)$$

Določanje integracijskih konstant in s tem posebnih rešitev uklonske enačbe (5.199) prikažemo na štirih osnovnih uklonskih primerih, ki

predstavljajo praktično pomembne primere tlačno obteženih stebrov z različnimi načini podpiranja (slika 5.22).



Slika 5.22

Prvi osnovni uklonski primer

Kot prvega od osnovnih uklonskih primerov obravnavajmo enostransko polnovpet stebel dolžine l z minimalnim upogibnim vztrajnostnim momentom $I_{yy} = I_{min}$ in z modulom elastičnosti E (slika 5.22-1). V vpeti podpori ($x = 0$) morata biti izpolnjena kinematična robna pogoja, da sta preprečena poves w in zasuk ω_y . V prostem krajišču ($x = l$) pa moramo upoštevati statična robna pogoja, da sta tako prečna sila N_z kakor tudi upogibni moment M_y enaka nič. Pogoje, v katerih pomik w ne nastopa eksplicitno, izrazimo s pomočjo pomožnih enačb (5.191), (5.200) in (5.203)

$$\begin{aligned}
 x = 0 \dots & \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0 \\
 x = l \dots & \begin{cases} M_y = 0 \rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \\ N_z = 0 \rightarrow \frac{d^3w}{dx^3} + k^2 \frac{dw}{dx} = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ob upoštevanju izrazov (5.202) za odvode pomika w dobimo

$$\begin{aligned}
 C_2 + C_4 &= 0 \\
 kC_1 + C_3 &= 0 \\
 k^2C_1 \sin kl + k^2C_2 \cos kl &= 0 \\
 k^2C_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.204}$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih algebrajskih enačb za določitev konstant C_1, \dots, C_4 je tako preprost, da bi ga lahko rešili kar na pamet. Vendar ga najprej zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.205}$$

Prikazani homogeni sistem enačb ima vedno trivialno rešitev $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Vendar nas te rešitev ne zanima, saj pripelje zgolj do ravne ravnotežne oblike nosilca $w(x) = 0$. Netrivialne rešitve pa dobimo le v primeru, da je matrika koeficientov singularna, kar pomeni, da je njena determinanta enaka nič

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.206}$$

Z izvedenjem determinante preide pogoj (5.206) v naslednjo obliko

$$k^5 \cos kl = 0. \quad (5.207)$$

Prva rešitev dobljene enačbe je $k = 0 \rightarrow P = 0$, vendar ta rešitev ni zanimiva, saj pri neobteženem nosilcu uklona ne pričakujemo. Preostane nam množica drugih rešitev

$$\cos kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.208)$$

od katerih pa nas spet zanima le rešitev pri $n = 0$, za katero ob upoštevanju oznake (5.196) velja

$$l \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_{yy}}} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad P_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{(2l)^2}. \quad (5.209)$$

Tako smo dobili prvo in s tem najmanjšo kritično uklonsko silo v obravnavanem primeru, kar smo tudi poudarili z oznako ⁽¹⁾. Vse preostale rešitve pri $n = 1, 2, \dots$ bi namreč pripeljale do večjih vrednosti kritične uklonske sile, ki pa za praktično oceno uklonske varnosti nosilca niso pomembne.

Sedaj lahko končno zapišemo posebno rešitev uklonske enačbe za obravnavani primer. Pri $P = P_{kr}$ je matrika koeficientov sistema (5.205) singularna, zato je rešitev neskončno veliko. Drugače povedano, rešitev lahko določimo le *do faktorja natančno*. Načeloma bi morali uporabiti katero od znanih metod za iskanje netrivialnih rešitev homogenega sistema enačb. Vendar je naš primer tako preprost, da lahko neposredno zapišemo

$$C_1 = C_3 = 0 \quad \text{in} \quad C_4 = -C_2. \quad (5.210)$$

Ker je ob upoštevanju izraza (5.209) za kritično silo

$$k = \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_{yy}}} = \frac{\pi}{2l}, \quad (5.211)$$

sledi iz enačbe (5.201) posebna rešitev (slika 5.22-1)

$$w(x) = C_2 \left(\cos \frac{\pi x}{2l} - 1 \right). \quad (5.212)$$

Prva uklonska oblika obravnavanega nosilca je torej kosinusoida. Največji upogibek je določen z velikostjo konstante C_2 , ki je lahko poljubna, vendar dovolj majhna, da so izpolnjene predpostavke, ob katerih smo izpeljali uklonsko enačbo.

Drugi osnovni uklonski primer

Drugi osnovni uklonski primer predstavlja obojestransko členkasto podprt nosilec, ki je v pomično podprtem krajišču obtežen s tlačno vzdolžno silo P (slika 5.22-2). Robni pogoji v tem primeru so

$$x = 0 \dots \begin{cases} w = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$x = l \dots \begin{cases} w = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Ob upoštevanju izrazov (5.202) za odvode pomika w dobimo

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ k^2 C_2 &= 0 \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 &= 0 \\ k^2 C_1 \sin kl + k^2 C_2 \cos kl &= 0 \end{aligned} \quad (5.213)$$

oziroma v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.214)$$

Pogoj za obstoj netrivialnih rešitev

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.215)$$

tokrat pripelje do enačbe

$$k^4 l \sin kl = 0. \quad (5.216)$$

Podobno kakor v prejšnjem primeru obravnavamo le možnost

$$\sin kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.217)$$

Rešitev $kl = 0$ ne pride v poštev in prvo kritično uklonsko silo dobimo pri $n = 1$

$$l \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_{yy}}} = \pi \quad \rightarrow \quad P_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{l^2}. \quad (5.218)$$

Iz prve in druge enačbe sistema (5.213) sledi

$$C_2 = C_4 = 0, \quad (5.219)$$

iz tretje in četrte pa

$$\begin{aligned} C_1 \sin kl + C_3 l &= 0 \\ C_1 \sin kl &= 0. \end{aligned} \quad (5.220)$$

Torej mora biti $C_3 = 0$ in posebna rešitev uklonske enačbe je

$$w(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (5.221)$$

V tem primeru je uklonska oblika sinusoida. Največji upogibek na sredini dolžine nosilca je določen s konstanto C_1 , ki je spet lahko poljubna, vendar dovolj majhna vrednost.

Tretji osnovni uklonski primer

Tretji osnovni uklonski primer predstavlja steber, ki je na enem koncu tega vpet, na drugem pa pomično vrtljivo podprt in obtežen s tlačno vzdolžno silo P (slika 5.22-3). Robni pogoji za določitev integracijskih konstant so tedaj

$$x = 0 \dots \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0$$

$$x = l \dots \begin{cases} w = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = 0.$$

Ob upoštevanju izrazov (5.202) za odvode pomika w dobimo

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ kC_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 &= 0 \\ k^2 C_1 \sin kl + k^2 C_2 \cos kl &= 0. \end{aligned} \tag{5.222}$$

Podobno kakor v prejšnjih dveh primerih izrazimo pogoj za obstoj netrivialnih rešitev dobljenega homogenega sistema enačb z zahtevo, da mora biti determinanta matrike koeficientov enaka nič

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.223}$$

Tako dobimo

$$k^2 (\sin kl - kl \cos kl) = 0. \tag{5.224}$$

Pogoj za nastop ravnotežnega stanja v deformirani legi nosilca je tokrat

$$\sin kl - kl \cos kl = 0. \tag{5.225}$$

Dobljeno trigonometrično enačbo lahko rešimo s primerno iteracijsko metodo, na primer z Newtonovo metodo zaporednih približkov[†]. Najmanjša pozitivna rešitev, izračunana na tri decimalke natančno, je

$$kl \approx 4.493 \quad \rightarrow \quad l \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_{yy}}} \approx 4.493. \quad (5.226)$$

Prvo kritično silo izrazimo podobno kakor v prejšnjih primerih in z zaokrožitvijo koeficienta v imenovalcu dobimo

$$P_{kr}^{(1)} \approx \frac{\pi^2 EI_{yy}}{(0.7l)^2}. \quad (5.227)$$

V sistemu (5.222) lahko konstante C_2 do C_4 izrazimo s C_1

$$\begin{aligned} C_3 &= -kC_1 \\ C_2 &= -C_1 \operatorname{tg} kl \\ C_4 &= -C_2 = C_1 \operatorname{tg} kl. \end{aligned} \quad (5.228)$$

S tem in ob upoštevanju izraza (5.227) za kritično silo lahko uklonsko obliko opišemo z enačbo

$$w(x) \approx C_1 \left[\sin \frac{4.493x}{l} - 4.493 \cos \frac{4.493x}{l} + 4.493 \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]. \quad (5.229)$$

Četrty osnovni uklonski primer

Kot četrti osnovni uklonski primer obravnavamo obojestransko vpet nosilec, pri katerem je v obteženem krajišču sproščen vzdolžni pomik

[†] Glej na primer: Bronštejn, Semendjajev, Matematični priročnik, Ljubljana, 1967, str. 163-165.

(slika 5.22-4). Robni pogoji za določitev integracijskih konstant so tedaj

$$x = 0 \dots \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0$$

$$x = l \dots \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0.$$

Od tod sledi sistem homogenih enačb za integracijske konstante

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ kC_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 &= 0 \\ kC_1 \cos kl - kC_2 \sin kl + C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.230)$$

Iz zahteve, da mora biti determinanta matrice koeficientov enaka nič, dobimo pogoj za ravnotežje v deformiranem stanju v naslednji obliki

$$\cos kl - \frac{kl}{2} \sin kl - 1 = 0. \quad (5.231)$$

Hitro se lahko prepričamo, da je prva pozitivna rešitev dobljene enačbe $kl = 2\pi$. Od tod sledi prva kritična sila obravnavanega nosilca

$$P_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{(0.5l)^2}. \quad (5.232)$$

Preostane nam še določitev uklonske oblike. Če zapišemo sistem enačb (5.230) pri $kl = 2\pi$, dobimo

$$\begin{aligned} C_1 = C_3 &= 0 \\ C_4 &= -C_2 \end{aligned} \quad (5.233)$$

in enačbo računske osi nosilca v deformirani ravnotežni legi lahko zapišemo v preprosti obliki

$$w(x) = C_2 \left(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right). \quad (5.234)$$

Eulerjeva uklonska sila, uklonska dolžina, uklonska vitkost

Opazimo lahko, da smo ob predpostavki, da je $I_{yy} = I_{min}$, kritično uklonsko silo v vseh štirih obravnavanih uklonskih primerih formalno zapisali v enaki obliki

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{l_u^2}. \quad (5.235)$$

Pri tem smo vpeljali tako imenovano *uklonsko dolžino nosilca* l_u . V prvem od obravnavanih primerov je $l_u = 2l$, v drugem $l_u = l$, v tretjem $l_u \approx 0.7l$ in v četrtem $l_u = 0.5l$. Kritično silo, zapisano v obliki (5.235), imenujemo *Eulerjeva kritična uklonska sila* ali tudi *elastična uklonska sila*, saj je z njo določen prehod iz ravne v izklonjeno ravnotežno obliko le v primeru, da je nosilec v celoti v elastičnem območju.

Izraz za Eulerjevo kritično silo pogosto zapišemo tudi v nekoliko drugačni obliki. Kakor vemo iz elementarne trdnosti, predstavlja mero za upogibno togost prečnega prereza nosilca tako imenovani *vztrajnostni polmer prereza*. Pri uklonu okrog šibke osi y je pomemben vztrajnostni polmer $i_y = i_{min}$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A_x}}. \quad (5.236)$$

Pri obravnavanju uklonskih problemov je ugodno vpeljati novo količino λ , ki jo imenujemo *uklonska vitkost nosilca* in je definirana z razmerjem med uklonsko dolžino l_u in minimalnim vztrajnostnim polmerom, v našem primeru i_y

$$\lambda_y = \frac{l_u}{i_y}. \quad (5.237)$$

S tem lahko izraz za Eulerjevo kritično silo zapišemo takole

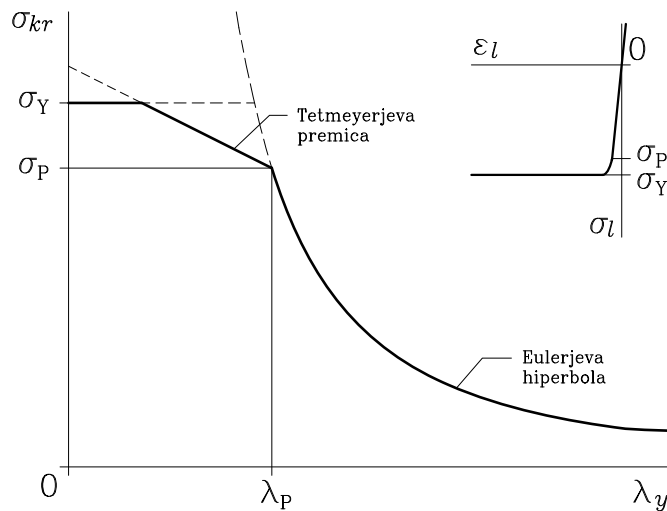
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EA_x}{\lambda_y^2}. \quad (5.238)$$

Dokler je tlačeni nosilec raven, je vzdolžna normalna napetost σ_{xx} enakomerna po celotnem prečnem prerezu \mathcal{A}_x in tudi po celotni dolžini

nosilca. Ko vzdolžna obtežba doseže kritično vrednost P_{kr} , nastopi v prečnem prerezu kritična normalna napetost $\sigma_{xx} = \sigma_{kr}$

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A_x} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}. \quad (5.239)$$

Pogoj nestabilnosti bi torej lahko izrazili tudi z ugotovitvijo, da pride do uklona takrat, ko vzdolžna normalna napetost doseže kritično vrednost σ_{kr} . Kritična napetost σ_{kr} je hiperbolična funkcija uklonske vitkosti λ_y , zato ustrezno sovisnico imenujemo *Eulerjeva hiperbola* (slika 5.23).



Slika 5.23

Pri zelo majhnih vrednostih uklonske vitkosti bi ob nekritični uporabi enačbe (5.239) dobili zelo visoke vrednosti kritične napetosti σ_{kr} . Ker smo Eulerjevo uklonsko silo določili ob predpostavki linearno elastičnega obnašanja materiala, je veljavnost enačbe (5.239) omejena glede na dejanske mehanske karakteristike materiala. Na sliki 5.23 je skiciran primer, da se material do meje proporcionalnosti σ_P obnaša linearno elastično, v območju med σ_P in mejo plastičnega tečenja σ_Y pa nelinearno elastično. Enačba (5.239) v tem primeru velja za vred-

nosti $\lambda_y \geq \lambda_P$, kjer je λ_P mejna uklonska vitkost

$$\lambda_P = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}. \quad (5.240)$$

V območju majhnih vitkosti ($\lambda_y \leq \lambda_P$) so pri praktičnih nalogah v rabi različne približne formule. Kot ena od možnosti je na *sliki 5.22* skicirana tako imenovana *Tetmeyerjeva*[†] *premica*

$$\sigma_{kr} = \sigma_P - \Theta (\lambda_P - \lambda_y), \quad (5.241)$$

za katero je treba parameter Θ umeriti s poskusi. V literaturi najdemo še druge aproksimacije obnašanja tlačnih elementov v območju majhnih vitkosti, na primer *Engesserjevo* ‡ *krivuljo*.

S tem zaključujemo poglavje o uklonu linijskega nosilca pri enakomerni tlačni osni sili. Gre za primer, da je linijski element le v obeh krajiščih tlačno obtežen s točkovnima vzdolžnima silama. To pomeni, da smo pri izpeljavi klasične uklonske enačbe zanemarili najmanj vpliv lastne teže nosilca. Nekoliko površno bi lahko ta pristop opravičili s pojasnilom, da je pojav uklona kritičen predvsem pri vitkih nosilcih, pri katerih je lastna teža razmeroma nepomembna v primerjavi z obtežbo v krajiščih.

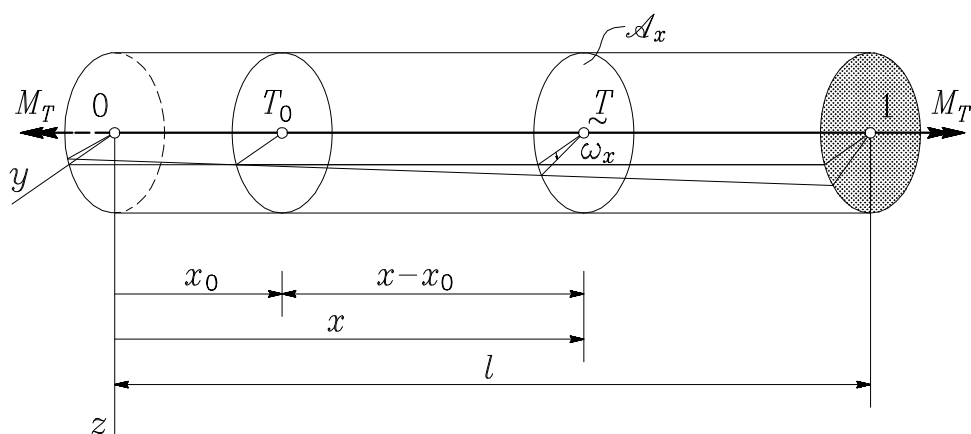
V okviru tega učbenika smo podrobneje proučili zgolj štiri tako imenovane osnovne uklonske primere. Gre za razmeroma preproste računske modele, s katerimi pa vendarle lahko opišemo velik del uklonskih problemov v realnih konstrukcijah. Tako je 1. uklonski primer primeren za opis centrično obteženih konzolnih stebrov, 2. uklonski primer je posebej značilen za členkasto povezane elemente paličnih konstrukcij, s 3. in 4. uklonskim primerom pa obvladujemo stebre v vmesnih in vrhnjih nadstropjih večetažnih stavb s togimi medetažnimi ploščami.

[†] Ludwig von Tetmeyer, avstrijsko-švicarski inženir, pionir modernih eksperimentalnih raziskav materialov in konstrukcij, 1850-1905.

[‡] Friedrich Engesser, nemški inženir, 1848-1931.

5.5 Enakomerna torzija ravnega linijskega nosilca

V tem razdelku obravnavamo torzijski del zunanje obtežbe, ki smo ga v dosednji analizi mehanskega stanja linijskega nosilca izključili. Vendar se tokrat odpovemo povsem splošnemu načinu torzijske obtežbe in obravnavamo posebni primer, pri katerem je nosilec obtežen le v krajiščih s po velikosti enakima, po smeri pa nasprotnima točkovnima dvojicama M_T (slika 5.24). To pomeni, da je notranji torzijski moment M_x po celotni dožini nosilca enakomeren ($M_x = M_T$). Od tod tudi ime primera – enakomerna torzija. Kot sledi iz enačb (5.26), obravnavana obtežba ustreza primeru, ko je plašč nosilca neobtežen ($p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0$), prav tako pa ni specifične prostorninske obtežbe ($v_x = v_y = v_z = 0$). Razen tega vzamemo, da v nobenem prečnem prerezu ni preprečena izbočitev. Obravnavani primer je v literaturi znan tudi pod imeni: čista, neovirana, Saint-Venantova torzija.



Slika 5.24

Kot osnovno predpostavko o deformiranju nosilca pri torzijski obtežbi spet vzamemo, da se velikost in oblika prečnega prereza v ravnini (y, z) med delovanjem obtežbe ne spreminjata.

Ker ni vzdolžne obtežbe in s tem tudi ne osne sile, lahko v skladu z enačbo (5.60) zanemarimo tudi specifično spremembo dolžine v smeri

vzdolžne osi.

$$\varepsilon_{yy} \approx \varepsilon_{zz} \approx \varepsilon_{yz} \approx 0 \quad \text{in} \quad \varepsilon_{xx} \approx 0. \quad (5.242)$$

Gre torej za primer deformacijskega stanja, pri katerem prevladujejo spremembe pravih kotov ε_{xy} in ε_{xz} v ravninah (x, y) in (x, z) . Koordinatni vektorji deformacij so tedaj

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_{xy} \mathbf{e}_y + \varepsilon_{xz} \mathbf{e}_z \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y = \varepsilon_{xy} \mathbf{e}_x \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z = \varepsilon_{xz} \mathbf{e}_x. \quad (5.243)$$

Konstitucijske enačbe

Ob upoštevanju predpostavk (5.242) sledijo iz konstitucijskih enačb (4.9) naslednje enostavne zveze

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2G \varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (5.244)$$

$$\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx \sigma_{zz} \approx \sigma_{yz} \approx 0. \quad (5.245)$$

Ravnotežne enačbe

Ravnotežne enačbe (4.1) se ob upoštevanju zvez (5.245) in ker smo izločili prostorninsko obtežbo, glasijo

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5.246)$$

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (5.247)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = 0. \quad (5.248)$$

Enačbi (5.247) in (5.248) povesta, da sta napetosti σ_{xy} in σ_{xz} neodvisni od vzdolžne koordinate x , kar je pri konstantnem torzijskem momentu tudi razumljivo

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(y, z) \quad \text{in} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}(y, z). \quad (5.249)$$

Iz enačb (5.244) sledi, da sta tudi deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} le funkciji prereznih koordinat y in z

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}(y, z) \quad \text{in} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}(y, z). \quad (5.250)$$

Zapišimo še ravnotežne pogoje (4.3) za plašč \mathcal{S}_{pl} . Ker je plašč nosilca neobtežen, dobimo

$$\mathcal{S}_{pl} : \quad \sigma_{yx}e_{ny} + \sigma_{zx}e_{nz} = 0. \quad (5.251)$$

Upoštevali smo, da je nosilec valjaste ali prizmatične oblike, zato zunanja normala plašča \mathbf{e}_n nima komponente v smeri osi x ($e_{nx} = 0$). Prav lahko je ugotoviti, da sta pri tem preostali dve ravnotežni enačbi na plašču \mathcal{S}_{pl} identično izpolnjeni.

Dodajmo še četrto od enačb (5.29). Ta enačba pove, kako je notranji torzijski moment M_x , ki smo ga določili iz ravnotežnega pogoja (5.33), izražen z napetostmi

$$M_x = \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x. \quad (5.252)$$

Kinematične enačbe

Najbolj značilna kinematična količina pri torzijskem nosilcu je nedvomno torzijski zasuk ω_x , to je zasuk prečnega prereza okrog vzdolžne osi nosilca. Ob predpostavki, da se prerez v svoji ravnini obnaša kot toga šipa, je zasuk ω_x enak v vseh točkah prereza, torej se spreminja le v odvisnosti od koordinate x , glede na koordinati y in z pa je konstanten. Ker je torzijski notranji moment enakomeren po celotni dolžini nosilca, lahko sklepamo, da se tudi torzijski zasuk ω_x enakomerno spreminja vzdolž nosilca. To pomeni, da lahko torzijski zasuk ω_x zapišemo kot linearno funkcijo koordinate x

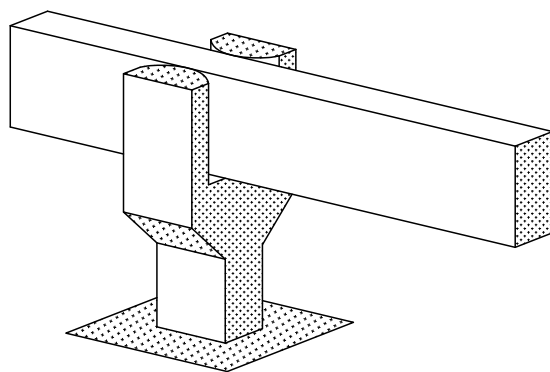
$$\omega_x(x) = \omega_x^0 + \theta(x - x_0). \quad (5.253)$$

Konstanto

$$\theta = \frac{d\omega_x}{dx} \quad (5.254)$$

imenujemo *specifični torzijski zasuk*, saj pove, za koliko se nosilec na enoto dolžine zasuče okrog svoje vzdolžne osi.

Kakor sledi iz enačbe (5.253), smo z ω_x^0 označili torzijski zasuk referenčnega prereza pri $x = x_0$. Za referenčni prerez je smiselno izbrati prerez, za katerega vnaprej poznamo torzijski zasuk. Na *sliki 5.24*, na primer, je prerez pri $x = x_0$ torzijsko nevrtiljivo podprt, torej je $\omega_x^0 = 0$. Za boljšo predstavo je na *sliki 5.25* kot ena od možnosti shematično prikazan način izvedbe in delovanja tako imenovane *viličaste torzijske podpore*, ki preprečuje torzijski zasuk in oba pomika pravokotno na vzdolžno os nosilca, omogoča pa vzdolžni pomik in oba upogibna zasuca.



Slika 5.25

Ob upoštevanju predpostavke, da se prečni prerez v svoji ravnini obnaša kot toga šipa, se tudi pri določanju pomikov u_y in u_z izognemo reševanju kinematičnih enačb v splošni obliki. V ta namen razstavimo vektor pomika \mathbf{u} poljubne točke prečnega prereza v vektor \mathbf{u}^* , ki leži v ravnini prečnega prereza, in v vektor $u_x \mathbf{e}_x$, ki predstavlja izbočitev

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^* &= u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5.255)$$

Na enak način razstavimo pomik $\underline{\mathbf{u}}$ težišča $\underline{\mathcal{T}}$ prečnega prereza

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}} &= u \mathbf{e}_x + \underline{\mathbf{u}}^* \\ \underline{\mathbf{u}}^* &= v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{5.256}$$

V ravnini prečnega prereza je

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega_x \mathbf{e}_x\tag{5.257}$$

in pomik \mathbf{u}^* poljubne točke $T(x, y, z)$, ki je glede na težišče $\underline{\mathcal{T}}$ določena s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{\rho} = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$, izrazimo v skladu z enačbo (1.346)

$$\mathbf{u}^* = \underline{\mathbf{u}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho} = (v - z \omega_x) \mathbf{e}_y + (w + y \omega_x) \mathbf{e}_z.\tag{5.258}$$

Pri določitvi torzijskega zasuka ω_x smo potihem domnevali, da se prerez zavrti okrog vzdolžne osi x , torej okrog težišča prereza $\underline{\mathcal{T}}$. Vendar podrobnejša proučitev gibanja prereza kot toge šipe pokaže, da je takšna domneva upravičena le pri dvojno simetričnih prerezih. Pri vseh drugih pa lahko v ravnini prečnega prereza najdemo posebno točko $S(y_S, z_S)$, ki ne sovпада s težiščem $\underline{\mathcal{T}}$, in ki se pri torzijski obtežbi nosilca translatorno nič ne premakne. To pomeni, da se prečni prerez \mathcal{A}_x kot toga šipa zavrti za kot ω_x okoli točke S , ki jo imenujemo *torzijsko središče prereza* in jo opredelimo z zahtevo, da je njen pomik \mathbf{u}^* enak nič

$$\mathbf{u}^*(S) = (v - z_S \omega_x) \mathbf{e}_y + (w + y_S \omega_x) \mathbf{e}_z = \mathbf{0}.\tag{5.259}$$

Enačba (5.259) je izpolnjena, če velja

$$v = z_S \omega_x \quad \text{in} \quad w = -y_S \omega_x.\tag{5.260}$$

Pomik \mathbf{u}^* poljubne točke prereza je tako

$$\mathbf{u}^* = -\omega_x (z - z_S) \mathbf{e}_y + \omega_x (y - y_S) \mathbf{e}_z.\tag{5.261}$$

Primerjava z drugo od enačb (5.255) pokaže, da sta pomika u_y in u_z v prečnem prerezu \mathcal{A}_x linearni funkciji koordinat z oziroma y

$$\begin{aligned} u_y &= -\omega_x (z - z_S) \\ u_z &= \omega_x (y - y_S). \end{aligned} \quad (5.262)$$

Vzdolžni pomik u_x nastopa v prvi, četrsti in šesti od kinematičnih enačb (4.4). Iz prve sledi, da je izbočitev, ki jo opisuje ta pomik, neodvisna od vzdolžne koordinate x , torej $u_x = u_x(y, z)$. Ob upoštevanju predpostavke (5.242) ter enačb (5.262) in (5.254) sledi enaka ugotovitev tudi iz preostalih dveh kinematičnih pogojev

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & \rightarrow & \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_{xy} + \theta (z - z_S) \\ 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & & \frac{\partial u_x}{\partial z} = 2\varepsilon_{xz} - \theta (y - y_S). \end{aligned} \quad (5.263)$$

Kakor lahko hitro preštejemo, določa mehansko stanje nosilca z enakomernim torzijskim momentom M_x devet količin: napetosti σ_{xy} in σ_{xz} , deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} , specifični torzijski zasuk θ , torzijski zasuk ω_x ter pomiki u_x , u_y in u_z . Dobimo jih kot rešitve naslednjega sistema devetih enačb

$$\mathcal{A}_x : \quad M_x = \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x \quad (5.264)$$

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (5.265)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \quad (5.266)$$

$$\sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} \quad (5.267)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_{xy} + \theta (z - z_S) \quad (5.268)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = 2\varepsilon_{xz} - \theta (y - y_S) \quad (5.269)$$

$$\omega_x = \omega_x^0 + \theta (x - x_0) \quad (5.270)$$

$$u_y = -\omega_x (z - z_S) \quad (5.271)$$

$$u_z = \omega_x (y - y_S). \quad (5.272)$$

Pri reševanju sistema moramo upoštevati statični robni pogoj

$$\mathcal{S}_{pl} : \quad \sigma_{yx} e_{ny} + \sigma_{zx} e_{nz} = 0 \quad (5.273)$$

ter kinematične robne pogoje, ki so odvisni od načina podpiranja nosilca.

Če si sistem osnovnih enačb čiste torzije ogledamo nekoliko natančneje, vidimo, da ga lahko rešujemo v dveh delih: najprej iz prvih šestih enačb določimo napetosti, deformacije, pomik u_x in specifični torzijski zasuk θ , nato pa iz zadnjih treh brez težav izračunamo še torzijski zasuk ω_x in prečna pomika u_y in u_z . V nadaljevanju sta prikazana postopka reševanja osnovnih enačb čiste torzije z metodo pomikov in z metodo napetosti.

Metoda pomikov

V skladu z osnovno idejo metode pomikov skušamo ravnotežno enačbo (5.265) izraziti s pomiki. V ta namen najprej uporabimo konstitucijski enačbi (5.266) in (5.267) in zapišemo enačbo (5.265) z deformacijami

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} = 0. \quad (5.274)$$

Z enačbama (5.263) izrazimo deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} s pomiki

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.275)$$

in ob upoštevanju enačb (5.262) sledi

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nabla_{yz}^2 u_x = 0. \quad (5.276)$$

Dobili smo Laméjevo enačbo za primer enakomerne torzije ravnega nosilca, ki pove, da je pomik u_x harmonična funkcija nad prečnim prerezom \mathcal{A}_x . Na prvi pogled ponuja metoda pomikov zelo ugodno rešitev, saj enačbi (5.276) zadošča vsaka harmonična funkcija. Vendar se reševanje zaplete pri robnem pogoju (5.273), ki ga s pomikom u_x izrazimo takole

$$\mathcal{L}_{pl} : \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} - \theta(z - z_S) \right] e_{ny} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \theta(y - y_S) \right] e_{nz} = 0. \quad (5.277)$$

V robnem pogoju nastopata parcialna odvoda pomika u_x , razen tega pa tudi specifični torzijski zasuk θ , ki ga moramo določiti iz pogoja, da je “ravnotežni” torzijski moment prereza \mathcal{A}_x enak “konstitucijskemu”

$$M_x = \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x. \quad (5.278)$$

Po krajši izpeljavi lahko enačbo (5.278) zapišemo v naslednji obliki

$$M_x = G \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial u_x}{\partial z} - z \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dA_x + G\theta (I_{yy} + I_{zz}). \quad (5.279)$$

Laméjevo enačbo (5.276) moramo torej reševati ob hkratnem upoštevanju robnega pogoja (5.277) in enačbe (5.279), kar je analitično mogoče narediti le pri krožnem prerezu, pri bolj splošnih oblikah prečnega prereza pa naletimo na hude računske težave. Zato se reševanju problema enakomerne torzije z metodo pomikov odpovemo in se v nadaljevanju posvetimo rešitvi z *metodo napetosti*, ki je, kakor bomo pokazali, veliko lažja.

Metoda napetosti pri enakomerni torziji

Kakor smo ugotovili v 4. poglavju, je treba pri reševanju osnovnih enačb mehanskega stanja trdnega telesa z metodo napetosti vpeljati dodatne, kompatibilnostne pogoje, ki zagotavljajo enolično integrabilnost pomikov in zasukov iz kinematičnih enačb. V našem primeru so

torzijski zasuk ω_x in prečna pomika u_y in u_z vnaprej enolično določeni z enačbami (5.270) do (5.272). Za določitev vzdolžnega pomika u_x pa imamo dve enačbi, (5.268) in (5.269). Zato moramo enoličnost pomika u_x zagotoviti posebej. Ker je $u_x = u_x(y, z)$, je dovolj, če zahtevamo, da je integral popolnega diferenciala pomika u_x po poljubni sklenjeni krivulji \mathcal{C} znotraj prečnega prereza \mathcal{A}_x enak nič

$$\oint_{\mathcal{C}} du_x = 0 \quad (\mathcal{C} \in \mathcal{A}_x). \quad (5.280)$$

Parcialna odvoda pomika u_x po y in z izrazimo z enačbama (5.268) in (5.269) in dobimo

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} du_x &= \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right) = \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \left\{ [2\varepsilon_{xy} + \theta(z - z_S)] dy + [2\varepsilon_{xz} - \theta(y - y_S)] dz \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.281)$$

Krivuljni integral na desni strani prevedemo z Greenovim izrekom v ploskovni integral po ploskvi \mathcal{A}_n , ki jo v prečnem prerezu \mathcal{A}_x ograjuje krivulja \mathcal{C} . Kompatibilnostni pogoj (5.280) preide tako v naslednjo obliko

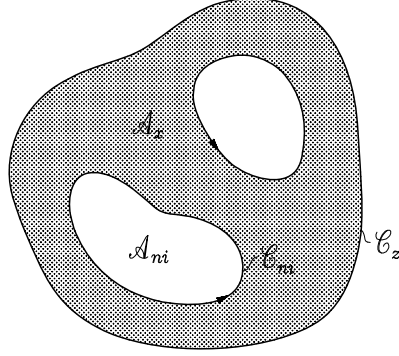
$$\int_{\mathcal{A}_n} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \theta \right) dA_x = 0. \quad (5.282)$$

Pri enkrat sovisnih prečnih prerezih lahko poljubno krivuljo \mathcal{C} skrčimo na točko znotraj integracijskega območja \mathcal{A}_x . V tem primeru je potreben in zadosten pogoj za enoličnost pomika u_x kar

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \theta = 0. \quad (5.283)$$

Pri večkrat sovisnih prerezih z notranjimi odprtini (slika 5.26) moramo za krivulje, ki obkrožajo notranje odprtine in jih torej ne

moremo skrčiti na točko znotraj območja \mathcal{A}_x , izpolniti dodatne kompatibilnostne pogoje.



Slika 5.26

Dodatne kompatibilnostne pogoje praviloma zapišemo kar za mejne krivulje notranjih odprtin \mathcal{C}_{ni} . Za $(m + 1)$ krat sovisen prečni prerez z m odprtinami dobimo

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} du_x = \oint_{\mathcal{C}_{ni}} \left\{ [2\varepsilon_{xy} + \theta(z - z_S)] dy + [2\varepsilon_{xz} - \theta(y - y_S)] dz \right\} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.284)$$

Dobljeno enačbo preuredimo

$$2 \oint_{\mathcal{C}_{ni}} (\varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz) + \theta \oint_{\mathcal{C}_{ni}} [(z - z_S) dy - (y - y_S) dz] = 0 \quad (5.285)$$

in drugi člen z Greenovim izrekom (5.94) prevedemo na ploskovni integral po območju notranje odprtine \mathcal{A}_{ni} , ki jo ograjuje krivulja \mathcal{C}_{ni} . Ploščino notranje odprtine \mathcal{A}_{ni} označimo z A_{ni} in dobimo

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} (\varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz) - \theta A_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.286)$$

V skladu z osnovno idejo metode napetosti izrazimo tudi kompatibilnostne enačbe z napetostmi. Ob upoštevanju konstitucijskih zvez (5.244) iz enačb (5.283) in (5.286) sledi

$$\mathcal{A}_x : \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - 2\theta G = 0 \quad (5.287)$$

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} (\sigma_{xy} dy + \sigma_{xz} dz) - 2\theta G A_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.288)$$

Navidez smo s tem nalogo še bolj zapletli, saj smo dobili dodatne enačbe. V resnici pa se nadaljnje reševanje problema znatno poenostavi, če vpeljemo *napetostno funkcijo* $\varphi(y, z)$, s katero izrazimo napetosti na naslednji način

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \theta G \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \sigma_{xz} &= -\theta G \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.289)$$

Z vstavitvijo tako definiranih napetosti v ravnotežni pogoj (5.265) se hitro izkaže, da je ta pogoj identično izpolnjen in ga v nadaljevanju ni več treba upoštevati. Kompatibilnostni pogoj (5.287) pa ob upoštevanju substitucije (5.289) preide v naslednjo obliko

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 0 \quad \text{ali} \quad \nabla_{yz}^2 \varphi + 2 = 0. \quad (5.290)$$

To je tako imenovana *Poissonova diferencialna enačba enakomerne torzije*, ki hkrati predstavlja ravnotežni in kompatibilnostni pogoj in jo rešujemo ob robnem pogoj (5.273). Tudi ta pogoj izrazimo z napetostno funkcijo φ in za plašč \mathcal{S}_{pl} dobimo

$$\sigma_{yx} e_{ny} + \sigma_{zx} e_{nz} = \theta G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} e_{ny} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_{nz} \right) = 0. \quad (5.291)$$

Robni pogoj (5.291) je ugodno izraziti v naravnih koordinatah s in n , ki se nanašajo na medsebojno pravokotna bazna vektorja \mathbf{e}_s vzdolž

tangente in \mathbf{e}_n vzdolž normale na mejno krivuljo \mathcal{C}_x (slika 5.11). Smerna kosinusa normale e_{ny} in e_{nz} izrazimo z enačbama (5.101), vstavimo v enačbo (5.291) in ob upoštevanju pravila za posredno odvajanje dobimo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \quad (5.292)$$

S tem smo robni pogoj (5.273) prevedli v zelo prikladno obliko, ki pove, da mora biti napetostna funkcija φ vzdolž mejne krivulje prečnega prereza konstantna. Pogoj velja tako za zunanjo mejno krivuljo kot tudi za mejne krivulje morebitnih notranjih odprtin. Pri tem so lahko konstantne vrednosti napetostne funkcije vzdolž posameznih mejnih krivulj različne. Za napetostno funkcijo na zunanji mejni krivulji \mathcal{C}_x praviloma privzamemo kar vrednost $\varphi_z = 0$. Kot kažeta enačbi (5.289), sta napetosti σ_{xy} in σ_{xz} izraženi z odvodi napetostne funkcije, zato poljubna izbira konstantne vrednosti napetostne funkcije na eni izmed mejnih krivulj nič ne vpliva na končne rezultate.

Pri enkrat sovisnih prečnih prerezih izraža Poissonova diferencialna enačba (5.290) potrebni in zadostni pogoj za enoličnost pomika u_x . Pri večkrat sovisnih prerezih pa moramo izpolniti še dodatne kompatibilnostne pogoje (5.288) za vsako od notranjih odprtin. Z napetostno funkcijo φ jih zapišemo takole

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right) - 2A_{ni} = 0. \quad (5.293)$$

Izraz v okroglem oklepaju pod integralom lahko ob upoštevanju enačb (5.101) še nadalje preoblikujemo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} e_{ny} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_{nz} \right) ds. \quad (5.294)$$

Parcialna odvoda, ki nastopata v gornji enačbi, sta komponenti gradienta \mathbf{f} skalarnega polja $\varphi(y, z)$

$$\mathbf{f} = f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z = \text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (5.295)$$

Enačbo skalarno pomnožimo z \mathbf{e}_n in po analogiji z enačbami (1.63) dobimo

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_n = f_y e_{ny} + f_z e_{nz} = f_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \quad (5.296)$$

Dodatne kompatibilnostne pogoje (5.293) za večkrat sovisne prereze lahko sedaj zapišemo kot sledi

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds + 2A_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.297)$$

Pri enkrat sovisnih prerezih dobimo napetostno funkcijo φ kot rešitev kompatibilnostne enačbe (5.290) ob robnem pogoju (5.292). Pri večkrat sovisnih prerezih upoštevamo še dodatne kompatibilnostne enačbe (5.297) in z njimi določimo vrednosti napetostne funkcije na robovih notranjih odprtih. V obeh primerih je očitno, da je funkcijska oblika napetostne funkcije φ nad prečnim prerezom odvisna le od njegove velikosti in oblike, nič pa od obtežbe, načina podpiranja in materialnih lastnosti nosilca. Napetostna funkcija φ je torej geometrijska karakteristika prečnega prereza, tako kot njegova ploščina, obseg, upogibni vztrajnostni momenti, lega težišča in podobno.

Preostane nam še določitev specifičnega torzijskega zasuka θ . V ta namen zapišimo enačbo (5.264), ki predstavlja povezavo z zunanjo obtežbo M_x , z napetostno funkcijo φ

$$M_x = -\theta G \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) dA_x. \quad (5.298)$$

Če vpeljemo okrajšavo

$$I_x = - \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) dA_x, \quad (5.299)$$

dobimo zvezo med torzijskim momentom prereza M_x in specifičnim torzijskim zasukom θ v preprosti obliki

$$M_x = \theta GI_x. \quad (5.300)$$

Z uporabo zveze (5.254) lahko sedaj zapišemo osnovno deformacijsko enačbo enakomerne torzije v naslednji obliki

$$\theta = \frac{d\omega_x}{dx} = \frac{M_x}{GI_x}. \quad (5.301)$$

Glede na podobnost dobljene enačbe z enačbama (5.64) in (5.65) imenujemo količino I_x *torzijski vztrajnostni moment prečnega prereza* \mathcal{A}_x . Oznaka je upravičena, saj iz enačbe (5.299) sledi, da je I_x odvisen le od velikosti in oblike prereza \mathcal{A}_x . Pri praktičnem delu bi bilo vrednotenje torzijskega vztrajnostnega momenta I_x iz enačbe (5.299) zamudno, še posebej pri večkrat sovisnih prerezih. Pomagamo si na naslednji način: v enačbi (5.299) upoštevamo pravilo za odvajanje produkta in enačbo zapišemo takole

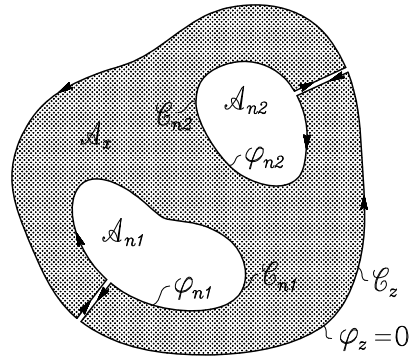
$$I_x = - \int_{\mathcal{A}_x} \left[\frac{\partial}{\partial y}(y\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(z\varphi) \right] dA_x + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x. \quad (5.302)$$

Prvega od integralov na desni strani prevedemo z Greenovim izrekom (5.94) na integral po sklenjeni krivulji \mathcal{C}_x , ki ograjuje prečni prerez \mathcal{A}_x , in dobimo

$$I_x = \oint_{\mathcal{C}_x} [\varphi(z dy - y dz)] + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x. \quad (5.303)$$

Pri $(m + 1)$ krat sovisnem prerezu sestavimo sklenjeno mejno krivuljo \mathcal{C}_x iz več delov, tako da z njo zajamemo celotno območje prečnega prereza \mathcal{A}_x (slika 5.27). Integrali vzdolž ravnih odsekov integracijske poti, s katerimi pridemo z zunanje mejne krivulje na notranjo in nazaj, se odštejejo, saj integriramo isto funkcijo enkrat v eni, drugič pa v drugi smeri. Preostane nam torej integriranje po zunanji mejni krivulji \mathcal{C}_z ,

kjer ima napetostna funkcija konstantno vrednost φ_z , ter po notranjih mejnih krivuljah \mathcal{C}_{ni} ($i = 1, 2, \dots, m$), kjer ima napetostna funkcija konstantne vrednosti φ_{ni}



Slika 5.27

$$I_x = \varphi_z \oint_{\mathcal{C}_z} (z dy - y dz) + \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} \oint_{\mathcal{C}_{ni}} (z dy - y dz) + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x. \quad (5.304)$$

Kakor smo že omenili, privzamemo za napetostno funkcijo na zunanji mejni krivulji vrednost $\varphi_z = 0$, integrale vzdolž notranjih mejnih krivulj pa z Greenovim izrekom prevedemo na ploskovne integrale po notranjih odprtinah. Pri tem moramo v Greenovem izreku spremeniti predznak ploskovnega integrala, ker integriramo v sourni, torej “negativni” smeri. Tako dobimo končno formulo za računanje torzijskega vztrajnostnega momenta

$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} A_{ni}. \quad (5.305)$$

Kot vidimo, je torzijski vztrajnostni moment I_x enak dvojni prostornini območja, ki ga določa napetostna funkcija φ nad prečnim prerezom \mathcal{A}_x .

Zaporedje računskih postopkov pri reševanju problema enakomerne torzije po metodi napetosti je sedaj jasno pred nami: najprej ob

upoštevanju robnih pogojev (5.292) iz Poissonove enačbe (5.290) določimo napetostno funkcijo $\varphi(y, z)$; pri večkrat sovisnih prerezih moramo uporabiti še dodatne kompatibilnostne pogoje (5.297), ki nas pripeljejo do konstantnih vrednosti napetostne funkcije nad m notranjimi odprtini φ_{ni} ($i = 1, 2, \dots, m$). Sedaj lahko z enačbo (5.305) izračunamo torzijski vztrajnostni moment I_x , z enačbo (5.301) pa tudi specifični torzijski zasuk θ . Izračunamo še parcialne odvode napetostne funkcije φ po koordinatah y in z ter po vstavitvi v enačbi (5.289) dobimo strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} . Kotni deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} določimo iz konstitucijskih enačb (5.244). Če se omejimo na dvojno simetrične prereze, pri katerih se torzijsko središče S ujema s težiščem T ($y_S = z_S = 0$), lahko z enačbama (5.268) in (5.269) določimo parcialna odvoda pomika u_x ter njegov popolni diferencial

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz. \quad (5.306)$$

Pomik u_x poljubne točke T prečnega prereza \mathcal{A}_x lahko sedaj izračunamo v odvisnosti od pomika u_x referenčne točke T_0

$$u_x(T) = u_x(T_0) + \int_{T_0}^T du_x. \quad (5.307)$$

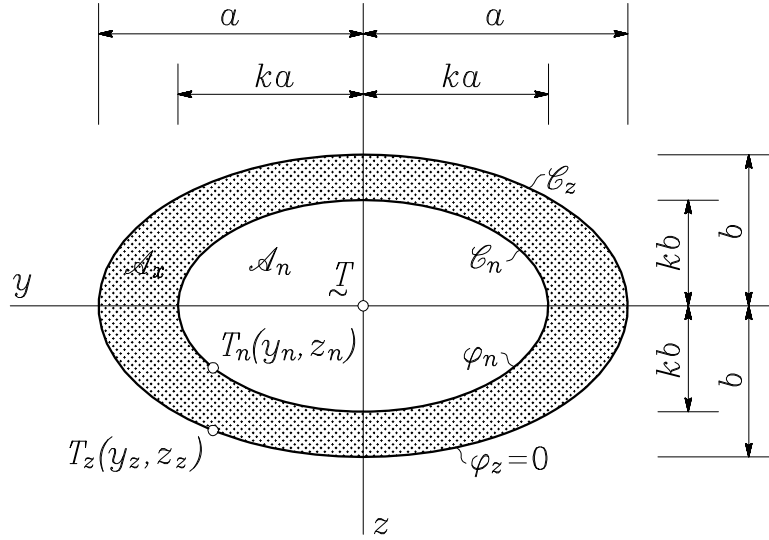
Integral v gornji enačbi je nedvomno neodvisen od izbire integracijske poti med točkama T_0 in T , saj smo z izpolnitvijo enačb (5.290) in (5.297) zagotovili enoličnost pomika u_x .

Ker poznamo specifični torzijski zasuk θ , lahko iz enačb (5.270) do (5.272) brez težav določimo tudi torzijski zasuk ω_x ter prečna pomika u_y in u_z .

Enakomerna torzija nosilca z votlim eliptičnim prerezom

Nosilec z eliptičnim ali krožnim prečnim prerezom je primer, pri katerem je mogoče poiskati analitično rešitev Poissonove diferencialne

enačbe enakomerne torzije.



Slika 5.28

Vzemimo, da je zunanja mejna krivulja prereza elipsa \mathcal{C}_z s polosema a in b ($a > b$), notranja mejna krivulja pa podobna elipsa \mathcal{C}_n s polosema ka in kb ($0 \leq k < 1$) (slika 5.28). Enačbi mejnih krivulj sta tako

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_z : \quad & \left(\frac{y_z}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_z}{b}\right)^2 = 1 \\ \mathcal{C}_n : \quad & \left(\frac{y_n}{ka}\right)^2 + \left(\frac{z_n}{kb}\right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (5.308)$$

Za Poissonovo diferencialno enačbo enakomerne torzije (5.290)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 0 \quad (5.309)$$

je očitno, da lahko njeno splošno rešitev vedno poiščemo v obliki polinoma druge stopnje. V našem primeru jo glede na obliko prečnega prereza vzamemo v naslednji obliki

$$\varphi(y, z) = C \left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 - 1 \right], \quad (5.310)$$

kjer je C zaenkrat neznana konstanta. Z vstavitvijo drugih parcialnih odvodov funkcije φ v enačbo (5.309) dobimo

$$\frac{2C}{a^2} + \frac{2C}{b^2} + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad C = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (5.311)$$

in rešitev enačbe (5.309) je

$$\varphi = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 - 1 \right]. \quad (5.312)$$

Hitro se lahko prepričamo, da dobljena rešitev zadošča tudi robnim pogojem. Iz enačbe (5.292) sledi, da mora biti funkcija φ konstantna tako vzdolž zunanje mejne krivulje \mathcal{C}_z kakor tudi vzdolž notranje mejne krivulje \mathcal{C}_n . Vrednost napetostne funkcije na zunanjem robu dobimo z zapisom enačbe (5.312) v poljubni točki $T_z(y_z, z_z)$

$$\varphi_z = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left[\left(\frac{y_z}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_z}{b}\right)^2 - 1 \right] \quad (5.313)$$

in zaradi prve od enačb (5.308) sledi

$$\varphi_z = 0, \quad (5.314)$$

kar smo že omenili kot najpreprostejšo možnost izbire vrednosti napetostne funkcije na zunanjem robu. Vrednost napetostne funkcije na notranjem robu prereza dobimo tako, da v rešitev (5.312) vstavimo koordinate točke $T_n(y_n, z_n)$

$$\varphi_n = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left[\left(\frac{y_n}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_n}{b}\right)^2 - 1 \right]. \quad (5.315)$$

Ob upoštevanju druge od enačb (5.308) po krajši izpeljavi dobimo

$$\varphi_n = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} (1 - k^2). \quad (5.316)$$

Napetostna funkcija v obliki (5.312) je torej prava rešitev problema enakomerne torzije pri nosilcu z votlim eliptičnim prerezom. Primerjava enačbe (5.312) z enačbama (5.308) tudi pove, da so izohipse napetostne funkcije nad eliptičnim prerezom prav tako elipse.

Torzijski vztrajnostni moment prereza \mathcal{A}_x izračunamo z enačbo (5.305)

$$I_x = -2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{a^2} \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x + \frac{1}{b^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x - \int_{\mathcal{A}_x} dA_x \right] + 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1 - k^2) A_n. \quad (5.317)$$

Geometrijske karakteristike votlega eliptičnega prereza so

$$\begin{aligned} A_x &= \int_{\mathcal{A}_x} dA_x = \pi ab (1 - k^2) \\ A_n &= \int_{\mathcal{A}_n} dA_x = \pi ab k^2 \\ I_{yy} &= \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x = \frac{1}{4} \pi ab^3 (1 - k^4) \\ I_{zz} &= \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x = \frac{1}{4} \pi a^3 b (1 - k^4) \end{aligned} \quad (5.318)$$

in

$$I_x = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - k^4). \quad (5.319)$$

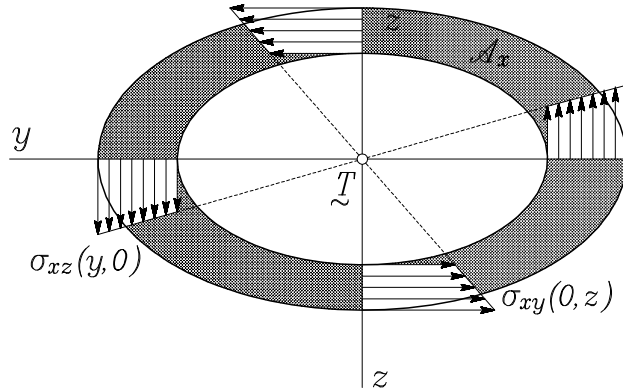
Specifični torzijski zasuk θ določimo z enačbo (5.301)

$$\theta = \frac{(a^2 + b^2) M_x}{G \pi a^3 b^3 (1 - k^4)}, \quad (5.320)$$

strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} pa z enačbama (5.289)

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{2M_x}{\pi ab^3 (1 - k^4)} z \\ \sigma_{xz} &= \frac{2M_x}{\pi a^3 b (1 - k^4)} y. \end{aligned} \quad (5.321)$$

Enačbi povesta, da je strižna napetost σ_{xy} linearna glede na koordinato z , napetost σ_{xz} pa linearna glede na y .



Slika 5.29

Slika 5.29 prikazuje potek strižnih napetosti vzdolž koordinatnih osi. Napetosti sta največji na robu, proti središču prereza pa se linearno zmanjšujeta. Če je prerez poln (brez notranje odprtine), je material v sredini bistveno manj izkoriščen kot na robu. Zato so pri torzijski obtežbi najbolj ekonomični nosilci z votlim prečnim prerezom in čim tanjšimi stenami (enocelični ali večcelični tankostenski nosilci). Če so stene tanke v primerjavi s siceršnjimi izmerami prereza, lahko zanemarimo spreminjanje strižne napetosti po debelini stene in računamo kar z enakomernim torzijskim strižnim tokom vzdolž srednje črte stene prereza. S preučevanjem opisanih nosilcev se ukvarja posebna veja konstrukcijske mehanike – teorija tankostenskih nosilcev.

Iz konstitucijskih enačb (5.244) določimo še kotni deformaciji ε_{xy} in ε_{xz}

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= -\frac{M_x}{G\pi ab^3(1-k^4)} z \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{M_x}{G\pi a^3b(1-k^4)} y.\end{aligned}\tag{5.322}$$

Določimo še izbočitev prečnega prereza, ki je izražena z vzdolžnim

pomikom u_x . Ob upoštevanju enačb (5.306) in (5.307) dobimo

$$u_x(x, y, z) = u_x(\underline{T}) + \int_0^y [2\varepsilon_{xy} + \theta(z - z_S)]_{z=0} dy + \int_0^z [2\varepsilon_{xz} - \theta(y - y_S)] dz. \quad (5.323)$$

Za referenčno točko smo izbrali kar težišče prečnega prereza $\underline{T}(x, 0, 0)$. Glede na dvojno simetrijo prereza \mathcal{A}_x vzamemo, da se točka \underline{T} nič ne pomakne v vzdolžni smeri, kar pomeni, da je $u_x(\underline{T}) = 0$. Razen tega se točka \underline{T} ujema s torzijskim središčem prereza S , zato je $y_S = 0$ in $z_S = 0$ in po vstavitvi zvez (5.320) in (5.322) sledi

$$u_x(x, y, z) = \frac{M_x}{G} \frac{(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 (1 - k^4)} yz. \quad (5.324)$$

Izbočitvena ploskev, ki jo opisuje enačba (5.324), je v diferencialni geometriji znana kot hiperbolični paraboloid.

Končno si kot poseben primer oglejmo votli krožni prerez (cev). Teda j je $a = b = r$ in iz enačb (5.312) do (5.322) sledi

$$\varphi = \frac{1}{2} (r^2 - y^2 - z^2) \quad (5.325)$$

$$\varphi_n = \frac{r^2}{2} (1 - k^2) \quad (5.326)$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{2} (1 - k^4) \quad (5.327)$$

$$\theta = \frac{M_x}{G\pi r^4 (1 - k^4)} \quad (5.328)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2M_x}{\pi r^4 (1 - k^4)} z \quad (5.329)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{2M_x}{\pi r^4 (1 - k^4)} y \quad (5.330)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{M_x}{G\pi r^4(1-k^4)} z \quad (5.331)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{M_x}{G\pi r^4(1-k^4)} y. \quad (5.332)$$

Iz enačbe (5.324) pa sledi nekoliko presenetljiva ugotovitev, da pri enakomerni torziji krožnega prereza ne pride do izbočitve ($u_x = 0$).

Enakomerna torzija nosilca z ozkim pravokotnim prečnim pre rezom

V prejšnjem primeru smo ugotovili, da so izohipse napetostne funkcije nad eliptičnim prečnim prerezom tudi elipse. Predstavljajmo si, da eliptični prečni pre rez postopoma preoblikujemo v pravokotnega, tega pa še naprej, tako da postane višina prereza h veliko večja od njegove širine oziroma debeline δ (slika 5.30). V tem primeru so izohipse praktično povsod razen v neposredni bližini krajših robov vzporedne z daljšo stranico prereza. To pomeni, da se napetostna funkcija v smeri višine prereza ne spreminja in v našem primeru lahko za pretežni del prereza vpeljemo poenostavitvev

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5.333)$$

Prva od enačb (5.289) pove, da na omenjenem območju ni strižne napetosti σ_{xy}

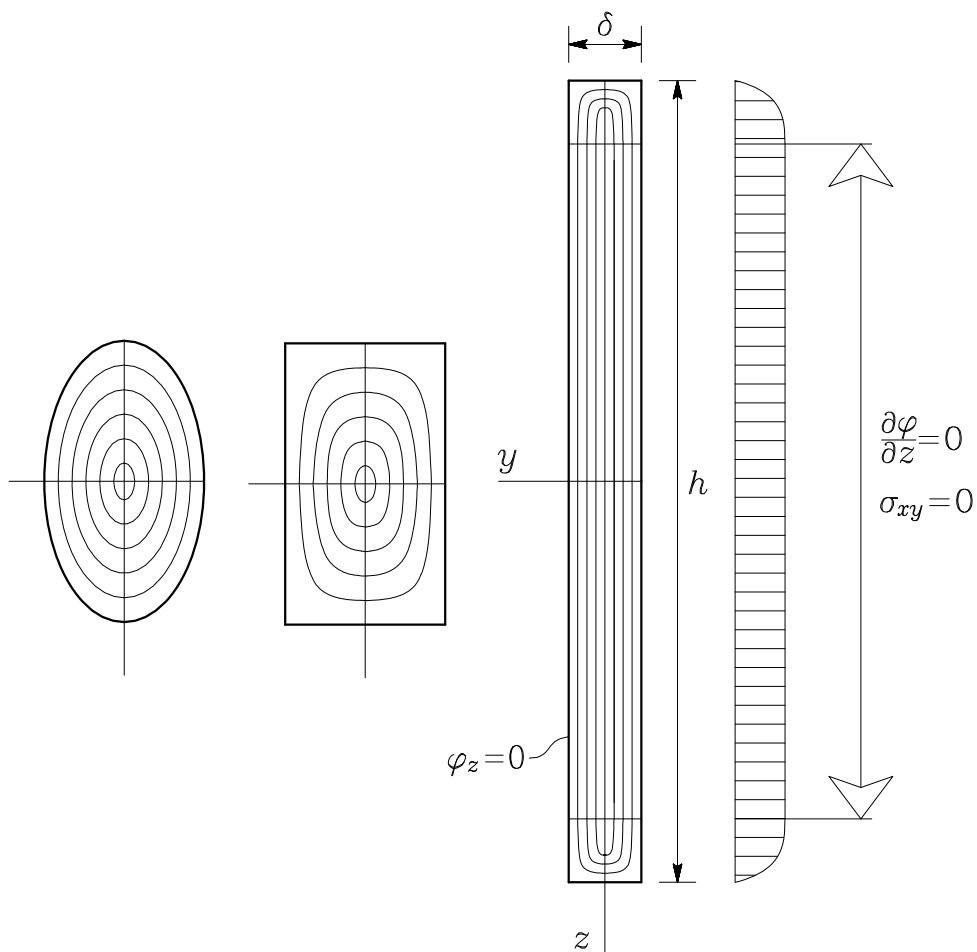
$$\sigma_{xy} = \theta G \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5.334)$$

Ob poenostavitvi (5.333) preide Poissonova diferencialna enačba (5.290) v navadno diferencialno enačbo drugega reda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \quad (5.335)$$

s splošno rešitvijo

$$\varphi = -y^2 + C_1 y + C_2. \quad (5.336)$$



Slika 5.30

Integracijski konstanti C_1 in C_2 določimo iz pogoja, da mora biti vrednost napetostne funkcije na robovih $y = \pm\delta/2$ enaka nič

$$\varphi\left(y = -\frac{\delta}{2}\right) = \varphi\left(y = \frac{\delta}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{\delta^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.337)$$

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe na pretežnem delu ozkega pra-

vokotnega prereza je torej

$$\varphi = -y^2 + \frac{\delta^2}{4}. \quad (5.338)$$

Torzijski vztrajnostni moment I_x določimo z enačbo (5.305), kjer vzamemo $dA_x = hdy$ in dobimo

$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x = 2h \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(-y^2 + \frac{\delta^2}{4} \right) dy \quad \rightarrow \quad I_x = \frac{1}{3} h\delta^3. \quad (5.339)$$

Specifični torzijski zasuk θ je po enačbi (5.301)

$$\theta = \frac{3M_x}{G h \delta^3}, \quad (5.340)$$

strižna napetost σ_{xz} pa po drugi od enačb (5.289)

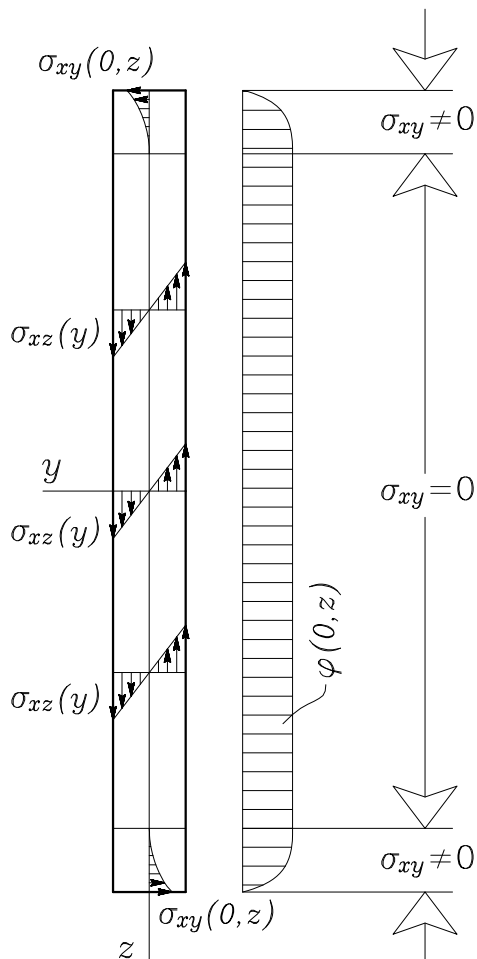
$$\sigma_{xz} = \frac{6M_x}{h \delta^3} y. \quad (5.341)$$

Napetost σ_{xz} je torej linearno razporejena po debelini prereza δ . Največje vrednosti doseže na robovih ($y = \pm\delta/2$) (slika 5.31)

$$\sigma_{xz}(y = \pm\delta/2) = \pm \frac{3M_x}{h \delta^2}. \quad (5.342)$$

Za kontrolo vstavimo dobljeno napetost σ_{xz} v enačbo (5.264). Ob predpostavki (5.334) dobimo

$$M_x = \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x = \frac{6M_x}{h \delta^3} h \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} y^2 dy = \frac{M_x}{2}. \quad (5.343)$$



Slika 5.31

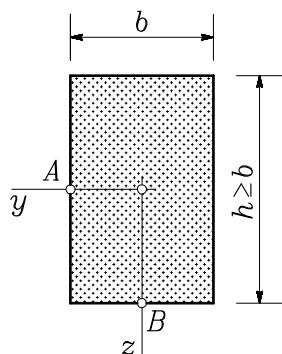
Rezultat je očitno protisloven, odgovor pa je skrit ravno v vplivu napetosti σ_{xy} , ki smo jih v dosedanjih izpeljavah zanemari-
 li. Teh napetosti ob privzeti poenostavitvi ne znamo dolo-
 čiti, vendar je jasno, da sta ob krajših robovih ozkega prav-
 vokotnega prereza prvi odvod napetostne funkcije po z in s
 tem tudi strižna napetost σ_{xy} različna od nič (slika 5.31). Ka-
 kor smo ugotovili že pri eliptičnem prerezu, so strižne na-
 petosti na robovih, ki sta bolj oddaljena od težišča, manjše od
 tistih na “daljših” robovih in torej praviloma niso merodajne
 za dimenzioniranje. Zaradi več-
 je ročice glede na težišče prereza pa očitno ravno napetosti σ_{xy}
 na krajših robovih prispevajo manjkajočo polovico torzijskega
 momenta v prečnem prerezu.

Enakomerna torzija nosilca s splošnim pravokotnim prečnim prerezom

Pri nosilcu s splošnim pravokotnim prečnim prerezom, ki ne ustreza predpostavki o ozkem pravokotnem prerezu, analitične rešitve problema enakomerne torzije niso znane. V literaturi pa najdemo različne numerične rešitve, izpeljane na primer s Fourierovimi vrstami, z

metodo končnih diferenc ali z metodo končnih elementov. Na osnovi primerno natančnih numeričnih rezultatov so za praktično rabo pripravljene tabele koeficientov za razmeroma preprosto in hitro izvedenotenje najpomembnejših torzijskih količin v poljubnem pravokotnem prečnem prerezu.

Preglednica 5-1



$$I_x = \eta \frac{hb^3}{3}$$

$$\tau_{max} = \sigma_{xz}(A) = \beta \frac{3M_x}{hb^2}$$

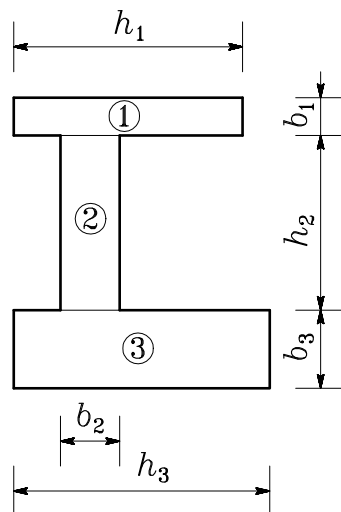
$$\tau^* = \sigma_{xy}(B) = \gamma \tau_{max}$$

h/b	η	β	γ
1	0.423	1.603	1.000
1.5	0.588	1.443	0.859
2	0.687	1.355	0.795
2.5	0.747	1.292	0.766
3	0.789	1.248	0.753
4	0.843	1.182	0.745
6	0.897	1.115	0.743
8	0.921	1.086	0.742
10	0.939	1.065	0.742
∞	1.000	1.000	0.742

V Preglednici 5-1 so podani koeficienti, s katerimi glede na dejansko razmerje stranic pravokotnega prereza določimo torzijski vztrajnostni moment I_x , največjo strižno napetost τ_{max} , ki nastopa na sredini daljše stranice pravokotnika, in pripadajočo strižno napetost τ^* na sredini krajše stranice. Pri tem sta koeficienta η in β korekcijska faktorja za določitev torzijskega vztrajnostnega momenta in največje strižne napetosti glede na vrednosti, ki bi ju dobili z uporabo formul za ozek pravokotni prerez.

Odprt prečni prerez, sestavljen iz pravokotnih podprerezov

Pri praktičnem delu v konstrukcijski mehaniki imamo pogosto opraviti s prečnimi prerezi, sestavljenimi iz pravokotnih podprerezov. Kot primer vzemimo prečni prerez, sestavljen iz treh pravokotnih podprerezov, od katerih nobenega ne moremo obravnavati kot izrazito ozek pravokotnik (Slika 5.32)



Slika 5.32

Pri tem se postavi vprašanje, kako se celotni notranji torzijski moment M_x porazdeli med posamezne podprereze. Odgovor poiščemo ob upoštevanju osnovne predpostavke, da se prerez pri torzijski obremenitvi v svoji ravnini vrta okrog vzdolžne osi nosilca kot toga šipa. To pomeni, da so specifični torzijski zasuki vsakega podprereza enaki torzijskemu zasuku prereza kot celote, torej so tudi enaki med seboj. Delež celotnega torzijskega momenta, ki jih prevzamejo posamezni podprerezi, označimo z $M_x^{(1)}$, $M_x^{(2)}$ in $M_x^{(3)}$, tako da je

$$M_x = M_x^{(1)} + M_x^{(2)} + M_x^{(3)}. \quad (5.344)$$

Če vzamemo, da so vsi podprerezi iz enakega materiala s strižnim modulom G , in zahtevamo, da so specifični torzijski zasuki $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, $\theta^{(3)}$

med seboj enaki, sledi

$$\begin{aligned}\theta^{(1)} &= \frac{M_x^{(1)}}{GI_x^{(1)}} = \theta & \rightarrow & M_x^{(1)} = \theta GI_x^{(1)} \\ \theta^{(2)} &= \frac{M_x^{(2)}}{GI_x^{(2)}} = \theta & \rightarrow & M_x^{(2)} = \theta GI_x^{(2)} \\ \theta^{(3)} &= \frac{M_x^{(3)}}{GI_x^{(3)}} = \theta & \rightarrow & M_x^{(3)} = \theta GI_x^{(3)}.\end{aligned}\tag{5.345}$$

Pri tem je θ specifični torzijski zasuk prereza kot celote

$$\theta = \frac{M_x}{GI_x},\tag{5.346}$$

z $I_x^{(1)}$, $I_x^{(2)}$ in $I_x^{(3)}$ pa smo označili torzijske vztrajnostne momente posameznih pravokotnih podprerezov. S tem iz enačbe (5.344) sledi

$$M_x = \theta G \left(I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} \right).\tag{5.347}$$

Primerjava z enačbo (5.346) pove, da je torzijski vztrajnostni moment sestavljenega prereza enak vsoti torzijskih vztrajnostnih momentov posameznih podprerezov

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)}.\tag{5.348}$$

Enačbe (5.345) lahko sedaj zapišemo takole

$$\begin{aligned}M_x^{(1)} &= M_x \frac{I_x^{(1)}}{I_x} \\ M_x^{(2)} &= M_x \frac{I_x^{(2)}}{I_x} \\ M_x^{(3)} &= M_x \frac{I_x^{(3)}}{I_x}.\end{aligned}\tag{5.349}$$

Dobljene enačbe kažejo, da se torzijski moment porazdeli po posameznih podprerezih v razmerju njihovih torzijskih vztrajnostnih momentov. V primeru, da bi bili podprerezi iz različnih materialov s strižnimi moduli $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$, bi s podobnim razmislekom kot zgoraj dobili

$$M_x = \theta \left(G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)} \right) \quad (5.350)$$

in porazdelitev torzijskega momenta M_x po podprerezih v razmerju njihovih torzijskih togosti

$$\begin{aligned} M_x^{(1)} &= M_x \frac{G^{(1)} I_x^{(1)}}{G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)}} \\ M_x^{(2)} &= M_x \frac{G^{(2)} I_x^{(2)}}{G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)}} \\ M_x^{(3)} &= M_x \frac{G^{(3)} I_x^{(3)}}{G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)}}. \end{aligned} \quad (5.351)$$

Praktični postopek pri določitvi torzijskih količin homogenega prereza, prikazanega na *sliki 5.32*, bi torej začeli z določitvijo razmerij med daljšo in krajšo stranico za vsakega od podprerezov in odčitkom ustreznih koeficientov iz *preglednice 5-1*

$$\begin{aligned} \text{podprerez 1 : } \frac{h_1}{b_1} &\rightarrow \eta_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \text{podprerez 2 : } \frac{h_2}{b_2} &\rightarrow \eta_2, \beta_2, \gamma_2 \\ \text{podprerez 3 : } \frac{h_3}{b_3} &\rightarrow \eta_3, \beta_3, \gamma_3. \end{aligned} \quad (5.352)$$

Za razmerja h/b , ki ne sovpadajo s podatki v preglednici, lahko z zadostno natančnostjo uporabimo linearno interpolacijo med podanimi vrednostmi.

V nadaljevanju izračunamo torzijske vztrajnostne momente posameznih podprerezov in torzijski vztrajnostni moment prereza kot celote

$$\begin{aligned}
 I_x^{(1)} &= \eta_1 \frac{h_1 b_1^3}{3} \\
 I_x^{(2)} &= \eta_2 \frac{h_2 b_2^3}{3} \quad \rightarrow \quad I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)}. \quad (5.353) \\
 I_x^{(3)} &= \eta_3 \frac{h_3 b_3^3}{3}
 \end{aligned}$$

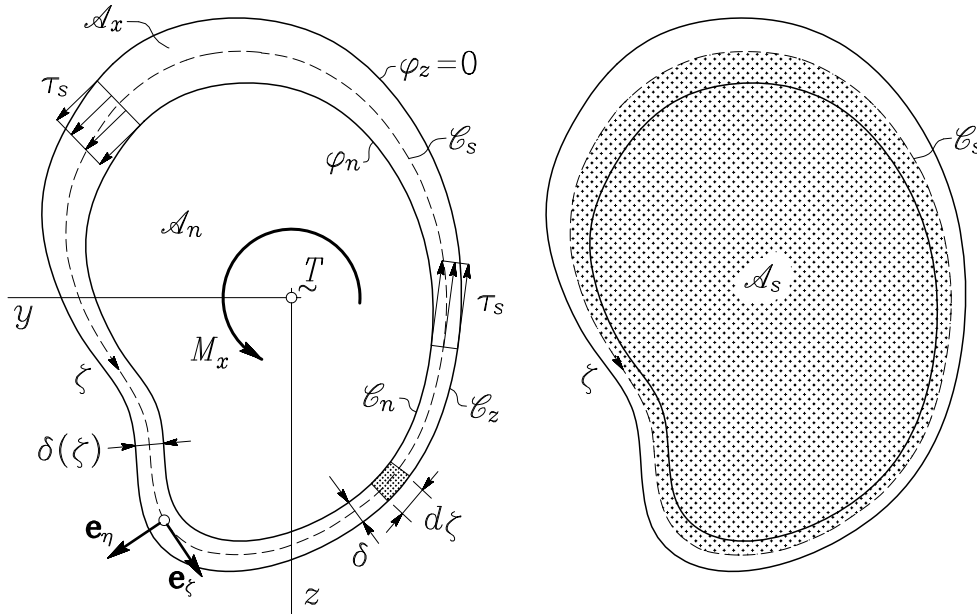
S tem lahko z enačbama (5.346) ali (5.350) izračunamo specifični torzijski zasuk θ , z enačbami (5.349) ali (5.351) pa tudi deleže torzijskega momenta, ki jih prevzamejo posamezni podprerezi. V naslednjem koraku pa izračunamo še največje strižne napetosti na sredini daljše stranice ter ustrezne strižne napetosti na sredini krajše stranice vsakega od podprerezov

$$\begin{aligned}
 \tau_{max}^{(1)} &= \beta_1 \frac{3M_x^{(1)}}{h_1 b_1^3} \quad \rightarrow \quad \tau^{*(1)} = \gamma_1 \tau_{max}^{(1)} \\
 \tau_{max}^{(2)} &= \beta_2 \frac{3M_x^{(2)}}{h_2 b_2^3} \quad \rightarrow \quad \tau^{*(2)} = \gamma_2 \tau_{max}^{(2)} \quad (5.354) \\
 \tau_{max}^{(3)} &= \beta_3 \frac{3M_x^{(3)}}{h_3 b_3^3} \quad \rightarrow \quad \tau^{*(3)} = \gamma_3 \tau_{max}^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim enoceličnim tankostenskim prečnim prerezom

Razporeditev strižnih napetosti pri čisti torziji votlega eliptičnega prereza kaže, da največje napetosti nastopajo na zunanjem robu prereza, material v notranjosti prereza pa je napetostno slabo izkoriščen. Zato je za prenašanje torzijske obtežbe ugodno izbirati zaprte tankostenske prereze, pri katerih je material nameščen čim bolj ob zunanjem robu prereza. O tankostenskem zaprtem prečnem prerezu govorimo v primeru,

da je stena zaprtega prereza zelo tanka v primerjavi z drugimi dimenzijami prereza, na primer z njegovo višino ali širino. Na sliki 5.33 je prikazan tankostenski prerez \mathcal{A}_x , ki ga določata zunanja in notranja mejna krivulja \mathcal{C}_z in \mathcal{C}_n . Votli del prereza je označen z \mathcal{A}_n .



Slika 5.33

Pri poljubno oblikovanem zaprtem profilu z neenakomerno debelino stene δ je ugodno namesto kartezijskih prereznih koordinat (y, z) vpetljati “naravni” koordinati (η, ζ) . Pri tem je ζ ločna dolžina tako imenovane *srednje črte prereza* \mathcal{C}_s , ki poteka po sredini debeline stene in ograjuje *srednjo ploskev* \mathcal{A}_s . Koordinati ζ sta v vsaki točki srednje črte prirejena medsebojno pravokotna enotska bazna vektorja \mathbf{e}_η in \mathbf{e}_ζ , prvi v smeri normale in drugi v smeri tangente na srednjo črto. Po analogiji z ozkim pravokotnim prerezom lahko tedaj vzamemo, da se napetostna funkcija φ vzdolž srednje krivulje \mathcal{C}_s , torej v odvisnosti od koordinate ζ , ne spreminja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0. \quad (5.355)$$

Pripadajoči strižni napetosti $\sigma_{x\eta}$ in $\sigma_{x\zeta}$ izrazimo z napetostno funkcijo φ po analogiji z enačbama (5.289)

$$\sigma_{x\eta} = \theta G \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \quad \text{in} \quad \sigma_{x\zeta} = -\theta G \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}. \quad (5.356)$$

Poissonovo enačbo čiste torzije v koordinatah (η, ζ) zapišemo na enak način kakor v kartezijskih koordinatah (y, z) .

$$\mathcal{A}_x : \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + 2 = 0. \quad (5.357)$$

S tem seveda naredimo določeno napako, ki pa je toliko manjša, kolikor manjša je ukrivljenost srednje krivulje \mathcal{C}_s . V veliki večini praktičnih primerov, na primer pri valjanih ali varjenih jeklenih nosilcih, je prečni prerez sestavljen iz ozkih pravokotnikov, pri katerih je uporaba torzijske enačbe v obliki (5.357) povsem upravičena.

Ob upoštevanju poenostavitve (5.355) in prve od enačb (5.356) sledi, da je $\sigma_{x\eta} = 0$ povsod na tankostenskem prerezu, Poissonova enačba pa preide v navadno diferencialno enačbo drugega reda glede na koordinato η

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = -2. \quad (5.358)$$

Splošna rešitev te enačbe je

$$\varphi = -\eta^2 + C_1 \eta + C_2. \quad (5.359)$$

Integracijski konstanti C_1 in C_2 določimo iz pogoja, da mora biti vrednost napetostne funkcije na zunanem robu prereza enaka nič, na notranjem robu pa enaka neki konstantni vrednosti φ_n

$$\begin{aligned} \varphi \left(\eta = -\frac{\delta}{2} \right) &= \varphi_n \\ \varphi \left(\eta = \frac{\delta}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -\frac{\varphi_n}{\delta} \\ C_2 = \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4}. \end{cases} \quad (5.360)$$

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe je torej

$$\varphi = -\eta^2 - \frac{\varphi}{\delta} \eta + \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4}. \quad (5.361)$$

Torzijski vztrajnostni moment I_x določimo z enačbo (5.305), kjer upoštevamo, da imamo samo eno notranjo odprtino s ploščino A_n , ki ji pripada konstantna vrednost napetostne funkcije φ_n

$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \varphi_n A_n. \quad (5.362)$$

V prvem členu vzamemo $dA_x = d\eta d\zeta$ ter integriramo po ζ vzdolž sklenjene srednje črte \mathcal{C}_s in po η v mejah od $-\delta/2$ do $+\delta/2$

$$I_x = 2 \oint_{\mathcal{C}_s - \frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(-\eta^2 - \frac{\varphi}{\delta} \eta + \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4} \right) d\eta d\zeta + 2 \varphi_n A_n. \quad (5.363)$$

Po izvrednotenju integrala po debelini stene sledi

$$I_x = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta + \varphi_n \oint_{\mathcal{C}_s} \delta d\zeta + 2 \varphi_n A_n. \quad (5.364)$$

Integral v drugem členu predstavlja ploščino materialnega dela prereza A_x

$$A_x = \oint_{\mathcal{C}_s} \delta d\zeta, \quad (5.365)$$

zato lahko pišemo

$$I_x = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta + 2 \varphi_n \left(A_n + \frac{A_x}{2} \right). \quad (5.366)$$

Pri tankostenskem prerezu je izraz v oklepaju praktično enak ploščini A_s srednje ploskve \mathcal{A}_s , vrednost integrala v prvem členu pa je odvisna od tretje potence majhne debeline stene δ in je zato zanemarljivo majhna v primerjavi z vrednostjo drugega člena

$$A_s = A_n + \frac{A_x}{2} \quad \text{in} \quad \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta \ll 2 \varphi_n A_s. \quad (5.367)$$

Torzijski vztrajnostni moment zaprtega enoceličnega tankostenskega prereza lahko torej dovolj natančno izračunamo s preprosto formulo

$$I_x = 2 \varphi_n A_s. \quad (5.368)$$

Seveda pa moramo najprej določiti vrednost napetostne funkcije φ_n na notranji konturi \mathcal{C}_n . V ta namen uporabimo dodatni kompatibilnostni pogoj (5.297) za prerez z eno notranjo odprtino, ki pa ga tokrat ob upoštevanju tankostenske narave nosilca zapišemo za srednjo krivuljo \mathcal{C}_s in glede na koordinatno bazo $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$

$$\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta = -2 A_s. \quad (5.369)$$

Poudarili smo, da je pri integriranju po krivulji \mathcal{C}_s vseskozi $\eta = 0$. Z odvajanjem enačbe (5.361) dobimo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2\eta - \frac{\varphi_n}{\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\varphi_n}{\delta}. \quad (5.370)$$

Ker je φ_n konstanta, iz enačbe (5.369) sledi

$$\varphi_n \oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta} = 2 A_s \quad \rightarrow \quad \varphi_n = \frac{2 A_s}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}}. \quad (5.371)$$

Z vstavitvijo v enačbo (5.368) dobimo tako imenovano 2. *Bredtovo*[†] formulo za določitev torzijskega vztrajnostnega momenta zaprtega enoceličnega tankostenskega prereza

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}}. \quad (5.372)$$

[†] Rudolf Bredt, nemški inženir, 1842-1900.

S tem lahko ob upoštevanju enačbe (5.301) določimo specifični torzijski zasuk θ

$$\theta = \frac{M_x}{4GA_s^2} \oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}. \quad (5.373)$$

Glavni cilj naloge pa je seveda določitev napetosti. Iz druge od enačb (5.356) in prve od enačb (5.370) sledi

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{M_x}{I_x} \left(2\eta + \frac{\varphi_n}{\delta} \right). \quad (5.374)$$

Kakor vidimo, je strižna napetost $\sigma_{x\zeta}$ linearna funkcija koordinate η , ki se na območju stene prereza spreminja v mejah od $-\delta/2$ do $+\delta/2$. Največjo vrednost doseže na zunanjem, najmanjšo pa na notranjem robu prereza

$$\begin{aligned} \sigma_{x\zeta}^{max} &= \sigma_{x\zeta} \left(\eta = \frac{\delta}{2} \right) = \frac{M_x}{I_x} \left(\frac{\varphi_n}{\delta} + \delta \right) \\ \sigma_{x\zeta}^{min} &= \sigma_{x\zeta} \left(\eta = -\frac{\delta}{2} \right) = \frac{M_x}{I_x} \left(\frac{\varphi_n}{\delta} - \delta \right). \end{aligned} \quad (5.375)$$

Pri tankostenskem prerezu je jasno, da se robni vrednosti napetosti le malo razlikujeta med seboj. Zato pri praktičnih nalogah dosledno računamo kar z enakomerno povprečno vrednostjo strižne napetosti $\bar{\sigma}_{x\zeta}$, za katero običajno vpeljemo tudi preprostejšo oznako τ_s (slika 5.33)

$$\tau_s = \bar{\sigma}_{x\zeta} = \sigma_{x\zeta}(\eta = 0) \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{M_x \varphi_n}{\delta I_x}. \quad (5.376)$$

Za torzijski vztrajnostni moment I_x vstavimo izraz (5.368) in dobimo 1. *Bredtovo formulo* za strižno napetost v tanki steni zaprtega enoceličnega prereza

$$\tau_s = \frac{M_x}{2 \delta A_s}. \quad (5.377)$$

Dobljena formula pove, da je strižna napetost v steni zaprtega prereza največja tam, kjer je debelina stene najmanjša. Če enačbo (5.377)

pomnožimo z δ , dobimo tako imenovani *strižni tok* q_s , ki je enakomeren vzdolž celotne srednje krivulje prereza \mathcal{C}_s

$$q_s = \delta \tau_s = \frac{M_x}{2 A_s} = \textit{konst.} \quad (5.378)$$

Opazimo lahko analogijo s tokom idealne tekočine po cevi spremenljivega prereza, pri čemer vlogo ploščine prereza prevzame debelina stene δ , vlogo hitrosti pa torzijska strižna napetost τ_s .

Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim večceličnim tankostenskim prečnim prerezom

Podobno kot pri nosilcu z enoceličnim prečnim prerezom ravnamo tudi pri določitvi mehanskega stanja nosilca z večceličnim zaprtim tankostenskim prerezom pri čisti torzijski obtežbi. Oglejmo si primer prečnega prereza s tremi notranjimi odprtinami (*slika 5.34 a*).

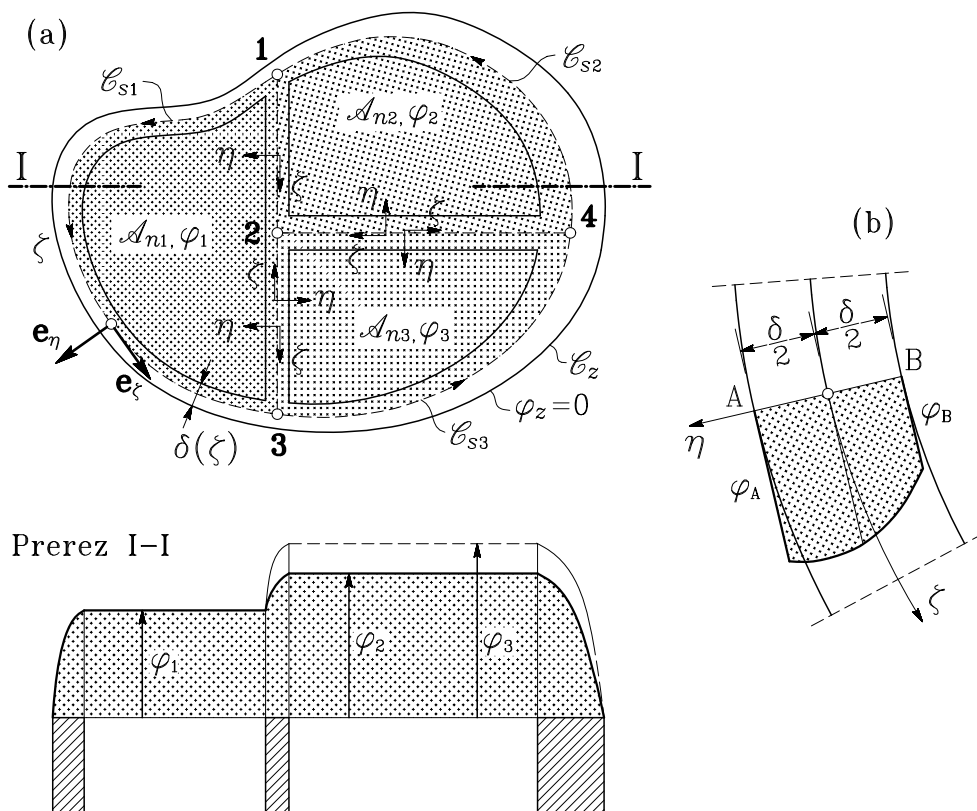
Sredinske črte obodne in notranjih sten tvorijo srednje krivulje \mathcal{C}_{s1} , \mathcal{C}_{s2} in \mathcal{C}_{s3} , ki obkrožajo srednje ploskve nad posameznimi odprtinami \mathcal{A}_{s1} , \mathcal{A}_{s2} in \mathcal{A}_{s3} s ploščinami A_{s1} , A_{s2} , A_{s3} . Konstantne vrednosti napetostne funkcije nad konturami notranjih odprtin označimo s φ_1 , φ_2 , φ_3 .

Poissonovo diferencialno enačbo čiste torzije torej rešujemo ob enakih predpostavkah kot v prejšnjem primeru in dobimo tudi enako splošno rešitev

$$\varphi = -\eta^2 + C_1\eta + C_2. \quad (5.379)$$

Pri določanju integracijskih konstant C_1 in C_2 moramo tokrat upoštevati, da sta pri notranjih stenah obe robni vrednosti napetostne funkcije različni od nič (*slika 5.34 b*)

$$\begin{aligned} \varphi\left(\eta = -\frac{\delta}{2}\right) &= \varphi_B \\ \varphi\left(\eta = \frac{\delta}{2}\right) &= \varphi_A \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \\ C_2 = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} + \frac{\delta^2}{4}. \end{cases} \quad (5.380)$$



Slika 5.34

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe je torej

$$\varphi = -\eta^2 + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \eta + \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} + \frac{\delta^2}{4} \quad (5.381)$$

s prvim odvodom po η

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2\eta + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta}. \quad (5.382)$$

Vrednosti napetostne funkcije nad notranjimi odprtinami $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ izračunamo iz dodatnih kompatibilnostnih enačb, ki jih zapišemo vzdolž

sklenjenih srednjih črt \mathcal{C}_{s1} , \mathcal{C}_{s2} , \mathcal{C}_{s3} okrog notranjih odprtin

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s1} \\ \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s2} \\ \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s3}. \end{aligned} \quad (5.383)$$

Nastopajoči prvi odvodi napetostne funkcije očitno niso gladke funkcije vzdolž srednjih krivulj. Zato srednje krivulje razdelimo na odseke, vzdolž katerih so integrandi gladke funkcije in krivuljne integrale po sklenjenih krivuljah izračunamo kot vsote integralov po posameznih odsekih. Začnimo s prvo od enačb (5.383). Na odseku od točke 1 do točke 3 je $\varphi_A = \varphi_z = 0$ in $\varphi_B = \varphi_1$, na odseku $\overline{32}$ je $\varphi_A = \varphi_3$ in $\varphi_B = \varphi_1$, na odseku $\overline{21}$ pa je $\varphi_A = \varphi_2$ in $\varphi_B = \varphi_1$. Ob upoštevanju enačb (5.382) se prva od enačb (5.383) glasi

$$\int_1^3 \frac{0 - \varphi_1}{\delta} d\zeta + \int_3^2 \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\delta} d\zeta + \int_2^1 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta} d\zeta = -2 A_{s1}. \quad (5.384)$$

Podobno zapišemo tudi preostali dve dodatni kompatibilnostni enačbi in dobimo

$$\begin{aligned} \int_4^1 \frac{0 - \varphi_2}{\delta} d\zeta + \int_1^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\delta} d\zeta + \int_2^4 \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\delta} d\zeta &= -2 A_{s2} \\ \int_3^4 \frac{0 - \varphi_3}{\delta} d\zeta + \int_4^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\delta} d\zeta + \int_2^3 \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{\delta} d\zeta &= -2 A_{s3}. \end{aligned} \quad (5.385)$$

Ker so φ_1 , φ_2 , φ_3 konstantne vrednosti, po ureditvi in množenju z -1

sledi

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_2 \int_2^1 \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_3 \int_3^2 \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s1} \\
 -\varphi_1 \int_1^2 \frac{d\zeta}{\delta} + \varphi_2 \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_3 \int_2^4 \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s2} \\
 -\varphi_1 \int_2^3 \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_2 \int_4^2 \frac{d\zeta}{\delta} + \varphi_3 \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s3}.
 \end{aligned} \tag{5.386}$$

Z vpeljavo okrajšav

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} & a_{12} &= - \int_2^1 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{13} &= - \int_3^2 \frac{d\zeta}{\delta} \\
 a_{21} &= - \int_1^2 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{22} &= \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{d\zeta}{\delta} & a_{23} &= - \int_2^4 \frac{d\zeta}{\delta} \\
 a_{31} &= - \int_2^3 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{32} &= - \int_4^2 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{33} &= \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{d\zeta}{\delta}
 \end{aligned} \tag{5.387}$$

ter

$$b_1 = 2 A_{s1} \quad b_2 = 2 A_{s2} \quad b_3 = 2 A_{s3} \tag{5.388}$$

lahko sistem (5.386) zapišemo v pregledni obliki

$$\begin{aligned}
 a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + a_{13} \varphi_3 &= b_1 \\
 a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + a_{23} \varphi_3 &= b_2 \\
 a_{31} \varphi_1 + a_{32} \varphi_2 + a_{33} \varphi_3 &= b_3.
 \end{aligned} \tag{5.389}$$

Tako smo dobili sistem linearnih algebrajskih enačb, iz katerega brez težav določimo konstantne vrednosti napetostne funkcije φ_1 , φ_2 in φ_3 .

Dobljene ugotovitve lahko posplošimo za primer tankostenskega prereza z N notranjimi odprtini. Tedaj lahko sistem kompatibilnostnih enačb na kratko zapišemo z enačbo

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j = b_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (5.390)$$

ali v matrični obliki

$$[a_{ij}] \{\varphi_j\} = \{b_i\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (5.391)$$

Koeficienti a_{ij} in desne strani b_i so podani z izrazi

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \oint_{\mathcal{C}_{si}} \frac{d\zeta}{\delta} \\ (i \neq j) \dots a_{ij} &= - \int_{l_{ij}} \frac{d\zeta}{\delta} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ b_i &= 2 A_{si}. \end{aligned} \quad (5.392)$$

Pri tem smo z l_{ij} označili skupni odsek srednjih krivulj \mathcal{C}_{si} in \mathcal{C}_{sj} , torej dolžino skupne stene med celicama i in j .

Z vstavitvijo rešitve za napetostno funkcijo (5.381) in izračunanih vrednosti napetostne funkcije nad notranjimi odprtini φ_i v splošno enačbo za torzijski vztrajnostni moment (5.305) bi na podoben način kakor pri enoceličnem prerezu dobili

$$I_x = \frac{1}{3} \left(\oint_{\mathcal{C}_{sz}} \delta^3 d\zeta + \sum_{l_{ij}} \int \delta^3 d\zeta \right) + 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si}. \quad (5.393)$$

Prvi integral v okroglem oklepaju iz vrednotimo vzdolž sklenjene srednje krivulje \mathcal{C}_{sz} obodne stene. S tem prvi člen v enačbi (5.393) predstavlja prispevek obodne in notranjih sten kot odprtih ozkih profilov k torzijskemu vztrajnostnemu momentu prereza. Vendar lahko z enakim

razmislekem kakor sicer pri tankostenskih zaprtih prerezih prvi člen v izrazu za I_x zanemarimo v primerjavi z drugim in v praktičnih nalogah računamo s poenostavljeno formulo

$$I_x = 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si}. \quad (5.394)$$

Končno določimo še strižne napetosti. Iz druge od enačb (5.356) in prve od enačb (5.382) sledi

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{M_x}{I_x} \left(2\eta - \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \right). \quad (5.395)$$

V praktičnih nalogah je pri tankostenskih zaprtih prerezih umestno računati kar s povprečno vrednostjo strižne napetosti τ_s

$$\tau_s = \bar{\sigma}_{x\zeta} = \sigma_{x\zeta}(\eta = 0) \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{M_x}{\delta I_x} (\varphi_B - \varphi_A). \quad (5.396)$$

Za dimenzioniranje oziroma kontrolo torzijske nosilnosti prereza je praviloma merodajna največja vrednost strižne napetosti τ_s . Da bi ugotovili, kolikšna je ta napetost in kje nastopa, moramo vzdolž vseh srednjih krivulj iz vrednotiti razmerje med razliko napetostnih funkcij na robovih $\varphi_B - \varphi_A$ in debelino stene δ .

Izbočitvena funkcija

Kakor smo opazili pri dosedanjih analizah vpliva torzijske obtežbe na linijski nosilec, igra pomembno vlogo vzdolžni pomik $u_x(y, z)$ poljubne točke prečnega prereza. Ta pomik kot funkcija prereznih koordinat y in z dejansko opisuje *izbočitev* prečnega prereza, ki se po privzetih predpostavkah v svoji ravnini sicer obnaša kot toga šipa. Pričakujemo lahko, da bo intenzivnost izbočitve sorazmerna torzijski obtežbi nosilca. Ta obtežba je pri enakomerni torziji podana kar s torzijskim momentom M_x , ki je z mehanskim stanjem nosilca povezan z enačbo (5.301). Zato je smiselno, da funkcijo $u_x(y, z)$ zapišemo s produktnim nastavkom

$$u_x(y, z) = \theta \Phi(y, z) = \frac{M_x}{GI_x} \Phi(y, z). \quad (5.397)$$

Vpeljali smo tako imenovano *izbočitveno funkcijo* $\Phi(y, z)$, ki očitno opisuje obliko izbočitve u_x , medtem ko je amplituda oziroma intenzivnost izbočitve zajeta v specifičnem torzijskem zasuku θ . Izbočitvena funkcija Φ je torej neodvisna od obtežbe in materialnih lastnosti nosilca in je, podobno kot napetostna funkcija φ , zgolj geometrijska karakteristika prečnega prereza. To pomeni, da jo lahko za izbrani prerez določimo vnaprej. V ta namen najprej pogledjmo, kako je izbočitvena funkcija Φ povezana z napetostno funkcijo φ . Za izhodišče vzamemo enačbi (5.268) in (5.269), ki izbočitev u_x povezujeta z deformacijama ε_{xy} in ε_{xz} ter s specifičnim torzijskim zasukom θ . Vzemimo še, da smo v prvem koraku torzijske analize nosilca iz Poissonove diferencialne enačbe določili napetostno funkcijo $\varphi(y, z)$. Ob upoštevanju konstitucijskih enačb (5.244) in substitucije (5.289) sledi

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2G} = \frac{1}{2} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{2G} = -\frac{1}{2} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}.\end{aligned}\tag{5.398}$$

Z upoštevanjem razcepa (5.397) in zvez (5.398) v enačbah (5.268) in (5.269) dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial y} &= \theta \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \theta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \theta (z - z_S) \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \theta (y - y_S).\end{aligned}\tag{5.399}$$

Od tod po krajšanju s θ sledita zvezi med prvimi parcialnimi odvodi izbočitvene in napetostne funkcije

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (z - z_S) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (y - y_S).\end{aligned}\tag{5.400}$$

S tem lahko zapišemo popolni diferencial $d\Phi$ izbočitvene funkcije

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (z - z_S) \right] dy - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (y - y_S) \right] dz. \quad (5.401)$$

Izbočitveno funkcijo v poljubni točki $T(y, z)$ prečnega prereza \mathcal{A}_x sedaj določimo na znani način: za izhodišče izberemo poljubno referenčno točko $T_0(y_0, z_0)$, vrednost izbočitvene funkcije v tej točki označimo s $\Phi_0 \equiv \Phi(T_0)$, upoštevamo enačbo (5.401) in po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \Phi_0 + \int_{T_0}^T d\Phi = \\ &= \Phi_0 + \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dz \right) + \int_{T_0}^T [(z - z_S)dy - (y - y_S)dz]. \end{aligned} \quad (5.402)$$

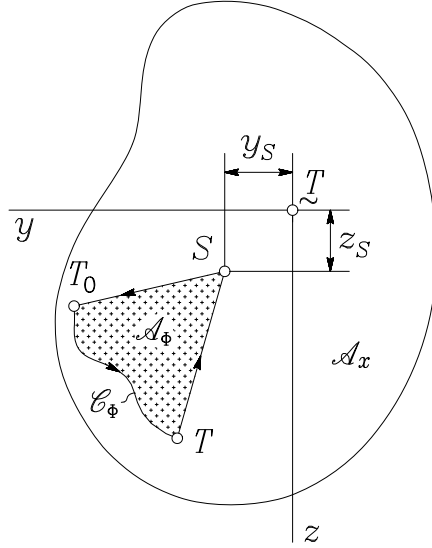
Integral v drugem členu na desni strani gornje enačbe predstavlja prispevek napetostne funkcije φ k izbočitveni funkciji, zato ga označimo s Φ_φ

$$\Phi_\varphi = \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dz \right) \quad (5.403)$$

in ga lahko za vsako izbrano točko T izračunamo vnaprej. Za izvrednotenje integrala v tretjem členu pa uporabimo majhno ukano in mu prištejemo dva integrala z enakim integrandom, vendar izvrednotena vzdolž dveh ravnih odsekov \overline{TS} in $\overline{ST_0}$ (slika 5.35)

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \Phi_0 + \Phi_\varphi + \int_{T_0}^T [(z - z_S)dy - (y - y_S)dz] + \\ &\quad \int_T^S [(z - z_S)dy - (y - y_S)dz] + \\ &\quad \int_S^{T_0} [(z - z_S)dy - (y - y_S)dz]. \end{aligned} \quad (5.404)$$

Za oba dodana integrala zlahka dokažemo, da je njuna vrednost na omenjenih odsekih enaka nič[†], zato v enačbi (5.402) nismo ničesar spremenili.



Slika 5.35

Vendar sedaj vsota treh integralov predstavlja integral po sklenjeni integracijski poti \mathcal{C}_Φ , ki omejuje sektor A_Φ znotraj prečnega prereza \mathcal{A}_x

$$\Phi(T) = \Phi_0 + \Phi_\varphi + \oint_{\mathcal{C}_\Phi} [(z - z_S)dy - (y - y_S)dz] . \quad (5.405)$$

Krivuljni integral na desni strani gornje enačbe z Greenovim izrekom prevedemo na ploskovni integral po sektorju \mathcal{A}_Φ

$$\Phi(T) = \Phi_0 + \Phi_\varphi + \int_{\mathcal{A}_\Phi} (-1 - 1) dA_x , \quad (5.406)$$

ploščino sektorja \mathcal{A}_Φ označimo z A_Φ in dobimo končni izraz za vrednost izbočitvene funkcije v točki T

$$\Phi(T) = \Phi_0 + \Phi_\varphi - 2A_\Phi . \quad (5.407)$$

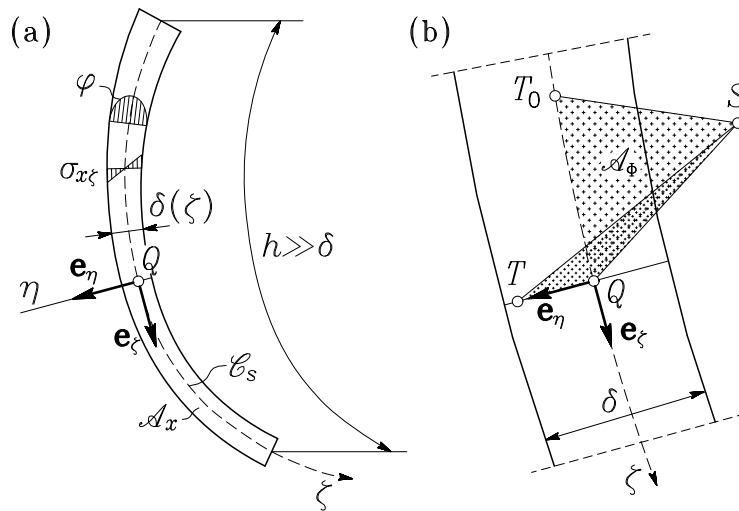
[†] Dokaz je prikazan v zgledu 5.19

Ploščina A_Φ , je v literaturi pogosto omenjena kot *sektorska koordinata*. Opozoriti moramo, da je sektorska koordinata A_Φ pozitivna, če privzeta integracijska pot $T_0 \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow T_0$ obkroži ploskev \mathcal{A}_Φ v protiurni smeri, v nasprotnem primeru pa je negativna.

Da bi lahko določili vrednost izbočitvene funkcije Φ v poljubni točki prereza \mathcal{A}_x , moramo torej poznati koordinati y_S in z_S torzijskega središča prereza ter vrednost izbočitvene funkcije Φ_0 v izbrani referenčni točki T_0 . V tej knjigi se omejimo na določanje izbočitve odprtih tankostenskih profilov, ki so pogosti konstrukcijski elementi jeklenih in prednapetih betonskih konstrukcij.

Izbočitev odprtih tankostenskih profilov

V razdelku o ozkem pravokotnem prerezu smo izpeljali formule, s katerimi kljub vpeljanim poenostavitvam razmeroma natančno določimo napetosti in specifični torzijski zasuk pri čisti torzijski obremenitvi nosilca z ozkim pravokotnim prečnim prerezom.



Slika 5.36

Kakor smo to naredili že pri zaprtih tankostenskih prerezi, uporabimo podobne enačbe tudi v primeru, da gre za ukrivljen odprt tankostenski

profil s spremenljivo debelino δ (slika 5.36 a). Vpeljane poenostavitve so tem bolj upravičene, čim manjša je ukrivljenost profila v ravnini (y, z) in čim večja je razvita “dolžina” profila h v primerjavi z največjo debelino δ .

Tudi v obravnavanem primeru se dosledno sklicujemo na srednjo krivuljo profila \mathcal{C}_s in na naravni koordinatni sistem z bazo $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$. Po analogiji z ozkim pravokotnim prerezom vzamemo, da je napetostna funkcija φ vzdolž ločne koordinate ζ konstantna, zato velja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{x\eta} \approx 0. \quad (5.408)$$

Poissonova enačba čiste torzije postane s tem navadna diferencialna enačba

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = -2 \quad (5.409)$$

z rešitvijo

$$\varphi = -\eta^2 + \frac{\delta^2}{4} \quad (5.410)$$

in s prvim odvodom po η

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2\eta \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0. \quad (5.411)$$

Podobno kot pri ozkem pravokotniku določimo tudi torzijski vztrajnostni moment I_x in specifični torzijski zasuk θ , pri čemer upoštevamo, da se debelina profila δ v splošnem lahko spreminja vzdolž srednje krivulje

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^h \delta^3 d\zeta \quad (5.412)$$

$$\theta = \frac{M_x}{GI_x}. \quad (5.413)$$

Strižno napetost $\sigma_{x\zeta}$ določimo z enačbo

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{2M_x}{I_x} \eta. \quad (5.414)$$

V najpogostejšem primeru, ko je debelina δ konstantna po celotnem profilu nosilca, določimo torzijski vztrajnostni moment I_x , specifični torzijski zasuk θ in potek strižne napetosti $\sigma_{x\zeta}$ analogno z enačbami (5.339) do (5.342), ki smo jih izpeljali za ozek pravokotni prerez.

Končno določimo še izbočitveno funkcijo odprtega tankostenskega profila. Za referenčno točko izberemo poljubno točko T_0 na srednji krivulji, integracijsko pot do poljubne točke $T(\eta, \zeta)$ pa sestavimo iz dveh odsekov $\overline{T_0Q}$ in \overline{QT} (slika 5.36 b). Izbočitveno funkcijo Φ določimo z enačbo (5.407), v kateri najprej iz vrednotimo delež Φ_φ . Enačbo (5.403) zapišemo v koordinatni bazi ($\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$) in upoštevamo izbrano integracijsko pot $T_0 \rightarrow Q \rightarrow T$

$$\Phi_\varphi = \int_{T_0}^Q \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\zeta \right) + \int_Q^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\zeta \right). \quad (5.415)$$

Glede na privzete poenostavitve so vsi odvodi napetostne funkcije φ po ζ enaki nič. Razen tega na odseku $\overline{T_0Q}$ velja

$$\overline{T_0Q} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (5.416)$$

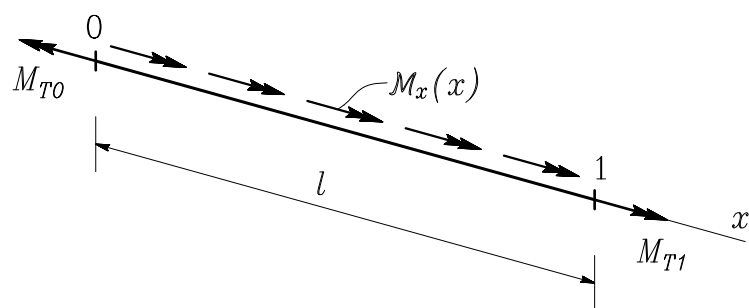
na odseku \overline{QT} pa je $d\zeta = 0$. Iz enačbe (5.415) s tem sledi, da je pri tankostenskem profilu delež $\Phi_\varphi = 0$ in enačba (5.407) preide v še krajšo obliko

$$\Phi = \Phi_0 - 2A_\Phi. \quad (5.417)$$

Sektorska koordinata A_Φ je načeloma enaka vsoti ploščin lika z oglišči ST_0Q in trikotnika SQT (slika 5.36 b). Vendar je pri tankostenskem profilu prispevek trikotnika SQT zanemarljivo majhen, zato kot sektorsko koordinato dosledno vzamemo kar ploščino lika, ki ga določajo torzijsko središče S , referenčna točka T_0 in točka Q na srednji krivulji profila.

Koordinati torzijskega središča.**Referenčna vrednost izbočitvene funkcije.**

V dosedanji analizi torzijskega obnašanja linijskega nosilca smo se večkrat srečali s pojmi torzijskega središča, referenčne točke in referenčne vrednosti izbočitvene funkcije. Pri dvojno simetričnih prerezih je jasno, da se torzijsko središče kar ujema s težiščem prereza. Prav tako je pri dvojno simetričnih prerezih edino smiselno za referenčno točko izbrati težišče prereza, saj mora biti zaradi zakonov simetrije izbočitev težišča enaka nič (spomnimo se na primer nosilca z eliptičnim prečnim prerezom). Če je le ena od osi y ali z tudi simetrijska os prereza, je umestno pričakovati, da bo torzijsko središče ležalo na tej osi, njegovo lego pa moramo šele določiti. Prav tako moramo lego torzijskega središča določiti tudi pri vseh nesimetričnih prerezih, kar je razmeroma težka naloga. V literaturi lahko zasledimo različne izpeljave enačb za določitev koordinat torzijskega središča in referenčne vrednosti izbočitvene funkcije. V tej knjigi izberemo razmeroma preprosto pot, na kateri pa se moramo na kratko podati na področje neenakomerne torzije ravnega linijskega nosilca. Problem neenakomerne torzije sicer presega predvideni okvir tega učbenika, zato se seznanimo zgolj z nujnimi osnovami, ki omogočajo določitev lege torzijskega središča in referenčne vrednosti izbočitvene funkcije.



Slika 5.37

Za izhodišče vzamemo osnovni primer neenakomerne torzije, pri katerem razen točkovnih torzijskih momentov v krajiščih na linijski nosilec

deluje tudi porazdeljena torzijska obtežba $\mathcal{M}_x(x)$ (slika 5.37). V tem primeru iz enačbe (5.33) sledi

$$\frac{dM_x}{dx} = \mathcal{M}_x \quad \rightarrow \quad M_x = M_x(x), \quad (5.418)$$

torej notranji torzijski moment M_x ni več enakomeren vzdolž nosilca. Specifični torzijski zasuk

$$\theta = \frac{d\omega_x}{dx} \quad (5.419)$$

povežemo z neenakomernim torzijskim momentom $M_x(x)$ na enak način kakor pri enakomerni torziji; zato specifični torzijski zasuk θ ni več konstanta, temveč se spreminja vzdolž nosilca v odvisnosti od torzijskega momenta

$$\theta(x) = \frac{M_x(x)}{GI_x}. \quad (5.420)$$

Ob upoštevanju enačb (5.418) in (5.419) določimo torzijski zasuk ω_x z enačbo

$$\omega_x = \omega_x^0 + \int_{x_0}^x \theta(\xi) d\xi = \omega_x^0 + \frac{1}{GI_x} \int_{x_0}^x M_x(\xi) d\xi. \quad (5.421)$$

Enačba (5.397) tudi pove, da izbočitev u_x ni več enakomerna vzdolž nosilca

$$u_x = \theta(x) \Phi(y, z) = u_x(x, y, z). \quad (5.422)$$

Bistvena razlika glede na primer enakomerne torzije je ravno v tem, da se pri neenakomerni torzijski obremenitvi prečni prerezi nosilca ne izbočijo vsi enako. Če si zamislimo dva sosedna prečna prereza, ki se izbočita vsak po svoje, je jasno, da se med njima pojavi interakcijska specifična površinska obtežba. Ker gre za prereze z normalo \mathbf{e}_x , je ta obtežba določena kar z vzdolžno normalno napetostjo σ_{xx} , ki je bila pri enakomerni torziji enaka nič. Kakor vemo iz splošne teorije linijskega nosilca, je napetost σ_{xx} s Hookovim zakonom povezana z vzdolžno deformacijo ε_{xx} . To določimo ob upoštevanju enačb (5.397) in (5.419) ter prve od kinematičnih enačb (4.4)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \Phi \frac{d\theta}{dx} = \Phi \frac{d^2\omega_x}{dx^2}. \quad (5.423)$$

Vzdolžna normalna napetost je tako

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx} = E \Phi \frac{d^2 \omega_x}{dx^2}. \quad (5.424)$$

Glede na to, da na obravnavani linijski nosilec deluje le torzijska obtežba, je jasno, da v njem ni niti osne sile niti upogibnih momentov. Pogoje, ki jih mora v tem smislu izpolnjevati napetost σ_{xx} , zapišemo v skladu z enačbami (5.29)

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x = E \frac{d^2 \omega_x}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} \Phi dA_x = 0 \\ M_y &= \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x = E \frac{d^2 \omega_x}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} z \Phi dA_x = 0 \\ M_z &= - \int_{\mathcal{A}_x} y \sigma_{xx} dA_x = -E \frac{d^2 \omega_x}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} y \Phi dA_x = 0. \end{aligned} \quad (5.425)$$

Modul elastičnosti E in drugi odvod torzijskega zasuka sta v našem primeru različna od nič, zato so enačbe (5.425) izpolnjene le tedaj, ko velja

$$A_x^\Phi = \int_{\mathcal{A}_x} \Phi dA_x = 0 \quad (5.426)$$

$$S_y^\Phi = \int_{\mathcal{A}_x} z \Phi dA_x = 0 \quad (5.427)$$

$$S_z^\Phi = \int_{\mathcal{A}_x} y \Phi dA_x = 0. \quad (5.428)$$

Pri tem smo za integrale izbočitvene funkcije in njenih statičnih momentov po prečnem prerezu A_x vpeljali okrajšave A_x^Φ , S_y^Φ in S_z^Φ . Dobljene

enačbe morajo seveda veljati tudi v primeru enakomerne torzije, vendar so tam identično izpolnjene in si z njimi ne moremo pomagati.

Sedaj se lahko lotimo zastavljene naloge: določiti moramo koordinate torzijskega središča in referenčno vrednost izbočitvene funkcije. Izbočitveno funkcijo smo zapisali z enačbo (5.407)

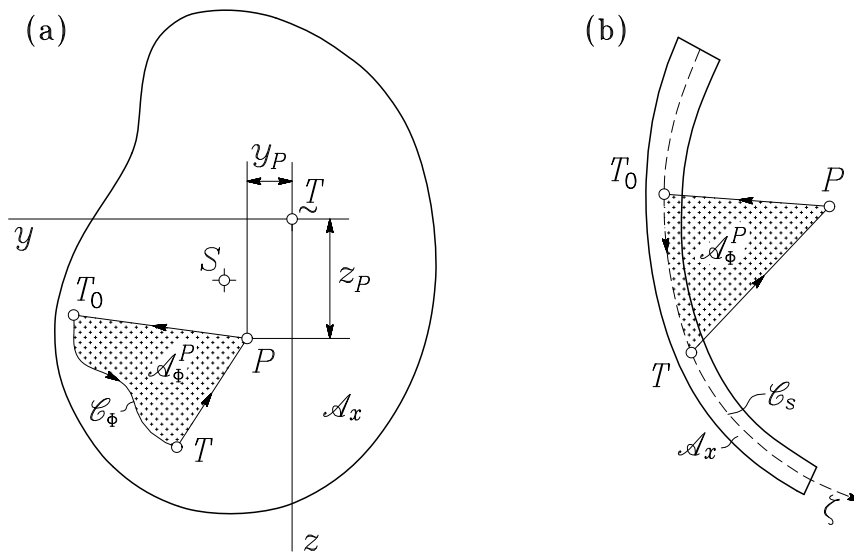
$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_\varphi - 2A_\Phi, \quad (5.429)$$

kjer je

$$\Phi_\varphi = \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right) \quad (5.430)$$

in

$$-2A_\Phi = \int_{T_0}^T [(z - z_S) dy - (y - y_S) dz]. \quad (5.431)$$



Slika 5.38

Ker torzijskega središča S zaenkrat ne poznamo, izberemo poljubno pomožno točko $P(y_P, z_P)$ v prečnem prerezu (slika 5.38 a) in določimo

izbočitveno funkcijo Φ_P tako, kakor da bi bila točka P pravo torzijsko središče

$$\Phi_P = \Phi_0^P + \Phi_\varphi - 2A_\Phi^P, \quad (5.432)$$

Z oznako Φ_P smo poudarili, da to ni prava, temveč zgolj pomožna vrednost izbočitvene funkcije. Zato za adicijski člen Φ_0^P brez posledic izberemo vrednost nič ($\Phi_0^P = 0$). Pri tem spet velja, da je sektorska koordinata A_Φ^P pozitivna, če izbrana integracijska pot \mathcal{C}_Φ obkroži sektor \mathcal{A}_Φ^P v protiurni smeri. Prispevek Φ_φ je, kakor pove enačba (5.430), neodvisen od izbire pomožne točke P in ob upoštevanju enačb (5.429) in (5.431) dobimo

$$\Phi_P = \Phi_\varphi + \int_{T_0}^T [(z - z_P) dy - (y - y_P) dz]. \quad (5.433)$$

Vrnimo se k enačbi (5.429) in jo zapišimo ob upoštevanju zveze (5.431)

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_\varphi + \int_{T_0}^T [(z - z_S) dy - (y - y_S) dz]. \quad (5.434)$$

V okroglih oklepajih, ki nastopata v integralu na desni strani gornje enačbe, odštejemo in prištejemo znane koordinate y_P in z_P izbrane pomožne točke P . S tem ostane enačba (5.434) nespremenjena in po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \Phi_\varphi + \int_{T_0}^T [(z - z_P) dy - (y - y_P) dz] + \\ \int_{T_0}^T [(z_P - z_S) dy - (y_P - y_S) dz]. \end{aligned} \quad (5.435)$$

Primerjava z enačbo (5.433) pove, da vsota drugega in tretjega člena na desni predstavlja ravno pomožno vrednost izbočitvene funkcije Φ_P , ki jo znamo določiti, saj smo koordinati y_P in z_P izbrali sami. V integralu v četrtem členu pa sedaj nastopajo le fiksne vrednosti koordinat točk S in P . Okroglata oklepaja v tem integralu sta zato konstanti in velja

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T [(z_P - z_S) dy - (y_P - y_S) dz] = \\ \int_{y_0}^y (z_P - z_S) d\tilde{y} - \int_{z_0}^z (y_P - y_S) d\tilde{z} = \\ (z_P - z_S)(y - y_0) - (y_P - y_S)(z - z_0). \end{aligned} \quad (5.436)$$

Enačbo (5.434) lahko sedaj zapišemo takole

$$\Phi = \Phi_P + (z_P - z_S)y - (y_P - y_S)z + [\Phi_0 - (z_P - z_S)y_0 + (y_P - y_S)z_0]. \quad (5.437)$$

Dobljena enačba kaže, da se dejanska vrednost izbočitvene funkcije Φ za linearni del razlikuje od pomožne vrednosti Φ_P , ki smo jo določili glede na poljubno izbrano pomožno točko P . Z oznakami

$$\begin{aligned} A &= z_P - z_S \\ -B &= y_P - y_S \\ C &= \Phi_0 - (z_P - z_S)y_0 + (y_P - y_S)z_0 \end{aligned} \quad (5.438)$$

zapišemo izraz za izbočitveno funkcijo Φ v preprosti obliki

$$\Phi = \Phi_P + Ay + Bz + C. \quad (5.439)$$

Vrnimo se k pogojem (5.426) do (5.428), ki jim mora v obravnavanem primeru zadoščati izbočitvena funkcija Φ . Izraz (5.439) vstavimo v prvega od omenjenih pogojev in dobimo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_x} (\Phi_P + Ay + Bz + C) dA_x = \\ \int_{\mathcal{A}_x} \Phi_P dA_x + A \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x + B \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x + C \int_{\mathcal{A}_x} dA_x = 0. \end{aligned} \quad (5.440)$$

Z vstavitvijo izraza (5.439) v pogoja (5.427) in (5.428) na podoben način sledi

$$\int_{\mathcal{A}_x} z \Phi_P dA_x + A \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x + B \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x + C \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x = 0 \quad (5.441)$$

$$\int_{\mathcal{A}_x} y \Phi_P dA_x + A \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x + B \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x + C \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x = 0. \quad (5.442)$$

V integralih v drugem, tretjem in četrtem členu pogojnih enačb (5.440) do (5.442) prepoznamo geometrijske karakteristike prečnega prereza \mathcal{A}_x . Ker sta osi y in z težiščni in glavni vztrajnostni osi prereza, je $S_y = S_z = I_{yz} = 0$. Razen tega vpeljemo nove oznake

$$\begin{aligned} S_{\Phi}^P &= \int_{\mathcal{A}_x} \Phi_P dA_x \\ I_{\Phi y}^P &= \int_{\mathcal{A}_x} z \Phi_P dA_x \\ I_{\Phi z}^P &= \int_{\mathcal{A}_x} y \Phi_P dA_x. \end{aligned} \quad (5.443)$$

V literaturi s področja neenakomerne torzije tankostenskih nosilcev je za količino S_{Φ}^P uveljavljen izraz *deplanacijski (izbočitveni) statični moment*, količini $I_{\Phi y}^P$ in $I_{\Phi z}^P$ pa sta znani kot *deplanacijska vztrajnostna momenta* prereza \mathcal{A}_x glede na osi y in z .

Ob upoštevanju vsega navedenega iz pogoja (5.440) sledi

$$C = -\frac{S_{\Phi}^P}{A_x} \quad (5.444)$$

in podobno iz preostalih dveh pogojnih enačb

$$B = -\frac{I_{\Phi y}^P}{I_y} \quad \text{in} \quad A = -\frac{I_{\Phi z}^P}{I_z}. \quad (5.445)$$

Dobljene izraze za konstante A , B in C vstavimo v enačbe (5.438) in po krajšem urejanju določimo iskane količine: koordinati torzijskega središča S in referenčno vrednost izbočitvene funkcije Φ_0 v točki $T_0(y_0, z_0)$

$$\begin{aligned} y_S &= y_P - \frac{I_{\Phi y}^P}{I_y} \\ z_S &= z_P + \frac{I_{\Phi z}^P}{I_z} \\ \Phi_0 &= -\frac{S_{\Phi}^P}{A_x} - \frac{I_{\Phi z}^P}{I_z} y_0 - \frac{I_{\Phi y}^P}{I_y} z_0. \end{aligned} \quad (5.446)$$

V tem učbeniku se pri določanju koordinat torzijskega središča in referenčne vrednosti izbočitvene funkcije omejimo na odprte tankostenske prereze. Pri takih profilih je izvrednotenje tako pomožne izbočitvene funkcije Φ_P kakor tudi dejanske izbočitvene funkcije Φ razmeroma preprosto. Ob upoštevanju enačbe (5.417) in komentarja k tej enačbi, je pomožna izbočitvena funkcija kar enaka negativni dvakratni ploščini lika, ki ga določajo točke P , T_0 in poljubna točka T , za katero želimo določiti izbočitev (slika 5.38 b)

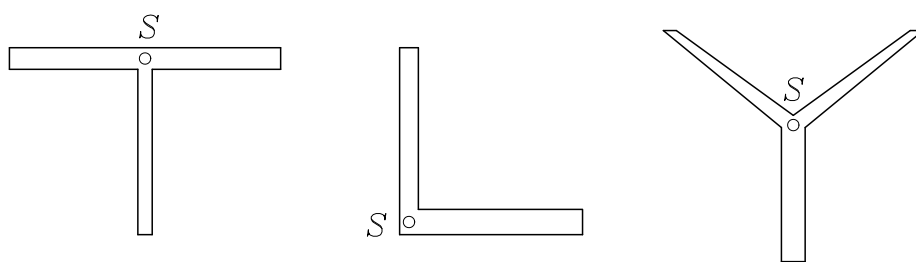
$$\Phi_P = -2 A_{\Phi}^P, \quad (5.447)$$

kjer smo seveda vzeli $\Phi_0^P = 0$. Dejanski potek izbočitvene funkcije Φ po tankostenskem profilu sedaj najhitreje določimo z enačbo (5.439)

$$\Phi = \Phi_P - \frac{S_{\Phi}^P}{A_x} - \frac{I_{\Phi z}^P}{I_z} y - \frac{I_{\Phi y}^P}{I_y} z. \quad (5.448)$$

Dodajmo še nekaj pojasnil o legi torzijskega središča pri odprtih tankostenskih prerezi. Če je ena od težiščnih osi (y ali z) simetrijska os prereza, leži torzijsko središče na tej osi. Če sta obe težiščni osi tudi simetrijski osi prereza, je težišče \mathcal{T} obenem torzijsko središče S .

Če je profil sestavljen iz ozkih pravokotnikov, katerih srednje črte se stikajo v isti točki, je torzijsko središče kar ta skupna točka (slika 5.39).

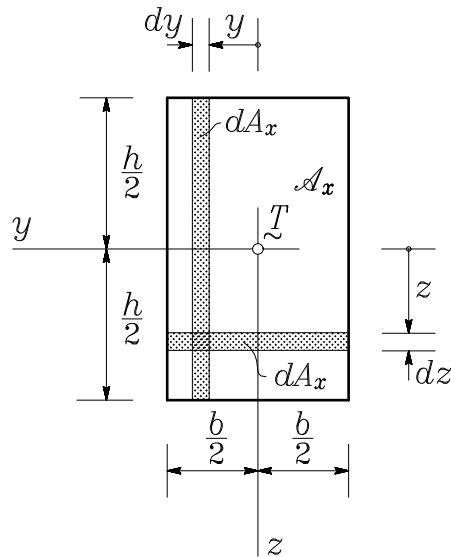


Slika 5.39

5.6 Raven linijski nosilec - Zgledi

Zgled 5.1

Določi vztrajnostne momente pravokotnega prečnega prereza glede na osi y in z (slika Z-5.1)



Slika Z-5.1

Ko smo v razdelku **5.3** govorili o upogibu linijskega nosilca, smo vztrajnostne momente prečnega prereza glede na težiščni osi y in z definirali z enačbami

$$I_{yy} = \int_{A_x} z^2 dA_x, \quad I_{zz} = \int_{A_x} y^2 dA_x, \quad I_{yz} = - \int_{A_x} yz dA_x.$$

Začnimo z upogibnim vztrajnostnim momentom glede na os y . Pri pravokotnem prerezu je $dA_x = b dz$, zato velja

$$I_{yy} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rightarrow I_{yy} = \frac{b h^3}{12}.$$

Podobno dobimo upogibni vztrajnostni moment glede na os z

$$I_{zz} = h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = h \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rightarrow I_{zz} = \frac{b^3 h}{12}.$$

Določimo še deviacijski vztrajnostni moment $I_{yz} = I_{zy}$

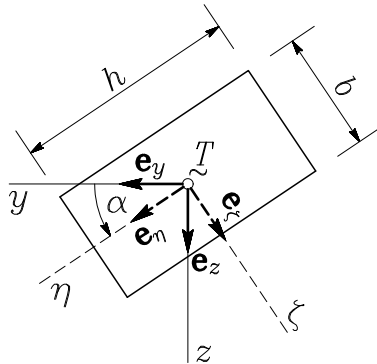
$$I_{yz} = -b \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z dz \right] dy = -b \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \rightarrow I_{yz} = 0.$$

Deviacijski vztrajnostni moment je po pričakovanju enak nič, saj ima prečni prerez kar dve simetrijski osi (y in z).

Nasploh je pri mehanski analizi linijskih nosilcev ugodno izbrati koordinatni sistem tako, da sta osi y in z težiščni in glavni vztrajnostni osi prečnega prereza \mathcal{A}_x . Tedaj je $S_y = S_z = 0$ in $I_{yz} = 0$, s tem pa se občutno poenostavijo tako upogibne kakor tudi torzijske enačbe nosilca.

Zgled 5.2

Pravokoten prečni prerez nosilca je glede na izbrani kartezijski koordinatni sistem z bazo ($\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) zasukan za kot α , kakor kaže slika Z-5.2. Določi njegove vztrajnostne momente glede na težiščni osi y in z .



Slika Z-5.2

Če vztrajnostne momente ravninskega lika glede na kartezijsko bazo $(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ določimo tako, kakor smo to naredili v razdelku **5.3**

$$I_{yy} = \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x, \quad I_{zz} = \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x, \quad I_{yz} = I_{zy} = - \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x,$$

lahko dokažemo, da so I_{yy} , I_{zz} in I_{yz} komponente kartezijskega vztrajnostnega tenzorja drugega reda v ravnini (y, z) [†]. Po analogiji z ravninskim napetostnim ali ravninskim deformacijskim stanjem jih uredimo v kvadratno matriko

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

V neki drugi kartezijski bazi $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$, ki je glede na bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ določena s transformacijsko matriko $[e_{\alpha i}]$, ima isti vztrajnostni tenzor komponente $I_{\alpha\beta}$

$$[e_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} e_{\eta y} & e_{\eta z} \\ e_{\zeta y} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} \rightarrow [I_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} I_{\eta\eta} & I_{\eta\zeta} \\ I_{\zeta\eta} & I_{\zeta\zeta} \end{bmatrix},$$

kjer seveda spet velja simetrija $I_{zy} = I_{yz}$. Komponente $I_{\alpha\beta}$ določimo s transformacijsko enačbo (1.163)

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j I_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j} \quad (i, j = y, z; \alpha, \beta = \eta, \zeta),$$

zaradi znanih lastnosti transformacijske matrike pa velja tudi obratna transformacija

$$I_{ij} = \sum_\alpha \sum_\beta I_{\alpha\beta} e_{i\alpha} e_{j\beta} \quad (i, j = y, z; \alpha, \beta = \eta, \zeta).$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} I_{yy} &= I_{\eta\eta} e_{y\eta}^2 + I_{\zeta\zeta} e_{y\zeta}^2 + 2I_{\eta\zeta} e_{y\eta} e_{y\zeta} \\ I_{zz} &= I_{\eta\eta} e_{z\eta}^2 + I_{\zeta\zeta} e_{z\zeta}^2 + 2I_{\eta\zeta} e_{z\eta} e_{z\zeta} \end{aligned}$$

[†] Dokaz lahko najdemo v klasičnih učbenikih analitične mehanike, v pričujočem delu pa se mu zaradi zamudnosti odpovemo.

$$I_{yz} = I_{zy} = I_{\eta\eta} e_{y\eta} e_{z\eta} + I_{\zeta\zeta} e_{y\zeta} e_{z\zeta} + I_{\eta\zeta} (e_{y\eta} e_{z\zeta} + e_{y\zeta} e_{z\eta}) .$$

V našem primeru lahko elemente transformacijske matrike izrazimo v odvisnosti od kota α

$$[e_{i\alpha}] = \begin{bmatrix} e_{y\eta} & e_{y\zeta} \\ e_{z\eta} & e_{z\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

in sledi

$$I_{yy} = I_{\eta\eta} \cos^2 \alpha + I_{\zeta\zeta} \sin^2 \alpha - 2I_{\eta\zeta} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{zz} = I_{\eta\eta} \sin^2 \alpha + I_{\zeta\zeta} \cos^2 \alpha + 2I_{\eta\zeta} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{yz} = I_{\eta\eta} \sin \alpha \cos \alpha - I_{\zeta\zeta} \sin \alpha \cos \alpha + I_{\eta\zeta} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) .$$

Ob upoštevanju znanih trigonometričnih zvez lahko dobljene izraze zapišemo podobno kot smo v poglavju o ravninskem napetostnem stanju zapisali napetosti v poljubni poševni ravnini

$$I_{yy} = \frac{1}{2} (I_{\eta\eta} + I_{\zeta\zeta}) + \frac{1}{2} (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta}) \cos 2\alpha - I_{\eta\zeta} \sin 2\alpha$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} (I_{\eta\eta} + I_{\zeta\zeta}) - \frac{1}{2} (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta}) \cos 2\alpha + I_{\eta\zeta} \sin 2\alpha$$

$$I_{yz} = \frac{1}{2} (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta}) \sin 2\alpha + I_{\eta\zeta} \cos 2\alpha .$$

V obravnavanem primeru sta osi η in ζ težiščni in glavni vztrajnostni osi prikazanega pravokotnega prereza, zato je

$$I_{\eta\eta} = \frac{b^3 h}{12}, \quad I_{\zeta\zeta} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{in} \quad I_{\eta\zeta} = 0$$

in vztrajnostni momenti glede na težiščni osi y in z so

$$I_{yy} = \frac{bh}{12} (b^2 \cos^2 \alpha + h^2 \sin^2 \alpha)$$

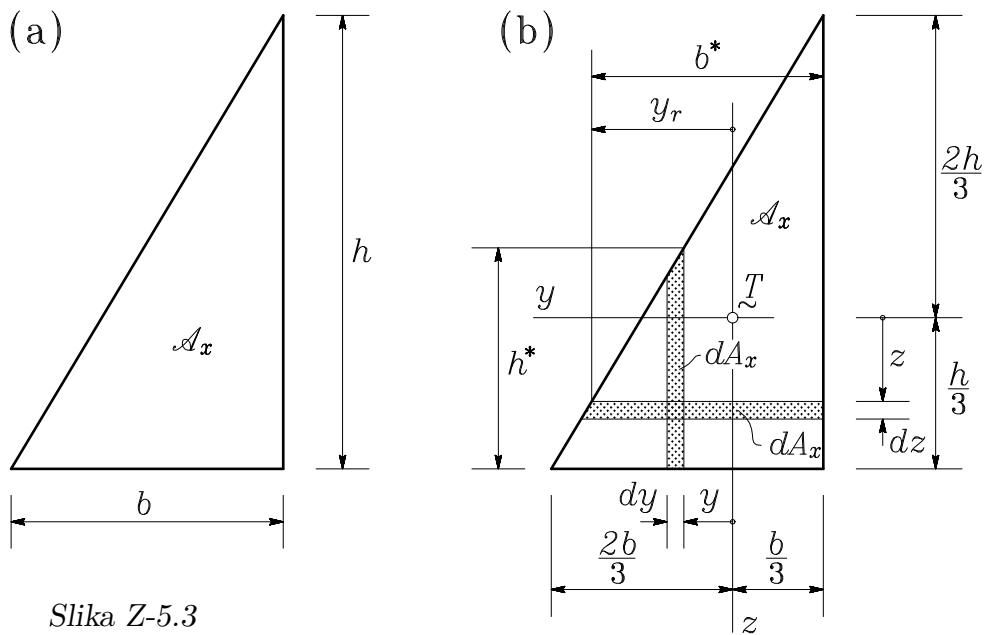
$$I_{zz} = \frac{bh}{12} (b^2 \sin^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha)$$

$$I_{yz} = \frac{bh}{12} (b^2 - h^2) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{bh}{24} (b^2 - h^2) \sin 2\alpha .$$

Na koncu še poudarimo, da tenzorska narava komponent matrike vztrajnostnih momentov I_{ij} tudi sicer omogoča vpeljavo in uporabo vseh operacij, ki smo jih spoznali v razdelkih o ravninskem napetostnem in ravninskem deformacijskem stanju. To je še posebej pomembno pri določitvi glavnih vztrajnostnih momentov in pripadajočih glavnih vztrajnostnih osi.

Zgled 5.3

Za prikazani trikotni prečni prerez nosilca (slika Z-5.3 a) določi vztrajnostne momente glede na težiščne osi y in z , lego glavnih vztrajnostnih osi ter glavna vztrajnostna momenta! Izvrednoti navedene geometrijske karakteristike prereza za primer, da je $b = 4$ dm in $h = 6$ dm!



Slika Z-5.3

Lega težišča T je pri pravokotnem trikotniku nedvoumno določena na tretjini osnovnice oziroma višine. Za določitev vztrajnostnega momenta

I_{yy} je najugodnejše, če vzamemo $dA_x = b^* dz$ (slika Z-5.3 b) in spremenljivo “širino” b^* določimo s pravilom podobnih trikotnikov

$$b^* = \frac{b}{3h}(3z + 2h).$$

Tedaj je

$$I_{yy} = \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x = \frac{b}{3h} \int_{-\frac{2h}{3}}^{\frac{h}{3}} (3z + 2h) z^2 dz$$

in po krajši izpeljavi dobimo

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{36} = \frac{A_x}{18} h^2,$$

kjer smo upoštevali, da je $A_x = \frac{bh}{2}$.

Vztrajnostni moment I_{zz} določimo na podoben način, le da tokrat vzamemo $dA_x = h^* dy$

$$I_{zz} = \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x = \frac{h}{3b} \int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{2b}{3}} (2b - 3y) y^2 dy$$

in po integriranju dobimo

$$I_{zz} = \frac{b^3h}{36} = \frac{A_x}{18} b^2.$$

Deviacijski vztrajnostni moment I_{yz} najlažje določimo tako, da vzamemo $dA_x = dy dz$ in vpeljemo robno vrednost y_r koordinate y vzdolž poševne stranice trikotnika kot funkcijo koordinate z (slika Z-5.3 b)

$$y_r = \frac{b}{3h}(3z + h).$$

Tedaj velja

$$I_{yz} = - \int_{\mathcal{A}_x} yz \, dA_x = - \int_{-\frac{2h}{3}}^{\frac{h}{3}} z \int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{b}{3h}(3z+h)} y \, dy \, dz .$$

Najprej opravimo integriranje po y

$$I_{yz} = - \frac{b^2}{18 h^2} \int_{-\frac{2h}{3}}^{\frac{h}{3}} (9z^2 + 6hz) z \, dz ,$$

nato pa še po z in dobimo

$$I_{yz} = - \frac{b^2 h^2}{72} = - \frac{A_x^2}{18} .$$

Glavna vztrajnostna momenta I_{11} in I_{22} določimo po vzorcu enačbe (1.314)

$$I_{11,22} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_{yy} - I_{zz})^2 + I_{yz}^2} .$$

Vstavimo dobljene izraze za vztrajnostne momente

$$I_{11,22} = \frac{1}{2} \frac{A_x}{18} (b^2 + h^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{A_x^2}{18^2} (h^2 - b^2)^2 + \frac{A_x^2}{18^2}}$$

in po ureditvi dobimo

$$I_{11,22} = \frac{A_x}{36} \left[(b^2 + h^2) \pm \sqrt{b^4 - b^2 h^2 - h^4} \right] .$$

Lega glavnih vztrajnostnih osi je določena s kotom α_I , ki ga dobimo z rešitvijo enačbe

$$\operatorname{tg} 2\alpha_I = \frac{2 I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} = - \frac{b h}{h^2 - b^2} = - \frac{2 A_x}{h^2 - b^2} .$$

Končno še izvednotimo dobljene izraze za geometrijske karakteristike obravnavanega pravokotnega trikotnika pri podanih velikostih katet

$$A_x = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ dm}^2$$

$$I_{yy} = \frac{12}{18} \cdot 6^2 = 24 \text{ dm}^4$$

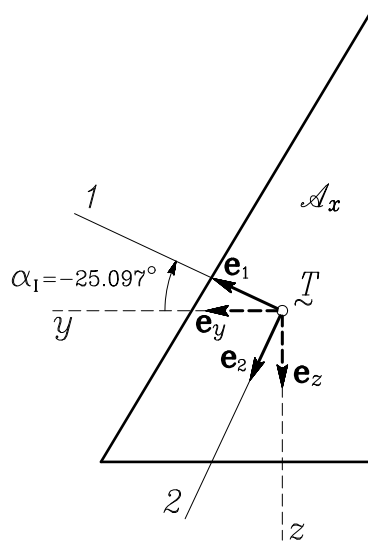
$$I_{zz} = \frac{12}{18} \cdot 4^2 = \frac{32}{3} \text{ dm}^4$$

$$I_{yz} = -\frac{12^2}{18} = -8 \text{ dm}^4.$$

Glavna vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 , ki določata smeri glavnih vztrajnostnih osi (slika Z-5.3 c), določimo v skladu z enačbama (1.313)

$$\text{tg } 2\alpha_I = -\frac{2 \cdot 12}{6^2 - 4^2} = -1.2 \quad \rightarrow \quad \alpha_I = -25.097^\circ.$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_I &= -0.424 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 = 0.906 \mathbf{e}_y - 0.424 \mathbf{e}_z \\ \cos \alpha_I &= 0.906 & & \mathbf{e}_2 = 0.424 \mathbf{e}_y + 0.906 \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$



Slika Z-5.3 c

Glavna vztrajnostna momenta sta

$$I_{11,22} = \frac{12}{36} \left[(4^2 + 6^2) \pm \sqrt{4^4 - 4^2 \cdot 6^2 - 6^4} \right] \quad \begin{cases} I_{11} = 27.747 \text{ dm}^4 \\ I_{22} = 6.920 \text{ dm}^4. \end{cases}$$

Končno naredimo še kontrolo in izračunajmo vztrajnostne momente v glavni bazi ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) s transformacijsko formulo (1.164)

$$[I_{\alpha\beta}] = [e_{\alpha i}][I_{ij}][e_{j\beta}] \quad (i, j = y, z; \alpha, \beta = 1, 2)/, .$$

V našem primeru dobimo

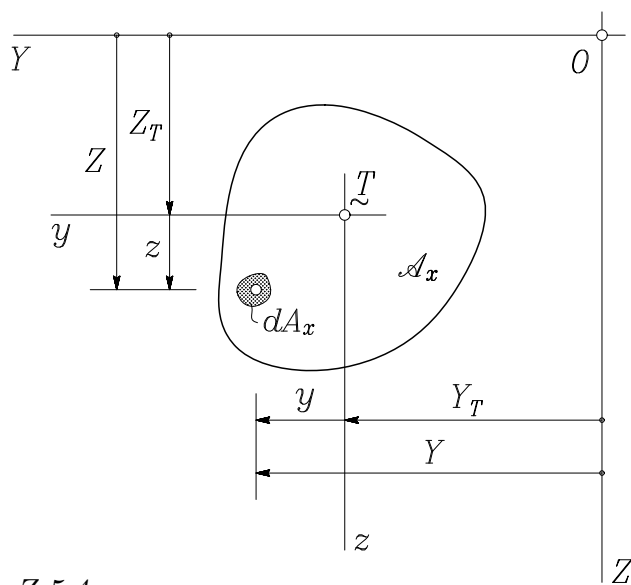
$$[I_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0.906 & -0.424 \\ 0.424 & 0.906 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & -8 \\ -8 & 32/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.906 & 0.424 \\ -0.424 & 0.906 \end{bmatrix}$$

$$[I_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 27.747 & 0 \\ 0 & 6.920 \end{bmatrix} .$$

Dobili smo torej pravilen rezultat.

Zgled 5.4

Določi vztrajnostne momente poljubnega ravninskega lika \mathcal{A}_x glede na osi Y in Z (slika Z-5.4).



Slika Z-5.4

Vztrajnostne momente ravninskega lika \mathcal{A}_x glede na kartezijski osi Y in Z , ki sta sicer vzporedni s težiščnima osema y in z , vendar je njuno izhodišče 0 glede na težišče T zamaknjeno za Y_T oziroma Z_T , določimo z upoštevanjem splošnih definicij. Za vztrajnostni moment glede na os Y tako dobimo

$$I_{YY} = \int_{\mathcal{A}_x} Z^2 dA_x.$$

Ker je $Z = z + Z_T$, sledi

$$I_{YY} = \int_{\mathcal{A}_x} (z + Z_T)^2 dA_x = \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x + 2 Z_T \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x + Z_T^2 \int_{\mathcal{A}_x} dA_x.$$

Integral v drugem členu predstavlja statični moment S_y lika \mathcal{A}_x glede na težiščno os y in je zato enak nič ($S_y = 0$). Prvi člen pa predstavlja vztrajnostni moment I_{yy} glede na težiščno os y , tako da je končno

$$I_{YY} = I_{yy} + A_x Z_T^2.$$

Za vztrajnostni moment I_{ZZ} glede na os Z na podoben način dobimo

$$I_{ZZ} = I_{zz} + A_x Y_T^2.$$

Dobljeni enačbi izražata znano *Steinerjevo*[†] *pravilo*, ki pravi, da uporabni vztrajnostni moment ravninskega lika glede na poljubno os v ravnini izračunamo kot vsoto ustreznega vztrajnostnega momenta glede na vzporedno lokalno težiščno os in produkta ploščine lika s kvadratom pravokotne oddaljenosti težišča lika od te osi.

Podobno določimo tudi deviacijski vztrajnostni moment $I_{YZ} = I_{ZY}$

$$I_{YZ} = - \int_{\mathcal{A}_x} YZ dA_x = - \int_{\mathcal{A}_x} (y + Y_T)(z + Z_T) dA_x.$$

[†] Jakob Steiner, nemški matematik (1796–1863).

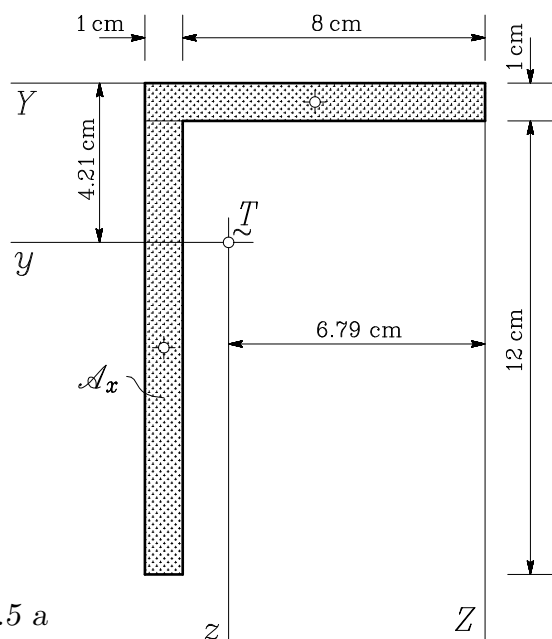
Upoštevamo, da sta y in z težiščni osi lika \mathcal{A}_x in po krajši izpeljavi dobimo Steinerjev izrek za deviacijski vztrajnostni moment

$$I_{YZ} = I_{yz} - A_x Y_T Z_T.$$

Steinerjevo pravilo je koristno orodje za računanje vztrajnostnih momentov prečnih prerezov, ki so sestavljeni iz dveh ali več značilnih podprerezov, na primer T-, I-, L- in drugih profilov.

Zgled 5.5

Določi velikosti in osi glavnih vztrajnostnih momentov prikazanega prečnega prereza upogibnega nosilca (slika Z-5.5 a).



Slika Z-5.5 a

Pojma glavnih vztrajnostnih osi in glavnih vztrajnostnih momentov se nanašata na težišče prereza. Lego težišča T v prerezu določimo glede

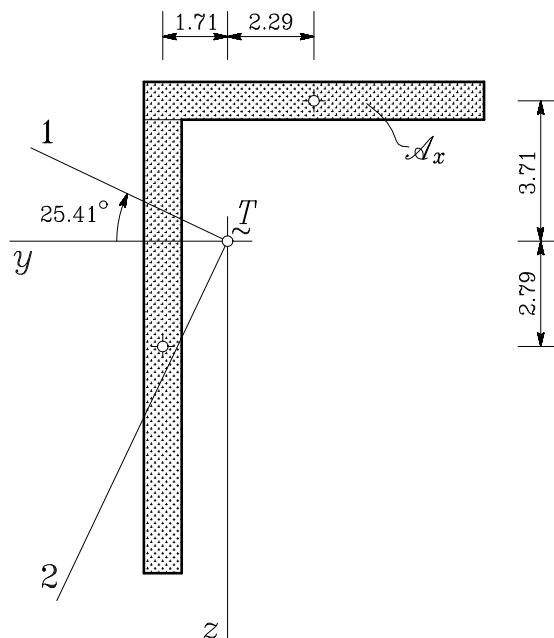
na pomožni koordinatni sistem $(Y, Z)^\dagger$. Prerez razdelimo v dva pravokotnika in izračunamo težiščni razdalji Y_T in Z_T (slika Z-5.5a)

$$Y_T = \frac{\int_{\mathcal{A}_x} Y dA_x}{A_x} = \frac{9 \cdot 1 \cdot 4.5 + 1 \cdot 12 \cdot 8.5}{21.0} \rightarrow Y_T = 6.79 \text{ cm}$$

$$Z_T = \frac{\int_{\mathcal{A}_x} Z dA_x}{A_x} = \frac{9 \cdot 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 12 \cdot 7.0}{21.0} \rightarrow Z_T = 4.21 \text{ cm},$$

kjer smo ploščino A_x prereza \mathcal{A}_x izračunali vnaprej

$$A_x = \int_{\mathcal{A}_x} dA_x = 9 \cdot 1 + 1 \cdot 12 \rightarrow A_x = 21.0 \text{ cm}^2.$$



Slika Z-5.5 b

[†] Določevanje težišč teles in likov je podrobno obravnavano v številnih učbenikih, na primer v knjigi M. Stanek, G. Turk, Statika I, FGG, Ljubljana 1996.

Sedaj postavimo izhodišče kartezijskega koordinatnega sistema (y, z) v težišče prereza \mathcal{T} in po pravilih, ki smo jih spoznali v zgledu 5.4, izračunamo vztrajnostne momente glede na osi y in z (slika Z-5.5 b)

$$I_{yy} = \frac{9 \cdot 1^3}{12} + 9 \cdot 1 \cdot 3.71^2 + \frac{1 \cdot 12^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot 2.79^2$$

$$I_{yy} = 362.036 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{1 \cdot 9^3}{12} + 9 \cdot 1 \cdot 2.29^2 + \frac{12 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot 1.71^2$$

$$I_{zz} = 144.036 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = -9 \cdot 1 \cdot 2.29 \cdot 3.71 - 12 \cdot 1 \cdot 1.71 \cdot 2.79$$

$$I_{yz} = -133.714 \text{ cm}^4.$$

Vztrajnostna matrika prereza \mathcal{A}_x je tako

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 362.036 & -133.714 \\ -133.714 & 144.036 \end{bmatrix}.$$

Glavna vztrajnostna momenta I_{11} in I_{22} izračunamo po zgledu enačbe (1.314)

$$\begin{aligned} I_{11,22} &= \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_{yy} - I_{zz})^2 + I_{yz}^2} \\ &= \frac{1}{2}(362.036 + 144.036) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(362.036 - 144.036)^2 + 133.714^2} \end{aligned}$$

$$I_{11} = 425.548 \text{ cm}^4 \quad I_{22} = 80.523 \text{ cm}^4.$$

Lega glavnih vztrajnostnih osi je določena s kotom α_I , ki ga dobimo z rešitvijo enačbe

$$\text{tg } 2\alpha_I = \frac{2 I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} = -\frac{2 \cdot 133.714}{362.036 - 144.036} \quad \rightarrow \quad \alpha_I = -25.41^\circ.$$

Ker je $\sin \alpha_I = -0.429$ in $\cos \alpha_I = 0.903$, lahko enotska vektorja osi 1 in 2 v skladu z enačbama (1.313) zapišemo takole

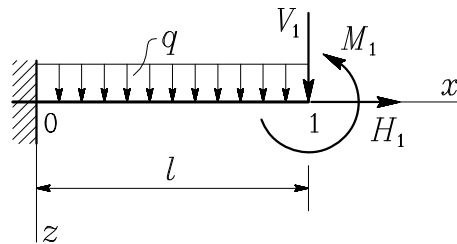
$$\mathbf{e}_1 = 0.903 \mathbf{e}_y - 0.429 \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_2 = 0.429 \mathbf{e}_y + 0.903 \mathbf{e}_z .$$

Skrben bralec se lahko s pomočjo enačb (1.315) sam prepriča, da pripada osi 1 glavni vztrajnostni moment I_{11} , osi 2 pa glavni vztrajnostni moment I_{22} .

Zgled 5.6

Določi koeficiente podajnostne matrike točke 1 za značilne obtežbe previsnega nosilca (slika Z-5.6).



Slika Z-5.6

Podajnostna matrika določa odvisnost pomikov in zasukov izbranih točk konstrukcije od privzete obtežbe

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \omega_{y1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ q \end{Bmatrix} .$$

Podajnostni koeficienti f_{ij} pomenijo pomike in zasuke, ki pripadajo enotskim vrednostim obtežb $H_1 = 1$, $V_1 = 1$, $M_1 = 1$, $q = 1$. V našem primeru gre za osno in upogibno obtežbo v ravnini (x, z) , zato moramo v točki 1 določiti vzdolžni pomik u_1 , prečni pomik w_1 in zasuk ω_{y1} . Začnimo z enačbo (5.60), v kateri je v našem primeru $N_x = H_1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{EA_x} N_x = \frac{1}{EA_x} H_1 .$$

Splošno rešitev te diferencialne enačbe dobimo z integriranjem po x

$$u = \frac{1}{EA_x} H_1 x + C_1.$$

Integracijsko konstanto C_1 določimo ob upoštevanju kinematičnega robnega pogoja, ki zahteva, da je vzdolžni pomik v podpori 0 enak nič

$$x = 0 \quad \dots \quad u = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Vzdolžni pomik $u(x)$ je tako

$$u = \frac{1}{EA_x} H_1 x,$$

njegova vrednost u_1 v točki 1 ($x = l$) pa je

$$u_1 = u(x = l) = \frac{l}{EA_x} H_1.$$

Prečni pomik w_1 in zasuk ω_{y1} določimo z enačbo upogibnice (5.65) in z drugo od enačb (5.50). Upogibni moment $M_y(x)$ je

$$M_y = -V_1(l - x) + M_1 - \frac{q}{2}(l - x)^2$$

in enačba upogibnice se glasi

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_{yy}} = \frac{1}{EI_{yy}} \left[V_1(l - x) - M_1 + \frac{q}{2}(l - x)^2 \right].$$

Z dvakratnim zaporednim integriranjem dobimo splošni rešitvi

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{EI_{yy}} \left[V_1 \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) - M_1 x + \frac{q}{2} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + C_2 \right] \\ w &= \frac{1}{EI_{yy}} \left[V_1 \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - M_1 \frac{x^2}{2} + \frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. C_2 x + C_3 \right]. \end{aligned}$$

Integracijski konstanti C_2 in C_3 določimo iz kinematičnih robnih pogojev v podpori 0 ob upoštevanju druge od enačb (5.50)

$$x = 0 \quad \dots \quad \begin{cases} w = 0 & \rightarrow C_3 = 0 \\ \omega_y = -\frac{dw}{dx} = 0 & \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

in enačbi za zasuk ω_y in povs w previsnega nosilca pri obravnavani obtežbi sta

$$\omega_y = \frac{1}{EI_{yy}} \left[\frac{V_1}{2} (x^2 - 2lx) + M_1 x - \frac{q}{6} (3l^2 x - 3lx^2 + x^3) \right]$$

$$w = \frac{1}{EI_{yy}} \left[\frac{V_1}{6} (3lx^2 - x^3) - M_1 \frac{x^2}{2} + \frac{q}{24} (6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4) \right].$$

Z dobljenima enačbama lahko izračunamo povs w in zasuk ω_y v poljubni točki nosilca. Zanimata nas vrednosti v končni točki 1

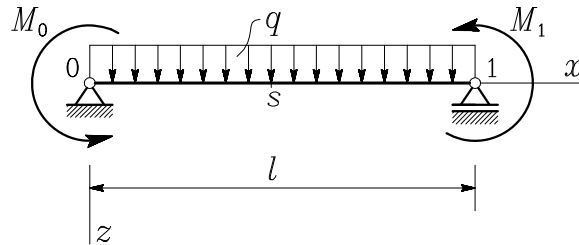
$$x = l \quad \dots \quad \begin{cases} w_1 = V_1 \frac{l^3}{3EI_{yy}} - M_1 \frac{l^2}{2EI_{yy}} + q \frac{l^4}{8EI_{yy}} \\ \omega_{y1} = -V_1 \frac{l^2}{2EI_{yy}} + M_1 \frac{l}{EI_{yy}} - q \frac{l^3}{6EI_{yy}} \end{cases}$$

Tako smo določili vse komponente iskane podajnostne matrike

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \omega_{y1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI_{yy}} & -\frac{l^2}{2EI_{yy}} & \frac{l^4}{8EI_{yy}} \\ 0 & -\frac{l^2}{2EI_{yy}} & \frac{l}{EI_{yy}} & -\frac{l^3}{6EI_{yy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ q \end{Bmatrix}.$$

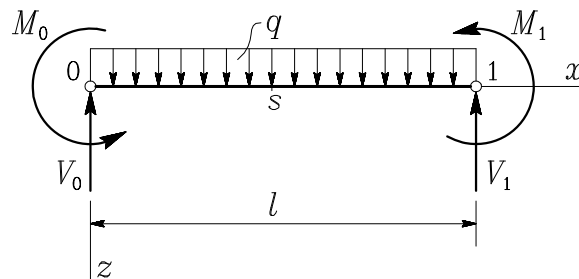
Zgled 5.7

Določi poves w_s in zasuk ω_{ys} v srednjem prerezu ter zasuka ω_{y0} in ω_{y1} v podporah prikazanega prostoležečega nosilca (slika Z-5.7a)



Slika Z-5.7 a

Ker je nosilec obtežen le s prečno obtežbo $\mathcal{P}_z = q$ in s točkovnima dvojicama M_0 in M_1 v smeri y , nastopata v podporah le navpični reakciji V_0 in V_1 (slika Z-5.7 b)



Slika Z-5.7 b

$$V_0 = \frac{ql}{2} + \frac{1}{l}(M_0 + M_1) \quad V_1 = \frac{ql}{2} - \frac{1}{l}(M_0 + M_1) .$$

Funkcija upogibnega momenta $M_y(x)$ je tako

$$M_y = V_0x - M_0 - \frac{qx^2}{2} = \frac{x}{l}(M_0 + M_1) + \frac{q}{2}(lx - x^2) .$$

Sedaj lahko zapišemo enačbo upogibnice (5.65)

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_{yy}}$$

in jo rešimo z dvakratnim integriranjem vzdolž nosilca

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dx^2} &= \frac{1}{EI_{yy}} \left[M_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) - M_1 \frac{x}{l} + \frac{q}{2} (x^2 - xl) \right] \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{EI_{yy}} \left[M_0 \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) - M_1 \frac{x^2}{2l} + \frac{q}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2l}{2} \right) + C_1 \right] \\ w &= \frac{1}{EI_{yy}} \left[M_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} \right) - M_1 \frac{x^3}{6l} + \frac{q}{2} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3l}{6} \right) + C_1x + C_2 \right]\end{aligned}$$

Integracijski konstanti C_1 in C_2 spet določimo iz kinematičnih robnih pogojev

$$\begin{aligned}x = 0 \quad \dots \quad w = 0 &\quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \\ x = l \quad \dots \quad w = 0 &\quad \rightarrow \quad C_1 = -M_0 \frac{l}{3} + M_1 \frac{l}{6} + q \frac{l^3}{24}.\end{aligned}$$

S tem in ob upoštevanju zveze (5.50) lahko po ureditvi zapišemo funkciji $w(x)$ in $\omega_y(x)$, tokrat nekoliko drugače, v odvisnosti od brezdimenzionalne vzdolžne koordinate $\frac{x}{l}$

$$\begin{aligned}w &= M_0 \frac{l^2}{6EI_{yy}} \left[-\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right) \right] + \\ &\quad M_1 \frac{l^2}{6EI_{yy}} \left[-\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right) \right] + \\ &\quad q \frac{l^4}{24EI_{yy}} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right) \right] \\ \omega_y &= M_0 \frac{l}{6EI_{yy}} \left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{l}\right) + 2 \right] + \\ &\quad M_1 \frac{l}{6EI_{yy}} \left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1 \right] + \\ &\quad q \frac{l^3}{24EI_{yy}} \left[-4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1 \right].\end{aligned}$$

Iskane vrednosti največjega povesa in zasukov so tako

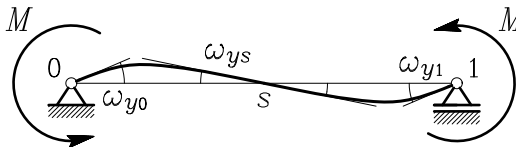
$$w_s = w\left(\frac{x}{l} = \frac{1}{2}\right) = (-M_0 + M_1) \frac{l^2}{16EI_{yy}} + q \frac{5l^4}{384EI_{yy}}$$

$$\omega_{ys} = \omega_y\left(\frac{x}{l} = \frac{1}{2}\right) = -(M_0 + M_1) \frac{l}{24EI_{yy}}$$

$$\omega_{y0} = \omega_y\left(\frac{x}{l} = 0\right) = (2M_0 - M_1) \frac{l}{6EI_{yy}} - q \frac{l^3}{24EI_{yy}}$$

$$\omega_{y1} = \omega_y\left(\frac{x}{l} = 1\right) = (-M_0 + 2M_1) \frac{l}{6EI_{yy}} + q \frac{l^3}{24EI_{yy}}.$$

Oglejmo si še zanimiv poseben obtežni primer, pri katerem je $q = 0$, $M_0 = M_1 = M$ (slika Z-5.7 c).



Slika Z-5.7 c

Upogibnica je tedaj antisimetrična krivulja z značilnimi vrednostmi

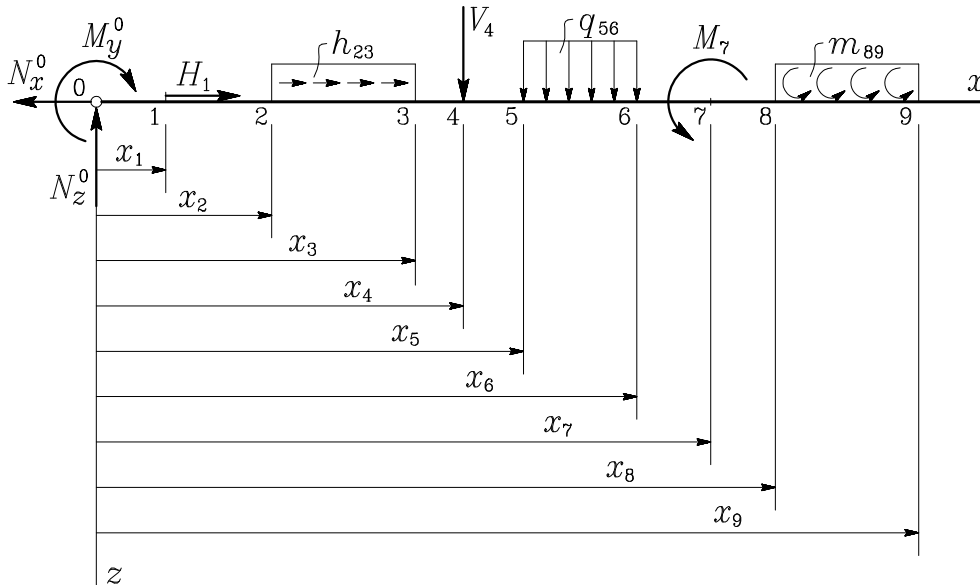
$$\begin{aligned} w_s &= 0 \\ \omega_{ys} &= -M \frac{l}{6EI_y} \\ \omega_{y0} = \omega_{y1} &= M \frac{l}{12EI_y}. \end{aligned}$$

Bralcu prepuščamo določitev značilnih povosov in zasukov še v drugih značilnih obtežnih primerih, kot so

- a. $M_0 = M, \quad M_1 = 0$
- b. $M_0 = 0, \quad M_1 = M$
- c. $M_0 = -M_1 = M.$

Zgled 5.8

Prikaži vpliv značilnih vrst obtežbe linijskega nosilnega elementa v ravnini (x, z) (slika Z-5.8 a) na posplošene funkcije notranjih sil.



Slika Z-5.8 a

V splošnem funkcije osne sile N_x in upogibnih momentov M_y in M_z , ki nastopajo v enačbah (5.60) za vzdolžni pomik u , ter v enačbah obeh upogibnic (5.64) in (5.65), niso zvezne in zvezno odvedljive na celotni dolžini nosilca. Pri integriranju omenjenih diferencialnih enačb bi morali zato dolžino nosilca razdeliti na primerno število podintervalov, na katerih so funkcije N_x , M_y in M_z gladke in zvezne, in jih integrirati po vsakem podintervalu posebej. Oglejmo si primer, pri katerem bi reševali enačbo upogibnice (5.65). V zgledih 5.6 in 5.7 smo imeli opraviti z gladko funkcijo upogibnega momenta M_y , zato smo enačbo upogibnice integrirali po celotni dolžini nosilca naenkrat; pri tem smo dobili dve integracijski konstanti in ju določili iz kinematičnih robnih pogojev. Če bi morali v bolj splošnem primeru integracijsko

območje razdeliti na n podintervalov, bi dobili $2n$ integracijskih konstant. Zato bi morali vpeljati $2n - 2$ dodatnih pogojev, s katerimi bi zagotovili gladkost povesov w in zasukov ω_y preko meja med podintervali integracijskega območja. Računskim težavam, ki nastopijo v takem primeru, se izognemo z uporabo Heavisideove[†] posplošene (generalizirane) funkcije ter njenih odvodov in integralov[‡].

Heavisideova funkcija $H(x - x_0)$ je vpeljana z definicijo

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \dots x < x_0 \\ 1 & \dots x \geq x_0 \end{cases} .$$

Prvi odvod Heavisideove funkcije je Dirac^{*}-delta funkcija $\delta(x - x_0)$

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} H(x - x_0)$$

oziroma

$$\int \delta(x - x_0) dx = H(x - x_0) + C_0 .$$

Za naše namene je pomembna naslednja lastnost Dirac-delta funkcije

$$\int_{-\infty}^{\infty} K \delta(x - x_0) dx = K ,$$

kjer je K poljubna konstanta. Omenjeno lastnost lahko pogojno zapišemo takole

$$K \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \dots x \neq x_0 \\ K & \dots x = x_0 \end{cases} .$$

[†] Oliver Heaviside, angleški inženir–elektrotehnik, 1850–1925.

[‡] Osnove uporabe posplošenih funkcij so prikazane v knjigi M. Stanek, G. Turk, Statika I, FGG, Ljubljana (1996). V literaturi sta za Heavisideovo funkcijo v rabi tudi pojma MacAulayeva funkcija ali 'unit-step function', njene odvode imenujemo tudi singularne funkcije, njene integrale pa Chlebsove funkcije.

^{*} Paul Dirac, angleški fizik, 1902–1984.

Z nedoločenim integriranjem Heavisideove funkcije pa dobimo

$$\int H(x - x_0) dx = (x - x_0) H(x - x_0) + C_1.$$

Zaradi krajšega pisanja je za integrale Heavisideove funkcije ugodno vpeljati simbolično oznako $H^n(x - x_0)$, pri čemer velja ($n = 1, 2, \dots$)

$$H^n(x - x_0) \equiv (x - x_0)^n H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \dots x < x_0 \\ (x - x_0)^n & \dots x \geq x_0 \end{cases}.$$

Splošni integral Heavisideove funkcije je tedaj ($n = 1, 2, \dots$)

$$\int H^n(x - x_0) dx = \frac{1}{n+1} H^{n+1}(x - x_0) + C_n.$$

S prikazanimi posplošenimi funkcijami lahko opišemo vsako nastopajočo komponento obravnavane nadomestne obtežbe linijskega nosilca z eno samo enačbo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x(x) &= H_1 \delta(x - x_1) + h_{23} [H(x - x_2) - H(x - x_3)] \\ \mathcal{P}_z(x) &= V_4 \delta(x - x_4) + q_{56} [H(x - x_5) - H(x - x_6)] \\ \mathcal{M}_y(x) &= M_7 \delta(x - x_7) + m_{89} [H(x - x_8) - H(x - x_9)]. \end{aligned}$$

Notranje sile izračunamo iz ravnotežnih enačb (5.30) do (5.35). Začnimo z enačbo (5.30), ki povezuje osno silo N_x z nadomestno vzdolžno obtežbo \mathcal{P}_x

$$\frac{dN_x}{dx} + \mathcal{P}_x = 0.$$

V našem primeru je

$$\frac{dN_x}{dx} = -H_1 \delta(x - x_1) - h_{23} [H(x - x_2) - H(x - x_3)].$$

Z nedoločenim integriranjem po x dobimo

$$N_x = -H_1 H(x - x_1) - h_{23} [H^1(x - x_2) - H^1(x - x_3)] + C_1.$$

Integracijsko konstanto C_1 določimo tako, da je izpolnjen statični robni pogoj v začetni točki 0

$$x = 0 \quad \dots \quad N_x = N_x^0 \quad \rightarrow \quad C_1 = N_x^0.$$

Posplošena funkcija osne sile je tako

$$N_x = N_x^0 - H_1 H(x - x_1) - h_{23} [H^1(x - x_2) - H^1(x - x_3)].$$

Ravnotežna enačba (5.32) za prečno silo N_z

$$\frac{dN_z}{dx} + \mathcal{P}_z = 0$$

se v našem primeru glasi

$$\frac{dN_z}{dx} = -V_4 \delta(x - x_4) - q_{56} [H(x - x_5) - H(x - x_6)]$$

in po integriranju

$$N_z = -V_4 H(x - x_4) - q_{56} [H^1(x - x_5) - H^1(x - x_6)] + C_2.$$

Preostane nam še ravnotežna enačba (5.34)

$$\frac{dM_y}{dx} - N_z + \mathcal{M}_y = 0$$

oziroma

$$\begin{aligned} \frac{dM_y}{dx} = & -V_4 H(x - x_4) - q_{56} [H^1(x - x_5) - H^1(x - x_6)] - \\ & M_7 \delta(x - x_7) - m_{89} [H(x - x_8) - H(x - x_9)] + C_2. \end{aligned}$$

Po integriranju dobimo

$$\begin{aligned} M_y = & -V_4 H^1(x - x_4) - \frac{q_{56}}{2} [H^2(x - x_5) - H^2(x - x_6)] - \\ & M_7 H(x - x_7) - m_{89} [H^1(x - x_8) - H^1(x - x_9)] + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Integracijski konstanti C_2 in C_3 spet določimo iz statičnih robnih pogojev v začetni točki 0

$$x = 0 \quad \dots \quad \begin{cases} M_y = M_y^0 & \rightarrow C_3 = M_y^0 \\ N_z = N_z^0 & \rightarrow C_2 = N_z^0. \end{cases}$$

Posplošeni funkciji prečne sile in upogibnega momenta sta torej

$$\begin{aligned} N_z &= N_z^0 - V_4 H(x - x_4) - q_{56} [H^1(x - x_5) - H^1(x - x_6)] \\ M_y &= M_y^0 + N_z^0 x - V_4 H^1(x - x_4) - \frac{q_{56}}{2} [H^2(x - x_5) - H^2(x - x_6)] - \\ &\quad M_7 H(x - x_7) - m_{89} [H^1(x - x_8) - H^1(x - x_9)]. \end{aligned}$$

Upoštevajoč lastnosti Heavisideove funkcije lahko splošene funkcije notranjih sil zapišemo tudi takole

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^0 H(x - 0) - H_1 H(x - x_1) - h_{23} [H^1(x - x_2) - H^1(x - x_3)] \\ N_z &= N_z^0 H(x - 0) - V_4 H(x - x_4) - q_{56} [H^1(x - x_5) - H^1(x - x_6)] \\ M_y &= M_y^0 H(x - 0) + N_z^0 H^1(x - 0) - \\ &\quad V_4 H^1(x - x_4) - \frac{q_{56}}{2} [H^2(x - x_5) - H^2(x - x_6)] - \\ &\quad M_7 H(x - x_7) - m_{89} [H^1(x - x_8) - H^1(x - x_9)]. \end{aligned}$$

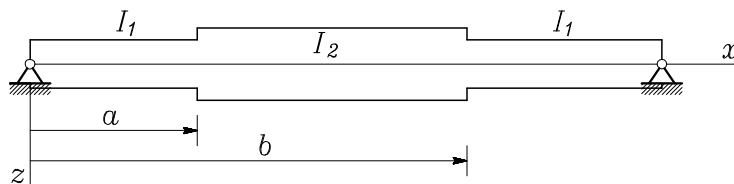
Skrben bralec se lahko z običajno, dobro znano “metodo prerezov” prepriča, da dobljeni splošeni izrazi pravilno opisujejo potek notranjih sil vzdolž celotne dolžine nosilca.

Na splošenih zapisih notranjih sil lahko utemeljimo pravilo za upoštevanje posameznih značilnih vrst nadomestne obtežbe linijskega računskega modela v splošenih funkcijah notranjih sil. Točkovna vzdolžna sila nastopa v splošeni funkciji osne sile N_x s svojo negativno velikostjo in Heavisideovo funkcijo, vzeto v prijemališču točkovne sile.

Enakomerna delna zvezna vzdolžna obtežba nastopa s svojo negativno velikostjo in z razliko prvih integralov Heavisideove funkcije na koncu in na začetku intervala, na katerem ta obtežba deluje. Podobno je pri prečni sili. V posplošeni funkciji upogibnega momenta M_y nastopa točkovna sila v smeri z s svojo negativno velikostjo in s prvim integralom Heavisideove funkcije, vzetim v prijemališču. Enakomerna delna zvezna obtežba v smeri z nastopa z negativno polovično velikostjo in z razliko drugih integralov Heavisideove funkcije na koncu in na začetku vplivnega intervala. Točkovna dvojica okrog osi y nastopa z negativno velikostjo in s Heavisideovo funkcijo v prijemališču dvojice, enakomerna delna zvezna momentna obtežba pa z negativno velikostjo in z razliko prvih integralov Heavisideove funkcije na začetku in na koncu vplivnega intervala. Vse povedano velja tako za aktivno zunanjo obtežbo kakor tudi za robne oziroma podporne sile.

Podobno kot zgoraj bi lahko izpeljali tudi pravila za določitev vpliva drugih vrst obtežbe, na primer trikotne, sinusne, ali kake druge obtežbe na posplošene funkcije notranjih sil. Prav tako bi ta pravila lahko izpeljali za upogib v ravnini (x, y) pa tudi za torzijsko obtežbo.

Uporaba posplošenih funkcij seveda ni omejena le na zapis obtežbe, notranjih sil, pomikov in zasukov. Uspešno jih lahko uporabimo tudi pri opisu spremenljivega prečnega prereza ali spremenljivih materialnih lastnosti vzdolž nosilca. Kot primer zapišimo funkcijo upogibne togosti nosilca na *sliki Z-5.8 b*

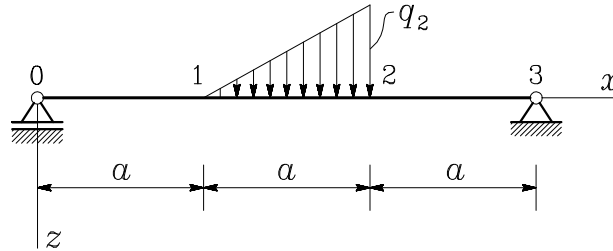


Slika Z-5.8 b

$$\frac{1}{EI_{yy}} = \frac{1}{EI_1} [1 - H(x - a) + H(x - b)] + \frac{1}{EI_2} [H(x - a) - H(x - b)].$$

Zgled 5.9

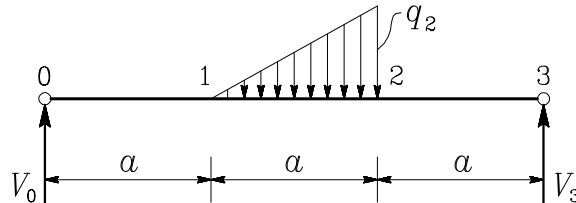
Srednja tretjina dolžine prostoležečega nosilca je obtežena s trikotno zvezno obtežbo (slika Z-5.9 a). Določi največji navpični pomik nosilca in absciso prereza, v katerem ta pomik nastopi.



Slika Z-5.9 a

Navpični reakciji v podporah 0 in 3 sta (slika Z-5.9 b)

$$V_0 = \frac{2q_2a}{9} \quad \text{in} \quad V_3 = \frac{5q_2a}{18}. \quad (a)$$



Slika Z-5.9 b

Za delno trikotno zvezno obtežbo v zgledu 5.8 nismo ugotovili, kakšen je njen prispevek v posplošeni funkciji upogibnega momenta M_y , zato moramo začeti s posplošeno funkcijo nadomestne zunanje obtežbe \mathcal{P}_z . V skladu z znanimi lastnostmi Heavisideove in Diracove funkcije lahko obtežbo obravnavanega nosilca opišemo takole

$$\mathcal{P}_z = -V_0 \delta(x - 0) + \frac{q_2}{a}(x - a)[H(x - a) - H(x - 2a)] - V_3 \delta(x - 3a). \quad (b)$$

Ob upoštevanju oznak in lastnosti integralov Heavisideove funkcije lahko pišemo

$$\begin{aligned}(x-a)H(x-a) &= H^1(x-a) \\ (x-a)H(x-2a) &= [(x-2a)+a]H(x-2a) = \\ &H^1(x-2a) + aH(x-2a).\end{aligned}\quad (c)$$

Dobljene izraze vstavimo v ravnotežno enačbo za prečno silo N_z . Pri tem upoštevamo, da reakcija V_3 , ki deluje na koncu integracijske dolžine, ne vpliva eksplicitno na notranje sile in pomike

$$\begin{aligned}\frac{dN_z}{dx} = -\mathcal{P}_z &= \frac{2q_2a}{9} \delta(x-0) - \\ &\frac{q_2}{a} [H^1(x-a) - H^1(x-2a) - aH(x-2a)].\end{aligned}\quad (\check{c})$$

Po integriranju dobimo

$$\begin{aligned}N_z &= \frac{2q_2a}{9} H(x-0) - \\ &\frac{q_2}{2a} [H^2(x-a) - H^2(x-2a) - 2aH^1(x-2a)] + C_1.\end{aligned}\quad (d)$$

S ponovnim integriranjem dobimo splošeno funkcijo upogibnega momenta M_y

$$\begin{aligned}M_y &= \frac{2q_2a}{9} H^1(x-0) - \frac{q_2}{6a} [H^3(x-a) - H^3(x-2a) - \\ &3aH^2(x-2a)] + C_1x + C_2.\end{aligned}\quad (e)$$

Integracijski konstanti določimo iz statičnih robnih pogojev

$$\begin{aligned}x=0 \quad \dots \quad M_y &= 0 & \rightarrow & \quad C_1 = 0 \\ x=3a \quad \dots \quad M_y &= 0 & \rightarrow & \quad C_2 = 0.\end{aligned}\quad (f)$$

Enačba upogibnice (5.65) je tedaj

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{2q_2a}{9EI_{yy}}x + \frac{q_2}{6aEI_{yy}} [H^3(x-a) - H^3(x-2a) - 3aH^2(x-2a)]. \quad (g)$$

Po integriranju sledi

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{q_2a}{9EI_{yy}}x^2 + \frac{q_2}{24aEI_{yy}} [H^4(x-a) - H^4(x-2a) - 4aH^3(x-2a)] + C_3 \quad (h)$$

$$w = -\frac{q_2a}{27EI_{yy}}x^3 + \frac{q_2}{120aEI_{yy}} [H^5(x-a) - H^5(x-2a) - 5aH^4(x-2a)] + C_3x + C_4. \quad (i)$$

Integracijski konstanti C_3 in C_4 določimo iz kinematičnih robnih pogojev

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_4 = 0 \\ x = 3a \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{47q_2a^3}{180EI_{yy}}. \end{aligned} \quad (j)$$

Dobljeni konstanti vstavimo v enačbi za poves w in njegov prvi odvod in po ureditvi dobimo

$$w = \frac{q_2}{1080aEI_{yy}} [-40a^2x^3 + 9H^5(x-a) - 9H^5(x-2a) - 45aH^4(x-2a) + 282a^4x] \quad (k)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{q_2}{1080aEI_{yy}} [-120a^2x^2 + 45H^4(x-a) - 45H^4(x-2a) - 180aH^3(x-2a) + 282a^4]. \quad (l)$$

Mesto največjega povesa w_m je logično iskati na intervalu $a \leq x \leq 2a$, kjer je

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{a \leq x \leq 2a} = \frac{q_2}{1080 a EI_{yy}} [-120 a^2 x^2 + 45 (x-a)^4 + 282 a^4]. \quad (m)$$

Iz pogoja za nastop ekstrema funkcije w

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_m} = 0 \quad (n)$$

sledi

$$-120 a^2 x_m^2 + 45 (x_m - a)^4 + 282 a^4 = 0. \quad (o)$$

Zaradi enostavnosti vpeljemo novo oznako

$$\xi = \frac{x_m}{a} \quad (p)$$

in po ureditvi zapišemo pogoj (o) takole

$$\Phi(\xi) = 15 \xi^4 - 60 \xi^3 + 50 \xi^2 - 60 \xi + 109 = 0. \quad (r)$$

Poiskati moramo torej ničle dobljenega polinoma četrtega reda, kar lahko naredimo s primerno numerično metodo. Če se, na primer, odločimo za Newtonovo tangentno metodo, ki smo jo spoznali v zgledu 1.6, določamo zaporedne približke z enačbo

$$\xi^{(r+1)} = \xi^r - \frac{\Phi(\xi^r)}{\Phi'(\xi^r)}, \quad (s)$$

kjer je

$$\Phi'(\xi) = 60 \xi^3 - 180 \xi^2 + 100 \xi - 60. \quad (š)$$

Če za začetni približek vzamemo $\xi^{(0)} = 1.5$, dobimo že v treh iteracijskih korakih na šest decimalnih mest natančno izračunan koren enačbe (r).

r	ξ
0	1.5
1	1.543 889
2	1.543 616
3	1.543 616

Abscisa največjega povesa w_m je torej

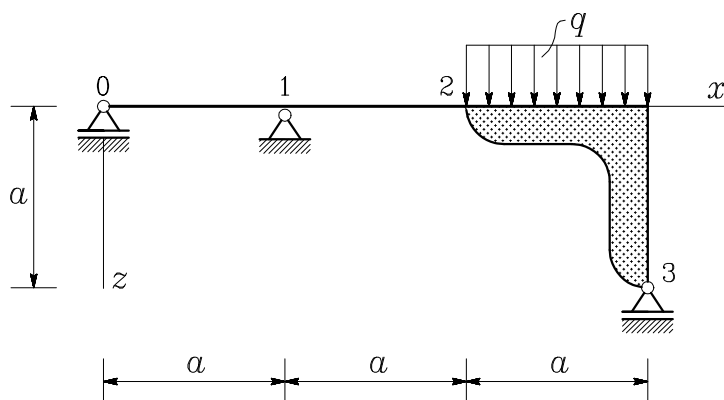
$$x_m = 1.543\,616\,a, \quad (t)$$

njegovo velikost pa izračunamo tako, da x_m vstavimo v enačbo (k)

$$w_m = 0.267\,227 \frac{q_2 a^4}{EI_{yy}}. \quad (u)$$

Zgled 5.10

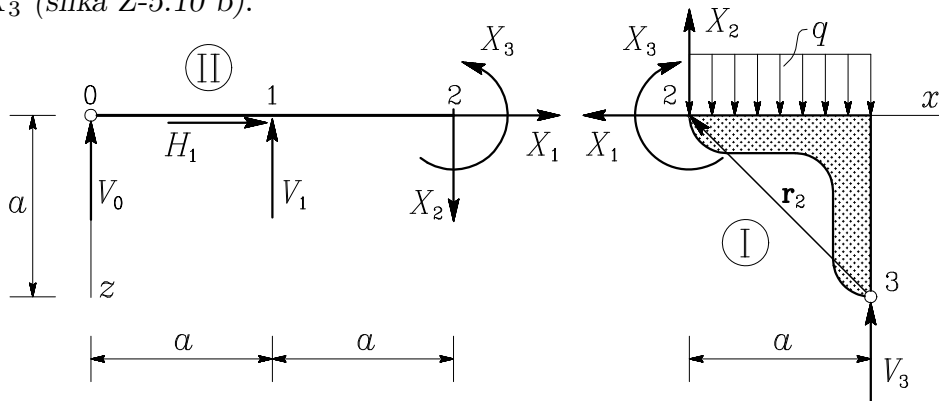
Obteženi del nosilca med točkama 2 in 3 je zelo tog v primerjavi z delom med točkama 0 in 2, ki ima osno togost EA_x in upogibno togost EI_{yy} (slika Z-5.10 a). Določi reakcije v podporah v odvisnosti od velikosti enakomerne zvezne obtežbe q in razpetine a .



Slika Z-5.10 a

Konstrukcija je sestavljena iz deformabilnega dela $\overline{02}$ in togega dela $\overline{23}$. Enačbe, ki opisujejo gibanje togega dela, smo izpeljali v razdelku 1.15, enačbe za pomike deformabilnega upogibnega nosilca pa v razdelku 5.3. Zato razstavimo konstrukcijo na togi del I in deformabilni del II,

njun medsebojni vpliv pa opišemo z interakcijskimi silami X_1 , X_2 in X_3 (slika Z-5.10 b).



Slika Z-5.10 b

Pri tem morajo biti v togem stiku 2 izpolnjeni kompatibilnostni pogoji, ki zagotavljajo, da so oba pomika in zasuk točke 2 enolične količine

$$\begin{aligned} u_2^I &= u_2^II \\ w_2^I &= w_2^II \\ \omega_{y2}^I &= \omega_{y2}^II. \end{aligned} \quad (a)$$

Začnimo s toгим delom I in najprej zapišimo ravnotežne pogoje

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & \rightarrow & X_1 = 0 \\ \sum Z &= 0 & \rightarrow & -X_2 - V_3 + qa = 0 \\ \sum M^3 &= 0 & \rightarrow & -X_3 - X_2 a + \frac{1}{2}qa^2 = 0. \end{aligned} \quad (b)$$

Pomike togega dela določimo z Rodriguesovo enačbo (1.346), pri čemer za referenčno točko izberemo točko 3[†]. Vektorja pomika in zasuca točke 2 sta tedaj

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_3 + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \boldsymbol{\omega}_3 \end{aligned} \quad (c)$$

[†] Za referenčno točko bi lahko izbrali tudi točko 2, ne da bi si s tem kaj prida olajšali ali otežili nadaljnje delo.

in ker se lahko točka 3 pomika le v smeri x ($w_3 = 0$), velja

$$\mathbf{u}_3 = u_3 \mathbf{e}_x \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \omega_{y3} \mathbf{e}_y \quad \mathbf{r}_2 = -a(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z). \quad (\check{c})$$

V točki 2 je tako

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= u_2 \mathbf{e}_x + w_2 \mathbf{e}_z = (u_3 - a\omega_{y3}) \mathbf{e}_x + a\omega_{y3} \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \omega_{y2} \mathbf{e}_y = \omega_{y3} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (d)$$

in lahko pišemo

$$u_2^I = u_3 - a\omega_{y3} \quad w_2^I = a\omega_{y3} \quad \omega_{y2}^I = \omega_{y3}. \quad (e)$$

Sedaj se lotimo nosilca II in z ravnotežnimi enačbami izračunamo reakcije v podporah 0 in 1

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & \rightarrow & H_1 = -X_1 \\ \sum Z &= 0 & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} V_0 = -X_2 + \frac{X_3}{a} \\ V_1 = 2X_2 - \frac{X_3}{a} \end{array} \right. \quad (f) \\ \sum M^3 &= 0 & \rightarrow & \end{aligned}$$

Posplošena funkcija upogibnega momenta M_y je

$$M_y = V_0 x + V_1 H^1(x - a) - X_2 H^1(x - 2a) - X_3 H(x - 2a). \quad (g)$$

Heavisideovi funkciji, ki nastopata pri interakcijskih silah X_2 in X_3 , sta nič na celotni integracijski dolžini nosilca, zato lahko pri integriranju enačbe upogibnice (5.65) tretji in četrti člen na desni izpustimo. Enačba upogibnice se ob upoštevanju enačb (f) torej glasi

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = \frac{1}{aEI_{yy}} \left\{ X_2 a [x - 2H^1(x - a)] + X_3 [H^1(x - a) - x] \right\} \quad (h)$$

in po integriranju dobimo

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2aEI_{yy}} \left\{ X_2 a [x^2 - 2H^2(x-a)] + X_3 [H^2(x-a) - x^2] + C_1 \right\} \quad (i)$$

$$w = \frac{1}{6aEI_{yy}} \left\{ X_2 a [x^3 - 2H^3(x-a)] + X_3 [H^3(x-a) - x^3] + C_1 x + C_2 \right\}. \quad (j)$$

Integracijski konstanti C_1 in C_2 določimo iz kinematičnih robnih pogojev

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \\ x = a \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{a}{6}(X_2 a - X_3). \end{aligned} \quad (k)$$

Konstanti C_1 in C_2 vstavimo v enačbi (j) in (i) in določimo povprečno w_2^{II} in zasuk ω_{y2}^{II}

$$x = 2a \quad \dots \quad \begin{cases} w_2^{\text{II}} = \frac{a^2}{6EI_{yy}} (4X_2 a - 5X_3) \\ \omega_{y2}^{\text{II}} = \frac{a}{6EI_{yy}} (-5X_2 a + 8X_3). \end{cases} \quad (l)$$

S primerjavo prve od enačb (f) s prvo od enačb (b) ugotovimo, da je $H_1 = 0$, zato je

$$u_2^{\text{II}} = 0. \quad (m)$$

Iz tretje od ravnotežnih enačb (b) še sledi

$$X_3 = \frac{1}{2}qa^2 - X_2 a \quad (n)$$

in enačbi (l) lahko sedaj zapišemo le v odvisnosti od interakcijske sile X_2 in zunanje obtežbe q

$$w_2^{\text{II}} = \frac{a^3}{12EI_{yy}} (-5qa + 18X_2) \quad (o)$$

$$\omega_{y2}^{\text{II}} = \frac{a^2}{6EI_{yy}} (4qa - 13X_2) .$$

Zaradi tretje od kompatibilnostnih enačb (a) je

$$\omega_{y3} = \omega_{y2}^{\text{II}} = \frac{a^2}{6EI_{yy}} (4qa - 13X_2) \quad (p)$$

in v skladu z drugo od enačb (a) in drugo od enačb (e) dobimo

$$a \frac{a^2}{6EI_{yy}} (4qa - 13X_2) = \frac{a^3}{12EI_{yy}} (-5qa + 18X_2) . \quad (r)$$

Od tod izračunamo interakcijsko silo X_2

$$X_2 = q \frac{13a}{44} . \quad (s)$$

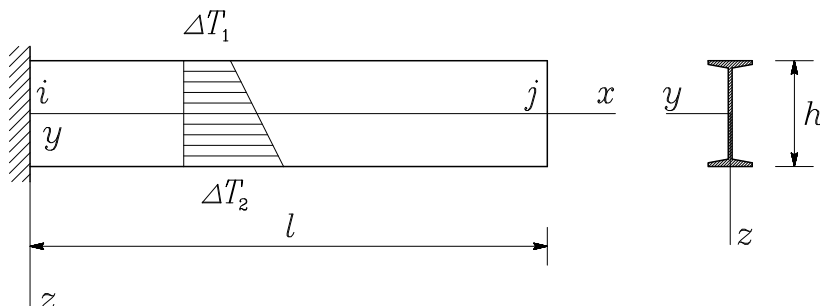
Nadaljnje delo je preprosto; vrednost X_2 vstavimo v enačbe (n), (b), (f) in (p), uporabimo še prvo od enačb (e) ter dobimo

$$X_3 = q \frac{9a^2}{44} \quad \begin{aligned} V_0 &= -q \frac{4a}{44} \\ V_1 &= q \frac{17a}{44} \\ V_3 &= q \frac{31a}{44} \end{aligned} \quad (\dot{s})$$

$$\omega_{y3} = q \frac{7a^3}{264EI_{yy}} \quad u_3 = q \frac{7a^4}{264EI_{yy}} . \quad (t)$$

Zgled 5.11

Jeklen nosilec INP-30 je na levem koncu togo vpet v podlago. Po celi dolžini je izpostavljen enakomerni spremembi temperature: na zgornji površini se temperatura poveča za 15 K, na spodnji pa za 45 K. Predpostavimo, da se temperatura linearno spreminja po višini prečnega prereza (slika Z-5.11 a).



Slika Z-5.11 a

Določi pomika in zasuk desnega konca nosilca, reakcije v podporah in potek notranjih sil vzdolž nosilca, in sicer v dveh primerih:

- desni konec nosilca je prost,
- desni konec nosilca je vrtljivo nepomično podprt.

Podatki o nosilcu:

$$\begin{aligned} A_x &= 69.1 \text{ cm}^2 & E &= 21\,000 \text{ kN/cm}^2 \\ I_{yy} &= 9800 \text{ cm}^4 & \alpha_T &= 1.2 \cdot 10^{-5} / \text{K} \end{aligned}$$

V obravnavanem primeru je

$$\Delta T_1 = 15 \text{ K} \quad \Delta T_2 = 45 \text{ K} \quad e_1 = e_2 = \frac{h}{2} = 15 \text{ cm}$$

in parametra linearnega nastavka za potek temperaturne spremembe po višini nosilca sta v skladu z enačbama (5.134)

$$\Delta T_x = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} = \frac{15 + 45}{2} = 30 \text{ K}$$

$$\Delta T_z = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{h} = \frac{45 - 15}{30} = 1 \text{ K/cm}.$$

Primer a.

V tem primeru (slika Z-5.11 b2) so v vozlišču i predpisani kinematični robni pogoji

$$u_i = w_i = \omega_i = 0,$$

v prostem desnem krajišču pa veljajo statični pogoji

$$H_j = V_j = M_j = 0.$$

Ravnotežne enačbe (5.135) povedo, da tedaj tudi vozlišče i ni obteženo

$$H_i = V_i = M_i = 0$$

in da v nosilcu tudi ni notranjih sil

$$N_x = N_z = M_y = 0.$$

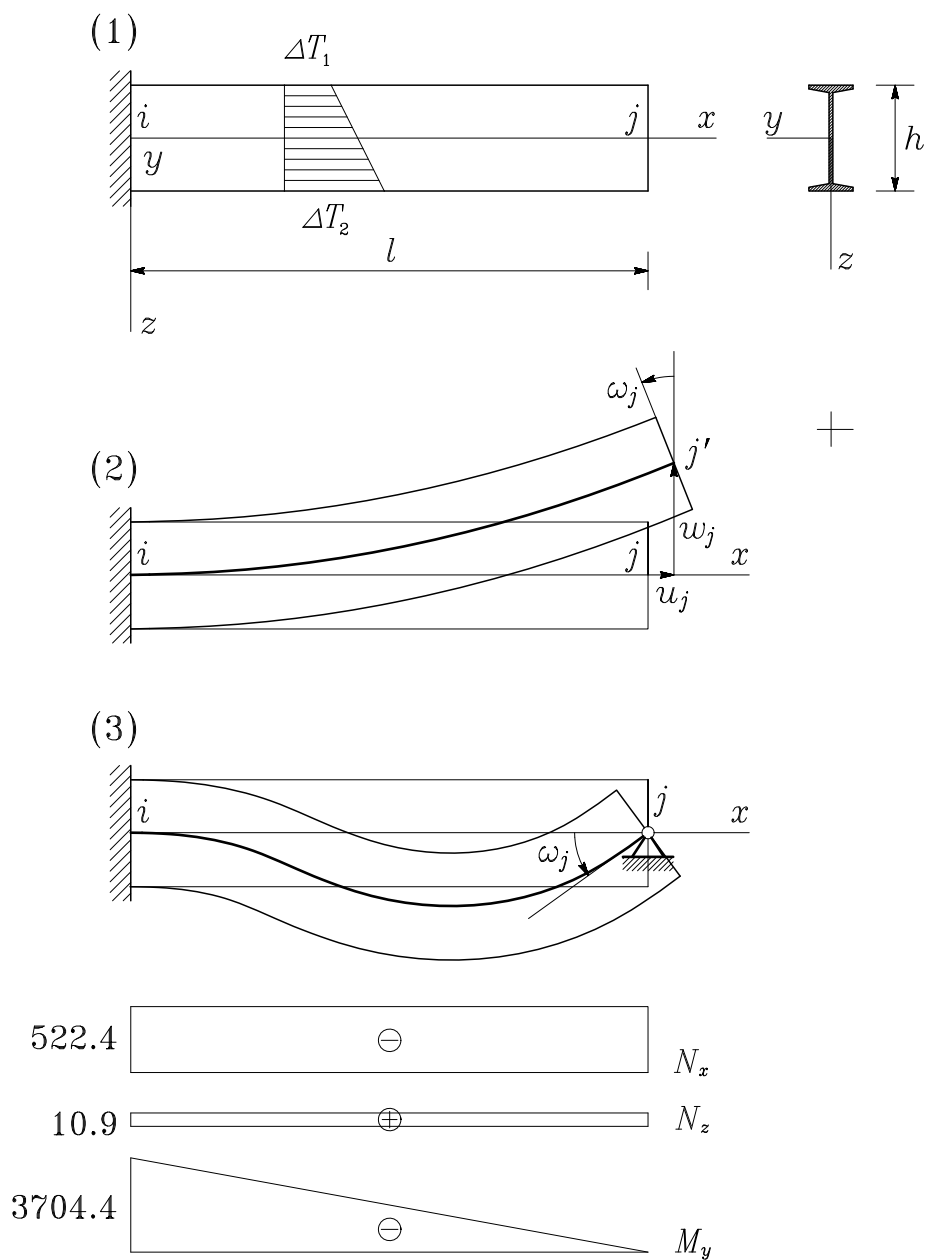
Pomika in zasuk desnega vozlišča izračunamo z enačbami (5.140)

$$\begin{aligned} u_j &= \alpha_T \Delta T_x l & u_j &= 0.1224 \text{ cm} \\ \omega_j &= \alpha_T \Delta T_z l & \omega_j &= 0.00408 \\ w_j &= -\alpha_T \Delta T_z \frac{l^2}{2} & w_j &= -0.6936 \text{ cm}. \end{aligned} \quad \rightarrow$$

Primer b.

V drugem primeru ostanejo kinematični robni pogoji levega krajišča nespremenjeni, v desnem pa sta predpisana dva kinematična in en statični robni pogoj (slika Z-5.11 b3)

$$u_j = w_j = 0 \quad \text{in} \quad M_j = 0.$$



Slika Z-5.11 b

Ob navedenih robnih pogojih z upoštevanjem prve trojice ravnotežnih pogojev (5.135) in enačb (5.140) določimo reakcije v podporah in zasuk desnega konca nosilca

$$H_i = -H_j = EA_x \alpha_T \Delta T_x$$

$$V_i = -V_j = -\frac{3EI_{yy} \alpha_T}{2l} \Delta T_z$$

$$M_i = \frac{3EI_{yy} \alpha_T}{2} \Delta T_z$$

$$\omega_j = \frac{\alpha_T l}{4} \Delta T_z$$

V splošne izraze za reakcije in zasuk ω_j vstavimo podatke obravnavanega primera in dobimo

$$H_i = -H_j = 522.4 \text{ kN} \qquad M_i = 3704.4 \text{ kNcm}$$

$$V_i = -V_j = -10.9 \text{ kN} \qquad \omega_j = 0.00102.$$

S preostalimi tremi enačbami (5.135) določimo še potek notranjih sil vzdolž nosilca

$$N_x = -522.4 \text{ kN}$$

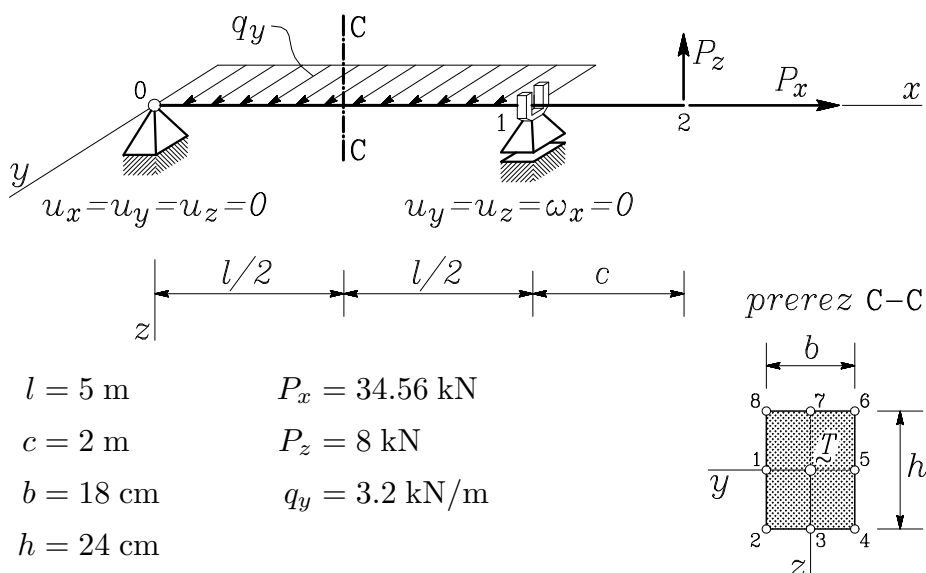
$$N_z = 10.9 \text{ kN}$$

$$M_y = 3704.4 \left(\frac{x}{340} - 1 \right) \text{ [kNcm]}.$$

Rezultati nas opozorijo na naslednje: v primeru a., ko gre za statično določeno konstrukcijo (slika Z-5.11 b2), se nosilec zaradi temperaturne spremembe sicer deformira, vendar v njem ni notranjih sil in zato tudi ne napetosti. V primeru b., ki predstavlja statično nedoločen nosilec, pa razen pomikov in zasukov nastopijo tudi notranje sile in ustrezne napetosti (slika Z-5.11 b3). To je tudi splošno pravilo pri obravnavanju vpliva temperaturnih sprememb na konstrukcije.

Zgled 5.12

Lesen linijski nosilec pravokotnega prereza je v točki 0 nepomično vrtljivo podprt, viličasta podpora v točki 1 pa preprečuje le torzijski zasuk in pomika v smereh y in z . V točki 2 na koncu previsnega polja je nosilec obtežen s točkovnima silama P_x in P_z , v polju $\overline{01}$ pa z enakomerno zvezno obtežbo q_y (slika Z-5.12 a). V prečnem prerezu C-C ($x = l/2$) določi vrednosti normalnih napetosti σ_{xx} v označenih točkah, izometrično skiciraj njihov potek in označi lego nevtralne osi.



Slika Z-5.12 a

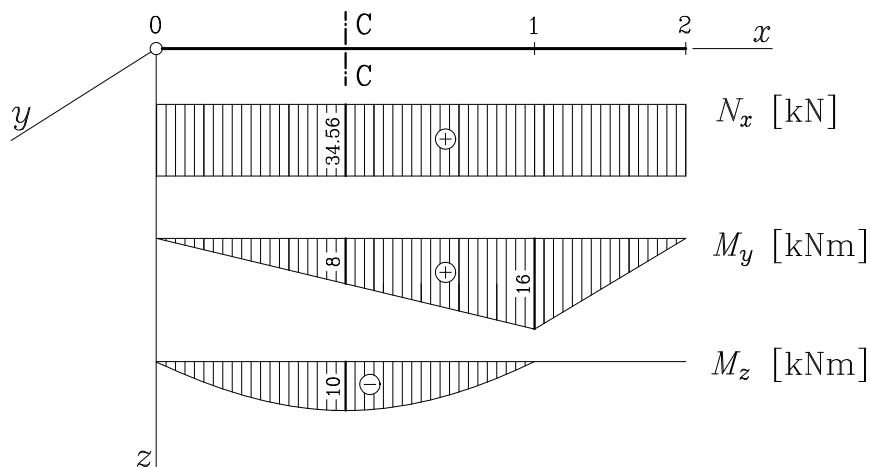
Za kasnejšo rabo najprej določimo geometrijske karakteristike prečnega prereza nosilca

$$A_x = bh = 18 \cdot 24 = 432 \text{ cm}^2$$

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} = \frac{18 \cdot 24^3}{12} = 20\,736 \text{ cm}^4$$

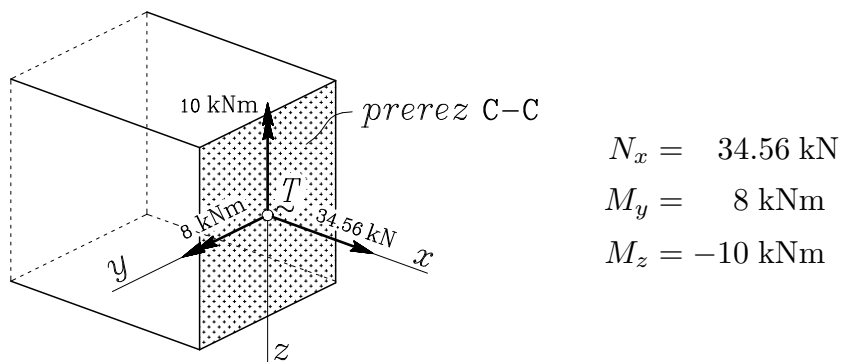
$$I_{zz} = \frac{b^3h}{12} = \frac{18^3 \cdot 24}{12} = 11\,664 \text{ cm}^4.$$

Konstrukcija je statično določena; potek osne sile in obeh upogibnih momentov vzdolž nosilca določimo po znanih postopkih (slika Z-5.12 b)



Slika Z-5.12 b

S tem so definirane tudi notranje sile v obravnavanem prerezu C-C (slika Z-5.12 c)



Slika Z-5.12 c

Potek normalnih napetosti σ_{xx} po prerezu C-C določimo z enačbo (5.68)

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - y \frac{M_z}{I_{zz}} + z \frac{M_y}{I_{yy}} = \frac{34\,560}{432} + y \frac{1\,000\,000}{11\,664} + z \frac{800\,000}{20\,736}$$

in dobimo enačbo ravnine normalnih napetosti

$$\sigma_{xx} = 80 + 85.73 y + 38.58 z .$$

Z vstavitvijo dobljene funkcije za vzdolžno normalno napetost v prvo, peto in šesto od enačb (5.29) se lahko prepričamo, da s to napetostjo dejansko “pokrijemo” nastopajoče notranje sile v obravnavanem prerezu nosilca. To preprosto nalogo prepuščamo skrbnemu bralcu.

Vrednosti normalne napetosti σ_{xx} v označenih značilnih točkah prereza so določene v preglednici Z-5.12

Preglednica 3-1

točka	y	z	$\frac{N_x}{A_x}$	$z \frac{M_y}{I_y}$	$y \frac{M_z}{I_z}$	σ_{xx}
	cm	cm	N/cm ²	N/cm ²	N/cm ²	N/cm ²
0	0	0	80	0	0	80
1	9	0	80	0	772	852
2	9	12	80	463	772	1315
3	0	12	80	463	0	543
4	-9	12	80	463	-772	-229
5	-9	0	80	0	-772	-692
6	-9	-12	80	-463	-772	-1155
7	0	-12	80	-463	0	-383
8	9	-12	80	-463	772	389

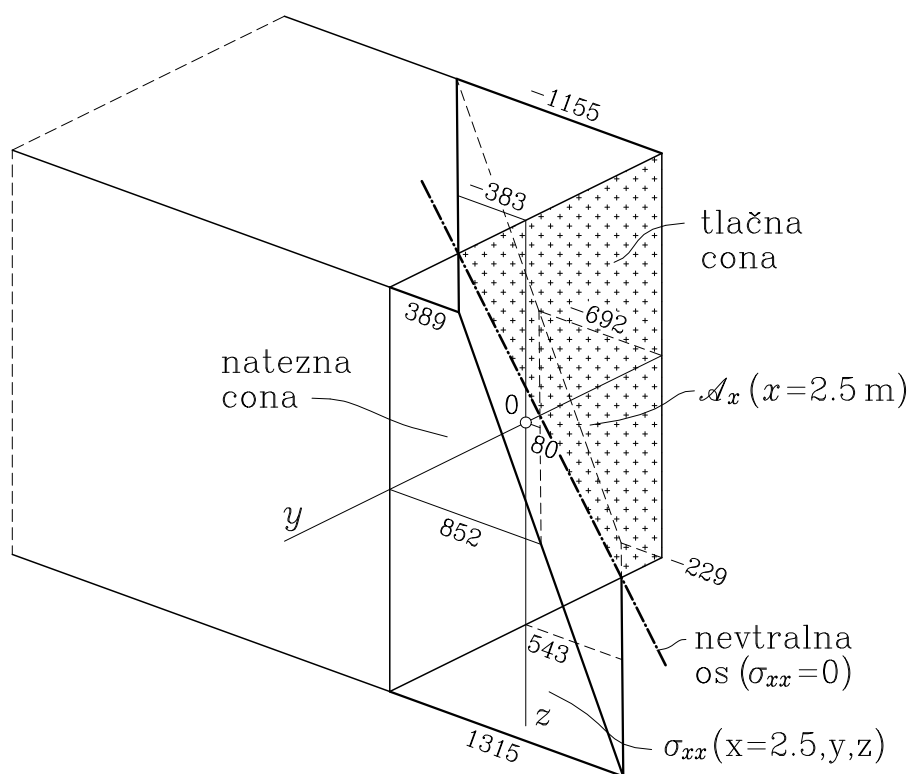
Končno zapišimo še enačbo nevtralne osi v prerezu C-C. Iz pogoja $\sigma_{xx} = 0$ sledi

$$80 + 85.73 y + 38.58 z = 0$$

oziroma v segmentni obliki

$$-\frac{y}{0.93} - \frac{z}{2.07} = 1.$$

Potek normalne napetosti σ_{xx} po prerezu C-C je izometrično prikazan na *sliki Z-5.12 d*.

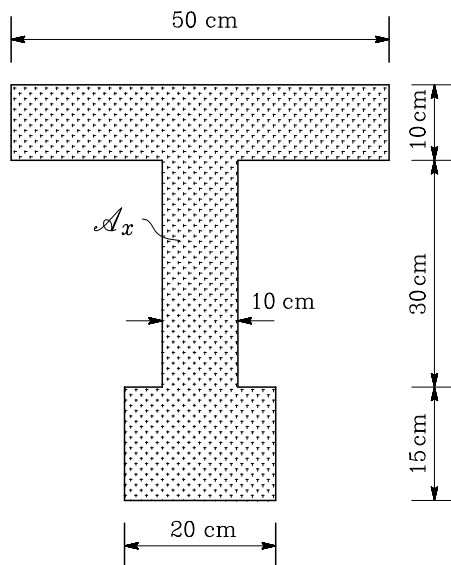


Slika Z-5.12 d

Bralec se lahko s pravilom podobnih trikotnikov hitro prepriča, da se prikazana lega nevtralne osi ujema z dobljeno enačbo.

Zgled 5.13

Določi jedro prikazanega prečnega prereza armirano betonskega nosilca (slika Z-5.13 a).



Slika Z-5.13 a

Najprej določimo lego težišča glede na pomožni koordinatni sistem (Y, Z) ter geometrijske karakteristike prereza (slika Z-5.13 b)

$$A_x = 10 \cdot 50 + 30 \cdot 10 + 15 \cdot 20 = 1\,100 \text{ cm}^2$$

$$Y_T = 0$$

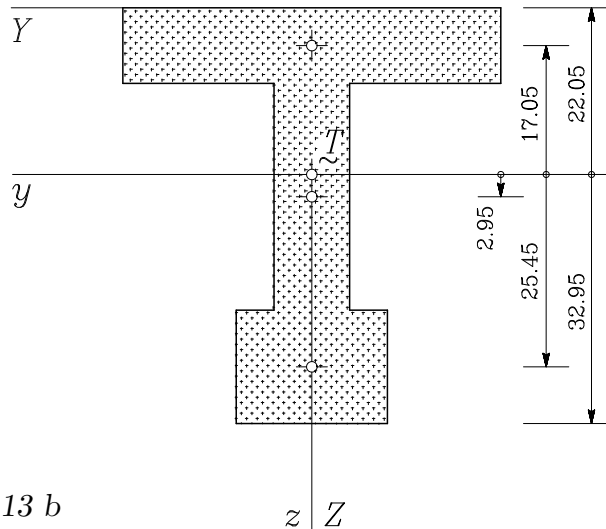
$$Z_T = \frac{1}{1\,100} (500 \cdot 5 + 300 \cdot 25 + 300 \cdot 47.5) = 22.05 \text{ cm}$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} (50 \cdot 10^3 + 10 \cdot 30^3 + 20 \cdot 15^3) + 500 \cdot 17.05^2 + 300 \cdot 2.95^2 + 300 \cdot 25.45^2 = 374\,564 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} (50^3 \cdot 10 + 10^3 \cdot 30 + 20^3 \cdot 15) = 116\,667 \text{ cm}^4$$

$$i_y^2 = \left(\frac{I_{yy}}{A_x} \right) = \frac{374\,564}{1\,100} = 340.51 \text{ cm}^2$$

$$i_z^2 = \left(\frac{I_{zz}}{A_x} \right) = \frac{116\,667}{1\,100} = 106.06 \text{ cm}^2.$$



Slika Z-5.13 b

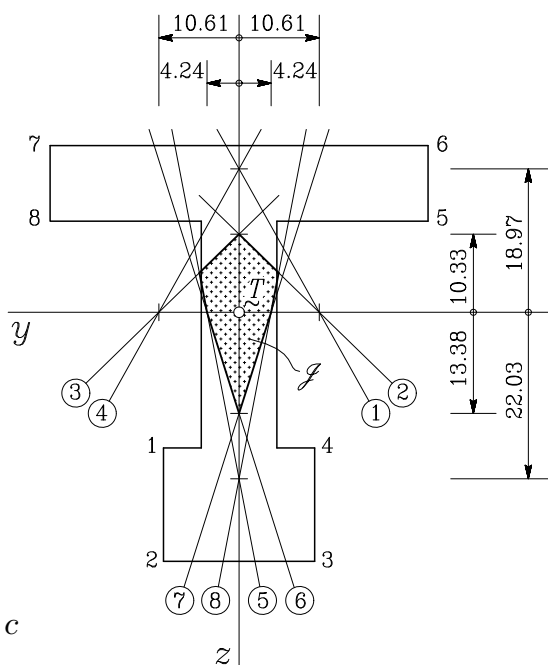
Premice p , ki tvorijo ovojnico jedra prereza, določimo z enačbo (5.88) ob upoštevanju oznak (5.89)

$$p : \quad \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{i_z^2}{y_r} \\ b = -\frac{i_y^2}{z_r} \end{array} \right.$$

Koeficienta a in b , ki predstavljata odseka premic p na oseh y in z , sta iz vrednotena v preglednici Z-5.13. Na sliki Z-5.13 c so narisane premice p , ki pripadajo posameznim značilnim točkam roba prereza \mathcal{A}_x , in tvorijo ovojnico jedra prereza \mathcal{J} . Opazimo lahko, da premici, ki pripadata točkama 1 in 4, nimata skupnih točk z mejo jedra prereza. To je pričakovano, saj skozi točki 1 in 4 ne moremo potegniti premice, ki ne bi sekala prečnega prereza.

Preglednica Z-5.13

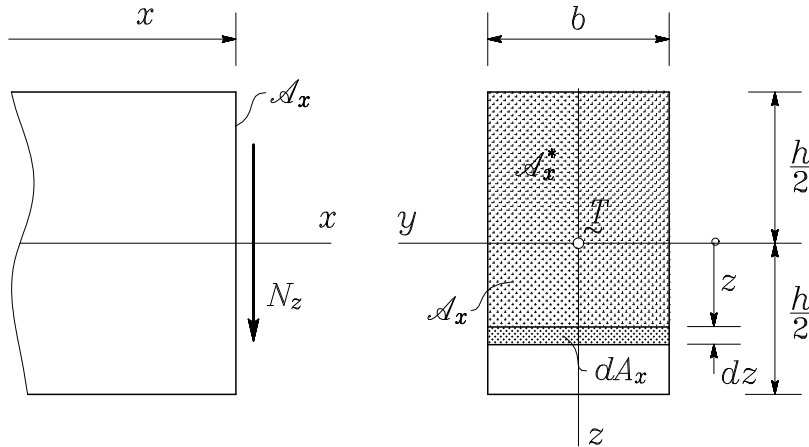
točka	y_r	z_r	$a = -\frac{i_z^2}{y_r}$	$b = -\frac{i_y^2}{z_r}$
	cm	cm	cm	cm
1	10	17.95	-10.61	-18.97
2	10	32.95	-10.61	-10.33
3	-10	32.95	10.61	-10.33
4	-10	17.95	10.61	-18.97
5	-25	-15.45	4.24	22.03
6	-25	-25.45	4.24	13.38
7	25	-25.45	-4.24	13.38
8	25	-15.45	-4.24	22.03



Slika Z-5.13 c

Zgled 5.14

Določi strižne napetosti v pravokotnem prečnem prerezu linijskega nosilca, v katerem deluje prečna sila N_z .



Slika Z-5.8 a

Zaradi simetrije prečnega prereza glede na os z je $S_y^*(y) = 0$ in ker je tudi $N_y = 0$, nastopajo v prečnem prerezu le strižne napetosti σ_{xz} . Izračunamo jih z enačbo (5.119)

$$\sigma_{xz}(x, z) = -N_z \frac{S_y^*(z)}{b^*(z)I_{yy}}.$$

Pri pravokotnem prerezu je (slika Z-5.14 a)

$$b^*(z) = b \quad \text{in} \quad I_{yy} = \frac{bh^3}{12}.$$

Razen tega lahko pri pravokotnem prerezu vzamemo $dA_x = b dz$ in statični moment $S_y^*(z)$ delnega prereza \mathcal{A}_x^* glede na os y je

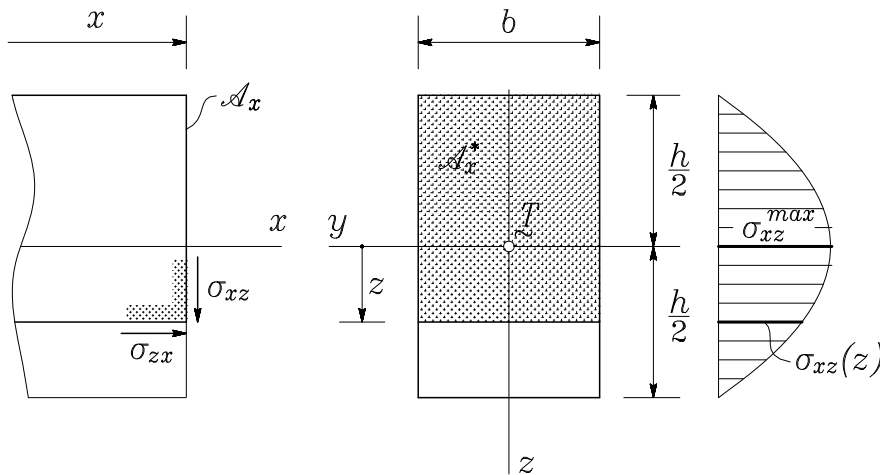
$$S_y^*(z) = \int_{\mathcal{A}_x^*} z dA_x = b \int_{-\frac{h}{2}}^z \zeta d\zeta.$$

Pri tem smo za integriranje v mejah od $-h/2$ do z vpeljali integracijsko spremenljivko ζ . Z izrednotenjem integrala dobimo

$$S_y^*(z) = \frac{bh^2}{8} \left[\left(\frac{2z}{h} \right)^2 - 1 \right]$$

in strižna napetost σ_{xz} je (slika Z-5.8 b)

$$\sigma_{xz}(z) = \sigma_{zx}(z) = \frac{3N_z}{2A_x} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right].$$



Slika Z-5.14 b

Ob privzetih predpostavkah je torej strižna napetost σ_{xz} po višini pravokotnega prečnega prereza razporejena po kvadratni paraboli. Največjo vrednost doseže v ravnini $z = 0$

$$\sigma_{xz}^{max} = \sigma_{xz}(z = 0) = \frac{3N_z}{2A_x} = 1.5 \frac{N_z}{A_x}.$$

Hitro se tudi lahko prepričamo, da je prečna sila N_z rezultanta strižnih napetosti σ_{xz} v prerezu A_x

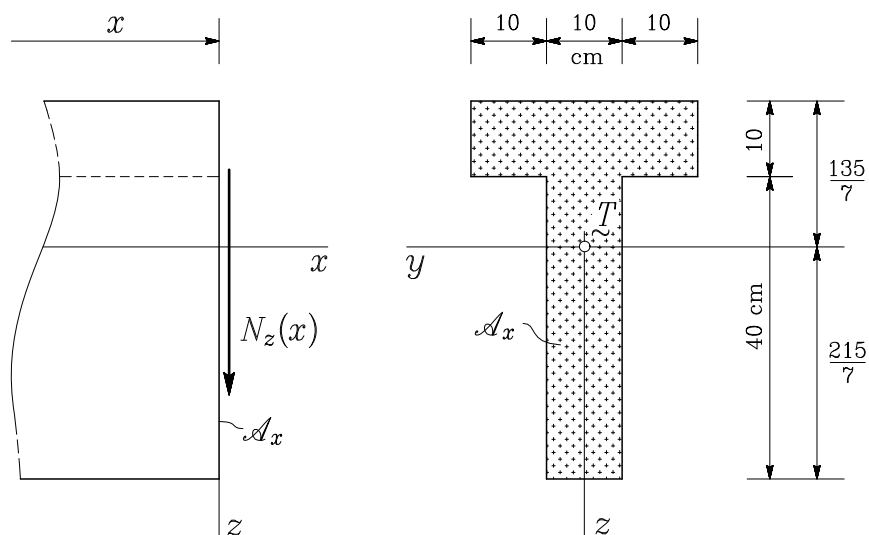
$$b \frac{3N_z}{2A_x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz = N_z.$$

V primeru, da bi v prerezu nastopala tudi prečna sila N_y , bi na podoben način določili strižne napetosti σ_{xy} , ki bi bile pri pravokotnem prerezu prav tako parabolično razporejene po širini b

$$\sigma_{xy}(y) = \sigma_{yx}(y) = \frac{3 N_y}{2 A_x} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right].$$

Zgled 5.15

Določi potek strižnih napetosti po prečnem prerezu armiranobetonskega nosilca, v katerem nastopa le prečna sila N_z (slika Z-5.15 a).



Slika Z-5.15 a

Rezultate izrazi v odvisnosti od velikosti nastopajoče prečne sile N_z .

Začnimo z določitvijo ploščine prečnega prereza A_x in lege težišča \tilde{T} glede na pomožno os Y (slika Z-5.15 b)

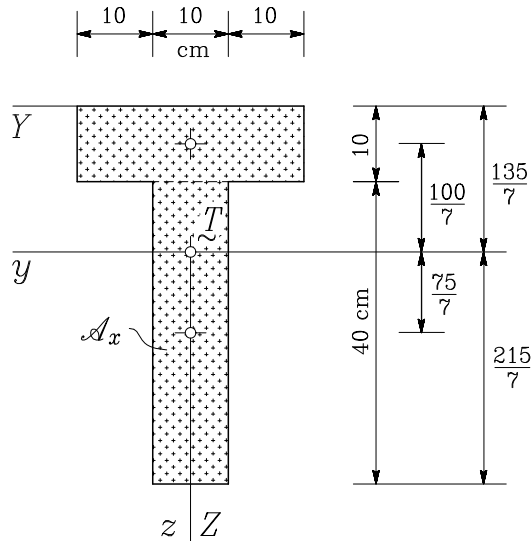
$$A_x = 30 \cdot 10 + 10 \cdot 40 \quad \rightarrow \quad A_x = 700 \text{ cm}^2$$

$$Z_T = \frac{1}{700} (300 \cdot 5 + 400 \cdot 30) \quad \rightarrow \quad Z_T = \frac{135}{7} \text{ cm}.$$

Za nadaljnjo rabo po znanem postopku določimo še upogibni vztrajnostni moment I_y glede na težiščno os y . Z upoštevanjem Steinerjevega pravila dobimo

$$I_{yy} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 300 \cdot \left(\frac{100}{7}\right)^2 + \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 400 \cdot \left(\frac{75}{7}\right)^2$$

$$I_{yy} = 162\,976 \text{ cm}^4.$$



Slika Z-5.15 b

Strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} določimo z enačbama (5.118) in (5.119), pri čemer upoštevamo, da je $N_y = 0$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -N_z(x) \frac{S_y^*(y)}{h^*(y)I_{yy}} \quad \text{in} \quad \sigma_{xz}(x, z) = -N_z(x) \frac{S_y^*(z)}{b^*(z)I_{yy}}.$$

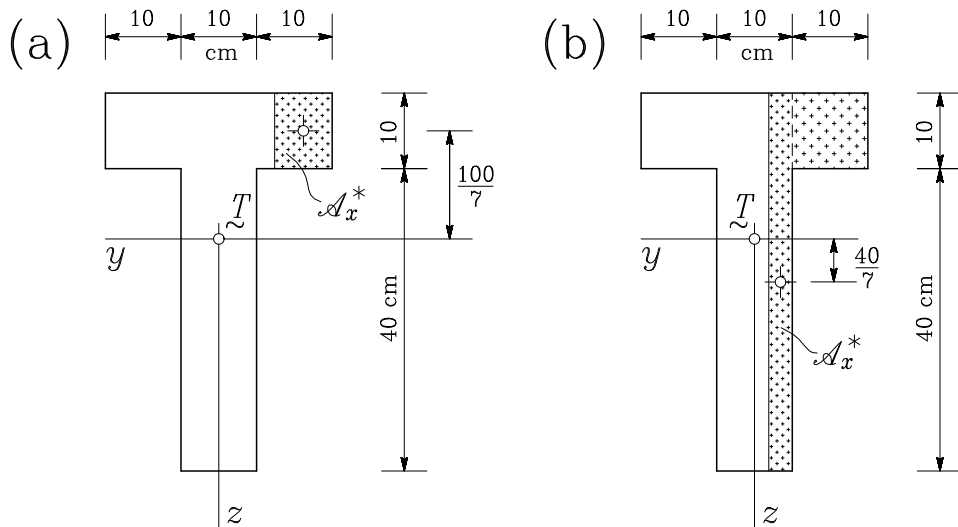
Potek statičnega momenta S_y^* delnega prereza v odvisnosti od koordinate y

$$S_y^*(y) = \int_{\mathcal{A}_x^*(y)} z dA_x^*$$

določimo v treh korakih. Začnemo na desnem robu zgornje pasnice (slika Z-5.15 c/a) in s smiselno uporabo splošnega izraza dobimo

$$-15 \geq y \geq -5 : \quad z = -\frac{100}{7}, \quad dA_x = 10 dy$$

$$S_y^*(y) = -\frac{100}{7} \cdot 10 \int_{-15}^y d\eta \quad \rightarrow \quad S_y^*(y) = -142.857 (y + 15) .$$



Slika Z-5.15 c

Na prehodu iz pasnice v rebro, torej pri $y = -5$, je

$$S_y^*|_{y=-5} = -1428.57 \text{ cm}^3 .$$

Nadaljujemo v območju rebra, kjer velja (slika Z-5.15 c/b)

$$-5 \geq y \geq 5 : \quad z = \frac{40}{7}, \quad dA_x = 50 dy$$

$$S_y^*(y) = S_y^*|_{y=-5} + \frac{40}{7} \cdot 50 \int_{-5}^y d\eta = -\frac{10\,000}{7} + \frac{2\,000}{7} (y + 5)$$

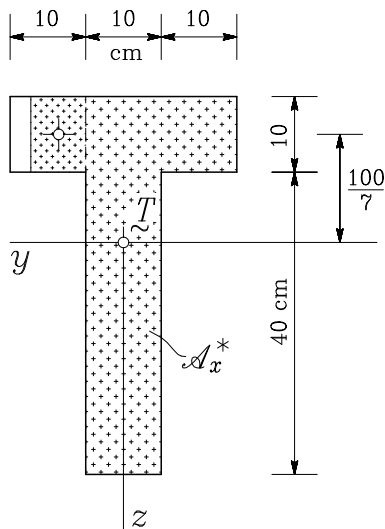
$$S_y^*(y) = 285.71 y.$$

Značilne vrednosti na tem odseku so

$$S_y^*|_{y=-5} = -1428,57 \text{ cm}^3, \quad S_y^*|_{y=0} = 0, \quad S_y^*|_{y=5} = 1428.57 \text{ cm}^3.$$

Preostane nam še levi del pasnice, kjer je (slika Z-5.15 d)

$$5 \geq y \geq 15 : \quad z = -\frac{100}{7}, \quad dA_x = 10 dy$$



$$S_y^*(y) = S_y^*|_{y=5} - \frac{100}{7} \cdot 10 \int_5^y d\eta =$$

$$1428.57 - \frac{1\,000}{7} (y - 5)$$

$$S_y^*(y) = 142.857 (15 - y).$$

Pri tem je

$$S_y^*|_{y=5} = 1428.57 \text{ cm}^3$$

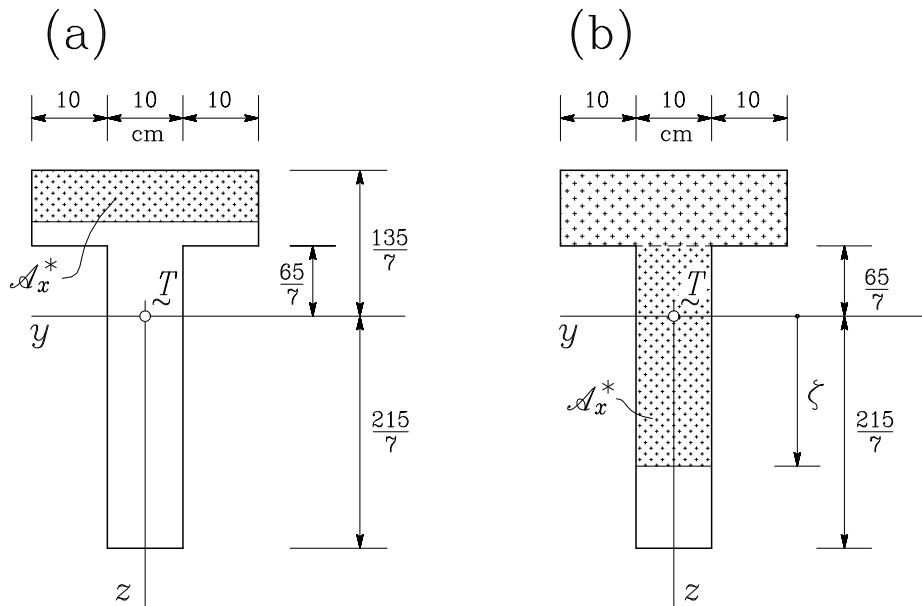
$$S_y^*|_{y=15} = 0.$$

Slika Z-5.15 d

Funkcija statičnega momenta $S_y^*(y)$ je na vseh treh odsekih linearna, višina $h^*(y)$ pa konstantna, zato je tudi strižna napetost $\sigma_{xy}(y)$ na vsakem od treh odsekov linearna. Potek strižne napetosti σ_{xy} določimo v odvisnosti od prečne sile N_z , ki nastopa v obravnavanem prečnem prerezu \mathcal{A}_x . Značilne vrednosti razmerja σ_{xy}/N_z so določene v preglednici P-5.15.1, graf tega razmerja pa je prikazan na sliki Z-5.15 f/a.

Preglednica P-5.15.1

y	S_y^*	h^*	σ_{xy}/N_z
cm	cm ³	cm	cm ⁻²
-15	0	10	0
-5 ⁽⁻⁾	-1428.57	10	0.88
-5 ⁽⁺⁾	-1428.57	50	0.18
0	0	50	0
5 ⁽⁻⁾	1428.57	50	-0.18
5 ⁽⁺⁾	1428.57	10	-0.88
15	0	10	0



Slika Z-5.15 e

Določiti moramo še potek napetosti σ_{xz} po prečnem prerezu nosilca. Spet začnemo z določitvijo poteka statičnega momenta delnega prereza S_y^* , le da tokrat v odvisnosti od koordinate z . Na območju pasnice velja (slika Z-5.15 e/a)

$$-\frac{135}{7} \leq z \leq -\frac{65}{7} : \quad b^* = 30 \text{ cm}, \quad dA_x = 30 dz$$

$$S_y^*(z) = \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x = b^* \int_{-\frac{135}{7}}^z \zeta d\zeta = \frac{30}{2} [\zeta^2]_{-\frac{135}{7}}^z$$

$$S_y^*(z) = 15 \left[z^2 - \left(\frac{135}{7} \right)^2 \right] \rightarrow \begin{cases} S_y^*|_{z=-\frac{135}{7}} = 0 \\ S_y^*|_{z=-\frac{65}{7}} = -4285.71 \text{ cm}^3. \end{cases}$$

Na območju rebra pa na podoben način dobimo (slika Z-5.15 e/b)

$$-\frac{65}{7} \leq z \leq \frac{215}{7} : \quad b^* = 10 \text{ cm}, \quad dA_x = 10 dz$$

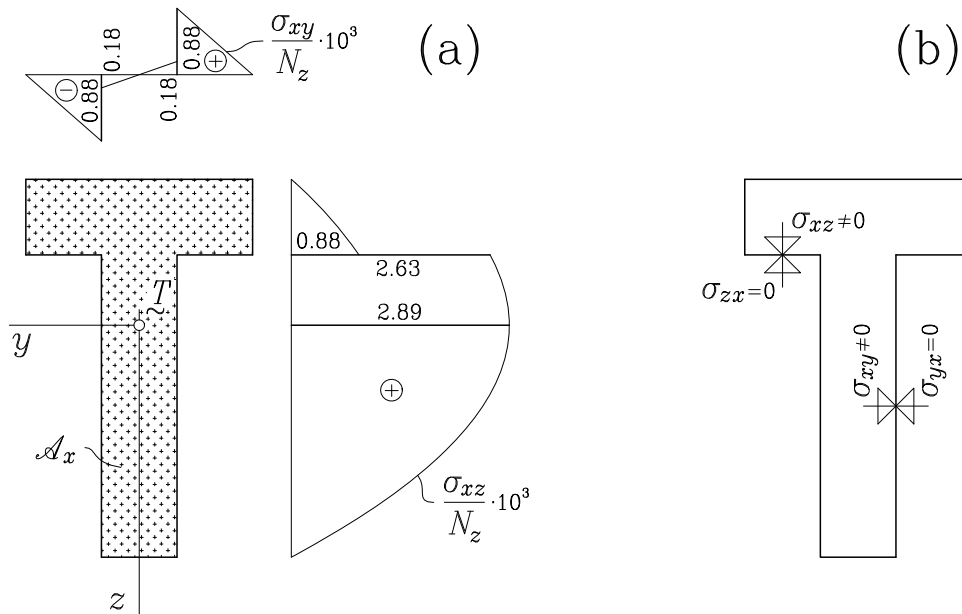
$$S_y^*(z) = S_y^*|_{z=-\frac{65}{7}} + b^* \int_{-\frac{65}{7}}^z \zeta d\zeta = -4285.71 + \frac{10}{2} [\zeta^2]_{-\frac{65}{7}}^z$$

$$S_y^*(z) = 5z^2 - 4716.84 \rightarrow \begin{cases} S_y^*|_{z=-\frac{65}{7}} = -4825.71 \text{ cm}^3 \\ S_y^*|_{z=0} = -4716.84 \text{ cm}^3 \\ S_y^*|_{z=\frac{215}{7}} = 0. \end{cases}$$

Potek razmerja strižne napetosti σ_{xz} in prečne sile N_z po višini obravnavanega prereza prikažemo v preglednici P-5.15.2. Kakor vidimo, gre na obeh obravnavanih območjih za kvadratno funkcijo koordinate z .

Preglednica P-5.15.2

z	S_y^*	h^*	σ_{xz}/N_z
cm	cm ³	cm	cm ⁻²
-135/7	0	30	0
-65/7 ⁽⁻⁾	-4825.71	30	0.88
-65/7 ⁽⁺⁾	-4825.71	10	2.63
0	-4716.84	10	2.89
215/7	0	10	0

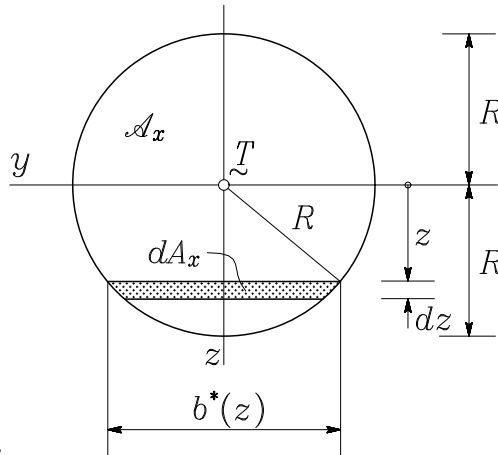


Slika Z-5.15 f

Potek razmerja σ_{xz}/N_z je grafično prikazan na *sliki Z-5.15 f/a*. Opisan je s kvadratno parabolo, ki največjo vrednost doseže v težišču prereza. Na prehodu pasnice v rebro se obe strižni napetosti hipoma spremenita. To je posledica privzetih poenostavitev pri izpeljavi enačb (5.118) in (5.119), saj v naravi takih preskokov napetosti seveda ni. Kot posledico predpostavke o enakomernem poteku strižnih napetosti po prerezni ploskvi, ki smo jo uporabili pri izpeljavi enačb (5.106) in (5.108), si lahko razložimo tudi neskladje med prikazanimi rezultati in pravilom konjugiranih strižnih napetosti, ki smo ga spoznali v razdelku **1.6** oziroma v zgledu 1.3. Pri strižno neobteženi površini nosilca so namreč strižne napetosti povsod na konturi prereza enake nič, poenostavljene enačbe pa na spodnji površini pasnice in na bočnih površinah rebra pripeljejo do od nič različnih vrednosti (*slika Z-5.15 f/b*).

Zgled 5.16

Prečni prerez linijskega nosilca ima obliko kroga s polmerom R . Določi njegove vztrajnostne momente in potek strižnih napetosti v prerezu, v katerem deluje prečna sila N_z .



Slika Z-5.16 a

Zaradi rotacijske simetrije prereza je jasno, da sta upogibna vztrajnostna momenta I_{yy} in I_{zz} enaka med seboj, deviacijski vztrajnostni moment I_{yz} pa je enak nič. Zato določimo le upogibni vztrajnostni moment I_{yy} . Pri krožnem prerezu je (slika Z-5.16 a)

$$b^*(z) = 2\sqrt{R^2 - z^2} \quad \text{in} \quad dA_x = b^* dz = 2\sqrt{R^2 - z^2} dz.$$

Vztrajnostni moment I_{yy} izrazimo z znano formulo

$$I_{yy} = \int_{A_x} z^2 dA_x = 2 \int_{-R}^R z^2 \sqrt{R^2 - z^2} dz.$$

Rešitev dobljenega integrala poiščemo v matematičnem priročniku[†]

$$I_{yy} = \left[-\frac{z}{4} \sqrt{(R^2 - z^2)^3} + \frac{R^2}{8} \left(z \sqrt{R^2 - z^2} + R^2 \arcsin \frac{z}{R} \right) \right]_{-R}^R$$

[†] Glej na primer: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlilig, Matematični priročnik, TZS Ljubljana, 1997, str. 867.

in po vstavitvi mej dobimo

$$I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Podobno kakor v prejšnjem zgledu nastopajo v obravnavanem prečnem prerezu le strižne napetosti σ_{xz}

$$\sigma_{xz}(x, z) = -N_z \frac{S_y^*(z)}{b^*(z)I_{yy}}.$$

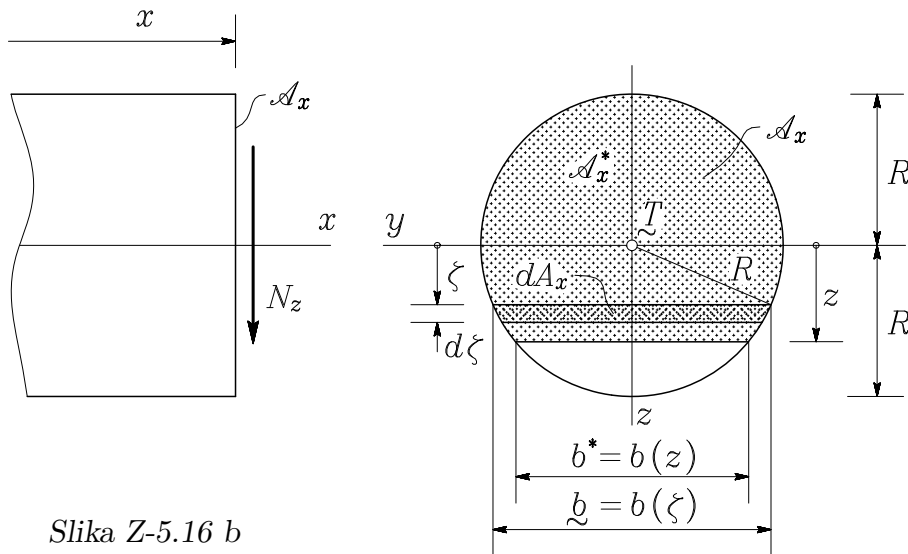
Za izvrednotenje statičnega momenta $S_y^*(z)$ delnega prereza \mathcal{A}_x^* glede na os y vpeljemo novo integracijsko spremenljivko ζ ($-R \leq \zeta \leq z$), tako da je (Slika Z-5.16 b)

$$\underline{b} = 2\sqrt{R^2 - \zeta^2} \quad \text{in} \quad dA_x = \underline{b} d\zeta = 2\sqrt{R^2 - \zeta^2} d\zeta$$

in dobimo

$$S_y^*(z) = \int_{-R}^z \zeta dA_x = 2 \int_{-R}^z \zeta \sqrt{R^2 - \zeta^2} d\zeta = -\frac{2}{3} \left[\sqrt{(R^2 - \zeta^2)^3} \right]_{-R}^z$$

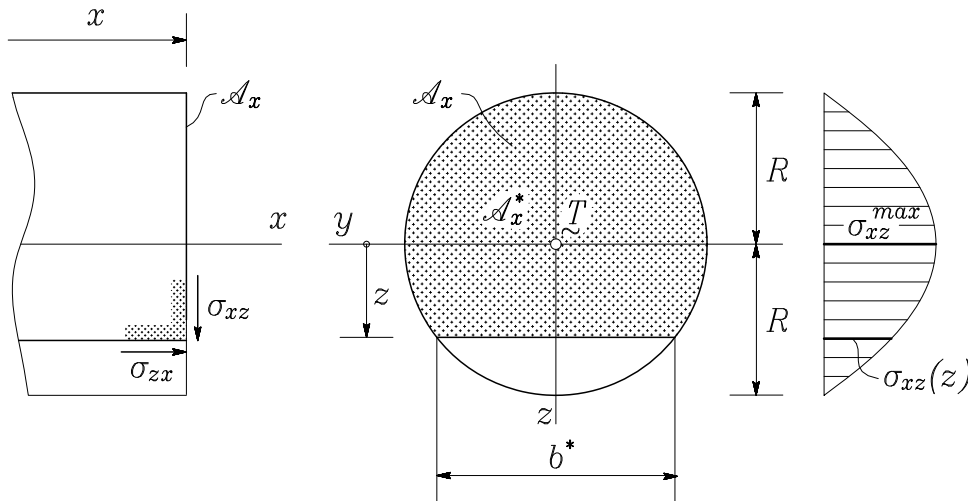
$$S_y^*(z) = -\frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - z^2)^3}.$$



Slika Z-5.16 b

Dobljene zveze vstavimo v enačbo za strižno napetost σ_{xz} in po krajšem urejanju dobimo

$$\sigma_{xz} = \frac{4 N_z}{3 \pi R^4} (R^2 - z^2) \quad \text{oziroma} \quad \sigma_{xz} = \frac{4 N_z}{3 A_x} \left[1 - \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right].$$



Slika Z-16 c

Prišli smo do nekoliko presenetljive ugotovitve, da je strižna napetost σ_{xz} tudi pri krožnem prerezu razporejena po kvadratni paraboli (slika Z-5.16 c). Največja vrednost σ_{xz}^{max} očitno nastopa v ravnini $z = 0$, torej v težišču prereza

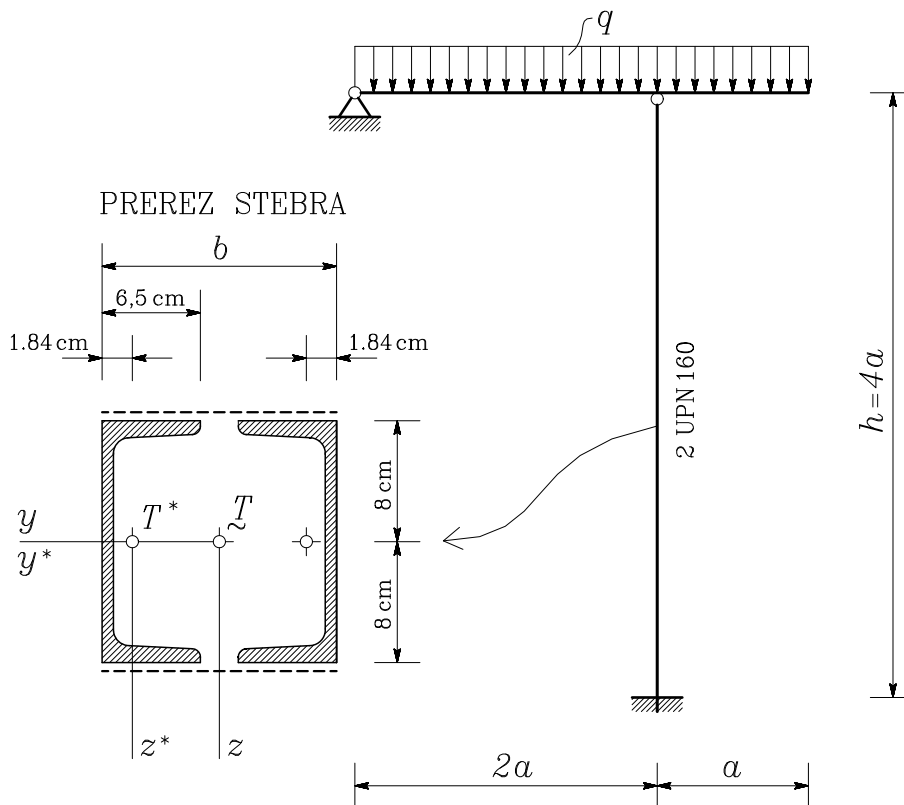
$$\sigma_{xz}^{max} = \sigma_{xz}(z = 0) = \frac{4 N_z}{3 A_x} = 1.33 \frac{N_z}{A_x}.$$

Brez posebnega računanja lahko ugotovimo, da bi v primeru, da bi v prerezu delovala tudi od nič različna prečna sila N_y , na podoben način določili strižne napetosti σ_{xy}

$$\sigma_{xy} = \frac{4 N_y}{3 A_x} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right].$$

Zgled 5.17

Podporni steber prikazane nosilne konstrukcije industrijskega objekta je sestavljen iz dveh tipskih jeklenih profilov UPN 160 (slika Z-5.17 a). Profila sta z veznimi pločevinami povezana tako, da se steber obnaša v skladu z Bernoullijevo teorijo linijskega nosilca. Uporabljena tipska profila sta izdelana iz jekla kvalitete *S 275* z idealno elastičnim - idealno plastičnim materialnim modelom.

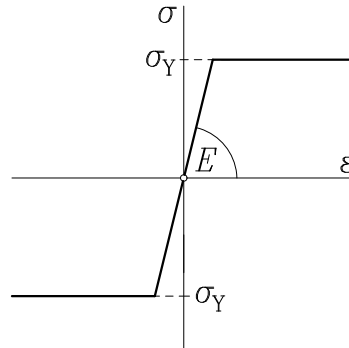


Slika Z-5.17 a

- Določi dimenzijo b tako, da bosta upogibna vztrajnostna momenta I_{yy} in I_{zz} prečnega prereza stebra glede na skupno težišče \tilde{T} enaka med seboj,
- določi kritično vrednost q_{kr} zvezne obtežbe q glede na uklon stebra, pri čemer lahko zanemariš osno podajnost vodoravnega nosilca,

c. preveri, ali je prečni prerez stebra pri kritični obtežbi v celoti elastičen.

$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ m} \\ E &= 21\,000 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_Y &= 27.5 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$



a.

Iz ustreznih tabel odčitamo potrebne podatke o geometrijskih karakteristikah tipskega profila UPN 160[†] glede na lokalni koordinatni sistem (y^*, z^*)

$$A_x^* = 24 \text{ cm}^2, \quad I_{yy}^* = 925 \text{ cm}^4, \quad I_{zz}^* = 85.3 \text{ cm}^4.$$

Ob upoštevanju skice prereza (slika Z-5.17 a) brez težav izračunamo ploščino A_x in vztrajnostni moment I_{yy} sestavljenega prereza

$$\begin{aligned} A_x &= 2 A_x^* = 2 \cdot 24 = 48 \text{ cm}^2 \\ I_{yy} &= 2 I_{yy}^* = 2 \cdot 925 = 1\,850 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Pogoj, da sta vztrajnostna momenta I_{yy} in I_{zz} enaka med seboj, izpolnimo ob upoštevanju Steinerjevega pravila

$$I_{zz} = 2 I_{zz}^* + A_x \cdot \left(\frac{b}{2} - 1.84 \right)^2 = I_{yy}.$$

Od tod sledi

$$b = 2 \left[1.84 + \sqrt{\frac{1}{48} (1850 - 2 \cdot 85.3)} \right] \rightarrow b = 15.51 \text{ cm}.$$

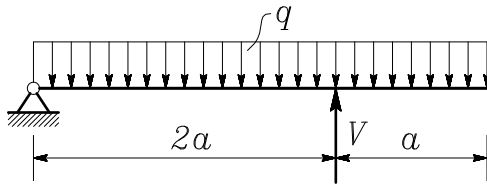
[†] Glej na primer: Gradbeniški priručnik, skupina avtorjev, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 2012, str. 379.

b.

Ker je obravnavani steber v spodnjem krajišču togo vpet, v zgornjem pa nepomično vrtljivo pritrjen na vodoravni nosilec, gre za tretji uklonski primer, pri katerem je uklonska dolžina $l_u \approx 0.7 h$. Prva kritična uklonska sila je tedaj

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(0.7 h)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21\,000 \cdot 1850}{(0.7 \cdot 4 \cdot 200)^2} \rightarrow P_{kr} = 1222.69 \text{ kN}.$$

Kritično vrednost zvezne obtežbe q_{kr} določimo iz pogoja, da je navpična sila V_{kr} , s katero vodoravni nosilec deluje na steber, ravno enaka uklonski sili P_{kr} . Silo V_{kr} brez težav določimo ob upoštevanju slike Z-5.17 b in dobimo



$$V = \frac{9}{4} q a$$

Slika Z-5.17 b

$$V_{kr} = P_{kr} \rightarrow \frac{9}{4} q_{kr} a = P_{kr}$$

$$q_{kr} = \frac{4 P_{kr}}{9 a} = \frac{4 \cdot 1222.69}{9 \cdot 200} \rightarrow q_{kr} = 2.171 \text{ kN/cm} = 271.7 \text{ kN/m}.$$

c.

Pri izračunani kritični obtežbi je enakomerna vzdolžna normalna napetost σ_{kr} v prečnem prerezu stebra določena z ulomkom

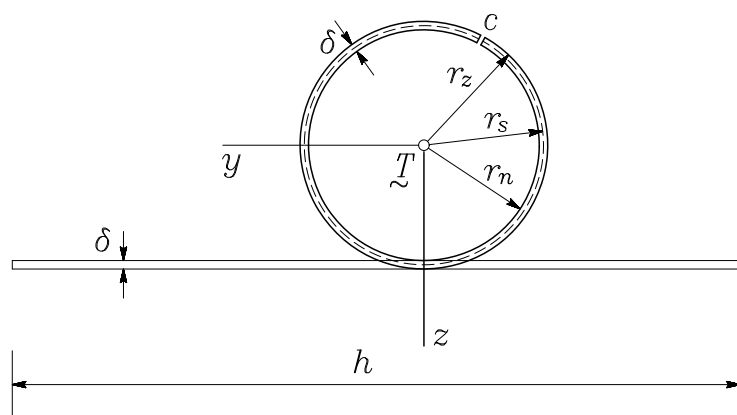
$$\sigma_{kr} = -\frac{P_{kr}}{A_x} = -\frac{1222.69}{48}$$

$$\sigma_{kr} = -25.47 \text{ kN/cm}^2 \rightarrow |\sigma_{kr}| < \sigma_Y = 27.5 \text{ kN/cm}^2.$$

Rezultat pove, da je pri doseženi kritični uklonski sili prečni prerez stebra še v celoti v elastičnem stanju. V nasprotnem primeru, (če bi bila napetost σ_{kr} večja od meje plastičnosti σ_Y), bi to pomenilo, da do uklona sploh ne pride, saj se prerez že prej plastično poruši.

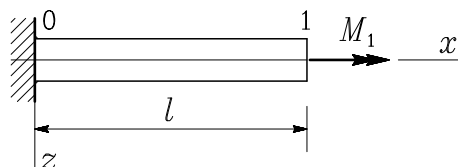
Zgled 5.18

Jekleno pločevino dimenzij $l = 150 \text{ cm} \times h = 71 \text{ cm}$ in debeline $\delta = 8 \text{ mm}$ ukrivimo v krožno cev s srednjim polmerom $r_s = 11.3 \text{ cm}$ in z dolžino $l = 150 \text{ cm}$ (slika Z-5.18 a).



Slika Z-5.18 a

Cev po oblikovanju napetostno izžarimo in jo na levem koncu nepodajno pritrdimo na togo steno (slika Z-5.18 b). Modul elastičnosti jekla je $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, količnik prečne kontrakcije pa je $\nu = 0.3$.



Slika Z-5.18 b

Prosti konec cevne nosilca obtežimo s točkovnim torzijskim momentom M_1 . Največja strižna napetost, ki jo lahko prevzame uporabljeno jeklo, je $[\tau] = 11.5 \text{ kN/cm}^2$. Določi največji dopustni moment $[M_1]$ in pripadajoči torzijski zasuk prereza ω_x^1 na prostem koncu nosilca. Kako se vrednosti $[M_1]$ in ω_x^1 spremenita, če vzdolžni stik c zavarimo?

Najprej se prepričajmo, da s krivljenjem pločevine v smeri krajše stranice h res dobimo krožno cev s srednjim polmerom $r_s = 11.3 \text{ cm}$

$$r_s = \frac{h}{2\pi} = \frac{71}{2\pi} = 11.3 \text{ cm}.$$

Za kasnejšo rabo določimo še zunanji in notranji polmer cevi

$$r_z = r_s + \frac{\delta}{2} = 11.3 + \frac{0.8}{2} = 11.7 \text{ cm}$$

$$r_n = r_s - \frac{\delta}{2} = 11.3 - \frac{0.8}{2} = 10.9 \text{ cm}.$$

Obravnavati moramo dva primera; v prvem primeru je stik k prost in imamo opraviti z odprtim tankostenskim profilom - ozkim pravokotnikom z višino h in debelino δ . V drugem primeru, ko stik k po celotni dolžini cevi zavarimo, pa gre za zaprt enocelični tankostenski profil, ki ga lahko obravnavamo z enačbami (5.325) do (5.332) kot votli krožni prerez ali pa z Bredtovimi formulami (5.372) do (5.377).

- Prvi primer: odprt profil - ozki pravokotnik

Upoštevamo, da je $M_x = M_1$, in največjo strižno napetost τ_{max} v steni odprte cevi izrazimo z enačbo (5.342)

$$\tau_{max} = \frac{3 M_1}{h \delta^2}.$$

Največja dopustna torzijska obtežba $[M_1]$ je tedaj

$$[M_1] = [\tau] \frac{h \delta^2}{3} = 11.5 \cdot \frac{71 \cdot 0.8^2}{3} \quad \rightarrow \quad [M_1] = 174.19 \text{ kNcm}.$$

Z enačbo (5.339) določimo torzijski vztrajnostni moment I_x

$$I_x = \frac{h \delta^3}{3} = \frac{71 \cdot 0.8^3}{3} \quad \rightarrow \quad I_x = 12.12 \text{ cm}^4$$

in z enačbo (5.301) oziroma (5.340) še specifični torzijski zasuk θ pri obtežbi $[M_1]$

$$\theta = \frac{[M_1]}{G I_x} = \frac{174.19}{8077 \cdot 12.12} \quad \rightarrow \quad \theta = 177.98 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}.$$

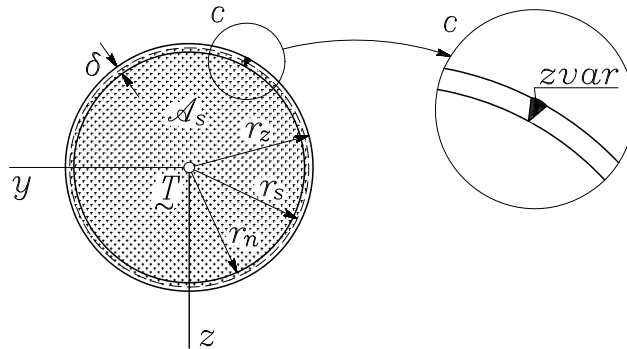
Pri tem smo upoštevali definicijo strižnega modula G

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{21\,000}{2(1 + 0.3)} \quad \rightarrow \quad G = 8\,077 \text{ kN/cm}^2.$$

Ker je nosilec v prerezu 0 togo vpet ($\omega_x^0 = 0$), lahko torzijski zasuk ω_x^1 na koncu nosilca določimo kar z izrazom

$$\omega_x^1 = \theta l = 177.98 \cdot 10^{-5} \cdot 150 \quad \rightarrow \quad \omega_x^1 = 0.2667 \text{ rad}.$$

- Drugi primer (slika Z-5.18 c): votel krožni profil, ki ga obravnavamo z enačbami (5.325) do (5.332) oziroma z Bredtovimi formulami (5.372) do (5.377)



Slika Z-5.18 c

Z enačbama (5.329) in (5.330) določimo največjo strižno napetost v steni cevi pri čisti torziji

$$\tau_{max} = \frac{2 M_x}{\pi r_z^4 (1 - k^4)} r_{max} = \frac{2 M_x}{\pi r_z^3 (1 - k^4)}.$$

V obravnavanem primeru je

$$k = \frac{r_n}{r_z} = \frac{10.9}{11.7} \quad \rightarrow \quad k = 0.9316.$$

Dopustna vrednost torzijske obtežbe $[M_1]$ je tedaj

$$\begin{aligned} [M_1] &= [\tau] \frac{\pi r_z^3}{2} (1 - k^4) = 11.5 \cdot \frac{\pi \cdot 11.7^3}{2} \cdot (1 - 0.9316^4) \\ [M_1] &= 7\,137.74 \text{ kNcm}. \end{aligned}$$

Torzijski vztrajnostni moment in specifični torzijski zasuk izračunamo z enačbama (5.327) in (5.328)

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{\pi r_z^4}{2} (1 - k^4) = \frac{\pi \cdot 11.7^4}{2} \cdot (1 - 0.9316^4) \\ I_x &= 7\,261.88 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{[M_1]}{G I_x} = \frac{7\,137.74}{8\,077 \cdot 7\,261.88} \quad \rightarrow \quad \theta = 12.17 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

in torzijski zasuk na koncu nosilca je

$$\omega_x^1 = \theta l = 12.17 \cdot 10^{-5} \cdot 150 \quad \rightarrow \quad \omega_x^1 = 0.01825 \text{ rad}.$$

Glede na to, da je razmerje med debelino stene cevi in njenim premerom razmeroma veliko ($2 r_s / \delta = 28.25$), lahko za določitev mehanskega stanja cevi pri čisti torziji uporabimo Bredtove formule. V ta namen najprej izračunajmo srednjo ploščino profila A_s , ki jo določa krožnica s polmerom r_s

$$A_s = \pi r_s^2 = \pi \cdot 11.3^2 \quad \rightarrow \quad A_s = 401.15 \text{ cm}^2.$$

S 1. Bredtovo formulo (5.377) lahko sedaj določimo povprečno strižno napetost τ_s v steni cevi

$$\tau_s = \frac{M_x}{2 \delta A_s}$$

in dopustna torzijska obtežba $[M_1]$ je

$$[M_1] = 2 \delta A_s [\tau] = 2 \cdot 0.8 \cdot 401.15 \cdot 11.5 \quad \rightarrow \quad [M_1] = 7381.16 \text{ kNcm}.$$

V primerjavi s točno vrednostjo $[M_1] = 7137.74 \text{ kNcm}$, ki smo jo izračunali za votli krožni profil, smo tokrat dobili za 3.4% večji dopustni moment $[M_1]$. To pomeni, da smo pri oceni torzijske nosilnosti nosilca na “nevarni” strani. Hitro se lahko prepričamo, da bi pri cevi s tanjšo steno (na primer 4 mm) naredili občutno manjšo napako. Zato je uporaba poenostavljenih enačb, kot so Bredtove enačbe, upravičena le tedaj, ko gre za izrazito tankostenske zaprte profile.

Torzijski vztrajnostni moment I_x izračunamo z 2. Bredtovo enačbo

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}}.$$

V obravnavanem primeru je debelina cevi konstantna, zato je

$$\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta} = \frac{2 \pi r_s}{\delta} = \frac{l}{\delta} = \frac{71}{0.8} \quad \rightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta} = 88.75$$

in sledi

$$I_x = \frac{4 \cdot 401.15^2}{88.75} \quad \rightarrow \quad I_x = 7252.79 \text{ cm}^4.$$

Dobili smo nekoliko manjšo vrednost kakor v primeru, da uporabimo točne enačbe za votli krožni profil. To je pričakovano, saj smo pri izpeljavi 2. Bredtove formule zanemarili prispevek ozkega pravokotnika. Če k dobljeni vrednosti za I_x prištejemo torzijski vztrajnostni moment

ozkega pravokotnika, ki smo ga določili v prvem obravnavanem primeru, dobimo

$$I_x = 7\,252.79 + 12.12 = 7\,264.91 \text{ cm}^4,$$

kar je praktično enako točni vrednosti.

Specifični torzijski zasuk θ vseeno izračunamo kar ob upoštevanju torzijskega vztrajnostnega momenta, ki ga določimo z 2. Bredtovo formulo

$$\theta = \frac{[M_1]}{G I_x} = \frac{7\,381.16}{8\,077 \cdot 7\,252.79} \quad \rightarrow \quad \theta = 12.60 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}$$

in torzijski zasuk na koncu nosilca je

$$\omega_x^1 = \theta l = 12.60 \cdot 10^{-5} \cdot 150 \quad \rightarrow \quad \omega_x^1 = 0.01890 \text{ rad}.$$

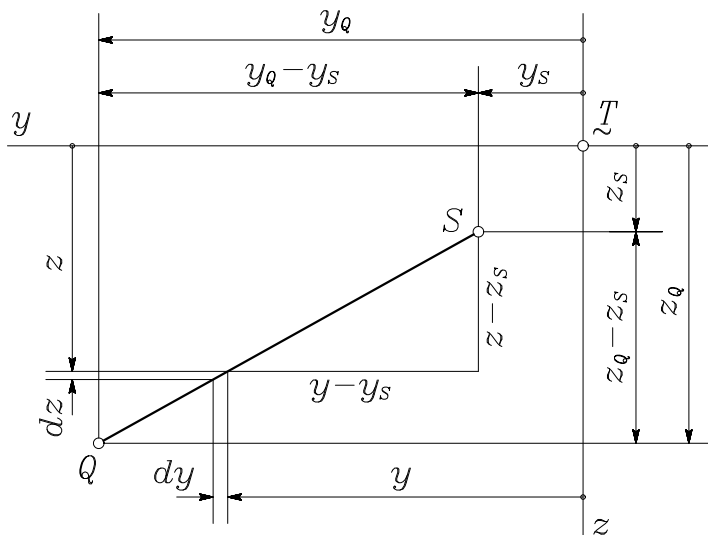
Rezultati potrjujejo ugotovitev, da so nosilci z zaprtim tankostenskim prerezom bistveno bolj ekonomični za prenašanje torzijskih obremenitev kakor odprti profili. V našem primeru se izkaže, da pri praktično enaki porabi jekla zaprta (zavarjena) cev prevzame kar 41-krat večjo torzijsko obtežbo, pri tem pa je torzijski zasuk na prostem koncu nosilca 14.6-krat manjši kakor pri odprtem profilu enake velikosti in oblike.

Zgled 5.19

Dokaži, da je vrednost integrala

$$I_{SQ} = \int_S^Q [(z - z_S) dy - (y - y_S) dz]$$

enaka nič, če za integracijsko pot izberemo daljico \overline{SQ} . (slika Z-5.19).



Slika Z-5.19

S pravilom podobnih trikotnikov lahko zapišemo

$$z = z_S + \frac{z_Q - z_S}{y_Q - y_S} (y - y_S) ,$$

od koder sledi

$$z - z_S = \frac{z_Q - z_S}{y_Q - y_S} (y - y_S) \quad \text{in} \quad dz = \frac{z_Q - z_S}{y_Q - y_S} dy .$$

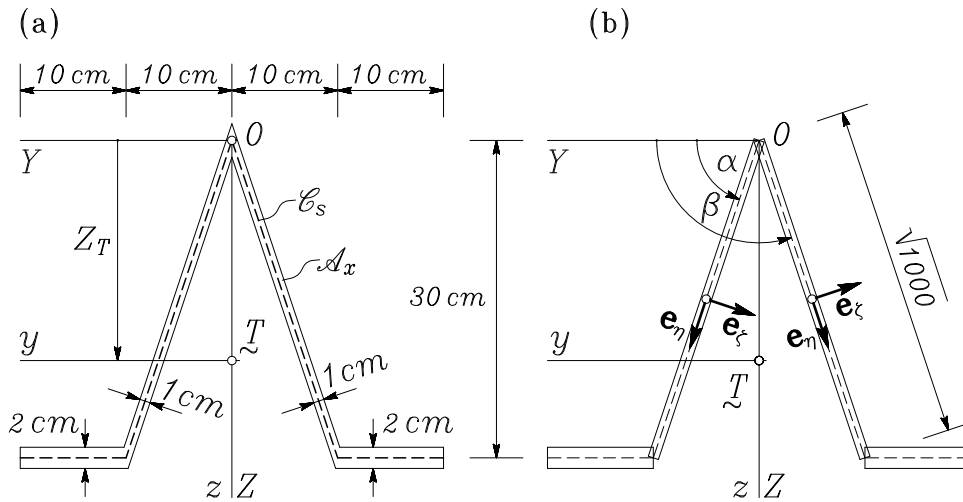
Po vstavitvi v integral I_{SQ} dobimo

$$I_{SQ} = \int_S^Q \left[\frac{z_Q - z_S}{y_Q - y_S} (y - y_S) dy - (y - y_S) \frac{z_Q - z_S}{y_Q - y_S} dy \right] = 0$$

in dokaz je končan.

Zgled 5.20

Določi koordinati torzijskega središča prikazanega tankostenskega prereza nosilca (slika Z-5.20 a/a) glede na njegovo težišče \tilde{T} . Nariši tudi diagram izbočitvene funkcije pri torzijski obremenitvi nosilca.



Slika Z-5.20 a

Pri določanju geometrijskih karakteristik tankostenskih prerezov, sestavljenih iz ravnih odsekov, ne naredimo praktično nobene napake, če dejanski prerez nadomestimo z ustreznim sistemom ozkih pravokotnikov, kakor je prikazano na sliki Z-5.20 a/b. Ploščina A_x prereza \mathcal{A}_x je tedaj

$$A_x = 2 \cdot \left(1 \cdot \sqrt{1000} + 2 \cdot 10 \right) = 103.25 \text{ cm}^2.$$

V prvem koraku reševanja naloge določimo lego težišča \tilde{T} prereza \mathcal{A}_x glede na pomožni koordinatni sistem (Y, Z) . Ker je os Z simetrijska os prereza, leži težišče \tilde{T} na tej osi, torej je $Y_T = 0$. Drugo koordinato težišča (slika Z-5.20 b/a) določimo na znani način

$$Z_T = \frac{1}{A_x} \int_{\mathcal{A}_x} Z dA_x = \frac{2}{103.5} \left(1 \cdot \sqrt{1000} \cdot 15 + 2 \cdot 10 \cdot 30 \right)$$

$$Z_T = 20.81 \text{ cm}.$$

Določimo še vztrajnostne momente prereza \mathcal{A}_x glede na težišče \mathcal{T} . Pri tem upoštevamo ugotovitve iz zgleada 5.1, simetrijo prereza glede na os z in Steinerjevo pravilo. Da bi lahko uporabili enačbe, ki smo jih izpeljali v zgledu 5.2, moramo za poševna odseka najprej določiti kota α in β , ki opisujeta lego lokalnih težiščnih osi η in ζ glede na skupni (globalni) koordinatni sistem (y, z) . Za levi poševni odsek tako dobimo (slika Z-5.20 a/b)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{30}{10} = 71.665^\circ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin^2 \alpha = 0.9 \\ \cos^2 \alpha = 0.1, \end{cases}$$

za desni poševni odsek pa velja

$$\beta = 180^\circ - \alpha \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin^2 \beta = 0.9 \\ \cos^2 \beta = 0.1. \end{cases}$$

Vztrajnostni momenti obeh poševnih odsekov glede na lokalno težiščno koordinatno bazo $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$ so ($b = 1 \text{ cm}$, $h = \sqrt{1000} \text{ cm}$)

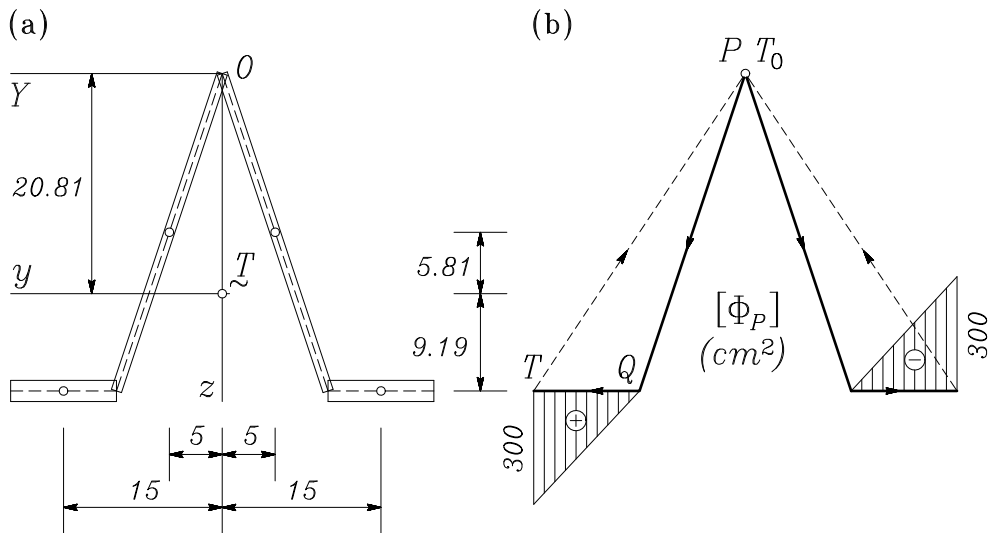
$$I_{\eta\eta} = \frac{1^3 \cdot \sqrt{1000}}{12} \quad I_{\zeta\zeta} = \frac{1 \cdot \sqrt{1000^3}}{12} \quad I_{\eta\zeta} = 0.$$

Zaradi simetrije prereza \mathcal{A}_x glede na os y je deviacijski vztrajnostni moment enak nič ($I_{yz} = 0$). Določiti moramo še oba upogibna vztrajnostna momenta glede na težiščni osi y in z obravnavanega prereza \mathcal{A}_x , pri čemer ni težko ugotoviti, da sta prispevka obeh poševnih odsekov enaka med seboj. Zato je

$$I_{yy} = 2 \left(\frac{2^3 \cdot 10}{12} + 2 \cdot 10 \cdot 9.19^2 + \frac{1^3 \cdot \sqrt{1000}}{12} \cdot 0.1 + \frac{1 \cdot \sqrt{1000^3}}{12} \cdot 0.9 + 1 \cdot \sqrt{1000} \cdot 5.81^2 \right) = 10\,270.44 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = 2 \left(\frac{2 \cdot 10^3}{12} + 2 \cdot 10 \cdot 15^2 + \frac{1^3 \cdot \sqrt{1000}}{12} \cdot 0.9 + \frac{1 \cdot \sqrt{1000^3}}{12} \cdot 0.1 + 1 \cdot \sqrt{1000} \cdot 5^2 \right) = 11\,446.26 \text{ cm}^4.$$

Šele sedaj se lahko lotimo določitve koordinat torzijskega središča in izbočitvene funkcije. Kakor smo pokazali v razdelku 5.5, moramo v ta namen najprej izbrati pomožno točko P in referenčno točko T_0 . V našem primeru je najugodnejše, če obe točki izberemo v stiku obeh poševnih odsekov (slika Z-5.20 b/b). Možnih je seveda neskončno veliko različnih izbir omenjenih točk, do najbolj smiselnih pa pridemo z razmislekom o operacijah, ki jih moramo opraviti v nadaljevanju.



Slika Z-5.20 b

Uporabimo enačbo (5.447)

$$\Phi_P = -2 A_{\Phi}^P$$

in najprej določimo potek pomožne izbočitvene funkcije Φ_P za levi krak profila. Vzdolž odseka \overline{PQ} je $A_{\Phi}^P = 0$ in zato tudi $\Phi_P = 0$, na odseku \overline{QT} pa se pomožna izbočitvena funkcija linearno spreminja in v točki T doseže vrednost $\Phi_P(T)$, ki je enaka ploščini trikotnika PQT

$$\Phi_P(T) = 2 \frac{10 \cdot 30}{2} = 300 \text{ cm}^2.$$

V točki na koncu desnega kraka na enak način dobimo vrednost $\Phi_P = -300 \text{ cm}^2$. Pri tem smo upoštevali, da poteka integracijska pot

na levem kraku v sourni, na desnem pa v protiurni smeri. Za tako imenovani *deplanacijski (izbočitveni) statični moment* S_{Φ}^P zaradi antisimetričnosti pomožne izbočitvene funkcije velja

$$S_{\Phi}^P = \int_{\mathcal{A}_x} \Phi^P dA_x = 0.$$

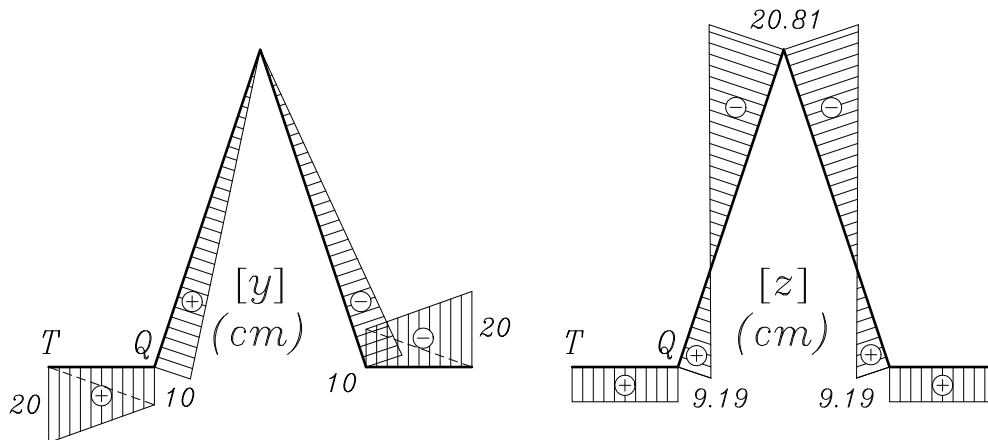
Podobno ugotovimo za *deplanacijski vztrajnostni moment* $I_{\Phi_y}^P$ glede na težiščno os y

$$I_{\Phi_y}^P = \int_{\mathcal{A}_x} z \Phi_P dA_x = 0.$$

Deplanacijski vztrajnostni moment $I_{\Phi_z}^P$ glede na težiščno os z pa je

$$I_{\Phi_z}^P = \int_{\mathcal{A}_x} y \Phi_P dA_x.$$

Za izvrednotenje integrala v gornji enačbi uporabimo pravilo Vereščagina, ki je sicer izpeljano v razdelku 6.8.



Slika Z-5.20 c

V ta namen sta na *sliki Z-5.20 c* grafično prikazana poteka koordinat y in z po srednji črti profila. Tako dobimo

$$I_{\Phi_z}^P = 2 \left(\frac{20 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 300 + \frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 300 \right) = 100\,000 \text{ cm}^5.$$

S tem že lahko določimo koordinati y_S in z_S torzijskega središča S . Ker je v našem primeru $y_P = 0$ in $I_{\Phi y}^P = 0$, je po prvi od enačb (5.440) tudi $y_S = 0$. Koordinato z_S (slika Z-5.20 d/a) izračunamo z drugo od omenjenih enačb, pri čemer je $z_P = -20.81$ cm

$$z_S = z_P + \frac{I_{\Phi z}^P}{I_z} = -20.81 + \frac{100\,000}{11446.26} = -12.07 \text{ cm}.$$

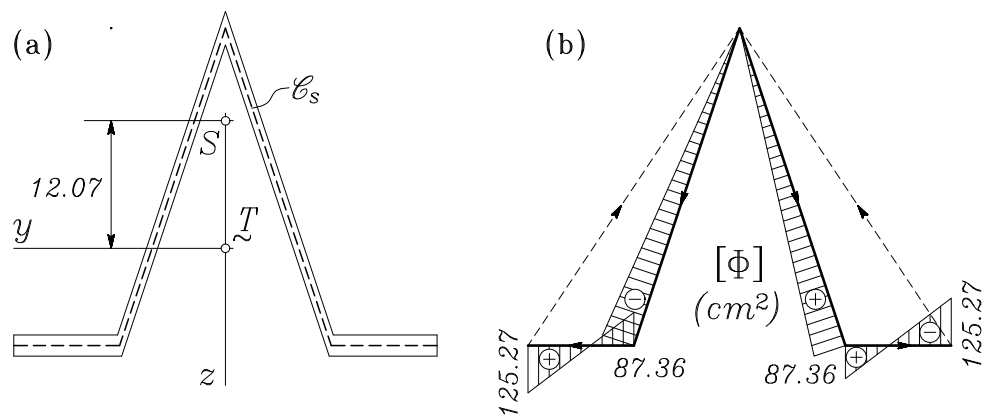
Ker je $y_0 = 0$, iz tretje od enačb (5.446) hitro ugotovimo, da je referenčna vrednost izbočitvene funkcije enaka nič ($\Phi_0 = 0$). Potek izbočitvene funkcije Φ lahko sedaj določimo neposredno z enačbo (5.448)

$$\Phi = \Phi_P - \frac{S_{\Phi}^P}{A_x} - \frac{I_{\Phi z}^P}{I_z} y - \frac{I_{\Phi y}^P}{I_y} z.$$

V našem primeru dobimo

$$\Phi = \Phi_P - \frac{100\,000}{11\,446.26} y = \Phi_P - 8.736 y.$$

S kombinacijo grafov na slikah Z-5.20 b/b in Z-5.20 c zlahka določimo tudi graf izbočitvene funkcije Φ vzdolž srednje črte profila (slika Z-5.20 d/b).



Slika Z-5.20 d

ENERGIJSKE METODE V MEHANIKI KONSTRUKCIJ

6.1 Uvod v energijske metode

V prvih treh poglavjih tega učbenika smo izpeljali sistem petnajstih osnovnih enačb trdne zvezne snovi, s katerimi lahko načeloma določimo napetosti, deformacije in pomike poljubnega linearno elastičnega izotropnega telesa pri omejenih geometrijskih spremembah, če le poznamo njegove geometrijske in materialne lastnosti, način podpiranja ter velikost in način delovanja zunanje obtežbe. Kakor vemo, je omenjeni sistem sestavljen iz treh parcialnih diferencialnih enačb ravnotežja, šestih parcialnih diferencialnih kinematičnih enačb ter šestih linearnih algebrskih konstitucijskih enačb. Reševanje sistema parcialnih diferencialnih enačb je težavno opravilo; že pri nekoliko bolj splošnih primerih geometrije in zunanje obtežbe praktično sploh ni mogoče dobiti analitičnih rešitev. Pa tudi v primerih, ko analitične rešitve obstajajo, njihova uporaba v praktičnih inženirskih nalogah ni vselej ekonomična. Spomnimo se, na primer, enačbe upogibnice pri linijskem nosilcu, ki je sicer preprosta navadna linearna diferencialna enačba drugega reda, vendar njena posebna rešitev zahteva razmeroma veliko računskega dela, še posebej, če je funkcija upogibnega momenta zgolj odsekoma gladka na več podintervalih celotne dolžine nosilca. Analitična rešitev, ki jo tako dobimo, je sicer zelo "bogata", saj omogoča določitev povosov in zasukov v katerikoli točki nosilca. Vendar vseh teh neskončno veliko rezultatov praktično nikoli ne rabimo. V veliki večini primerov nas namreč zanimajo zgolj pomiki in zasuki v posameznih značilnih diskretnih točkah, na primer povesi v polju ali na koncu previsov, zasuki v podporah, pomiki v stikih in podobno.

Reševanje številnih mehanskih problemov si lahko občutno olajšamo z uporabo tako imenovanih *energijskih metod*, utemeljenih na fizikalnih zakonitostih energijskega stanja telesa. V primerih, ki jih obravnavamo v tej knjigi, je energijsko stanje trdnega telesa določeno z njegovim mehanskim in temperaturnim stanjem. V nadaljevanju vzamemo, da telesu niti ne dovajamo niti ne odvajamo toplote, zato je njegovo energijsko stanje določeno zgolj z osnovnimi mehanskimi količinami: napetostmi, deformacijami in pomiki. Osrednje vprašanje v energijskih metodah je, kako se spremeni energijsko stanje telesa, če se posamezne ali vse nastopajoče mehanske količine spremenijo za poljubne majhne vrednosti.

V matematičnem pogledu zahteva vpeljava energijskih metod v mehansko analizo razmeroma zahtevne elemente diferencialnega, integralnega in *variacijskega računa*. Z diferencialnim in integralnim računom smo se v dosedanjem delu že dodobra seznanili, o osnovah variacijskega računa pa bomo v najnujnejšem obsegu govorili v naslednjem razdelku.

6.2 Osnove variacijskega računa

V prid uporabi variacijskega računa v mehaniki konstrukcij govori več razlogov. Navedimo nekaj najpomembnejših:

- i z metodami variacijskega računa je možno obravnavati energijske ekstreme, ki predstavljajo enega od temeljev teoretične fizike,
- ii iz variacijskih principov je možno izpeljati diferencialne enačbe in pripadajoče robne pogoje številnih mehanskih problemov,
- iii na rešitvah variacijskih problemov utemeljene računske metode so najmočnejše orodje pri formulaciji približnih teorij in ustreznih numeričnih postopkov za reševanje praktičnih inženirskih problemov,
- iv z uporabo variacijskih principov je v številnih primerih mogoče reševanje sistemov parcialnih diferencialnih enačb prevesti na matematično ugodnejše reševanje algebraskih ali integralnih enačb.

O ideji in posebnostih variacijskega računa se lahko skrben bralec pouči iz številnih matematičnih učbenikov. V tem razdelku navajamo le tiste osnovne elemente variacijskega računa, ki so nepogrešljivi pri izpeljavi, razumevanju in smiselni uporabi variacijskih principov v konstrukcijski mehaniki.

Osnovni izrek variacijskega računa

Poglavje o variacijskem računu začnimo s tako imenovanim *osnovnim izrekom (lemmo) variacijskega računa*:

Lemma. Naj bo $\psi_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) n -terica zveznih funkcij na odprtem intervalu $[a, b]$. Če je enačba

$$I = \sum_{i=1}^n \int_a^b \psi_i(x) \eta_i(x) dx = 0 \quad (6.1)$$

izpolnjena za katerokoli n -terico poljubnih zveznih in zvezno odvedljivih funkcij $\eta_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) na $[a, b]$, so vse funkcije ψ_i enake nič povsod na $[a, b]$.

Izrek dokažemo posredno. Kot izhodišče predpostavimo, da so vsaj nekatere od funkcij ψ_i različne od nič, na primer funkcija ψ_1 , za katero vzamemo, da je na podintervalu $[a, c]$ pozitivna, na podintervalu $[c, b]$ pa negativna (slika 6.1-a). Ker so funkcije η_i poljubne, vzemimo, da so $\eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_n = 0$. Vsota v enačbi (6.1) ima tedaj en sam člen

$$I = \int_a^b \psi_1(x) \eta_1(x) dx. \quad (6.2)$$

Ker je tudi η_1 poljubna zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, jo izberemo tako, da je (slika 6.1-b)

$$\eta_1 = \begin{cases} > 0 & \text{pri } a \leq x \leq c \\ = 0 & \text{pri } c < x \leq b. \end{cases} \quad (6.3)$$

Enačba (6.2) je tedaj

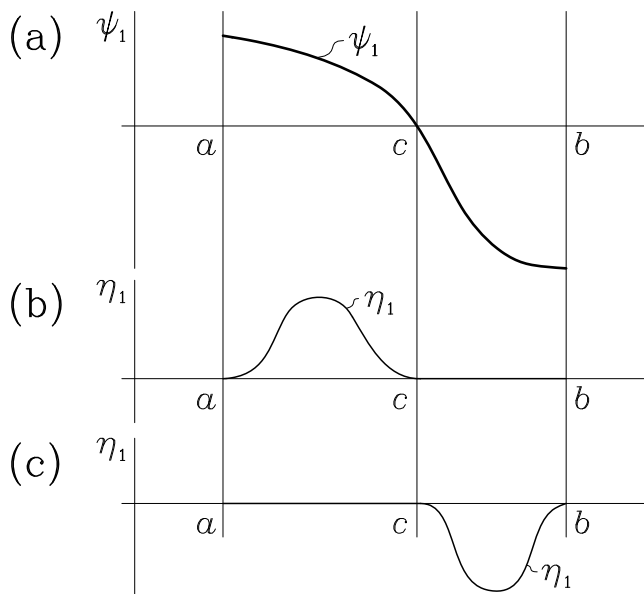
$$I = \int_a^c \psi_1(x) \eta_1(x) dx > 0, \quad (6.4)$$

kar pa je v nasprotju z zahtevo (6.1). Da bi bila enačba (6.1) izpolnjena, mora očitno biti $\psi_1 = 0$ na podintervalu $a \leq x \leq c$. Sedaj vzamemo drugačno izbiro funkcije η_1 , in sicer (slika 6.1-c)

$$\eta_1 = \begin{cases} = 0 & \text{pri } a \leq x < c \\ < 0 & \text{pri } c \leq x \leq b \end{cases} \quad (6.5)$$

in dobimo

$$I = \int_c^b \psi_1(x) \eta_1(x) dx > 0. \quad (6.6)$$



Slika 6.1

Enačba (6.1) je izpolnjena le, če je $\psi_1 = 0$ na $c \leq x \leq b$. Kakor vidimo, mora biti $\psi_1 = 0$ povsod na intervalu $[a, b]$. Podobno tudi za

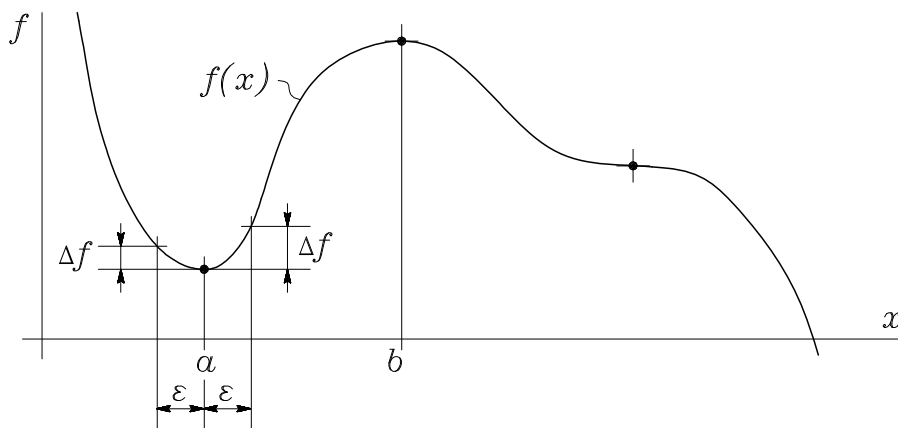
vse preostale funkcije $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ ugotovimo, da morajo biti enake nič povsod na $[a, b]$. Zato velja

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = 0 \quad \text{povsod na } [a, b]. \quad (6.7)$$

S tem je osnovni izrek variacijskega računa dokazan.

Ekstremi funkcije ene spremenljivke

Za uvod in boljše razumevanje osnov variacijskega računa se najprej spomnimo, kako iščemo ekstreme funkcij v matematični analizi. Vzemimo zvezno in dovoljkrat zvezno odvedljivo funkcijo ene spremenljivke $f(x)$ in opazujemo njeno sliko v koordinatnem sistemu (slika 6.2).



Slika 6.2

Po definiciji ima funkcija v točki $x = a$ lokalni minimum, če zavzame v neki okolici te točke samo večje vrednosti od $f(a)$. V tem primeru je možno najti tako pozitivno število h , da je

$$\Delta f(a) = f(a + \varepsilon) - f(a) > 0 \quad (6.8)$$

za vsak ε , ki zadošča neenačbi $|\varepsilon| < h$. Podobno definiramo lokalni maksimum, le da tedaj funkcija $f(x)$ povsod v okolici točke a zavzame manjše vrednosti kakor v točki $x = a$.

Vse vrednosti x iz okolice h imenujemo *dopustne vrednosti* spremenljivke x . Ker smo se s tem omejili na zadostno bližino točke a , gre dejansko za *lokalni* ali *relativni* ekstrem funkcije. V točkah, ki so bolj oddaljene od točke a , ima funkcija lahko še druge lokalne ekstreme. Za lokalni ekstrem v točki a torej velja

$$\varepsilon \gtrless 0 \quad \begin{cases} \Delta f(a) > 0 & \dots & \text{lokalni minimum} \\ \Delta f(a) < 0 & \dots & \text{lokalni maksimum.} \end{cases} \quad (6.9)$$

Z razvojem funkcije $f(a + \varepsilon)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke a dobimo

$$f(a + \varepsilon) = f(a) + \frac{\varepsilon}{1!} f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(a) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{\varepsilon^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots, \quad (6.10)$$

tako da je

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \varepsilon) - f(a) \\ &= \frac{\varepsilon}{1!} f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(a) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{\varepsilon^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

Če naj ima funkcija $f(x)$ v točki $x = a$ ekstrem, mora biti sprememba Δf vedno pozitivna ali vedno negativna, ne glede na to, ali se iz točke a premaknemo za majhno vrednost ε v pozitivni ali v negativni smeri. V izrazu na desni strani enačbe (6.11) lahko izberemo tako majhen ε , da bo linearni člen tega izraza večji od vsote vseh preostalih členov, kar pomeni, da bo linearni člen določal predznak celotne desne strani in s tem tudi spremembe Δf . Vzemimo, da je $f'(a) > 0$. Tedaj bo pri $\varepsilon > 0$ sprememba Δf pozitivna, pri $\varepsilon < 0$ pa negativna. To pa je v nasprotju s pravkar postavljenim zahtevom, da mora biti v točki ekstrema sprememba funkcije Δf neodvisna od predznaka ε . Ker pa je po drugi strani ε poljubna od nič različna vrednost, ki zadošča neenačbi $|\varepsilon| < h$, lahko kot potreben pogoj za nastop ekstrema v točki a izluščimo zahtevo, da mora biti prvi odvod funkcije $f(x)$ v točki a enak nič

$$f'(a) = 0. \quad (6.12)$$

Razlika Δf je sedaj

$$\Delta f = \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(a) + \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{\varepsilon^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots, \quad (6.13)$$

Po enaki logiki kot zgoraj lahko sklepamo, da bo pri dovolj majhnem ε v vsoti na desni strani prevladal člen z drugim odvodom, ki pa tokrat ni odvisen od predznaka ε . Pri $f''(a) > 0$ bo torej $\Delta f > 0$, pri $f''(a) < 0$ pa $\Delta f < 0$ in iz zapisa (6.9) sledi

$$\begin{aligned} f''(a) > 0 & \dots \text{ lokalni minimum} \\ f''(a) < 0 & \dots \text{ lokalni maksimum.} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Funkcija $f(x)$ ima torej lahko ekstreme le v točkah, v katerih je njen prvi odvod enak nič. Predznak drugega odvoda pa pove naravo ekstrema: če je drugi odvod pozitiven, ima funkcija minimum, če je negativen, pa maksimum. Omenimo še možnost, da je drugi odvod $f''(a)$ enak nič. Tedaj ima funkcija $f(x)$ v točki a prevoj ali *infleksijsko točko*.

Osnovni problem variacijskega računa. Minimizacija funkcionala

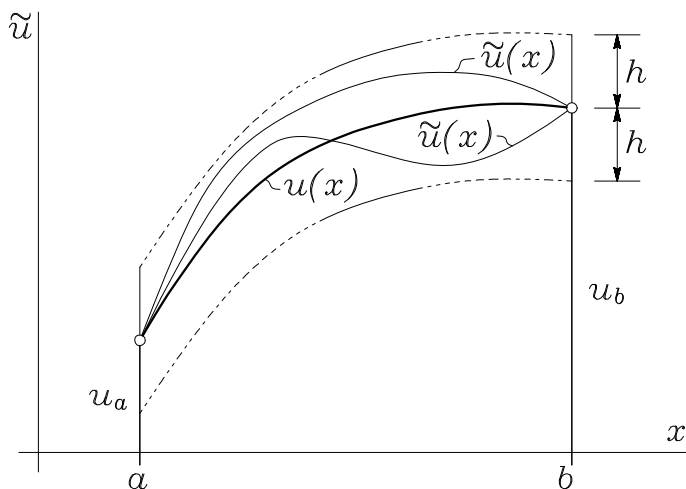
S podobnim razmislekom kot v prejšnjem razdelku se lotimo precej težje naloge, pri kateri pa nimamo opravka s funkcijo ene spremenljivke, temveč s tako imenovanim *funkcionalom*. V svojem izvornem pomenu je funkcional “*funkcija funkcij*”. Kot osnovni primer si oglejmo funkcional J

$$J = \int_a^b F(\tilde{u}, \tilde{u}', x) dx, \quad (6.15)$$

kjer so $\tilde{u}(x)$ in $\tilde{u}'(x)$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije na intervalu $[a, b]$, F pa je znana zvezna in zvezno odvedljiva funkcija argumentov $\tilde{u}(x)$, $\tilde{u}'(x)$, x za vse $x \in [a, b]$ (slika 6.3). Razen tega za funkcije $\tilde{u}(x)$ zahtevamo, da na robovih intervala zavzamejo predpisane vrednosti

$$\tilde{u}(a) = u_a \quad \text{in} \quad \tilde{u}(b) = u_b. \quad (6.16)$$

Variacijski problem je zastavljen takole: med vsemi funkcijami $\tilde{u}(x)$, ki zadoščajo pogojem zveznosti in robnima pogoje (6.16), poiščimo tisto posebno funkcijo $u(x)$, pri kateri doseže funkcional (6.15) ekstremno vrednost. To funkcijo imenujemo *ekstremala*.



Slika 6.3

Podobno kot pri funkciji ene spremenljivke se tudi tokrat omejimo na zadosti majhno okolico ekstremale. To z drugimi besedami pomeni, da iščemo ekstremalo med funkcijami, ki zadoščajo neenačbi

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| < h \quad (6.17)$$

za vse $x \in [a, b]$, pri čemer je h poljubno, dovolj majhno pozitivno število. Funkcije $\tilde{u}(x)$, ki zadoščajo pogojem zveznosti, robnima pogoje (6.16) in neenačbi (6.17), imenujemo *dopustne* ali *poskusne funkcije* (slika 6.3).

Tudi definicija ekstrema funkcionala je podobna kot pri funkciji ene spremenljivke: funkcional ima pri funkciji $u(x)$ lokalni minimum, če za njegovo spremembo ΔJ velja

$$\Delta J = J(\tilde{u}) - J(u) > 0 \quad (6.18)$$

za katerokoli izmed dopustnih funkcij \tilde{u} . Podobno definiramo lokalni maksimum, če je $\Delta J < 0$ pri vseh dopustnih funkcijah \tilde{u} . V mehaniki imamo običajno opraviti z variacijskimi problemi, pri katerih iščemo lokalne minimume funkcionalov, zato se v nadaljevanju ukvarjamo le z iskanjem takih funkcij, ki dani funkcional minimizirajo.

Kako poiskati ekstremalo $u(x)$, ki minimizira funkcional J ? Lahko bi, na primer, izbirali različne funkcije \tilde{u} , izračunali vrednost funkcionala za vsako od njih, tabelirali dobljene vrednosti in ugotovili, pri kateri izbiri bi bila vrednost funkcionala najmanjša. Taka pot bi bila seveda zelo zamudna in nezanesljiva. Izkaže se, da je problem mogoče rešiti na neprimerno elegantnejši način.

Poljubno izmed dopustnih funkcij \tilde{u} lahko zapišemo kot linearno kombinacijo ekstremale u in neke dodatne funkcije η

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon\eta(x). \quad (6.19)$$

Pri tem je $\eta(x)$ poljubna zvezna in dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$, ki na robovih intervala zavzame vrednost nič

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \quad (6.20)$$

Tedaj je tudi

$$\tilde{u}'(x) = u'(x) + \varepsilon\eta'(x). \quad (6.21)$$

Tako dobljena funkcija \tilde{u} pripada poljubno majhni okolici $h > 0$, če je le funkcija $\eta(x)$ na intervalu $[a, b]$ omejena tako, da velja neenačba $|\varepsilon\eta| < h$ za vse $x \in [a, b]$. Kakor vidimo, funkcija $\eta(x)$ določa obliko poskusne funkcije $\tilde{u}(x)$, konstanta ε pa njeno "oddaljenost" od ekstremale. Pri katerikoli izbiri oblikovne funkcije $\eta(x)$ dobimo ekstremalo obravnavanega variacijskega problema tako, da vzamemo $\varepsilon = 0$

$$u = \tilde{u}|_{\varepsilon=0}. \quad (6.22)$$

Ob upoštevanju enačb (6.15), (6.19) in (6.21) lahko pišemo

$$J = J(\tilde{u}) = J(u + \varepsilon\eta) = \int_a^b F(u + \varepsilon\eta, \tilde{u}' + \varepsilon\eta', x) dx. \quad (6.23)$$

Pri izbrani obliki oblikovne funkcije $\eta(x)$ je torej vrednost funkcionala J odvisna le od amplitude ε

$$J(\tilde{u}) = J(\varepsilon) \quad \rightarrow \quad J(u) = J|_{\varepsilon=0} \quad (6.24)$$

in ob upoštevanju enačbe (6.18) lahko pišemo

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J|_{\varepsilon=0}. \quad (6.25)$$

Tako smo variacijski problem prevedli na problem določitve lokalnega ekstrema funkcije ene spremenljivke, kakršnega smo obravnavali v prejšnjem razdelku. Tako kot v prejšnjem razdelku razvijemo funkcional $J(\varepsilon)$ v Taylorjevo vrsto okrog vrednosti $\varepsilon = 0$

$$J(\varepsilon) = J|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2J}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left. \frac{d^3J}{d\varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0} + \dots \quad (6.26)$$

Enačba (6.25) je sedaj

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\varepsilon) - J|_{\varepsilon=0} \\ &= \varepsilon \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2J}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left. \frac{d^3J}{d\varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0} + \dots \end{aligned} \quad (6.27)$$

S podobnim sklepanjem kot pri funkciji ene spremenljivke lahko kot potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema funkcionala vpeljemo zahtevo, da je koeficient pri ε enak nič

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (6.28)$$

Pravimo, da ima funkcional J tedaj, ko je izpolnjen pogoj (6.28), *stacionarno vrednost*. Ker smo pogoj (6.28) zapisali pri vrednosti

$\varepsilon = 0$, smo s tem izmed vseh dopustnih funkcij \tilde{u} izbrali ravno ekstremalo $u = \tilde{u}(\varepsilon = 0)$. Zato lahko pogoj (6.28) za stacionarno vrednost funkcionala vzamemo kot izhodišče za določitev ekstremale u . Upoštevajoč enačbo (6.15) lahko funkcional J odvajamo po parametru ε in dobimo

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(\tilde{u}, \tilde{u}', x) dx \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \varepsilon} \right) dx \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Integral v gornji enačbi moramo izvrednotiti pri vrednosti $\varepsilon = 0$. Enačbi (6.19) in (6.21) kažeta, da je tedaj

$$\varepsilon = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{u} = u & \tilde{u}' = u' \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varepsilon} = \eta & \text{in} \quad \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \varepsilon} = \eta'. \end{cases} \quad (6.30)$$

Enačbo (6.29) lahko sedaj zapišemo takole

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u'} \eta' \right) dx = 0. \quad (6.31)$$

Drugi člen integranda integriramo po delih

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'} \eta' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \eta dx \quad (6.32)$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{\partial F}{\partial u'} \right|_{x=b} \eta(b) - \left. \frac{\partial F}{\partial u'} \right|_{x=a} \eta(a) + \\ &+ \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \eta dx = 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ob upoštevanju lastnosti (6.20) se enačba (6.33) poenostavi

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (6.34)$$

Ker je $\eta(x)$ poljubna zvezna funkcija na $[a, b]$, lahko ob upoštevanju osnovnega izreka variacijskega računa ugotovimo, da je pogoj (6.34) izpolnjen le tedaj, če je izraz v oglatem oklepaju enak nič povsod na $[a, b]$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0. \quad (6.35)$$

To je znana *Euler–Lagrangeva enačba*. V splošnem gre za navadno diferencialno enačbo drugega reda. Ker je $F = F[u(x), u'(x), x]$, jo namreč v razviti obliki zapišemo takole

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial x} - \frac{du}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u} - \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u'} = 0. \quad (6.36)$$

Rešitve u dobljene enačbe so ekstremale obravnavanega variacijskega problema. Kakor vemo, vsebuje splošna rešitev diferencialne enačbe drugega reda dve integracijski konstanti

$$u = u(x, C_1, C_2), \quad (6.37)$$

ki ju določimo iz pogojev (6.16). Variacijski problem smo torej prevedli na reševanje navadne diferencialne enačbe drugega reda ob začetnih pogojih (6.16), kar je v matematičnem pogledu razmeroma preprosta naloga.

Naravni robni pogoji

Zaradi boljšega razumevanja in kasnejše rabe se za trenutek vrnimo k enačbi (6.33) in vzemimo, da vrednosti iskane funkcije u in s tem tudi oblikovne funkcije η v krajiščih intervala niso predpisane. To pomeni, da lahko funkcija η v točkah $x = a$ in $x = b$ zavzame poljubni vrednosti $\eta(a) = \eta_a$ in $\eta(b) = \eta_b$, če je le $|\varepsilon \eta_a| < h$ in $|\varepsilon \eta_b| < h$. Ker sta η_a in

η_b poljubni, lahko izberemo $\eta_a = 0$ in $\eta_b = 0$ in kot potreben pogoj za nastop ekstrema dobimo že znano Euler–Lagrangevo enačbo (6.35). Enačba (6.33) je tedaj

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u'} \right|_{x=b} \eta_b - \left. \frac{\partial F}{\partial u'} \right|_{x=a} \eta_a = 0 \quad (6.38)$$

in mora biti izpolnjena pri poljubni izbiri robnih vrednosti η_a oziroma η_b . Če, na primer, izberemo $\eta_a \neq 0$ in $\eta_b = 0$, dobimo pogoj

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u'} \right|_{x=a} = 0, \quad (6.39)$$

če izberemo $\eta_a = 0$ in $\eta_b \neq 0$, pa iz enačbe (6.38) sledi

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u'} \right|_{x=b} = 0. \quad (6.40)$$

Pogoja (6.39) in (6.40), ki morata biti izpolnjena, če vrednosti iskane funkcije u v krajiščih intervala niso predpisane, imenujemo *naravna robna pogoja*. Pomen naravnih robnih pogojev bomo bolj podrobno spoznali pri praktični uporabi variacijskih principov v konstrukcijski mehaniki.

Funkcionalni z več neodvisnimi funkcijami

Kakor je bilo omenjeno na začetku, smo v tem razdelku obravnavali najenostavnejši variacijski problem, pri katerem je bila vrednost funkcionala odvisna od ene same neznane funkcije $u(x)$ in njenega prvega odvoda $u'(x)$. V mehaniki imamo pogosto opraviti s funkcionali, v katerih nastopa več funkcij pa tudi njihovi višji odvodi. Na kratko si najprej oglejmo primer, da je funkcional odvisen od n funkcij $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$ in njihovih prvih odvodov $\tilde{u}_1', \tilde{u}_2', \dots, \tilde{u}_n'$

$$J = \int_a^b F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n, \tilde{u}_1', \tilde{u}_2', \dots, \tilde{u}_n', x) dx, \quad (6.41)$$

V tem primeru sestavljajo množico dopustnih oziroma poskusnih funkcij vse zvezno odvedljive n -terice funkcij $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$, ki v krajiščih intervala zavzamejo predpisane vrednosti

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(a) &= u_a^{(1)}, & \tilde{u}_2(a) &= u_a^{(2)}, & \dots & \tilde{u}_n(a) &= u_a^{(n)} \\ \tilde{u}_1(b) &= u_b^{(1)}, & \tilde{u}_2(b) &= u_b^{(2)}, & \dots & \tilde{u}_n(b) &= u_b^{(n)}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

V tem primeru pravimo, da ima funkcional J pri n -terici funkcij u_1, u_2, \dots, u_n lokalni minimum v okolici h , če obstoji tako pozitivno število h , da velja

$$J(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n) - J(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq 0 \quad (6.43)$$

za vse n -terice $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$, ki ustrezajo pogojem

$$|\tilde{u}_1 - u_1| < h, \quad |\tilde{u}_2 - u_2| < h, \quad \dots \quad |\tilde{u}_n - u_n| < h \quad (6.44)$$

pri vseh $x \in [a, b]$.

Oglejmo si funkcional $J(\tilde{u}_1, u_2, \dots, u_n)$. Ker funkcije u_2, \dots, u_n že pripadajo n -terici, pri kateri ima funkcional J lokalni ekstrem, je jasno, da mora biti $\tilde{u}_1 = u_1$, da bo imel funkcional res lokalni ekstrem. Pogoj, ki ga mora v ta namen izpolnjevati funkcija $u_1(x)$, smo izpeljali pri osnovnem primeru variacijskega računa in ga imenovali Euler- Lagrangeva diferencialna enačba

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_1'} \right) = 0. \quad (6.45)$$

Na podoben način izpeljemo še preostalih $n - 1$ enačb za funkcije u_2, u_3, \dots, u_n . Tako skupaj s prvo dobimo sistem n diferencialnih enačb za funkcije u_1, u_2, \dots, u_n , pri katerih ima funkcional J lokalni

ekstrem

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_1'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_2'} \right) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial u_n} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_n'} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Problem ekstremizacije funkcionala, odvisnega od n -terice funkcij $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$, smo torej prevedli na reševanje sistema n diferencialnih enačb drugega reda. V splošni rešitvi nastopa $2n$ integracijskih konstant, ki jih določimo tako, da so izpolnjeni pogoji (6.42).

Funkcionalni z višjimi odvodi

Kakor smo omenili, v funkcionalih razen prvega pogosto nastopajo tudi višji odvodi iskanih funkcij. Kot primer si oglejmo funkcional, ki vsebuje prvi, drugi in tretji odvod

$$J = \int_a^b F(\tilde{u}, \tilde{u}', \tilde{u}'', \tilde{u}''', x) dx, \tag{6.47}$$

Kakor v osnovnem primeru se tudi tokrat določitve ekstremale $u(x)$ lotimo tako, da vpeljemo enoparametrično družino poskusnih funkcij $\tilde{u}(x)$

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon \eta(x), \tag{6.48}$$

le da je tokrat $\eta(x)$ poljubna zvezna in štirikrat zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$. Njeni odvodi so

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(x) &= u'(x) + \varepsilon \eta'(x) \\ \tilde{u}''(x) &= u''(x) + \varepsilon \eta''(x) \\ \tilde{u}'''(x) &= u'''(x) + \varepsilon \eta'''(x). \end{aligned} \tag{6.49}$$

Z enakim razmislekom kakor prej pridemo do potrebnega pogoja za nastop ekstrema funkcionala J

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(\tilde{u}, \tilde{u}', \tilde{u}'', \tilde{u}''', x) dx \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (6.50)$$

Od tod sledi

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u'} \eta' + \frac{\partial F}{\partial u''} \eta'' + \frac{\partial F}{\partial u'''} \eta''' \right) dx = 0. \quad (6.51)$$

Člene z odvodi integriramo po delih

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'} \eta' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \eta dx \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u''} \eta'' dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \eta' \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \eta' dx = \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \eta' \right]_a^b - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \eta \right]_a^b + \\ &+ \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \eta dx \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'''} \eta''' dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial u'''} \eta'' \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \eta'' dx = \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial u'''} \eta'' \right]_a^b - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \eta' \right]_a^b + \\ &+ \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \eta' dx = \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial u'''} \eta'' \right]_a^b - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \eta' \right]_a^b + \\ &+ \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \eta dx \end{aligned} \quad (6.54)$$

Enačba (6.51) preide s tem v naslednjo obliko

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \right\} \eta \right]_a^b + \\ & \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial u''} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \right\} \eta' \right]_a^b + \left[\frac{\partial F}{\partial u'''} \eta'' \right]_a^b + \\ & \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \right] \eta \, dx = 0. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Ne glede na to, ali so vrednosti funkcije u v krajiščih intervala $[a, b]$ predpisane ali ne, lahko kot eno od možnih izbir robnih vrednosti oblikovne funkcije vzamemo, da so vrednosti funkcije η in njenih odvodov v krajiščih $x = a$ in $x = b$ vse enake nič

$$\begin{aligned} \eta(a) = \eta'(a) = \eta''(a) = 0 \\ \eta(b) = \eta'(b) = \eta''(b) = 0. \end{aligned} \tag{6.56}$$

Kakor vidimo, mora biti tedaj integral v enačbi (6.55) enak nič in iz osnovnega izreka variacijskega računa sledi Euler-Lagrangeva enačba obravnavanega variacijskega problema

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) = 0. \tag{6.57}$$

Opisana izbira robnih vrednosti oblikovne funkcije η dejansko pomeni, da so v krajiščih intervala predpisane vrednosti iskane funkcije $u(x)$ in njenih prvih in drugih odvodov. Vsota preostalih členov v enačbi (6.55) pa mora biti enaka nič tudi v primeru, da vrednosti u , u' in u'' in s tem tudi η , η' in η'' v krajiščih intervala niso predpisane. Kakor smo videli v osnovnem primeru, morajo biti tedaj v točkah $x = a$ in $x = b$ izpolnjeni naravni robni pogoji. To pomeni, da morajo biti v krajiščih enaki nič izrazi, s katerimi so v enačbi (6.55) pomnožene

krajiščne vrednosti oblikovne funkcije in njenih odvodov. Pogoji (6.55) za ekstrem funkcionala lahko torej v celoti izpolnimo na enega od dveh možnih načinov, in sicer tako, da je v krajiščih $x = a$ oziroma $x = b$

$$\text{predpisana vrednost } u \quad \text{ali} \quad \frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) = 0$$

$$\text{predpisana vrednost } u' \quad \text{ali} \quad \frac{\partial F}{\partial u''} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) = 0$$

$$\text{predpisana vrednost } u'' \quad \text{ali} \quad \frac{\partial F}{\partial u'''} = 0.$$

Euler-Lagrangevo enačbo (6.35), ki smo jo izpeljali kot potreben pogoj za ekstrem funkcionala, v katerem nastopajo prvi, drugi in tretji odvodi iskane funkcije u , zlahka posplošimo za primer, da v funkcionalu nastopa prvih p odvodov funkcije u . Euler-Lagrangeva enačba funkcionala

$$J = \int_a^b F(\tilde{u}, \tilde{u}', \tilde{u}'', \dots, \tilde{u}^{(p)}, x) dx \quad (6.58)$$

je tako

$$\sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{\partial F}{\partial u^{(i)}} \right) = 0. \quad (6.59)$$

Upošteva je dosedanje ugotovitve lahko na kratko zapišemo tudi Euler-Lagrangeve enačbe za primer, da je funkcional odvisen od n funkcij in njihovih prvih p odvodov

$$\sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{\partial F}{\partial u_j^{(i)}} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.60)$$

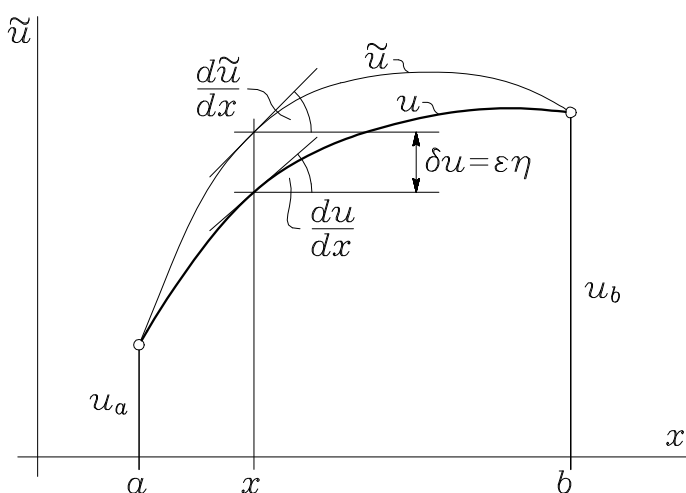
Variacije. Operator delta

V tem poglavju ves čas govorimo o variacijskih problemih, pojma variacije pa doslej še nismo podrobneje opredelili. Vendar že ime pove,

da gre pri variacijah za majhne spremembe količin. Tako smo ekstremalo funkcionala iskali med dopustnimi oziroma poskusnimi funkcijami, za katere smo vzeli, da se le malo razlikujejo (variirajo) od ekstremale. V enačbi (6.19) označimo razliko $\varepsilon\eta(x)$ med poskusno funkcijo in ekstremalo z δu in jo imenujemo *variacija iskane funkcije u*

$$\delta u = \delta [u(x)] = \varepsilon\eta(x) = \tilde{u}(x) - u(x). \quad (6.61)$$

Poudarili smo, da gre za majhno spremembo funkcije u pri konstantni vrednosti neodvisne spremenljivke x (slika 6.4).



Slika 6.4

Variacija δu torej ni povezana s prirastkom neodvisne spremenljivke dx . Glede na različne poskusne funkcije \tilde{u} ima lahko iskana funkcija u v isti točki x različne variacije δu . Z oznako δ smo vpeljali tako imenovani *operator delta*, ki iskani funkciji $u(x)$ v točki $x = konst.$ priredi variacijo $\delta u(x)$. Podobno definiramo variacijo $\delta u'$ prvega odvoda funkcije u kot razliko

$$\delta u' = \delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d\tilde{u}}{dx} - \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (\tilde{u} - u). \quad (6.62)$$

Ob upoštevanju definicije (6.61) sledi pomembna zveza

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}, \quad (6.63)$$

ki pove, da je variacija prvega odvoda enaka prvemu odvodu variacije iskane funkcije pri $x = konst.$ Pravimo, da je operator δ komutativen z diferencialnim operatorjem (d/dx) . Ugotovitev lahko smiselno uporabimo tudi pri višjih odvodih. Z obratnim sklepanjem pa lahko brez posebnega dokaza zapišemo zakon komutativnosti v integralni obliki, na primer

$$\delta \int_a^b u \, dx = \int_a^b \delta u \, dx. \quad (6.64)$$

Da bi podrobneje opredelili pojem *variacije funkcionala*, se vrnimo k enačbi (6.27), s katero smo zapisali spremembo vrednosti funkcionala, če ga izračunamo pri poljubni od poskusnih funkcij \tilde{u} glede na ekstremno vrednost, ki jo funkcional doseže pri ekstremali u

$$\Delta J = \varepsilon \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2 J}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left. \frac{d^3 J}{d\varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0} + \dots \quad (6.65)$$

Člene na desni strani enačbe (6.65) po vrsti imenujemo *prva*, *druga*, *tretja*, ... *variacija funkcionala* J in jih izrazimo z operatorjem δ

$$\delta J = \varepsilon \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \delta^2 J = \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2 J}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \delta^3 J = \frac{\varepsilon^3}{3!} \left. \frac{d^3 J}{d\varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0}, \dots \quad (6.66)$$

Enačba (6.65) se s tem glasi

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \delta^3 J + \dots, \quad (6.67)$$

pogoj (6.28) za ekstrem funkcionala pa lahko sedaj ob upoštevanju prve od enačb (6.66) zapišemo takole

$$\delta J = \varepsilon \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \varepsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial u'} \varepsilon \eta' \right) dx = 0. \quad (6.68)$$

Pri tem smo upoštevali, da je ε poljubna od nič različna vrednost. Zaradi enačbe (6.61) je dalje

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right) dx = 0. \quad (6.69)$$

Izraz v oklepaju pod integralom proglasimo za *prvo variacijo* funkcije F

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'. \quad (6.70)$$

Upoštevajoč enačbo (6.15) preide pogoj za ekstrem v naslednjo preprosto obliko

$$\delta J = \delta \int_a^b F dx = \int_a^b \delta F dx = 0, \quad (6.71)$$

ki pokaže, da je mogoče pravilo komutativnosti (6.64) posplošiti tudi na variacije funkcionalov.

Enačbe (6.68) do (6.71) nas pripeljejo do novega pogleda na pogoje za ekstremizacijo funkcionala. Enačba (6.68) pove, da ima lahko funkcional J ekstrem le pri taki izbiri funkcije u , da je njegova *prva variacija* δJ enaka nič. Pravimo, da ima tedaj funkcional stacionarno vrednost. Nedvoumno je definiran tudi pojem *prva variacija*: to je *linearni del spremembe vrednosti funkcionala pri poljubni dopustni funkciji \tilde{u} glede na vrednost pri ekstremali u* . Spomnimo se, da je zahteva $\delta J = 0$ le potreben pogoj za ekstrem. Naravo ekstrema (ali gre za minimum ali maksimum) določa druga ali višje variacije. Enačbe (6.69) do (6.71) pokažejo, kako izračunamo prvo variacijo funkcionala: po enakem pravilu kot popolni (totalni) diferencial izračunamo prvo variacijo δF podintegralske funkcije F in jo integriramo na intervalu $[a, b]$. Pri tem se moramo zavedati pomenske razlike med popolnim diferencialom in variacijo. Popolni diferencial pomeni spremembo funkcije več spremenljivk, če se neodvisne spremenljivke spremenijo za poljubne infinitezimalne vrednosti. Popolni diferencial df funkcije $f(x, y, z)$ je tako

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (6.72)$$

Pomen prve variacije δF funkcije F pa si oglejmo na nekoliko bolj splošnem primeru, ko je $F = F(u, v, u', v', u'', v'', x)$. Če pri $x = konst.$ variiramo funkcije u, v, u', v', u'', v'' za $\delta u, \delta v, \delta u', \delta v', \delta u'', \delta v''$, dobimo

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' . \quad (6.73)$$

Prva variacija δF je torej sprememba funkcije F pri poljubnih neodvisnih variacijah funkcij, ki jo določajo, in sicer pri konstantni vrednosti neodvisne spremenljivke x .

Zapis prve variacije lahko še nadalje posplošimo, če vzamemo, da je funkcija F podana v odvisnosti od n parametrov p_i , pri čemer so p_i funkcije koordinat in njihovi odvodi, lahko pa tudi točkovne vrednosti teh funkcij in njihovih odvodov. Tedaj je

$$\delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i . \quad (6.74)$$

6.3 Energijske metode. Osnovni pojmi

Da bi lažje razumeli razmeroma zahtevne izpeljave energijskih in variacijskih principov v primeru splošnega prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja, se bomo z nastopajočimi pojmi in zapisi osnovnih enačb najprej seznanili na preprostem enoosnem primeru.

Fizikalna definicija mehanskega dela

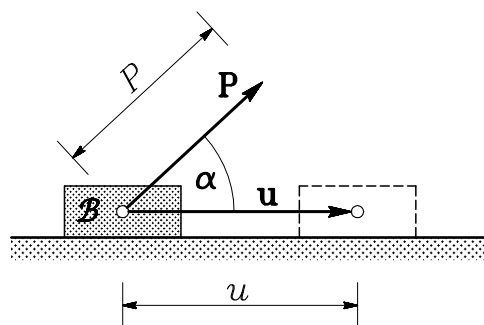
Spomnimo se, kako je mehansko delo definirano v elementarni fiziki. Če na trdno telo \mathcal{B} deluje konstantna sila \mathbf{P} in se pri tem telo premakne v novo lego tako, kakor to določa vektor pomika \mathbf{u} (slika 6.5), je opravljeno mehansko delo D določeno s skalarnim produktom

$$D = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = P u \cos \alpha . \quad (6.75)$$

Če na telo deluje še konstantna dvojica \mathbf{M} in telo razen translatorsnega pomika \mathbf{u} doživi tudi zasuk ω , je mehansko delo določeno z vsoto

$$D = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \omega. \quad (6.76)$$

Pri tem smo poudarili, da sta sila \mathbf{P} in dvojica \mathbf{M} konstantna vektorja, torej se med premikom in zasukom telesa ne spreminjata ne po velikosti ne po smeri.



Slika 6.5

Z drugimi besedami to pomeni, da sta sila \mathbf{P} in dvojica \mathbf{M} neodvisni od pomika \mathbf{u} in zasuk ω . Ugotovitev seveda velja tudi v obratni smeri: če sta pomik \mathbf{u} in zasuk ω neodvisna od sile \mathbf{P} in dvojice \mathbf{M} , je opravljeno mehansko delo določeno z enačbo (6.76).

Deformacijsko delo (deformacijska energija)

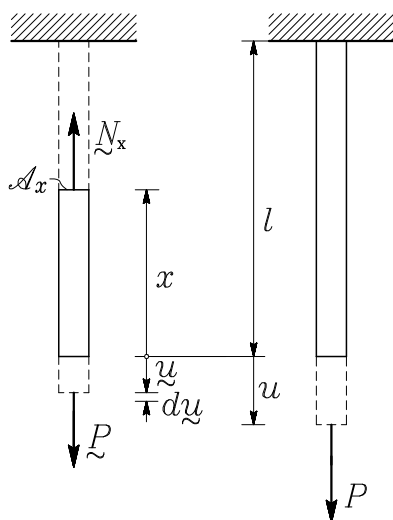
V mehaniki trdnih teles je bolj običajno, da se deformacije telesa razvijajo v odvisnosti od delujoče zunanje obtežbe. Kot zgled določimo mehansko delo, ki ga opravi natezna vzdolžna sila \underline{P} na koncu enakomerno debele palice med tem, ko se palica iz začetnega nedeformiranega stanja podaljša za $\Delta l = u$ (slika 6.6). Začetna dolžina palice je l , ploščina njenega prečnega prereza pa je A_x . Vzemimo še, da je palica izdelana iz linearno elastičnega materiala z modulom elastičnosti E in da so deformacije dovolj majhne, da lahko uporabimo enačbe elementarne teorije linijskega nosilca, kakršne smo izpeljali v 5. poglavju.

Kot izhodišče vzemimo, da je poljuben del palice v ravnotežju. Edina notranja sila v prerezu \mathcal{A}_x je osna sila \underline{N}_x , ki je v ravnotežnem stanju po velikosti enaka obtežbi \underline{P} in je očitno konstantna po celotni dolžini palice

$$\underline{N}_x = \underline{P}. \quad (6.77)$$

Tedaj je pomik u na koncu palice enak spremembi dolžine palice $\underline{\Delta}l$ in je premosorazmeren delujoči navpični sili \underline{P}

$$\underline{u} = \underline{\Delta}l = \frac{l}{EA_x} \underline{N}_x = \frac{l}{EA_x} \underline{P} \quad \rightarrow \quad u = \frac{l}{EA_x} P. \quad (6.78)$$



Slika 6.6

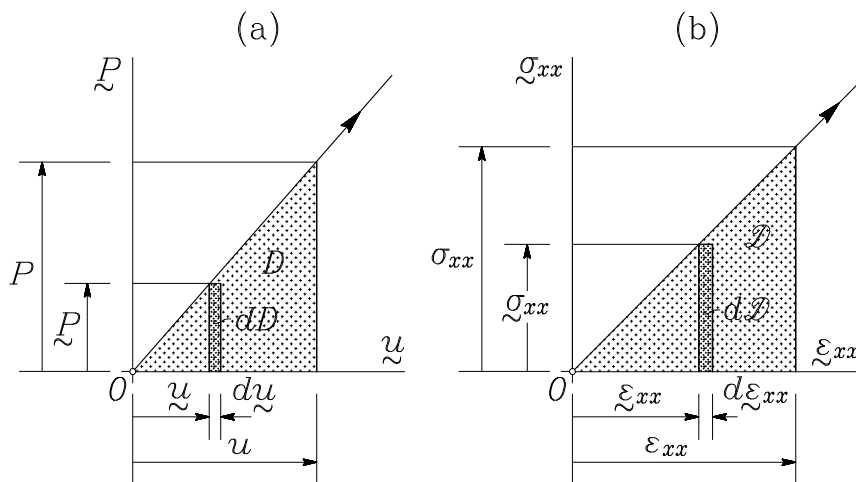
V tem primeru torej delujoča sila \underline{P}

$$\underline{P} = \frac{EA_x}{l} \underline{u} = \underline{P}(\underline{u}) \quad (6.79)$$

ni konstantna, temveč se linearno spreminja od vrednosti 0, ki ustreza nedeformiranemu stanju palice ($\underline{u} = 0$), do vrednosti P , ki ustreza končni deformirani obliki pri pomiku u na koncu palice

$$P = \frac{EA_x}{l} u. \quad (6.80)$$

Zato mehanskega dela, ki ga opravi sila \underline{P} med deformiranjem palice, ne moremo izračunati neposredno z enačbo (6.75). To enačbo pa lahko uporabimo, če trenutno doseženi pomik \underline{y} povečamo za infinitezimalni prirastek $d\underline{y}$ in vzamemo, da je na tem infinitezimalno majhnem pomiku sila \underline{P} konstantna.



Slika 6.7

Prirastek mehanskega dela dD je tedaj (slika 6.7-a)

$$dD = \underline{P} d\underline{y}, \quad (6.81)$$

celotno mehansko delo D na intervalu $0 \leq \underline{y} \leq u$ pa dobimo z integriranjem

$$D = \int_0^u dD = \int_0^u \underline{P} d\underline{y} = \frac{EA_x}{l} \int_0^u \underline{y} d\underline{y} = \frac{EA_x}{2l} u^2. \quad (6.82)$$

Tako smo celotno opravljeno mehansko delo izrazili s končno doseženim pomikom u

$$D = \frac{EA_x}{2l} u^2. \quad (6.83)$$

Ob uporabi enačbe (6.80) dobimo zelo poučen zapis

$$D = \frac{1}{2} P u, \quad (6.84)$$

ki pove, da je mehansko delo, ki ga sila \underline{P} opravi na intervalu $0 \leq \underline{y} \leq u$, po vrednosti enako ploščini trikotnika, ki ga v diagramu $\underline{y} - \underline{P}$ določata končni vrednosti u in P (slika 6.7-a).

V obravnavanem preprostem primeru lahko enačbo (6.84) zapišemo tudi drugače. Ker je $P = \sigma_{xx} A_x$ in $u = \Delta l = \varepsilon_{xx} l$, dobimo

$$D = \frac{1}{2} A_x l \sigma_{xx} \varepsilon_{xx}. \quad (6.85)$$

Pri tem smo s σ_{xx} označili vzdolžno normalno napetost, z ε_{xx} pa specifično spremembo dolžine v vzdolžni smeri. Tako ε_{xx} kakor tudi σ_{xx} sta v našem primeru enakomerni po celotni dolžini palice. Produkt $V = A_x l$ predstavlja prostornino palice, tako da je

$$D = \frac{1}{2} V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx}. \quad (6.86)$$

Če upoštevamo, da je pri linearno elastičnem materialu zveza med deformacijo ε_{xx} in napetostjo σ_{xx} podana s Hookovim zakonom $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$, lahko opravljeno mehansko delo izrazimo v odvisnosti od končne dosežene vzdolžne deformacije

$$D = \frac{1}{2} E V \varepsilon_{xx}^2. \quad (6.87)$$

Rezultat kaže, da se je vloženo mehansko delo porabilo za deformiranje palice. Zato ga pogosto imenujemo tudi *deformacijsko delo*. Dobljeno zvezo lahko razumemo tudi tako, da se je vloženo mehansko delo naložilo v palici v obliki tako imenovane *deformacijske energije*.

Zaradi kasnejših posplošitev je ugodno vpeljati pojem *specifično deformacijsko delo* oziroma *specifična deformacijska energija* \mathcal{D} . To je deformacijska energija, ki se pri deformiranju naloži v enoti prostornine telesa. V našem primeru je specifična deformacijska energija

$$\mathcal{D} = \frac{D}{V} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} = \frac{E}{2} \varepsilon_{xx}^2. \quad (6.88)$$

Kakor vidimo, lahko tudi specifično deformacijsko energijo \mathcal{D} , ki se naloži v enoti prostornine telesa, predstavimo s ploščino trikotnika, ki ga v diagramu $\underline{\sigma}_{xx} - \underline{\varepsilon}_{xx}$ določata končno dosežena deformacija ε_{xx} in pripadajoča napetost σ_{xx} (slika 6.7-b)

Prirastek $d\mathcal{D}$ specifične deformacijske energije pri spremembi deformacije za $d\underline{\varepsilon}_{xx}$ je tedaj

$$d\mathcal{D} = \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = E \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx}, \quad (6.89)$$

celotno specifično deformacijsko energijo, ki se naloži v palici, pa izračunamo z integriranjem tega prirastka v mejah od 0 do ε_{xx}

$$\mathcal{D} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} d\mathcal{D} = E \int_0^{\varepsilon_{xx}} \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = \frac{E}{2} \varepsilon_{xx}^2. \quad (6.90)$$

Celotna deformacijska energija deformirane palice je določena z integralom specifične deformacijske energije po prostornini palice. V splošnem je specifična deformacijska energija funkcija točke, v našem primeru pa je, tako kot napetosti in deformacije, enakomerna po vsej palici. Zato dobimo

$$D = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV = \mathcal{D} \int_{\mathcal{V}} dV = \mathcal{D} V = \frac{1}{2} EV \varepsilon_{xx}^2. \quad (6.91)$$

Rezultat se seveda ujema z enačbo (6.87). Zlahka se prepričamo, da dobimo enak rezultat tudi z integriranjem prirastka celotnega deformacijskega dela dD v mejah od 0 do ε_{xx}

$$dD = V d\mathcal{D} = V \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = EV \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx}, \quad (6.92)$$

$$D = EV \int_0^{\varepsilon_{xx}} \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{2} EV \varepsilon_{xx}^2. \quad (6.93)$$

Iz primerjave enačbe (6.81) z enačbo (6.92) sledi

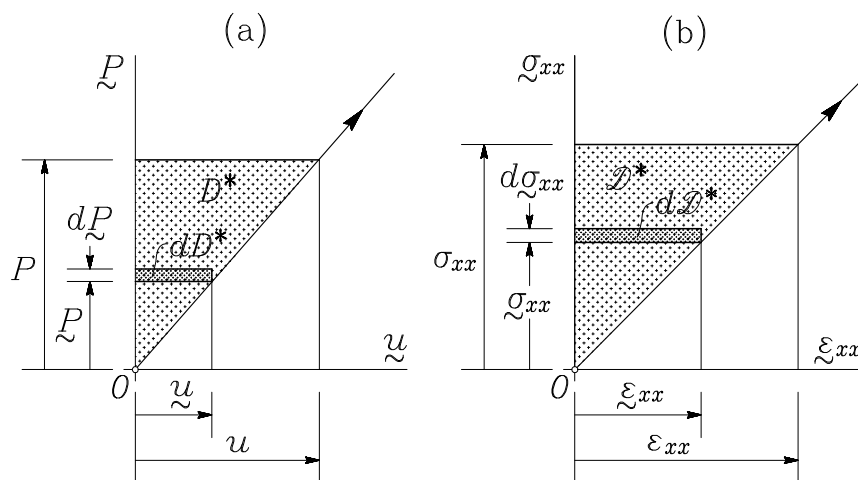
$$dD = \underline{P} d\underline{u} = V \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx}. \quad (6.94)$$

Dobljena enakost pove, da je prirastek mehanskega dela, ki ga zunanja sila \underline{P} opravi na prirastku pomika $d\underline{u}$, enak prirastku deformacijskega dela, ki ga napetosti $\underline{\sigma}_{xx}$ opravijo na prirastkih deformacij $d\underline{\varepsilon}_{xx}$ na območju prostornine palice.

Dopolnilno deformacijsko delo (dopolnilna deformacijska energija)

V dosedanjih izvajanjih smo za neodvisno spremenljivko izbrali pomik \underline{u} oziroma deformacijo $\underline{\varepsilon}_{xx}$. Ker imamo opraviti z linearno elastičnim materialom, dobimo enak rezultat tudi v primeru, da za neodvisno spremenljivko izberemo silo \underline{P} in pomik \underline{u} izrazimo z enačbo (6.78) kot funkcijo te sile

$$\underline{u} = \frac{l}{EA_x} \underline{P} = \underline{u}(\underline{P}). \quad (6.95)$$



Slika 6.8

Če silo \underline{P} povečamo za infinitezimalni prirastek $d\underline{P}$, dobimo pripadajoči prirastek mehanskega dela kot produkt prirastka sile $d\underline{P}$ in konstantnega pomika \underline{u} (slika 6.8-a)

$$dD^* = \underline{u} d\underline{P}. \quad (6.96)$$

Vpeljali smo novo oznako za prirastek mehanskega dela dD^* , da bi ga razlikovali od prirastka dD , ki smo ga dobili kot delo, ki ga sila $d\tilde{P}$ opravi na prirastku pomika \tilde{u} . Celotno mehansko delo D^* na intervalu $0 \leq \tilde{P} \leq P$ dobimo z integriranjem

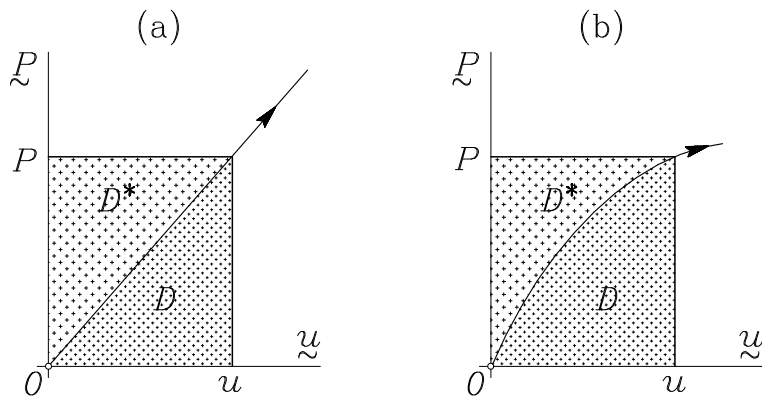
$$D^* = \int_0^P dD^* = \int_0^P \tilde{u} d\tilde{P} = \frac{l}{EA_x} \int_0^P \tilde{P} d\tilde{P}$$

$$D^* = \frac{l}{2EA_x} P^2. \quad (6.97)$$

S slik 6.8-a in 6.9-a lahko razberemo, da delo D^* dopolni deformacijsko delo D do vrednosti, ki bi jo dobili, če bi z enačbo (6.75) izračunali mehansko delo konstantne sile P na neodvisnem pomiku u

$$D + D^* = Pu. \quad (6.98)$$

Zato vrednost D^* imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno deformacijsko delo*. Kakor smo že omenili, je pri linearno elastičnem materialu dopolnilno deformacijsko delo D^* enako deformacijskemu delu D . Pri nelinearno elastičnem materialu pa vrednosti D in D^* nista enaki (slika 6.9-b).



Slika 6.9

Podobno kakor v prejšnjem primeru lahko vpeljemo prirastek specifičnega dopolnilnega deformacijskega dela $d\mathcal{D}^*$

$$d\mathcal{D}^* = \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\sigma}_{xx} = \frac{1}{E} \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\sigma}_{xx} \quad (6.99)$$

ter celotno specifično dopolnilno deformacijsko delo \mathcal{D}^* , ki se v obliki specifične dopolnilne deformacijske energije naloži v palici (slika 6.8-b)

$$\mathcal{D}^* = \int_0^{\sigma_{xx}} d\mathcal{D}^* = \frac{1}{E} \int_0^{\sigma_{xx}} \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\sigma}_{xx} = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2. \quad (6.100)$$

Celotno dopolnilno deformacijsko delo deformirane palice pa je

$$D^* = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D}^* dV = \mathcal{D}^* V = \frac{V}{2E} \sigma_{xx}^2, \quad (6.101)$$

kjer smo spet upoštevali, da je pri zgolj osno obteženi palici specifično dopolnilno deformacijsko delo enakomerno po celotni prostornini palice.

Castiglianov izrek

Z enačbama (6.83) in (6.97) smo za linearno elastično telo izrazili deformacijsko delo D in dopolnilno deformacijsko delo D^* s končno doseženim pomikom u oziroma s končno doseženo silo P

$$D = \frac{EA_x}{2l} u^2 \quad (6.102)$$

$$D^* = \frac{l}{2EA_x} P^2. \quad (6.103)$$

Odvajajmo enačbo (6.102) po pomiku u in enačbo (6.103) po sili P ter upoštevajmo zvezi (6.80) in (6.78); tako dobimo

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \frac{EA_x}{l} u = P \quad (6.104)$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial P} = \frac{l}{EA_x} P = u. \quad (6.105)$$

Rezultata sta v skladu s *Castiglianovim izrekom*, ki pravi, da je pri linearno elastičnem materialu odvod deformacijskega dela po pomiku

enak pripadajoči sili, odvod dopolnilnega deformacijskega dela po sili pa pripadajočemu pomiku[†]. Pri tem je pomembno, da gre za pomik prijemališča sile v smeri njenega delovanja.

Podobno pravilo lahko izpeljemo za odvode specifičnega deformacijskega dela. Brez posebnega truda se namreč lahko prepričamo, da velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{xx}} = E \varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} \quad (6.106)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \varepsilon_{xx} . \quad (6.107)$$

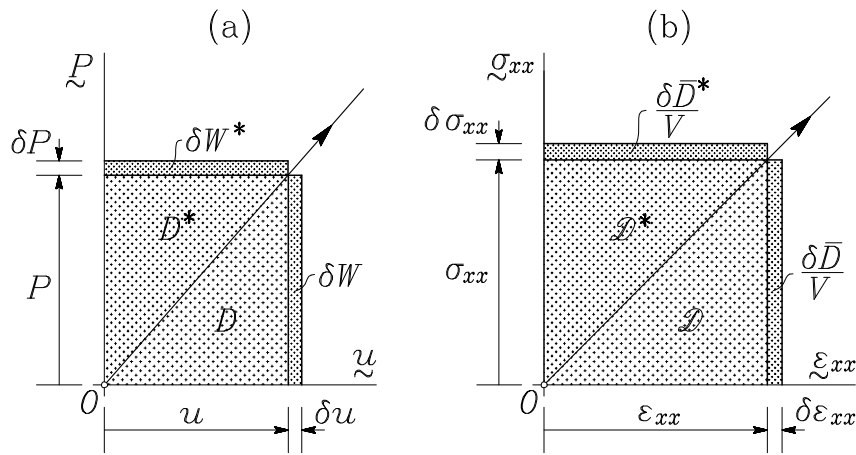
Castiglianov izrek v obliki (6.106) ali (6.107) je pomemben predvsem kot ugotovitev, da pri elastičnem telesu lahko najdemo tako funkcijo deformacije $\mathcal{D}(\varepsilon_{xx})$, da njen odvod po deformaciji ε_{xx} enolično določa ustrezno napetost σ_{xx} , oziroma tako funkcijo napetosti $\mathcal{D}^*(\sigma_{xx})$, da je njen odvod po σ_{xx} enak deformaciji ε_{xx} .

Virtualno delo. Izrek o virtualnih pomikih

V dosedanjih izpeljavah smo imeli opravka z energijskimi količinami, ki imajo razviden fizikalni pomen in jih je mogoče vsaj posredno tudi izmeriti. V nadaljevanju pa bomo vpeljali pojma *virtualno delo* in *dopolnilno virtualno delo*, ki sta v svojem bistvu zgolj formalni matematični količini, vendar ju izračunamo podobno kakor prirastka deformacijskega oziroma dopolnilnega deformacijskega dela.

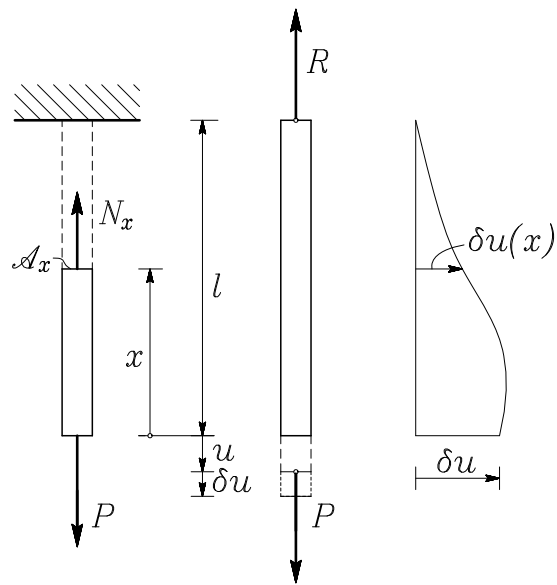
Znova vzemimo, da je opazovana natezna palica v ravnotežju, ko nanjo deluje zunanja sila P . Pomik obteženega prostega konca palice je tedaj $\Delta l = u$. Sedaj pa si zamislimo, da se prosti konec palice premakne še za poljubno, vendar dovolj majhno vrednost δu v smeri delovanja sile P (slika 6.10-a).

[†] Prvi del izreka velja tudi za nelinearno elastično telo, drugi del pa le za linearno elastično telo.



Slika 6.10

V matematičnem pogledu gre za variacijo funkcije $u(x)$ (slika 6.11); to smo poudarili z vpeljavo operatorja δ , ki smo ga spoznali v prejšnjem razdelku.



Slika 6.11

Opozorimo, da gre za namišljen, *virtualen* pomik, ki ni v nikakršni zvezi z dejansko obtežbo P . Zato lahko po vzorcu enačbe (6.81) izračunamo navidezno mehansko delo, ki ga zunanja sila P opravi na virtualnem pomiku δu . Dobljeno količino imenujemo *virtualno delo zunanje sile* in jo označimo z δW

$$\delta W = P \delta u. \quad (6.108)$$

V ravnotežnem stanju palice je sila P uravnotežena z normalno napetostjo σ_{xx} v prečnem prerezu, tako da je $P = A_x \sigma_{xx}$. Virtualni pomik δu pa naj bo z virtualno deformacijo $\delta \varepsilon_{xx}$ povezan s kinematičnim pogojem

$$\delta \varepsilon_{xx} = \frac{\delta \Delta l}{l} = \frac{\delta u}{l}. \quad (6.109)$$

Za virtualni pomik, ki ustreza enačbi (6.109) in kinematičnim robnim pogojem, pravimo, da je *kinematično dopusten* ali *kinematično možen*. Enačbo (6.108) lahko sedaj zapišemo takole

$$\delta W = A_x \sigma_{xx} l \delta \varepsilon_{xx} = V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}. \quad (6.110)$$

Na desni strani enačbe (6.110) je virtualno delo izraženo z napetostmi, torej z notranjo specifično površinsko obtežbo. Tako izraženo virtualno delo imenujemo *virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta \bar{D}$

$$\delta \bar{D} = V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}. \quad (6.111)$$

S primerjavo enačb (6.108), (6.110) in (6.111) dobimo tako imenovani *izrek o virtualnem delu* ali *izrek o virtualnih pomikih*, ki pove, da je v ravnotežnem stanju telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil

$$\delta W = \delta \bar{D}. \quad (6.112)$$

Za praktično delo v mehaniki je bolj koristna naslednja oblika izreka o virtualnih pomikih:

Če je pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil, je telo v ravnotežju.

Izrek o virtualnem delu torej predstavlja drugačen zapis ravnotežnih enačb. Glede na to, da so ravnotežne enačbe v svoji izvorni obliki parcialne diferencialne enačbe, je zapis v obliki izreka o virtualnem delu pogosto znatno bolj ugoden.

Delovanje izreka o virtualnem delu si oglejmo kar na primeru natezne palice, s katero se v tem razdelku že ves čas ukvarjamo (*slika 6.11*). Virtualno delo zunanjih sil je v tem primeru

$$\delta W = P \delta u. \quad (6.113)$$

Pri tem smo upoštevali, da v podpori 0 na palico sicer deluje reakcija R , vendar je njeno virtualno delo enako nič. Virtualni pomiki morajo namreč zadoščati kinematičnim robnim pogojem, zato je $\delta u_0 = 0$.

Virtualno delo notranjih sil izrazimo ob upoštevanju enačbe (6.111) takole

$$\delta \bar{D} = V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} = l A_x \sigma_{xx} \frac{\delta u}{l}. \quad (6.114)$$

Ker je $A_x \sigma_{xx} = N_x$, lahko pišemo

$$\delta \bar{D} = N_x \delta u \quad (6.115)$$

in iz izreka o virtualnem delu sledi

$$\delta W = \delta \bar{D} \quad \rightarrow \quad (P - N_x) \delta u = 0. \quad (6.116)$$

Virtualni pomik δu je poljuben, zato je enačba (6.116) izpolnjena le tedaj, ko velja

$$P - N_x = 0 \quad \rightarrow \quad N_x = P. \quad (6.117)$$

V enačbi (6.117) zlahka prepoznamo ravnotežni pogoj za poljuben del opazovane palice, kar potrjuje ugotovitev, da izrek o virtualnem delu nadomešča ravnotežne pogoje.

Dopolnilno virtualno delo. Izrek o virtualnih silah

Drug pomemben in koristen izrek spoznamo, če prosti konec opazovane palice, ki se je pod vplivom sile P premaknil v vzdolžni smeri za u , obtežimo z virtualno silo δP (sliki 6.10-a) in 6.12. Virtualna sila je neodvisna od dejanske obtežbe in pomikov, zato lahko po zgledu enačbe (6.96) izračunamo delo δW^* , ki ga ta sila opravi na dejanskem pomiku u . To delo imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo zunanje sile*

$$\delta W^* = u \delta P. \quad (6.118)$$

Tokrat je u dejanski pomik, ki je z dejansko deformacijo ε_{xx} povezan s kinematičnim pogojem $u = l \varepsilon_{xx}$. $\delta \sigma_{xx}$ pa je *statično dopustna* virtualna vzdolžna normalna napetost, kar pomeni, da je napetost $\delta \sigma_{xx}$ povezana z virtualno silo δP z ravnotežnim pogojem

$$\delta \sigma_{xx} = \frac{\delta P}{A_x}. \quad (6.119)$$

S tem lahko dopolnilno virtualno delo zapišemo takole (slika 6.10-b)

$$\delta W^* = l \varepsilon_{xx} A_x \delta \sigma_{xx} = V \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx}. \quad (6.120)$$

Izraz na desni strani enačbe (6.120) imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta \bar{D}^*$

$$\delta \bar{D}^* = V \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx}. \quad (6.121)$$

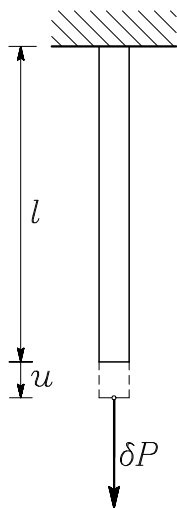
Enakost, ki sledi iz enačb (6.118), (6.120) in (6.121), imenujemo *izrek o dopolnilnem virtualnem delu* oziroma *izrek o virtualnih silah*

$$\delta W^* = \delta \bar{D}^*. \quad (6.122)$$

Glede na potek izpeljave lahko izrek o dopolnilnem virtualnem delu povzamemo takole:

Če je pri statično dopustni virtualni obtežbi izpolnjen izrek o dopolnilnem virtualnem delu, sta dejanska deformacija in dejanski pomik povezana s kinematičnim pogojem.

Uporabo izreka o dopolnilnem virtualnem delu si spet oglejmo na primeru natezne palice (slika 6.12).



Slika 6.12

Ob upoštevanju enačb (6.118) do (6.121) in izreka (6.122) sledi

$$u \delta P = l A_x \varepsilon_{xx} \frac{\delta P}{A_x} \quad (6.123)$$

in po ureditvi

$$(u - l \varepsilon_{xx}) \delta P = 0. \quad (6.124)$$

Ker je δP poljubna virtualna sila, je enačba (6.124) izpolnjena le, če je izraz v oklepaju enak nič. Tedaj velja

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u}{l}, \quad (6.125)$$

kar je dokaz, da dejanski pomik u in vzdolžna deformacija ε_{xx} zadoščata kinematičnemu pogoju obravnavanega preprostega primera. Še bolj koristno ugotovitev ponuja naslednji zapis izreka o dopolnilnem virtualnem delu

$$\delta W^* = u \delta P = \delta \bar{D}^*, \quad (6.126)$$

kjer vzamemo enotsko virtualno silo $\delta P = 1$

$$\delta P = 1 \quad \rightarrow \quad u = \delta \bar{D}^*. \quad (6.127)$$

To pomeni, da je v primeru, ko za virtualno silo izberemo velikost 1, vrednost pripadajočega dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil $\delta \bar{D}^*$ že kar enaka velikosti pomika v prijemališču in v smeri delovanja privzete virtualne sile. Ta ugotovitev ima daljnosežne in zelo ugodne posledice pri vrsti nalog, pri katerih je treba določiti pomike ali zasuke posameznih diskretnih točk konstrukcijskih elementov. Za opazovano palico bi ob upoštevanju znanih enačb nosilca dobili

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N_x}{EA_x} \quad \text{in} \quad \delta \sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x}, \quad (6.128)$$

tako da je

$$u = \delta \bar{D}^* = l A_x \frac{N_x}{EA_x} \frac{\delta N_x}{A_x} \quad (6.129)$$

in po ureditvi

$$u = l \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} = l \frac{N_x(P) \delta N_x (\delta P = 1)}{EA_x}. \quad (6.130)$$

Poudarili smo, da je N_x dejanska osna sila v palici, ki se pojavi zaradi delovanja zunanje obtežbe P , δN_x pa je osna sila, ki pripada enotski virtualni sili $\delta P = 1$. V našem primeru je $N_x = P$ in $\delta N_x = 1$ in iz enačbe (6.130) sledi

$$u = P \frac{l}{EA_x}, \quad (6.131)$$

kar se ujema z enačbo (6.79).

V tem razdelku smo se na preprostem enoosnem primeru na kratko seznanili z najpomembnejšimi pojmi in količinami, ki nastopajo v energijskih metodah. V nadaljevanju pokažemo, kako dosedanje ugotovitve razširimo in uporabimo v splošnih primerih prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja.

6.4 Deformacijska energija elastičnega telesa

V uvodu smo ugotovili, da se mehansko delo, ki ga opravi zunanja obtežba pri deformiranju elastičnega telesa, naloži v telesu kot deformacijska energija. Ta ugotovitev je v skladu s prvim zakonom termodinamike, ki pravi, da je mehansko delo, ki ga na toplotno izoliranem telesu v določenem časovnem intervalu opravijo zunanje sile, enako vsoti sprememb kinetične in notranje energije telesa v tem časovnem intervalu. V primeru, da telo ni toplotno izolirano, se mu notranja energija lahko poveča oziroma zmanjša za vrednost dovedene oziroma odvzete toplote. V nadaljevanju se omejimo na primere, pri katerih telesu niti ne dovajamo niti ne odvajamo toplote. Pri pretežno statičnem načinu obteževanja je razvoj deformacij počasen, zato lahko spremembo kinetične energije zanemarimo. Vzemimo, da je stabilno podprto telo elastično in da je njegova notranja energija v začetnem, nedeformiranem stanju enaka nič. Tedaj se celotno mehansko delo zunanjih sil naloži v telesu kot *deformacijska energija* D , ki po razbremenitvi vrne telo v začetno obliko. Pri neelastičnih telesih se del vložnega mehanskega dela pretvori v toplotno in druge oblike energije, zato po razbremenitvi telo ostane delno nepovratno (plastično) deformirano.

Deformacijsko energijo, ki se naloži v enoti prostornine, imenujemo *specifična deformacijska energija* ali *gostota deformacijske energije* in jo označimo z \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = \frac{dD}{dV}. \quad (6.132)$$

V primeru prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja določimo prirastek specifične deformacijske energije s posplošitvijo enačbe (6.89), ki smo jo izpeljali v prejšnjem razdelku

$$d\mathcal{D} = \sum_i \sum_j \tilde{\sigma}_{ij} d\tilde{\varepsilon}_{ij}. \quad (6.133)$$

Pri elastičnem materialu, kjer je zveza med napetostmi in deformacijami enolična, je prirastek specifične deformacijske energije totalni

diferencial funkcije $\mathcal{D}(\varepsilon_{ij})$.

$$d\mathcal{D} = \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} . \quad (6.134)$$

S primerjavo enačb (6.133) in (6.134) lahko ugotovimo, da pri elastičnem telesu obstoji enolična, zvezno odvedljiva *funkcija stanja* $\mathcal{D}(\varepsilon_{ij})$, za katero velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathcal{G}_{ij} . \quad (6.135)$$

Za ilustracijo zapišimo specifično deformacijsko energijo linearno elastičnega telesa

$$\mathcal{D} = \mu (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 . \quad (6.136)$$

Z odvajanjem funkcije \mathcal{D} se brez težav prepričamo, da so odvodi po deformacijah enaki ustreznim komponentam tenzorja napetosti.

Celotno specifično deformacijsko energijo, ki se nakopiči v telesu med prehodom iz nedeformiranega stanja \mathbf{B} ($\varepsilon_{ij} = 0$) v deformirano stanje \mathbf{B}' , opisano z deformacijami ε_{ij} , določimo z integralom

$$\mathcal{D} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \mathcal{G}_{ij} d\varepsilon_{ij} . \quad (6.137)$$

Ker so deformacije ε_{ij} funkcije koordinat x, y, z , je tudi specifična deformacijska energija funkcija točke

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(x, y, z) . \quad (6.138)$$

Celotno deformacijsko energijo deformiranega telesa sedaj izračunamo tako, da specifično deformacijsko energijo integriramo po območju \mathcal{V} , ki ga telo zavzema v prostoru

$$D = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV = \int_{\mathcal{V}} \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \mathcal{G}_{ij} d\varepsilon_{ij} dV . \quad (6.139)$$

Izračunajmo specifično deformacijsko energijo v poljubni točki linearno elastičnega telesa. Omejimo se na izotermni primer ($\Delta T = 0$), vstavimo prvo od konstitucijskih zvez (3.114) v enačbo (6.137)

$$\mathcal{D} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \left(2\mu \underline{\varepsilon}_{ij} + \lambda \underline{I}_1^\varepsilon \delta_{ij} \right) d\underline{\varepsilon}_{ij} \quad (6.140)$$

in po množenju dobimo

$$\mathcal{D} = 2\mu \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\varepsilon}_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} + \lambda \int_0^{\varepsilon_{ij}} \underline{I}_1^\varepsilon \sum_i \sum_j \delta_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} . \quad (6.141)$$

Iz druge od enačb (3.115) sledi

$$\sum_i \sum_j \delta_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} = d\underline{I}_1^\varepsilon , \quad (6.142)$$

zato lahko drugi člen na desni strani enačbe (6.141) zapišemo v odvisnosti od prve invariante deformacij in po ureditvi dobimo

$$\mathcal{D} = 2\mu \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\varepsilon}_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} + \lambda \int_0^{\underline{I}_1^\varepsilon} \underline{I}_1^\varepsilon d\underline{I}_1^\varepsilon . \quad (6.143)$$

Pri tem je I_1^ε prva deformacijska invariata končnega deformiranega stanja, opisanega z deformacijami ε_{ij} . Po integriranju sledi

$$\mathcal{D} = \mu \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} (I_1^\varepsilon)^2 . \quad (6.144)$$

S preoblikovanjem vsote kvadratov deformacijskih komponent in z upoštevanjem definicij prve in druge invariante deformacijskega tenzorja

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{zx}^2 \\ &= (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 - \\ &\quad 2(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2) \\ &= (I_1^\varepsilon)^2 - 2I_2^\varepsilon \geq 0 \end{aligned} \quad (6.145)$$

lahko enačbo (6.144) zapišemo takole

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} (2\mu + \lambda) (I_1^\varepsilon)^2 - 2\mu I_2^\varepsilon. \quad (6.146)$$

Ugotovitev, da je specifična deformacijska energija invariantna količina, je logična, saj njena vrednost ne more biti odvisna od izbire koordinatnega sistema.

Še enkrat se vrnimo k enačbi (6.144) in jo ob upoštevanju prve od konstitucijskih enačb (3.114) ter definicije (3.115) zapišimo nekoliko drugače

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \left[2\mu \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_i \sum_j (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \delta_{ij}) \varepsilon_{ij} \right] \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Z enačbo (6.139) lahko sedaj izračunamo celotno deformacijsko energijo linearno elastičnega telesa

$$D = \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (6.148)$$

Ko govorimo o deformacijski energiji, ne smemo pozabiti, da je ta pri elastičnem telesu enaka mehanskemu delu, ki je bilo porabljeno pri deformiranju telesa. V nadaljevanju si oglejmo, kolikšen del specifičnega deformacijskega dela je bil porabljen za spremembo prostornine in kolikšen za spremembo oblike elementarnega dela telesa v bližnji okolici obravnavanega delca. V enačbo (6.147) vstavimo zvezi (3.118) in (3.119)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\sigma^H \delta_{ij} + s_{ij}) \left(\frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} + d_{ij} \right) \quad (6.149)$$

in po množenju dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{6} \sigma^H \varepsilon_V \sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij} + \frac{1}{6} \varepsilon_V \sum_i \sum_j s_{ij} \delta_{ij} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sigma^H \sum_i \sum_j d_{ij} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j s_{ij} d_{ij}. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Pri tem je

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3 \\ \sum_i \sum_j s_{ij} \delta_{ij} &= I_1^s = 0 \\ \sum_i \sum_j d_{ij} \delta_{ij} &= I_1^d = 0 \\ \sum_i \sum_j s_{ij} d_{ij} &= 2\mu \sum_i \sum_j d_{ij} d_{ij} = 2\mu (I_1^d)^2 - 4\mu I_2^d = -4\mu I_2^d. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Upoštevali smo, da sta prvi invarianti deviatoričnih delov napetostnega in deformacijskega tenzorja enaki nič ($I_1^s = I_1^d = 0$). Enačba (6.149) se s tem glasi

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sigma^H \varepsilon_V - 2\mu I_2^d \quad (6.152)$$

Kakor vidimo, je celotno specifično deformacijsko delo delca sestavljeno iz dveh delov. Prvi del predstavlja specifično deformacijsko delo, ki ga hidrostatične napetosti opravijo pri specifični spremembi prostornine. Drugi del pa predstavlja specifično deformacijsko delo, ki ga deviatorične napetosti opravijo pri spremembi oblike elementarnega dela telesa. Zato prvega od omenjenih delov imenujemo *hidrostatično specifično deformacijsko delo* \mathcal{D}^H , drugega pa *preoblikovalno specifično deformacijsko delo* \mathcal{D}^P

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}^H &= \frac{1}{2} \sigma^H \varepsilon_V = \frac{K}{2} \varepsilon_V^2 \\ \mathcal{D}^P &= -2\mu I_2^d \end{aligned} \right\} \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^H + \mathcal{D}^P. \quad (6.153)$$

Ob upoštevanju četrte od enačb (6.151) lahko preoblikovalni del specifičnega deformacijskega dela zapišemo tudi v odvisnosti od druge invariante deviatoričnega dela napetostnega tenzorja

$$\mathcal{D}^P = -\frac{1}{2\mu} I_2^s. \quad (6.154)$$

Z I_2^s pa smo v poglavju o pogojih za začetek plastičnega tečenja izrazili Misesov pogoj. Ob upoštevanju zvez (6.153) in (6.154) lahko sedaj Misesovemu pogoju najdemo razvidnejši fizikalni pomen: do začetka plastičnega tečenja pride tedaj, ko preoblikovalni del specifičnega deformacijskega dela doseže določeno, od materiala odvisno vrednost.

6.5 Dopolnilna deformacijska energija elastičnega telesa

V dosedanjem proučevanju energijskih razmer v elastičnem trdnem telesu smo kot neodvisne spremenljivke vpeljali komponente tenzorja majhnih deformacij ε_{ij} in ugotavljali, kolikšna notranja energija se naloži v telesu pri prehodu iz začetnega nedeformiranega stanja v končno deformirano stanje. V tem razdelku uberemo drugo pot in kot neodvisne spremenljivke izberemo komponente napetosti σ_{ij} . Deformacijsko energijo, ki se naloži v elastičnem telesu med tem, ko se napetosti od začetnega neobteženega stanja povečajo do končnega napetostnega stanja, imenujemo *dopolnilna* ali *komplementarna deformacijska energija* in jo za razliko od deformacijske energije D označimo z D^* .

Dopolnilno deformacijsko energijo, ki se naloži v enoti prostornine, imenujemo *specifična dopolnilna deformacijska energija* \mathcal{D}^*

$$\mathcal{D}^* = \frac{dD^*}{dV}. \quad (6.155)$$

Nadaljujemo podobno kot v prejšnjem razdelku in zapišemo prirastek specifične dopolnilne deformacijske energije za primer prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja

$$d\mathcal{D}^* = \sum_i \sum_j \xi_{ij} d\mathcal{G}_{ij}. \quad (6.156)$$

Pri elastičnem materialu, kjer je zveza med napetostmi in deformacijami enolična, je prirastek specifične deformacijske energije totalni diferencial funkcije $\mathcal{D}^*(\sigma_{ij})$.

$$d\mathcal{D}^* = \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} d\underline{\sigma}_{ij} . \quad (6.157)$$

To pomeni, da lahko pri elastičnem telesu najdemo enolično, zvezno odvedljivo funkcija stanja $\mathcal{D}^*(\sigma)$, za katero velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} = \underline{\xi}_{ij} . \quad (6.158)$$

Kot primer navedimo specifično dopolnilno energijo linearno elastične snovi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^* = & \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - \\ & \frac{\nu}{2E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 . \end{aligned} \quad (6.159)$$

Odvodi funkcije \mathcal{D}^* po napetostih so očitno enaki ustreznim komponentam ε_{ij} tenzorja majhnih deformacij.

Specifično dopolnilno deformacijsko energijo, ki se nakopiči v elementarnem delu telesa med prehodom iz neobteženega stanja $\sigma_{ij} = 0$ v končno mehansko stanje, opisano z napetostmi σ_{ij} , določimo z integralom

$$\mathcal{D}^* = \int_0^{\sigma_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\xi}_{ij} d\underline{\sigma}_{ij} , \quad (6.160)$$

celotno dopolnilno deformacijsko energijo obteženega telesa pa izračunamo tako, da specifično dopolnilno deformacijsko energijo integriramo po območju \mathcal{V}

$$D^* = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D}^* dV = \int_{\mathcal{V}} \int_0^{\sigma_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\xi}_{ij} d\underline{\sigma}_{ij} dV . \quad (6.161)$$

Specifično dopolnilno deformacijsko energijo v poljubni točki linearno elastičnega telesa določimo tako, da v enačbo (6.160) vstavimo drugo od konstitucijskih zvez (3.114) pri $\Delta T = 0$ in na podoben način kot v prejšnjem razdelku po krajši izpeljavi dobimo

$$\mathcal{D}^* = \frac{1}{2E} (I_1^\sigma)^2 - \frac{1+\nu}{E} I_2^\sigma. \quad (6.162)$$

Prav tako lahko hitro pokažemo, da je pri linearno elastični snovi specifična dopolnilna deformacijska energija delca enaka njegovi specifični deformacijski energiji, enakost pa velja tudi med celotno dopolnilno deformacijsko energijo in celotno deformacijsko energijo telesa

$$\mathcal{D}^* = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{D}^* = \mathcal{D} \\ D^* = D, \end{cases} \quad (6.163)$$

pri čemer je

$$D^* = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV. \quad (6.164)$$

Izpeljavo enačb (6.162) in (6.163) kakor tudi dokaz enakosti izpeljanih izrazov (6.146) za specifično deformacijsko energijo in (6.162) za njeno dopolnilno vrednost prepuščamo skrbnemu bralcu.

6.6 Posplošene sile in posplošeni pomiki

V enačbi (6.147) smo specifično deformacijsko energijo \mathcal{D} , ki se naloži v enoti prostornine linearno elastičnega telesa, izrazili s končno doseženimi napetostmi in deformacijami. Celotno deformacijsko energijo telesa D izračunamo z integriranjem specifične deformacijske energije po območju, ki ga telo zavzema v prostoru. V nadaljevanju si oglejmo, kako celotno deformacijsko energijo telesa izrazimo neposredno z zunanjo specifično površinsko obtežbo \mathbf{p}_n in specifično prostorninsko obtežbo \mathbf{v} . Nalogo občutno skrajšamo z zapisom nastopajočih izrazov

v vektorski obliki. Pri tem v nadaljevanju uporabljamo skrajšan zapis za skalarni produkt dveh vektorjev ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$). Najprej v vektorski obliki zapišimo enačbo (6.147)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (6.165)$$

Da je zapis pravilen, se hitro prepričamo ob upoštevanju definicij koordinatnih vektorjev napetosti in deformacij

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_k \varepsilon_{ik} \mathbf{e}_k. \quad (6.166)$$

Po vstavitvi v enačbo (6.165) namreč sledi

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \sum_k \varepsilon_{ik} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (6.167)$$

Ker je $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ in $\sum_k \varepsilon_{ik} \delta_{jk} = \varepsilon_{ij}$, dobimo

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \sum_k \varepsilon_{ik} \delta_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (6.168)$$

Celotna deformacijska energija telesa je sedaj

$$D = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i \varepsilon_i dV. \quad (6.169)$$

Upoštevamo, da zunanja obtežba in napetosti zadoščajo ravnotežnim pogojem

$$\mathcal{V} : \quad \sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (6.170)$$

$$\sum_i \mathbf{e}_i \times \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z) \quad (6.171)$$

$$\mathcal{S} : \quad \mathbf{p}_n = \sum_i \sigma_i \mathbf{e}_{ni}, \quad (6.172)$$

pomiki, deformacije in zasuki pa so povezani s kinematično enačbo

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i. \quad (6.173)$$

Ta kinematični pogoj upoštevamo v enačbi (6.169) in dobimo

$$D = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV. \quad (6.174)$$

Prvi integral na desni strani gornje enačbe preoblikujemo v skladu s pravilom za odvod produkta

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dV = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) dV - \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} \mathbf{u} dV, \quad (6.175)$$

v drugem pa zamenjamo vrstni red faktorjev in ob upoštevanju ravnotežnega pogoja (6.171) dobimo

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\omega} \sum_i \mathbf{e}_i \times \boldsymbol{\sigma}_i dV = 0. \quad (6.176)$$

Enačba (6.174) se s tem glasi

$$D = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} \mathbf{u} dV. \quad (6.177)$$

Z Gaussovimi integralskimi izreki

$$\oint_{\mathcal{S}} \sum_i P_i e_{ni} dS = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_i} dV \quad (6.178)$$

prevedemo prvi integral na desni strani enačbe (6.177) na integral po mejni ploskvi \mathcal{S}

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) dV = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) e_{ni} dS = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i e_{ni} \mathbf{u} dS. \quad (6.179)$$

Ob upoštevanju ravnotežnih pogojev (6.170) in (6.172) lahko sedaj enačbo (1.72) zapišemo v naslednji obliki

$$D = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n \mathbf{u} dS + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \mathbf{u} dV. \quad (6.180)$$

Ugotovitev, da lahko celotno mehansko delo, opravljeno pri deformiranju linearno elastičnega telesa, določimo kar po vzorcu, ki smo ga spoznali na enoosnem primeru palice v razdelku **6.3**, je v mehaniki znana kot *Clapeyronov[†] teorem*.

Dobljeno enačbo lahko še nadalje preoblikujemo v priročnejšo obliko za praktično delo, in sicer z naslednjim razmislekom: specifična površinska obtežba $\mathbf{p}_n(x, y, z)$ vključuje vse sile, ki delujejo na mejno ploskev telesa \mathcal{S} . Ta obtežba je na različne načine porazdeljena po površini telesa. Pogosti so primeri, ko je del površinske obtežbe z relativno veliko intenziteto porazdeljen po razmeroma majhnem delu površine telesa. Za tovrstne obtežbe je smiselno vpeljati računski modela točkovne sile ali točkovne dvojice. Celotno obtežbo mejne ploskve lahko torej sestavimo iz določenega števila točkovnih sil \mathbf{P}_J in točkovnih dvojic \mathbf{M}_K ter iz tistega dela površinske obtežbe $\underline{\mathbf{p}}_n$, ki je porazdeljen po večjih delih površine in ga torej ni mogoče z dovoljšnjo natančnostjo nadomestiti s točkovnimi silami in dvojicami.

$$\underline{\mathbf{p}}_n \cup \mathbf{P}_J \cup \mathbf{M}_K = \mathbf{p}_n \quad (J, K = 1, 2, \dots). \quad (6.181)$$

Ob tem še enkrat spomnimo, da smemo točkovna računski modela zunanje obtežbe vpeljati le tedaj, kadar dejanska porazdeljena površinska obtežba deluje na omejenem območju zunanje mejne ploskve, ki je zelo majhno v primerjavi s siceršnjo velikostjo te ploskve.

Z oznako \underline{D} za tisti del deformacijskega dela, ki ga opravita porazdeljena specifična površinska obtežba $\underline{\mathbf{p}}_n$ in specifična prostorninska obtežba \mathbf{v}

[†] Benoit Emile Clapeyron, francoski inženir in fizik, 1799-1864.

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{S}} \underline{\mathbf{p}}_n \cdot \mathbf{u} \, dS + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, dV, \quad (6.182)$$

lahko celotno deformacijsko energijo telesa D zapišemo na naslednji način

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \sum_J \mathbf{P}_J \cdot \mathbf{u}_J + \frac{1}{2} \sum_K \mathbf{M}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_K. \quad (6.183)$$

Pri tem sta torej \mathbf{P}_J in \mathbf{M}_K točkovna sila in točkovna dvojica, ki delujeta v točkah J in K , z \mathbf{u}_J in $\boldsymbol{\omega}_K$ pa smo označili vektor pomika in vektor zasuka istih točk J in K . V kartezijskem koordinatnem sistemu z bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ jih zapišemo z vsotami

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_J &= \sum_i P_i^J \mathbf{e}_i & \mathbf{M}_K &= \sum_i M_i^K \mathbf{e}_i \\ \mathbf{u}_J &= \sum_i u_i^J \mathbf{e}_i & \boldsymbol{\omega}_K &= \sum_i \omega_i^K \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (i = x, y, z; J, K = 1, 2, \dots). \quad (6.184)$$

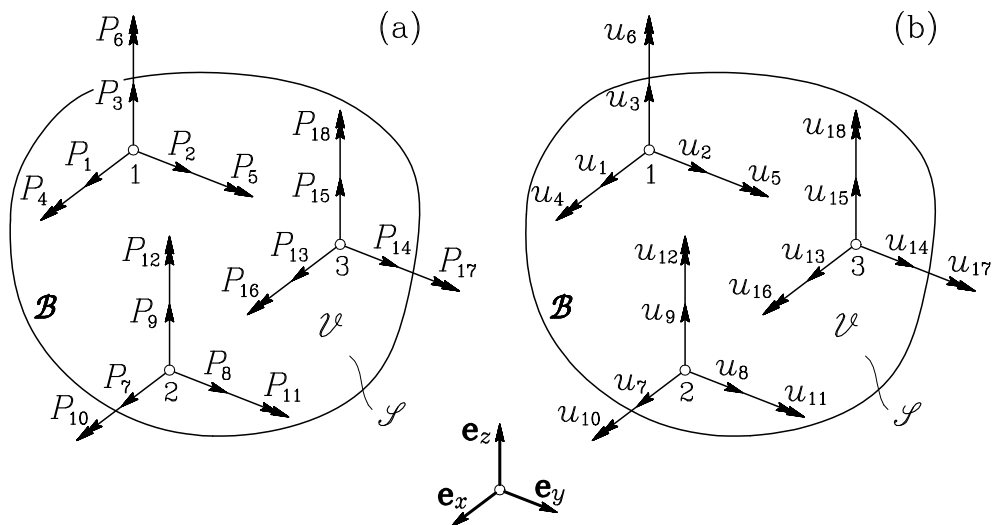
S skalarnimi komponentami vektorjev \mathbf{P}_J , \mathbf{M}_K , \mathbf{u}_J in $\boldsymbol{\omega}_K$ zapišemo enačbo (6.183) takole

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \sum_J \sum_i P_i^J u_i^J + \frac{1}{2} \sum_K \sum_i M_i^K \omega_i^K \quad (i = x, y, z; J, K = 1, 2, \dots). \quad (6.185)$$

Kakor vidimo, gre za razmeroma neroden in nepregleden zapis, ki pa ga lahko občutno poenostavimo z uvedbo tako imenovanih *posplošenih sil* in *posplošenih pomikov*.

Ideja je v tem, da vpeljemo enotno oznako P_i za posplošene sile, ki vključujejo tako točkovne sile v ožjem pomenu besede, kakor tudi točkovne dvojice. Prav tako vpeljemo enotno oznako u_i za posplošene pomike, ki vključujejo tako translacijske kakor tudi rotacijske prostostne stopnje, torej komponente pomikov in komponente zasukov.

Zapis obtežnega in kinematičnega stanja telesa s posplošenimi silami in posplošenimi pomiki je še posebej ugoden pri izpeljavi algoritmov in sestavljanju računalniških programov za numerično analizo problemov konstrukcijske mehanike. V rabi so različni načini za oštevilčenje posplošenih sil in posplošenih pomikov. Zelo zanesljiv in nedvoumen način je, da v določenem smiselnem zaporedju označimo vse točke telesa, ki so zanimive s stališča mehanske analize, nato pa v vsaki obravnavani točki kot posplošene sile vpeljemo vse možne komponente sil in dvojic, kot posplošene pomike pa ustrezne komponente pomikov in zasukov glede na skupni nepremični koordinatni sistem. V splošnem prostorskem primeru imamo torej v vsaki obravnavani točki po šest posplošenih sil in šest posplošenih pomikov, njihove oznake pa si sledijo glede na zaporedje oznak obravnavanih točk.



Slika 6.13

Za ilustracijo smo na *sliki 6.13* označili tri pomembne točke telesa. V praktičnem primeru bi šlo bodisi za točke na zunanji mejni ploskvi, v katerih deluje zunanja obtežba, lahko pa vključimo tudi točke na mejni ploskvi in točke v notranjosti telesa, ki so sicer neobtežene, vendar nas zanimajo njihovi pomiki in zasuki. Prednost opisanega načina vpeljave

in označevanja posplošenih sil in posplošenih pomikov je ravno v tem, da omogoča nedvoumen opis obtežbe in prostostnih stopenj izbranih točk telesa. Če bi bila, na primer, točka 3 obtežena le s točkovno silo H v smeri y , bi veljalo: $P_{13} = 0$, $P_{14} = H$, $P_{15} = P_{16} = P_{17} = P_{18} = 0$. Podobno bi v primeru, da bi bila točka 1 nepomično vrtljivo podprta, to povedali z zahtevo, da je $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Kakor sledi iz enačbe (6.185) in *slike 6.13*, je pri tem treba skrbno paziti le na to, da se oznake posplošenih sil in posplošenih pomikov ujema tako po prijemališčih kakor tudi po smereh delovanja. Pri ravninskih ali linijskih računskih modelih trdnih teles se število možnih posplošenih sil oziroma posplošenih prostostnih stopenj ustrezno zmanjša.

Izraz (6.183) za celotno deformacijsko energijo linearno elastičnega telesa preide s tem v zelo preprosto obliko

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \sum_i^n P_i u_i, \quad (6.186)$$

kjer je n skupno število posplošenih sil oziroma posplošenih pomikov.

6.7 Izrek o virtualnih pomikih (izrek o virtualnem delu)

V razdelkih **6.2** do **6.6** smo se ukvarjali z realnimi fizikalnimi količinami, ki jih lahko vsaj posredno tudi izmerimo. V nadaljevanju pa bomo podrobneje obravnavali dve že v razdelku **6.3** omenjeni novi količini, ki ju imenujemo *virtualno delo* in *dopolnilno virtualno delo*. Dejansko gre pri tem zgolj za formalni matematični količini, ki pa ju izračunamo podobno kot mehansko delo oziroma deformacijsko energijo pri medsebojno neodvisnih silah in pomikih. Obe omenjeni količini in z njima povezani izreki predstavljajo učinkovito matematično orodje za reševanje praktičnih problemov konstrukcijske mehanike.

Vzemimo, da je trdno telo na območju \mathcal{V} obteženo s specifično prostorninsko obtežbo \mathbf{v} , na delu mejne ploskve \mathcal{S}_p pa s specifično

površinsko obtežbo \mathbf{p}_n (slika 4.1). Napetosti $\boldsymbol{\sigma}_i$, ki se zaradi te obtežbe pojavijo v telesu, naj bodo *statično dopustne*; to pomeni, da zadoščajo ravnotežnim pogojem (1.122), (1.130) in (1.139)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ & \sum_i \mathbf{e}_i \times \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z). \end{aligned} \quad (6.187)$$

$$\mathcal{S}_p : \quad \mathbf{p}_n = \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i e_{ni}$$

Zaradi delovanja zunanje obtežbe se telo deformira. Pomiki \mathbf{u} , zasuki $\boldsymbol{\omega}$ in deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, ki opisujejo deformiranje telesa, naj bodo *kinematično dopustni*; to pomeni, da zadoščajo kinematičnim pogojem (2.162)

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z). \quad (6.188)$$

$$\mathcal{S}_u : \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^r \quad (\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^r)$$

S tem smo vzeli, da se je telo po obtežitvi z zunanjo obtežbo umirilo v ustrezni ravnotežni legi, ki pa se v skladu s predpostavko o majhnih deformacijah v geometrijskem pogledu le malo razlikuje od nedeformirane začetne oblike telesa. Sedaj pa vzemimo, da se dejanski pomiki telesa nekoliko spremenijo. To navidezno (virtualno) spremembo polja pomikov imenujemo *virtualni pomik*. V matematičnem pogledu gre za variacijo vektorske funkcije pomika $\mathbf{u}(x, y, z)$, ki jo zato označimo z $\delta \mathbf{u}$. Za virtualne pomike $\delta \mathbf{u}$ in pripadajoče virtualne zasuke $\delta \boldsymbol{\omega}$ ter virtualne deformacije $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_i$ zahtevamo, da ustrezajo enakim kinematičnim pogojem kot dejanski pomiki, zasuki in deformacije

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x_i} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i + \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z), \quad (6.189)$$

$$\mathcal{S}_u : \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

le na delu mejne ploskve \mathcal{S}_u , kjer so pomiki predpisani, morajo biti virtualni pomiki enaki nič. Seveda to tudi pomeni, da morajo biti virtualni pomiki dovolj majhni, da so zadoščene predpostavke o majhnih deformacijah, ob katerih smo izpeljali kinematične enačbe (6.188). V vseh drugih pogledih pa so virtualni pomiki poljubni in prepuščeni naši izbiri, torej tudi povsem neodvisni od dejanske zunanje obtežbe. V jeziku variacijskega računa opredelimo virtualne pomike kot *linearni del poljubne možne spremembe deformirane konfiguracije telesa*.

Ker so virtualni pomiki neodvisni od dejanske obtežbe telesa, lahko določimo navidezno (virtualno) delo, ki ga dejanska zunanja obtežba opravi na virtualnih pomikih, skladno z definicijo mehanskega dela konstantne sile na od te sile neodvisnem pomiku. To delo imenujemo *virtualno delo zunanjih sil* in ga označimo z δW

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (6.190)$$

Ker je virtualni pomik na delu mejne ploskve \mathcal{S}_u enak nič, lahko na desni strani enačbe (6.190) brez posledic prištejemo integral virtualnega dela po \mathcal{S}_u

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{S}_u} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (6.191)$$

Vsota prvih dveh integralov predstavlja integral virtualnega dela po celotni sklenjeni mejni ploskvi telesa \mathcal{S}

$$\delta W = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (6.192)$$

Ob upoštevanju robnega pogoja na površini telesa lahko prvi integral na desni strani izrazimo z napetostmi in po preureditvi dobimo

$$\delta W = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i \sigma_i \delta \mathbf{u} e_{ni} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (6.193)$$

Z uporabo Gaussovega integralskega izreka

$$\oint_{\mathcal{S}} \sum_i P_i e_{ni} dS = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_i} dV \quad (6.194)$$

prevedemo integral po sklenjeni mejni ploskvi \mathcal{S} na integral po prostorskem območju \mathcal{V} , ki ga ograjuje ploskev \mathcal{S}

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (6.195)$$

Izraz v oklepaju odvajamo kot produkt in po ureditvi dobimo

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} \right) \delta \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x_i} dV. \quad (6.196)$$

V skladu s prvim od ravnotežnih pogojev (6.187) je prvi integral v enačbi (6.196) enak nič, drugega pa ob upoštevanju kinematičnega pogoja (6.189) za virtualne pomike zapišemo takole

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i \delta \varepsilon_i dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV. \quad (6.197)$$

Če v mešanem produktu, ki nastopa v drugem integralu, zamenjamo prvi in drugi, nato pa še drugi in tretji vektor, dobimo

$$\sum_i \sigma_i (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = \delta \boldsymbol{\omega} \sum_i \mathbf{e}_i \times \sigma_i = 0. \quad (6.198)$$

Pri tem smo upoštevali še drugega od ravnotežnih pogojev (6.187). V enačbi (6.197) nam torej ostane le prvi integral, ki predstavlja virtualno delo dejanskih napetosti na virtualnih deformacijah. Imenujemo ga *virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta \bar{D}$

$$\delta \bar{D} = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i \delta \varepsilon_i dV. \quad (6.199)$$

Iz primerjave enačb (6.190), (6.197) in (6.199) sledi *izrek o virtualnih pomikih* oziroma *izrek o virtualnem delu*, ki pove, da je v ravnotežnem stanju telesa pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil

$$\delta W = \delta \bar{D}. \quad (6.200)$$

Vsebina in pomen izreka o virtualnih pomikih sta bolj smiselno zajeta v naslednji povedi:

Če je pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil, je telo v ravnotežju.

Za praktično delo v mehaniki je izrek o virtualnem delu ugodno zapisati v skalarni obliki

$$\int_{\mathcal{S}_p} \sum_i p_{ni} \delta u_i dS + \int_{\mathcal{V}} \sum_i v_i \delta u_i dV = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (6.201)$$

Iz vsega povedanega sledi, da izrek o virtualnem delu predstavlja drugačen zapis ravnotežnih enačb. Glede na to, da so ravnotežne enačbe v svoji izvorni obliki parcialne diferencialne enačbe, je zapis v obliki izreka o virtualnem delu pogosto znatno bolj ugoden.

6.8 Izrek o virtualnih silah (izrek o dopolnilnem virtualnem delu)

Izhodišče za izpeljavo izreka o virtualnih silah je ravnotežno stanje telesa, kakršno smo definirali na začetku prejšnjega razdelka. Pri tem poudarimo, da pripadajoči pomiki, zasuki in deformacije zadoščajo kinematičnim pogojem.

Sedaj pa vzemimo, da telo navidezno dodatno obtežimo s poljubno specifično prostorninsko obtežbo $\delta \mathbf{v}$ in s poljubno specifično površinsko obtežbo $\delta \mathbf{p}_n$. To variacijo obtežbe imenujemo *virtualna obtežba* in je povsem neodvisna od dejanske obtežbe telesa. Zahtevamo le, da je

virtualna obtežba *statično dopustna*. To pomeni, da virtualna obtežba in pripadajoče napetosti $\delta\sigma_i$ zadoščajo ravnotežnim pogojem

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \sum_i \frac{\partial \delta\sigma_i}{\partial x_i} + \delta\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \sum_i \mathbf{e}_i \times \delta\sigma_i = \mathbf{0} \\ \mathcal{S} : \quad & \sum_i \delta\sigma_i e_{ni} = \delta\mathbf{p}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{6.202}$$

Delo, ki ga virtualna obtežba opravi na dejanskih pomikih, imenujemo *dopolnilno ali komplementarno virtualno delo zunanjih sil* in ga označimo z δW^*

$$\delta W^* = \oint_{\mathcal{S}} \delta\mathbf{p}_n \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \delta\mathbf{v}\mathbf{u} dV. \tag{6.203}$$

Ob upoštevanju robnega pogoja na površini telesa lahko prvi integral na desni strani izrazimo z virtualnimi napetostmi in po preureditvi dobimo

$$\delta W^* = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i \delta\sigma_i \mathbf{u} e_{ni} dS + \int_{\mathcal{V}} \delta\mathbf{v}\mathbf{u} dV. \tag{6.204}$$

Z uporabo Gaussovega integralskega izreka prevedemo integral po sklenjeni mejni ploskvi \mathcal{S} na integral po prostorskem območju \mathcal{V}

$$\delta W^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta\sigma_i \mathbf{u}) dV + \int_{\mathcal{V}} \delta\mathbf{v}\mathbf{u} dV. \tag{6.205}$$

Izraz v oklepaju odvajamo kot produkt in po ureditvi dobimo

$$\delta W^* = \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_i \frac{\partial \delta\sigma_i}{\partial x_i} + \delta\mathbf{v} \right) \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \delta\sigma_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dV. \tag{6.206}$$

V skladu s prvim od ravnotežnih pogojev (6.202) je prvi integral v enačbi (6.206) enak nič, drugega pa ob upoštevanju kinematičnega pogoja (6.188) zapišemo takole

$$\delta W^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \varepsilon_i \delta \sigma_i dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \delta \sigma_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV. \quad (6.207)$$

Mešani produkt v drugem integralu je, podobno kakor v prejšnjem razdelku, enak nič. Ostane nam torej le prvi integral, ki predstavlja delo virtualnih napetosti na dejanskih deformacijah. Imenujemo ga *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta \bar{D}^*$

$$\delta \bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \varepsilon_i \delta \sigma_i dV. \quad (6.208)$$

Iz primerjave enačb (6.203), (6.204) in (6.205) sledi *izrek o virtualnih silah* oziroma *izrek o dopolnilnem virtualnem delu*, ki pove, da je pri kinematično dopustnih dejanskih pomikih in statično dopustni virtualni obtežbi dopolnilno virtualno delo zunanjih sil enako dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil

$$\delta W^* = \delta \bar{D}^* \quad (6.209)$$

oziroma v skalarni obliki

$$\int_{\mathcal{S}_u} \sum_i u_i \delta p_{ni} dS + \int_{\mathcal{V}} \sum_i u_i \delta v_i dV = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV. \quad (6.210)$$

Za praktično delo v mehaniki je smiselna in koristna naslednja oblika izreka o virtualnih silah:

Če je pri statično dopustni virtualni obtežbi telesa dopolnilno virtualno delo zunanjih sil enako dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil, so izpolnjeni kinematični pogoji.

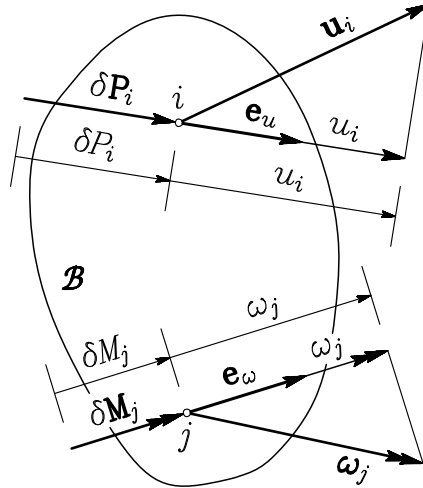
Izrek o dopolnilnem virtualnem delu torej predstavlja drugačen zapis kinematičnih enačb. Glede na to, da so kinematične enačbe v svoji izvorni obliki parcialne diferencialne enačbe, je zapis v obliki izreka o dopolnilnem virtualnem delu pogosto znatno bolj ugoden. Kakor se bo izkazalo v nadaljevanju, predstavlja izrek o virtualnih silah učinkovito orodje za določanje pomikov in zasukov diskretnih točk telesa.

6.9 Določanje pomikov in zasukov z izrekom o virtualnih silah

V okviru omejitve (6.202) lahko virtualno obtežbo izberemo povsem poljubno. Seveda je umestno izbrati virtualno obtežbo tako, da z njo na čim bolj preprost način določimo pomike in zasuke posameznih točk telesa. Zato dosledno vzamemo, da je virtualna prostorninska obtežba enaka nič, virtualno obtežbo mejne ploskve telesa \mathcal{S} pa običajno sestavimo zgolj iz virtualnih točkovnih sil $\delta\mathbf{P}_i$ in virtualnih točkovnih dvojic $\delta\mathbf{M}_i$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \delta\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathcal{S} : \quad & \delta\mathbf{P}_i \cup \delta\mathbf{M}_i = \delta\mathbf{p}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (6.211)$$

Pri tem smo vpeljali poenostavljen način označevanja prijemašič virtualnih sil in dvojic kar z zaporednimi naravnimi števili i ($i = 1, 2, \dots, n$).



Slika 6.14

Oznaka $\delta\mathbf{P}_i$ oziroma $\delta\mathbf{M}_i$ tako pomeni, da virtualna sila in virtualna dvojica delujeta v točki i . Enako logiko označevanja uporabimo za pomike in zasuke, tako da sta \mathbf{u}_i in $\boldsymbol{\omega}_i$ pomik in zasuk, ki ju dejanska zunanja obtežba povzroči v točki i . S tem lahko dopolnilno virtualno delo zunanjih sil zapišemo takole

$$\delta W^* = \sum_i^n \mathbf{u}_i \delta \mathbf{P}_i + \sum_i^n \boldsymbol{\omega}_i \delta \mathbf{M}_i. \quad (6.212)$$

Naj bo naloga zastavljena takole: v točki i telesa \mathcal{B} je treba določiti pomik u_i v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_u , v točki j pa zasuk ω_j okoli osi, določene z enotskim vektorjem \mathbf{e}_ω (slika 6.14).

Reševanja se lotimo tako, da v točki i obtežimo telo z virtualno silo $\delta \mathbf{P}_i$, ki se po smeri ujema z enotskim vektorjem \mathbf{e}_u , v točki j pa z virtualno dvojico $\delta \mathbf{M}_j$, ki ima smer enotskega vektorja \mathbf{e}_ω . Če z δP_i in δM_j označimo velikosti vektorjev $\delta \mathbf{P}_i$ in $\delta \mathbf{M}_j$, lahko ta dva vektorja zapišemo takole

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{P}_i &= \delta P_i \mathbf{e}_u \\ \delta \mathbf{M}_j &= \delta M_j \mathbf{e}_\omega. \end{aligned} \quad (6.213)$$

Dopolnilno virtualno delo, ki ga virtualna zunanja obtežba opravi na dejanskih pomikih in zasukih, je tedaj

$$\delta W^* = \mathbf{u}_i \delta \mathbf{P}_i + \boldsymbol{\omega}_j \delta \mathbf{M}_j = u_i \mathbf{e}_u \delta P_i + \boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega \delta M_j. \quad (6.214)$$

Skalarna produkta $\mathbf{u}_i \mathbf{e}_u$ in $\boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega$ predstavljata projekciji vektorjev \mathbf{u}_i in $\boldsymbol{\omega}_j$ na smeri \mathbf{e}_u in \mathbf{e}_ω , torej ravno iskani pomik in zasuk točk i in j

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i \mathbf{e}_u &= u_i \\ \boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega &= \omega_j. \end{aligned} \quad (6.215)$$

Dopolnilno virtualno delo zunanjih sil lahko sedaj zapišemo v skalarni obliki

$$\delta W^* = u_i \delta P_i + \omega_j \delta M_j \quad (6.216)$$

in ob upoštevanju izreka o virtualnih silah dobimo

$$\delta W^* = \delta \bar{D}^* \quad \rightarrow \quad u_i \delta P_i + \omega_j \delta M_j = \delta \bar{D}^*. \quad (6.217)$$

Virtualni obtežbi δP_i in δM_j lahko izberemo poljubno, na primer takole

$$\delta P_i = 1, \quad \delta M_j = 0$$

in iz enačbe (6.217) sledi

$$u_i = \delta \bar{D}^* (\delta P_i = 1, \delta M_j = 0). \quad (6.218)$$

Z izbiro

$$\delta P_i = 0, \quad \delta M_j = 1$$

pa dobimo

$$\omega_j = \delta \bar{D}^* (\delta P_i = 0, \delta M_j = 1). \quad (6.219)$$

Tako smo prišli do zelo preprostega pravila: pomik obravnavane točke telesa v predpisani smeri določimo tako, da telo v obravnavani točki obtežimo z enotsko virtualno silo v izbrani smeri in izračunamo pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil $\delta \bar{D}^*$. Iskani pomik je po vrednosti kar enak dopolnilnemu virtualnemu delu, ki ga napetosti zaradi enotske virtualne obtežbe opravijo na dejanskih deformacijah telesa. Podobno ravnamo, če je treba v obravnavani točki telesa določiti zasuk okrog predpisane smeri v prostoru: točko obtežimo z enotsko virtualno dvojico v izbrani smeri in iskani zasuk izračunamo kot dopolnilno virtualno delo, ki ga pripadajoče virtualne napetosti opravijo na dejanskih deformacijah telesa.

6.10 Pomiki in zasuki diskretnih točk linijskega nosilca

Kakor smo pokazali v prejšnjem razdelku, je računski postopek za določanje pomikov in zasukov posameznih točk telesa osredotočen na računanje dopolnilnega virtualnega dela $\delta \bar{D}^*$ pri premišljeno izbrani enotski virtualni obtežbi. Skalarni zapis enačbe (6.208)

$$\delta \bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV \quad (6.220)$$

pokaže, da moramo določiti deformacije ε_{ij} , ki ustrezajo dejanski zunanji obtežbi, ter napetosti $\delta \sigma_{ij}$, ki pripadajo virtualni obtežbi telesa.

V dosedanem proučevanju linearno elastičnega linijskega nosilca smo ugotovili, da lahko mehansko stanje, ki ustreza splošnemu obtežnemu primeru, določimo kot vsoto dveh medsebojno neodvisnih mehanskih stanj, ki pripadata upogibu z osno silo in torzijski obremenitvi nosilca. Razen tega na mehansko stanje nosilca vplivajo tudi morebitne spremembe temperature in podajnost podpor ali vezi med posameznimi elementi sestavljene linijske konstrukcije.

Deleže, ki jih k skupnemu dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil prispevajo posamezni od omenjenih vplivov, v nadaljevanju zaradi boljše preglednosti prikažemo vsakega posebej.

Prispevki osne sile, upogibnih momentov in prečnih sil

V poljubni točki prečnega prereza linijskega nosilca nastopajo normalna napetost σ_{xx} in strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} . Ob upoštevanju simetrije strižnih napetosti in kotnih deformacij zapišemo vsoto na desni strani enačbe (6.220) takole

$$\delta \bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} (\varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + 2\varepsilon_{xy} \delta \sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xz} \delta \sigma_{xz}) dV. \quad (6.221)$$

Enačbe za določanje vzdolžne normalne napetosti σ_{xx} ter strižnih napetosti σ_{xy} in σ_{xz} smo izpeljali v razdelku **5.3** (Upogib ravnega nosilca z osno silo). V nadaljevanju zaradi preprostejšega pisanja uporabimo skrajšane in v literaturi pogosteje uporabljane oznake za upogibna vztrajnostna momenta prečnega prereza nosilca $I_y \equiv I_{yy}$ in $I_z \equiv I_{zz}$. Enačbe za napetosti se tedaj glasijo

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - y \frac{M_z}{I_z} + z \frac{M_y}{I_y} \quad (6.222)$$

in

$$\sigma_{xy}(x, y) = -N_y(x) \frac{S_z^*(y)}{h^*(y)I_z} - N_z(x) \frac{S_y^*(y)}{h^*(y)I_y} \quad (6.223)$$

$$\sigma_{xz}(x, z) = -N_y(x) \frac{S_z^*(z)}{b^*(z)I_z} - N_z(x) \frac{S_y^*(z)}{b^*(z)I_y}.$$

Vzdolžna normalna deformacija ε_{xx} je z vzdolžno normalno napetostjo σ_{xx} povezana s Hookovim zakonom

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{N_x}{EA_x} - y \frac{M_z}{EI_z} + z \frac{M_y}{EI_y}, \quad (6.224)$$

virtualno napetost $\delta\sigma_{xx}$ pa izrazimo analogno z enačbo (6.222)

$$\delta\sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y}. \quad (6.225)$$

Kar zadeva strižne napetosti, se v nadaljevanju omejimo na nosilce z dvojno simetričnim prerezom ($S_y^*(y) = S_z^*(z) = 0$), za katere velja

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -N_y \frac{S_z^*}{h^* I_z} \\ \sigma_{xz} &= -N_z \frac{S_y^*}{b^* I_y}. \end{aligned} \quad (6.226)$$

Kotni deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} določimo z ustreznima konstitucijskima enačbama

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} = -N_y \frac{S_z^*}{G h^* I_z} \\ 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G} = -N_z \frac{S_y^*}{G b^* I_y}, \end{aligned} \quad (6.227)$$

virtualni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} pa zapišemo po vzorcu enačb (6.226)

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{xy} &= -\delta N_y \frac{S_z^*}{h^* I_z} \\ \delta\sigma_{xz} &= -\delta N_z \frac{S_y^*}{b^* I_y}. \end{aligned} \quad (6.228)$$

Enačbe (6.222) do (6.228) kažejo, da na vzdolžno normalno napetost σ_{xx} vplivajo samo osna sila N_x in upogibna momenta M_y in M_z , medtem ko sta strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} odvisni le od prečnih sil N_y in N_z . Zato lahko v enačbi (6.221) ločeno izračunamo deleža

$\delta\bar{D}^*(\delta N_x, \delta M_y, \delta M_z)$ in $\delta\bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z)$, ki ju k celotnemu dopolnilnemu virtualnemu delu prispevajo posamezne virtualne notranje sile

$$\delta\bar{D}^* = \delta\bar{D}^*(\delta N_x, \delta M_y, \delta M_z) + \delta\bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z). \quad (6.229)$$

Delež $\delta\bar{D}^*(\delta N_x, \delta M_y, \delta M_z)$, ki zajema vpliv osne sile in obeh upogibnih momentov je

$$\delta\bar{D}^*(\delta N_x, \delta M_y, \delta M_z) = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta\sigma_{xx} dV. \quad (6.230)$$

Pri linijskem nosilcu lahko trojni integral po prostorskem območju \mathcal{V} , ki nastopa v enačbi (6.221), izračunamo tako, da najprej integriramo po prečnem prerezu \mathcal{A}_x , nato pa še po dolžini elementa l . Vstavimo zvezi (6.224) in (6.225), upoštevamo, da je $dV = dA_x dx$, in dobimo

$$\begin{aligned} \delta\bar{D}^*(\delta N_x, \delta M_y, \delta M_z) = \\ \int_0^l \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{N_x}{EA_x} - y \frac{M_z}{EI_z} + z \frac{M_y}{EI_y} \right) \left(\frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y} \right) dA_x dx. \end{aligned} \quad (6.231)$$

Notranje sile zaradi dejanske in zaradi virtualne obtežbe so funkcije koordinate x , in se pri integriranju po prečnem prerezu \mathcal{A}_x obnašajo kot konstante. Zato lahko enačbo (6.231) zapišemo takole

$$\begin{aligned} \delta\bar{D}^*(\delta N_x, \delta M_y, \delta M_z) = \\ \int_0^l \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x^2} \int_{\mathcal{A}_x} dA_x - \frac{M_y \delta M_z + M_z \delta M_y}{EI_y I_z} \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x - \right. \\ \left. \frac{N_x \delta M_z + M_z \delta N_x}{EA_x I_z} \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x + \frac{N_x \delta M_y + M_y \delta N_x}{EA_x I_y} \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x + \right. \\ \left. \frac{M_y \delta M_y}{EI_y^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z^2} \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x \right) dx. \end{aligned} \quad (6.232)$$

V integralih po prečnem prerezu \mathcal{A}_x , ki nastopajo v dobljenem izrazu, prepoznamo geometrijske karakteristike prečnega prereza, kakor smo jih vpeljali v razdelku 5.3. Lokalni koordinatni sistem obravnavanega linijskega elementa lahko vedno izberemo tako, da sta osi y in z težiščni in glavni vztrajnostni osi prečnega prereza \mathcal{A}_x . Teda je $S_y = S_z = 0$ in $I_{yz} = 0$ in iz enačbe (6.232) sledi

$$\delta\bar{D}^*(\delta N_x, \delta M_y, \delta M_z) = \int_0^l \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx. \quad (6.233)$$

Dobili smo zelo preprosto pravilo za računanje dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil: določiti moramo produkte osnih sil in upogibnih momentov zaradi dejanske in zaradi virtualne obtežbe, jih reducirati s togostnimi karakteristikami in jih integrirati po celotni dolžini nosilca.

Določimo še delež $\delta\bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z)$, ki ga k dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil prispevata prečni sili N_y in N_z oziroma pripadajoči strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz}

$$\delta\bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z) = \int_{\mathcal{V}} (2\varepsilon_{xy} \delta\sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xz} \delta\sigma_{xz}) dV. \quad (6.234)$$

V gornjo enačbo vstavimo izraze (6.227) in (6.228)

$$\delta\bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z) = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{N_y \delta N_y}{GI_z^2} \left(\frac{S_z^*}{h^*} \right)^2 + \frac{N_z \delta N_z}{GI_y^2} \left(\frac{S_y^*}{b^*} \right)^2 \right] dV \quad (6.235)$$

in upoštevamo, da se količine, ki pripadajo delnemu prerezu \mathcal{A}_x^* , spreminjajo po prečnem prerezu \mathcal{A}_x

$$\delta\bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z) = \int_0^l \left[\frac{N_y \delta N_y}{GI_z^2} \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{S_z^*}{h^*} \right)^2 dA_x + \frac{N_z \delta N_z}{GI_y^2} \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{S_y^*}{b^*} \right)^2 dA_x \right] dx. \quad (6.236)$$

Zapis poenostavimo z vpeljavo okrajšav

$$\kappa_y = \frac{A_x}{I_z^2} \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{S_z^*}{h^*} \right)^2 dA_x \quad \text{in} \quad \kappa_z = \frac{A_x}{I_y^2} \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{S_y^*}{b^*} \right)^2 dA_x. \quad (6.237)$$

Enačba (6.236) se sedaj glasi

$$\delta \bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z) = \int_0^l \left(\kappa_y \frac{N_y \delta N_y}{GA_x} + \kappa_z \frac{N_z \delta N_z}{GA_x} \right) dx. \quad (6.238)$$

Geometrijski karakteristiki κ_y in κ_z imenujemo *strižna oblikovna koeficienta prereza* \mathcal{A}_x . Enačbo (6.238) pa lahko zapišemo še drugače, če vpeljemo tako imenovana *strižna prereza* A_y in A_z

$$A_y = \frac{A_x}{\kappa_y} \quad \text{in} \quad A_z = \frac{A_x}{\kappa_z}. \quad (6.239)$$

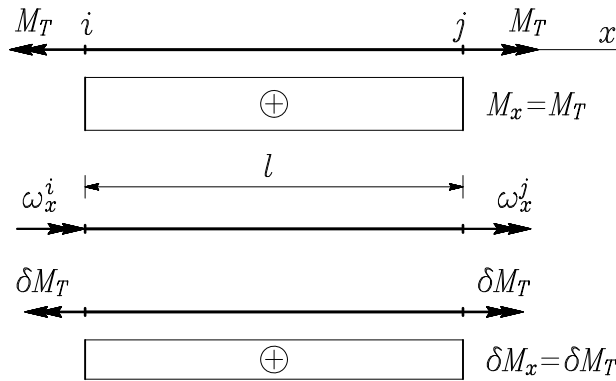
Tako dobimo

$$\delta \bar{D}^*(\delta N_y, \delta N_z) = \int_0^l \left(\frac{N_y \delta N_y}{GA_y} + \frac{N_z \delta N_z}{GA_z} \right) dx. \quad (6.240)$$

Kakor vidimo, je vpliv prečnih sil na dopolnilno virtualno delo notranjih sil in s tem na pomike in zasuke posameznih točk linijskega nosilca izražen podobno kakor vpliv osne sile, le da moramo kot *strižno togost prereza* upoštevati produkt strižnega modula G in ustreznega strižnega prereza A_y oziroma A_z . V splošnem lahko ugotovimo, da je vpliv prečnih sil v primerjavi z vplivom upogibnih momentov zanemarljivo majhen, razen v primerih, ko gre za izrazito "čokate" nosilce. Z drugimi besedami: vpliv prečnih sil na pomike in zasuke linijskih nosilcev je tem manjši, kolikor bolj je izpolnjena osnovna predpostavka, da so dimenzije prečnega prereza majhne v primerjavi z dolžino nosilca. Preprost primer je prikazan v Zgledu 6.2.

Prispevek torzijskega momenta

V razdelku 5.5 smo po metodi napetosti obravnavali primer enakomerne torzije ravnega nosilca. Gre torej za primer, ko je notranji torzijski moment M_x enakomeren po celotni dolžini nosilca, edina kinematična količina linijskega računskega modela, s katero imamo opraviti, pa je torzijski zasuk ω_x . V praktičnih konstrukterskih nalogah gre v tem primeru praviloma za določanje razlik torzijskih zasukov na obeh koncih linijskega nosilca. Za boljše razumevanje si oglejmo linijski nosilec, ki je v krajiščih obtežen z momentom M_T v smeri vzdolžne osi (slika 6.15).



Slika 6.15

V takem nosilcu nastopa le enakomeren notranji torzijski moment $M_x = M_T$. Vzemimo, da je torzijski zasuk v krajišču i enak ω_x^i , torzijski zasuk v krajišču j pa ω_x^j . Nosilec v krajiščih obtežimo z uravnoteženim virtualnim torzijskim momentom δM_T in zapišimo izrek o dopolnilnem virtualnem delu

$$\delta W^* = -\omega_x^i \delta M_T + \omega_x^j \delta M_T = \delta \bar{D}^*(\delta M_x), \quad (6.241)$$

od koder sledi

$$(\omega_x^j - \omega_x^i) \delta M_T = \delta \bar{D}^*(\delta M_x). \quad (6.242)$$

Pri tem je δM_x notranji torzijski moment, ki pripada virtualni obtežbi δM_T . Za razliko torzijskih zasukov vpeljemo oznako $\Delta\omega_x = \omega_x^j - \omega_x^i$ in dobimo

$$\Delta\omega_x \delta M_T = \delta \bar{D}^*(\delta M_x). \quad (6.243)$$

V obravnavanem primeru določata napetostno stanje poljubnega delca v prečnem prerezu strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} , zato je pripadajoči delež dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil določen s formalno enakim izrazom kot prispevek prečnih sil pri upogibu

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \int_{\mathcal{V}} (2\varepsilon_{xy} \delta\sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xz} \delta\sigma_{xz}) dV. \quad (6.244)$$

Napetosti σ_{xy} in σ_{xz} smo izrazili z napetostno funkcijo čiste torzije $\varphi(y, z)$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \sigma_{xz} &= -\frac{M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.245)$$

pripadajoči kotni deformaciji pa sta

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{M_x}{G I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G} = -\frac{M_x}{G I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.246)$$

Virtualni napetosti $\delta\sigma_{xy}$ in $\delta\sigma_{xz}$ določimo analogno z enačbama (6.245)

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{xy} &= \frac{\delta M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \delta\sigma_{xz} &= -\frac{\delta M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.247)$$

Izraze (6.246) in (6.247) vstavimo v enačbo (6.244) in po ureditvi dobimo

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \int_0^l \frac{M_x \delta M_x}{G I_x^2} \int_{\mathcal{A}_x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x dx. \quad (6.248)$$

V Zgledu 6.8 pokažemo, da je integral po prečnem prerezu \mathcal{A}_x , ki nastopa v gornji enačbi, kar enak torzijskemu vztrajnostnemu momentu I_x , kakor smo ga izpeljali v razdelku 5.5

$$I_x = \int_{\mathcal{A}_x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x. \quad (6.249)$$

Prispevek torzijskega momenta k dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil torej določimo z enačbo

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \int_0^l \frac{M_x \delta M_x}{GI_x} dx. \quad (6.250)$$

Ker sta tako notranji torzijski moment M_x kakor tudi δM_x konstantna vzdolž nosilca, sledi

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \frac{M_x \delta M_x}{GI_x} \int_0^l dx = \frac{l}{GI_x} M_x \delta M_x. \quad (6.251)$$

V našem primeru je $M_x = M_T$ in $\delta M_x = \delta M_T$ in prispevek enakomernega torzijskega momenta k dopolnilnemu virtualnemu delu nosilca lahko zapišemo z enačbo

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \frac{l}{GI_x} M_T \delta M_T. \quad (6.252)$$

Z oznako

$$k_T = \frac{GI_x}{l} \quad (6.253)$$

vpeljemo tako imenovano *torzijsko togost nosilca*. Enačba (6.252) se s tem glasi

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \frac{M_T \delta M_T}{k_T}. \quad (6.254)$$

Če za virtualno obtežbo izberemo enotski torzijski moment $\delta M_T = 1$, iz enačbe (6.243) sledi

$$\Delta\omega_x = \frac{M_T}{k_T}. \quad (6.255)$$

Pri reševanju praktičnih nalog v mehaniki nosilcev je pogosto tako, da poznamo torzijski zasuk v enem od krajišč nosilca. Če, na primer, poznamo zasuk ω_x^i , izračunamo zasuk v krajišču j z enačbo

$$\omega_x^j = \omega_x^i + \Delta\omega_x = \omega_x^i + \frac{M_T}{k_T}. \quad (6.256)$$

V primeru, da poznamo zasuk ω_x^j , pa velja

$$\omega_x^i = \omega_x^j - \Delta\omega_x = \omega_x^j - \frac{M_T}{k_T}. \quad (6.257)$$

Prispevki linearno elastičnih vzmeti

V praktičnih konstruktorskih nalogah imamo večkrat opraviti s podajnimi podporami oziroma s podajnimi vezmi med posameznimi deli konstrukcije. Podajne podpore in vezi v računskem modelu konstrukcije običajno predstavimo z vzmetmi. Računski modeli vzmeti so lahko linearno ali nelinearno elastični, v posebnih primerih pa lahko vključujejo tudi plastične in viskozne lastnosti podpor in vezi. V našem primeru se omejimo na tri najbolj preproste, a tudi najpogosteje uporabljane vrste *linearno elastičnih vzmeti*. To so: *torzijska, osna ali linearna in spiralna ali polžasta vzmet*, za vse pa velja, da so vplivi, s katerimi vzmeti delujejo na elemente konstrukcije, proporcionalni značilnim deformacijam vzmeti.

- Torzijska vzmet (V_T):

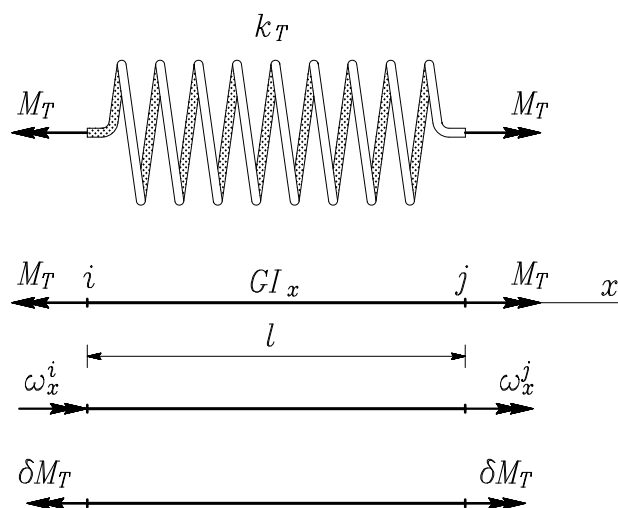
Gre za primer, da se vpliv podpore ali sosednih delov konstrukcije prenaša na krajišče linijskega nosilca kot torzijski moment (*slika 6.16*). Tedaj lahko torzijsko vzmet enakovredno nadomestimo z linijskim elementom, ki ima enako torzijsko togost kakor vzmet. Za ta primer smo

dopolnilno virtualno delo, ki ga virtualna obtežba opravi pri deformiranju vzmeti, že določili v prejšnjem razdelku z enačbo (6.254)

$$\delta \bar{D}^*(V_T) = \frac{M_T \delta M_T}{k_T}. \quad (6.258)$$

Pri tem je k_T konstanta torzijske vzmeti, ki jo določimo z enačbo (6.253) kot torzijsko togost veznega elementa, kakor smo pokazali v prejšnjem razdelku. Druga možnost je, da konstanto k_T umerimo s poskusi ob upoštevanju enačbe (6.255)

$$k_T = \frac{M_T}{\Delta \omega_x}. \quad (6.259)$$



Slika 6.16

- Osa ali linijska (vzdolžna) vzmet (V_L):

Osa vzmet je vsakdanjemu razumevanju pojma vzmeti najbližji model podajne podpore ali vezi, pri katerem je sila, ki deluje v smeri osi vzmeti, proporcionalna njenemu raztezkju ali skrčku. Podobno kakor torzijsko lahko tudi osno vzmet nadomestimo z linijskim elementom z enakovredno osno togostjo (slika 6.17). V takem nosilcu nastopa le

enakomerna osna sila $N_x = P$. Gre torej za čisto osno obtežbo nosilca, ki je povezana zgolj z vzdolžnima pomikoma krajišč u_i in u_j . Nosilec v krajiščih obtežimo z virtualnima vzdolžnima silama δP in zapišemo izrek o dopolnilnem virtualnem delu

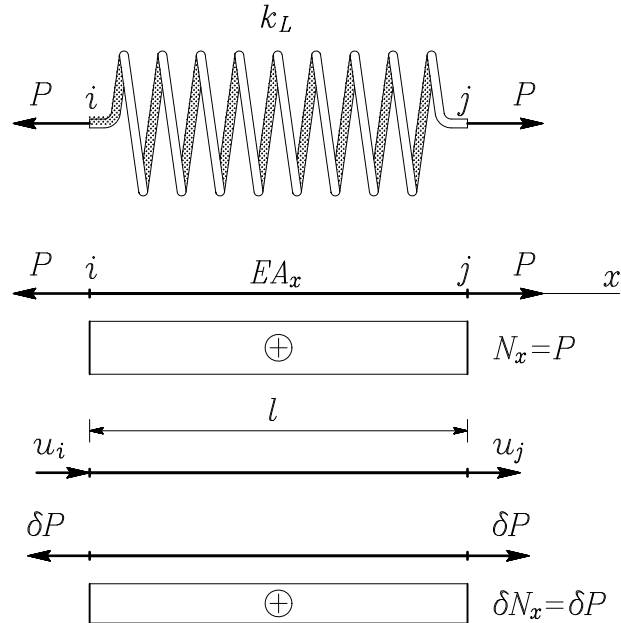
$$\delta W^* = -u_i \delta P + u_j \delta P = \delta \bar{D}^*(V_L), \quad (6.260)$$

od koder sledi

$$(u_j - u_i) \delta P = \delta \bar{D}^*(V_L). \quad (6.261)$$

Za razliko vzdolžnih pomikov vpeljemo oznako $\Delta u = u_j - u_i$ in dobimo

$$\Delta u \delta P = \delta \bar{D}^*(V_L). \quad (6.262)$$



Slika 6.17

V obravnavanem primeru vlada v nadomestnem nosilcu homogeno napetostno in deformacijsko stanje

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{N_x}{EA_x} \quad \text{in} \quad \delta \sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x}, \quad (6.263)$$

pripadajoči delež dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil pa je

$$\delta\bar{D}^*(V_L) = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta\sigma_{xx} dV = \int_0^l \frac{N_x \delta N_x}{EA_x^2} \int_{\mathcal{A}_x} dA_x dx = \int_0^l \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} dx. \quad (6.264)$$

Pri tem je δN_x osna sila, ki pripada virtualni obtežbi δP . Ker sta dejanska in virtualna osna sila N_x in δN_x konstantni vzdolž nosilca, sledi

$$\delta\bar{D}^*(V_L) = \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} \int_0^l dx = \frac{l}{EA_x} N_x \delta N_x. \quad (6.265)$$

Izraz

$$k_L = \frac{EA_x}{l} \quad (6.266)$$

imenujemo *konstanta osne ali linijske vzmeti*. V našem primeru je $N_x = P$ ter $\delta N_x = \delta P$ in prispevek osne vzmeti k dopolnilnemu virtualnemu delu konstrukcije lahko zapišemo z enačbo

$$\delta\bar{D}^*(V_L) = \frac{P \delta P}{k_L}. \quad (6.267)$$

Če za virtualno obtežbo izberemo enotsko virtualno silo $\delta P = 1$, iz enačb (6.262) in (6.267) sledi, da je skrček oziroma raztezek osne vzmeti proporcionalen delujoči sili P

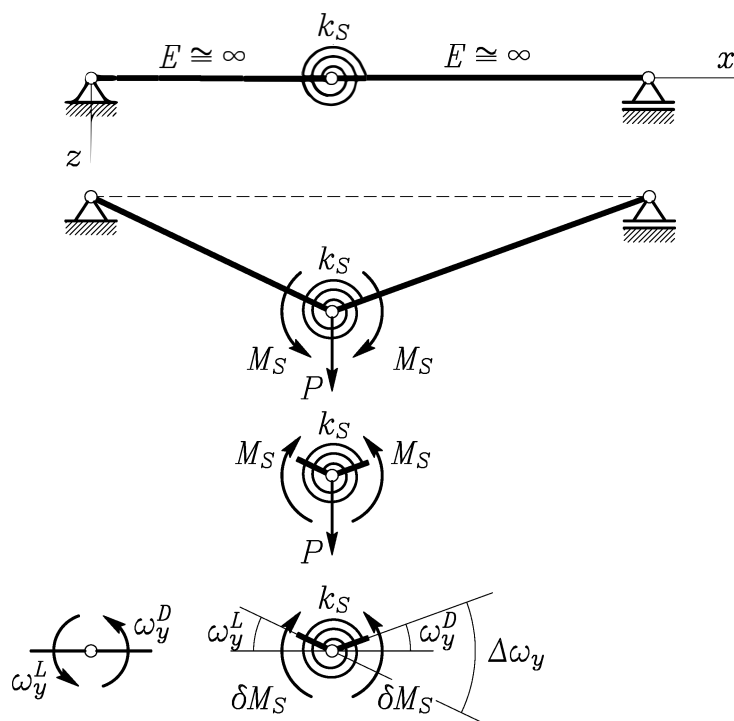
$$\Delta u = \frac{P}{k_L}, \quad (6.268)$$

kar je v skladu s splošnim razumevanjem vloge vzmeti v konstrukciji.

- Spiralna ali polžasta vzmet (V_S):

V praktičnih nalogah s področja mehanike konstrukcij pogosto naletimo na problem, da konstrukcijska izvedba stika med posameznimi elementi konstrukcije sicer zagotavlja enakost pomikov, v pogledu medsebojnih upogibnih zasukov pa stik ni povsem tog (primer: vijačeni stiki

jeklenih nosilcev, žebljani ali mozničeni stiki v lesenih konstrukcijah in podobno). V takih primerih lahko podajnost stika modeliramo z uvedbo *spiralne ali polžaste vzmeti*. Pri linearno elastičnih stikih je lastnost vzmeti podana s konstanto k_S , ki povezuje spremembo upogibnega zasuka z nastopajočim upogibnim momentom v stiku.



Slika 6.18

Da bi določili delež dopolnilnega virtualnega dela, ki ga prispeva linearno elastična spiralna vzmet, si oglejmo prostoležeč nosilec, sestavljen iz dveh absolutno togih elementov, ki sta med seboj povezana s spiralno vzmetjo (slika 6.18). Če se nosilec iz kakršnega koli razloga (na primer zaradi delovanja navpične sile P) premakne, deluje vzmet na oba elementa nosilca s statičnim momentom M_S . Za oba absolutno toga dela nosilca velja, da so pripadajoče deformacije ε_{xx} enake nič, zato je celotno dopolnilno virtualno delo notranjih sil prikazane kon-

strukcije zajeto zgolj v deležu spiralne vzmeti. Vzmet kot vezni element je v skladu z zakonom akcije in reakcije obtežena z enako velikima, a nasprotno usmerjenima momentoma M_S . Vzmet obtežimo z virtualnima momentoma δM_S in zapišemo izrek o dopolnilnem virtualnem delu

$$\delta W^* = -\omega_y^L \delta M_S + \omega_y^D \delta M_S = \delta \bar{D}^*(V_S), \quad (6.269)$$

od koder sledi

$$(\omega_y^D - \omega_y^L) \delta M_S = \delta \bar{D}^*(V_S). \quad (6.270)$$

Za razliko zasukov vpeljemo oznako $\Delta\omega_y = \omega_y^D - \omega_y^L$ in dobimo

$$\Delta\omega_y \delta M_S = \delta \bar{D}^*(V_S). \quad (6.271)$$

Spiralno vzmet si lahko predstavljamo kot torzijsko vzmet z zelo majhno dolžino in s torzijsko togostjo k_S , ki jo opazujemo v smeri njene vzdolžne osi. Kakor smo ugotovili v razdelku o torzijski vzmeti, je tedaj razlika zasukov sorazmerna statičnemu momentu, ki v krajiščih deluje v smeri osi vzmeti. V našem primeru je to moment M_S , tako da je

$$\Delta\omega_y = \frac{M_S}{k_S} \quad (6.272)$$

in enačba (6.271) preide v naslednjo obliko

$$\delta \bar{D}^*(V_S) = \frac{M_S \delta M_S}{k_S}. \quad (6.273)$$

Za vse tri obravnavane modele vzmeti smo torej ugotovili podobne zakonitosti: (i) sprememba značilne kinematične količine je sorazmerna ustrezni nastopajoči sili oziroma momentu, (ii) prispevek vzmeti k dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil je določen s produktom dejanske in virtualne sile oziroma dejanskega in virtualnega nastopajočega momenta, (iii) materialne in geometrijske lastnosti vzmeti so zajete v togostnih koeficientih k_T , k_L in k_S , ki so pri linearno elastičnem materialu konstante.

V primeru, da je v konstrukciji n_l linijskih, n_s spiralnih in n_t torzijskih vzmeti, je njihov skupni prispevek $\delta\bar{D}^*(V)$ k dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil določen z enačbo

$$\delta\bar{D}^*(V) = \sum_{i=1}^{n_l} \frac{P_i \delta P_i}{k_{Li}} + \sum_{j=1}^{n_s} \frac{M_{Sj} \delta M_{Sj}}{k_{Sj}} + \sum_{k=1}^{n_t} \frac{M_{Tk} \delta M_{Tk}}{k_{Tk}}. \quad (6.274)$$

Glede na formalno enakost zapisov za prispevke vseh treh vrst vzmeti je smiselno vpeljati enotno posplošeno oznako $V^{(k)}$, ki pri linijski vzmeti pomeni vzdolžno silo, pri spiralni vzmeti upogibni moment in pri torzijski vzmeti torzijski moment v vzmeti. Indeks (k) pove, da gre za k -to vzmet ($k = 1, 2, \dots, n_v$), pri čemer je $n_v = n_l + n_s + n_t$. Prav tako uvedemo posplošeno oznako $\delta V^{(k)}$ za silo oziroma moment, ki ga v k -ti vzmeti povzroči virtualna obtežba in posplošeno oznako $k^{(k)}$ za togost k -te vzmeti

$$\delta\bar{D}^*(V) = \sum_{k=1}^{n_v} \frac{V^{(k)} \delta V^{(k)}}{k^{(k)}}. \quad (6.275)$$

Prispevek linearne spremembe temperature

V razdelku 5.3 smo izpeljali enačbe, s katerimi upoštevamo vpliv spremembe temperature na pomike in notranje sile linijskega nosilca. Vzeli smo, da se temperatura v poljubnem prečnem prerezu $\mathcal{A}_x(x)$ spreminja linearno v odvisnosti od prereznih koordinat y in z

$$\Delta T(x, y, z) = \Delta T_x(x) + y \Delta T_y(x) + z \Delta T_z(x). \quad (6.276)$$

Iz enačb (5.129) in (5.132) sledi, da lahko vzdolžno deformacijo ε_{xx} zapišemo takole

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{N_x}{EA_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) - y \left(\frac{M_z}{EI_z} + \alpha_T \Delta T_y \right) + z \left(\frac{M_y}{EI_y} + \alpha_T \Delta T_z \right). \quad (6.277)$$

Vzdolžna normalna napetost $\delta\sigma_{xx}$, ki pripada izbrani virtualni obtežbi, je določena z enačbo (6.225)

$$\delta\sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y}. \quad (6.278)$$

Neumann-Duhamelove enačbe (3.111) povedo, da sprememba temperature vpliva le na normalne deformacije, v obravnavanem primeru torej le na deformacijo ε_{xx} . Dopolnilno virtualno delo notranjih sil tedaj izračunamo z enačbo (6.220)

$$\delta\bar{D}^*(\Delta T) = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta\sigma_{xx} dV. \quad (6.279)$$

V to enačbo vstavimo izraza (6.277) in (6.278)

$$\begin{aligned} \delta\bar{D}^*(\Delta T) = \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{N_x}{EA_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) - y \left(\frac{M_z}{EI_z} + \alpha_T \Delta T_y \right) + \right. \\ \left. z \left(\frac{M_y}{EI_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \right] \left(\frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y} \right) dV, \end{aligned} \quad (6.280)$$

diferencial prostornine izrazimo s produktom diferenciala ploščine prečnega prereza in diferenciala dolžine ($dV = dA_x dx$) in najprej opravimo integriranje po prečnem prerezu \mathcal{A}_x . Upoštevamo, da sta osi y in z težiščni in glavni vztrajnostni osi prereza \mathcal{A}_x , zato so deviacijski in oba statična momenta prereza enaki nič. Po nekoliko daljši, vendar preprosti izpeljavi dobimo

$$\begin{aligned} \delta\bar{D}^*(\Delta T) = \int_0^l \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx + \\ \int_0^l (\alpha_T \Delta T_x \delta N_x - \alpha_T \Delta T_y \delta M_z + \alpha_T \Delta T_z \delta M_y) dx. \end{aligned} \quad (6.281)$$

Kakor vidimo, je vpliv spremembe temperature zajet v drugem členu izraza za dopolnilno virtualno delo notranjih sil, medtem ko prvi integral poznamo že od prej. Opazimo lahko, da igrajo člani, ki vsebujejo parametre ΔT_x , ΔT_y , ΔT_z , podobno vlogo kakor notranje sile N_x , M_y , M_z , ki zajemajo vpliv dejanske mehanske zunanje obtežbe nosilca. To je razumljivo, saj temperaturne spremembe predstavljajo zgolj eno od možnih oblik zunanje obtežbe nosilca.

Linijska konstrukcija, sestavljena iz n linijskih elementov

V primeru, da je obravnavana linijska konstrukcija sestavljena iz več elementov, določimo celotno dopolnilno virtualno delo notranjih sil kot vsoto prispevkov posameznih elementov in vzmeti. Za konstrukcijo, sestavljeno iz n_e elementov in n_v vzmeti bi tako dobili

$$\begin{aligned} \delta \bar{D}^* = & \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \left(\kappa_y \frac{N_y \delta N_y}{GA_x} + \kappa_z \frac{N_z \delta N_z}{GA_x} \right) dx + \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \frac{M_x \delta M_x}{GI_x} dx + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} (\alpha_T \Delta T_x \delta N_x - \alpha_T \Delta T_y \delta M_z + \alpha_T \Delta T_z \delta M_y) dx + \\ & \sum_{k=1}^{n_v} \frac{V^{(k)} \delta V^{(k)}}{k^{(k)}}. \end{aligned} \quad (6.282)$$

6.11 Metoda Vereščagina

Kakor vidimo, je praktična uporaba izreka o dopolnilnem virtualnem delu pri računanju pomikov in zasukov posameznih točk linijske konstrukcije v največji meri osredotočena na iz vrednotenje integralov

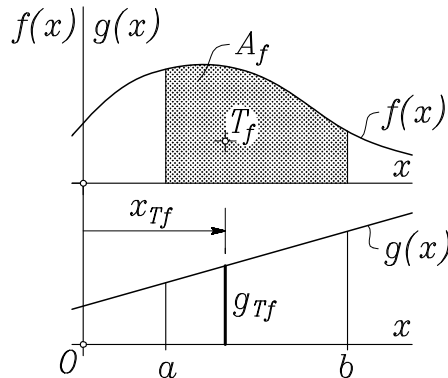
produktov dejanskih in virtualnih notranjih sil vzdolž posameznih elementov konstrukcije. V dosedanjih izvajanjih smo za virtualno obtežbo dosledno izbirali točkovne virtualne sile in dvojice. Pri opisani izbiri so virtualne notranje sile δN_x , δN_y , δN_z , δM_x , δM_y in δM_z vedno odsekoma linearne funkcije. Analitično integriranje produktov teh funkcij s funkcijami notranjih sil zaradi dejanske obtežbe N_x , N_y , N_z , M_x , M_y in M_z utegne biti zamudno, še posebej pri nosilcih z več odseki nezvezne obtežbe. K sreči si lahko to opravilo občutno olajšamo z uporabo tako imenovane *grafo-analitične metode Vereščagina*.

Ne glede na to, za katere notranje sile gre, je treba izračunati integral

$$J = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad (6.283)$$

pri čemer je $f(x)$ poljubna gladka funkcija na intervalu $[a, b]$, $g(x)$ pa je poljubna linearna funkcija na tem intervalu (slika 6.19)

$$g(x) = \alpha + \beta x. \quad (6.284)$$



Slika 6.19

Integral J je tako

$$J = \int_a^b f(x) (\alpha + \beta x) dx, \quad (6.285)$$

oziroma, ker sta α in β konstanti

$$J = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b x f(x) dx. \quad (6.286)$$

Dobljeno enačbo zapišemo malo drugače

$$J = \int_a^b f(x) dx \left(\alpha + \beta \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \right). \quad (6.287)$$

Vpeljemo nove oznake

$$A_f = \int_a^b f(x) dx, \quad x_{Tf} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{in} \quad g_{Tf} = \alpha + \beta x_{Tf},$$

pri čemer A_f predstavlja ploščino lika, ki ga na intervalu $[a, b]$ določa funkcija $f(x)$, x_{Tf} je razdalja težišča omenjenega lika od ordinatne osi, g_{Tf} pa je vrednost funkcije $g(x)$ pri $x = x_{Tf}$.

Tako smo prišli do preprostega pravila za iz vrednotenje integrala J

$$J = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \rightarrow \quad J = A_f g_{Tf}. \quad (6.288)$$

Ploščino A_f lika, ki ga določa funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, pomnožimo z ordinato g_{Tf} funkcije $g(x)$ pod težiščem omenjenega lika. V primeru, da je tudi funkcija f linearna, se lahko vlogi obeh funkcij tudi zamenjata.

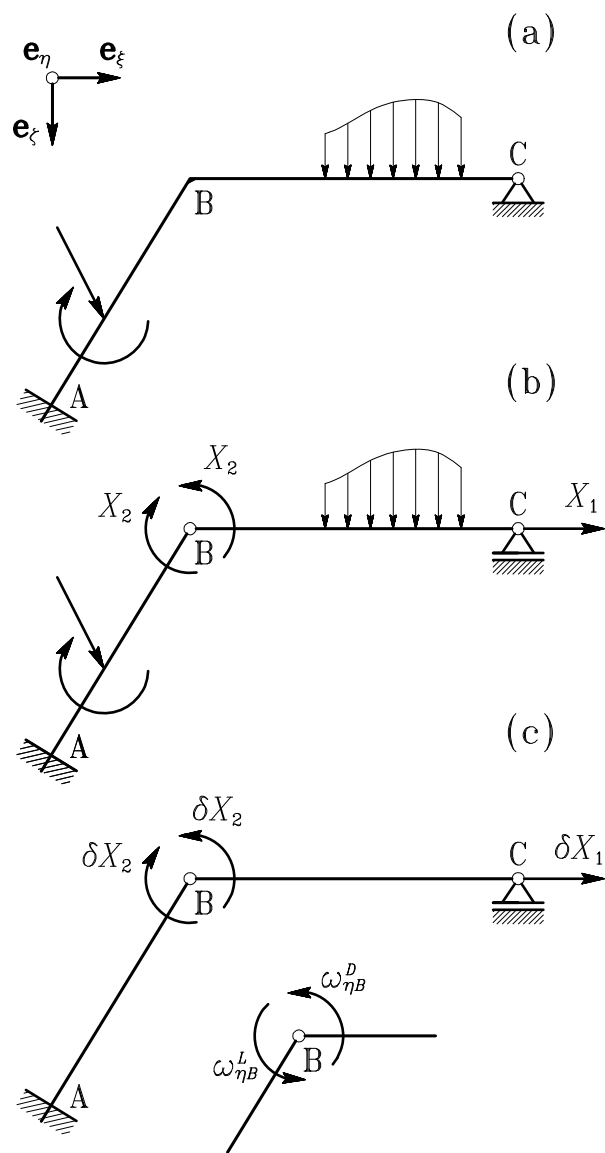
Z metodo Vereščagina smo pridobili zelo učinkovito orodje za praktično računanje pomikov in zasukov v posameznih točkah linijskih konstrukcij.

6.12 Metoda sil pri statično nedoločenih linijskih konstrukcijah

Metoda sil je ena od osnovnih metod za mehansko analizo statično nedoločenih trdnih teles. Gre torej za primere, pri katerih razpoložljivi ravnotežni pogoji ne zadostujejo za določitev vseh podpornih in notranjih sil. Metoda je še posebej primerna za obravnavanje konstrukcij, sestavljenih iz linijskih elementov, pri katerih so napetosti z znanimi enačbami teorije linijskih nosilcev povezane z notranjimi silami.

Ideja metode sil je v tem, da v statično nedoločeno konstrukcijo vpeljemo toliko dodatnih prostostnih stopenj, da postane statično določena, vendar kinematično stabilna. To naredimo tako, da sprostimo primerno število podpornih ali notranjih sil, njihov vpliv pa nadomestimo z ustreznimi zunanji silami in dvojicami. S tem zagotovimo statično enakovrednost prvotne in sproščene konstrukcije. Zahteve za kinematično enakovrednost obeh konstrukcij izrazimo s kinematičnimi robnimi pogoji, če smo sprostili podpore in s pogoji za enoličnost pomikov oziroma zasukov, če smo sprostili katero od notranjih sil. V 2. poglavju (Deformabilno telo) smo pogoje za enoličnost pomikov imenovali kompatibilnostne pogoje in jih zapisali kot sistem parcialnih diferencialnih enačb, ki povezujejo komponente tenzorja majhnih deformacij z drugimi parcialnimi odvodi pomikov. Pri izpeljavi enačb linijskega nosilca pa smo uspeli deformacije izraziti s pomiki linijskega računskega modela. Zapis kompatibilnostnih enačb pri linijskih konstrukcijah je zato bistveno lažji, saj gre zgolj za izenačevanje ustreznih pomikov in zasukov na mestih, kjer smo v prvotno konstrukcijo vpeljali dodatne prostostne stopnje. Metodo sil pri linijskih konstrukcijah lahko torej razumemo kot “integrirano” metodo napetosti, o kateri smo govorili v 4. poglavju in smo jo tudi že uporabili pri nekaterih zgledih.

Uporabo *metode sil* si oglejmo na primeru preproste dvakrat statično nedoločene ravninske linijske okvirne konstrukcije (*slika 6.20-a*). Zaradi preglednejše izpeljave obravnavamo izotermni primer ($\Delta T = 0$), brez izgube na splošnosti pa zanemarimo tudi vpliv prečnih sil.



Slika 6.20

Ker gre za dvakrat statično nedoločeno konstrukcijo, moramo vpeljati dve dodatni prostostni stopnji. Ena od neskončno mnogo možnosti za sprostitev konstrukcije je prikazana na *sliki 6.20-b*. Vpeljali smo možnost vodoravnega pomika v podpori C in upogibni členek v sicer

togem stiku B. Tako smo dobili tako imenovano *statično določeno osnovno konstrukcijo* ali *delovni sistem*. Kakor smo povedali, mora biti ta sistem v statičnem in kinematičnem pogledu enakovreden prvotni konstrukciji. Statično enakovrednost smo zagotovili s tem, da smo v točkah C in B, kjer smo vpeljali sprostitev, obtežili delovni sistem z nadomestnima zunanjsima silama X_1 in X_2 . S silo X_1 smo nadomestili vodoravno reakcijo, s katero nepomična podpora C deluje na prvotno konstrukcijo in preprečuje vodoravni pomik desnega krajišča prečke \overline{BC} . Z dvojicama X_2 pa nadomestimo notranji upogibni moment, s katerim v togem stiku B elementa \overline{AB} in \overline{BC} delujeta drug na drugega in zagotavljata enak zasuk obeh elementov v točki B. Nadomestnih sil X_1 in X_2 zaenkrat še ne poznamo. Določimo ju iz pogojev za kinematično enakovrednost delovnega sistema in prvotne konstrukcije. V našem primeru gre za zahtevo, da mora biti vodoravni pomik nosilca v podpori C enak nič in da morata biti upogibna zasuka obeh stikajočih se elementov v točki B enaka med seboj. Ker se lokalna koordinatna sistema elementov konstrukcije ne ujemata med seboj, je ugodno vpeljati *skupni* ali *globalni koordinatni sistem* z bazo \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ , v katerem pogoja za kinematično enakovrednost zapišemo z enačbama

$$u_{\xi C} = 0 \quad (6.289)$$

$$\omega_{\eta B}^L = \omega_{\eta B}^D. \quad (6.290)$$

Z $\omega_{\eta B}^L$ in $\omega_{\eta B}^D$ smo označili zasuka okrog globalne osi η na “levi” in “desni” strani stika B. Pogoj (6.289) je očitno kinematični robni pogoj za smer ξ v nepomični vrtljivi podpori C. Pogoj (6.290) pa je po svoji naravi *kompatibilnostni pogoj*, saj zahteva enoličnost zasuka v točki B. Za nadaljnje delo ga je ugodno zapisati v naslednji obliki

$$\omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L = \Delta\omega_{\eta B} = 0, \quad (6.291)$$

torej kot zahtevo, da mora biti *medsebojni zasuk* v stiku B enak nič.

Pogoja (6.289) in (6.291) sestavljata sistem dveh enačb, iz katerih bomo izračunali neznani nadomestni sili X_1 in X_2 . Pomik in oba zasuka, ki

nastopajo v teh enačbah, bi lahko izračunali z uporabo diferencialne enačbe za vzdolžni pomik in enačbe upogibnice, ki smo ju izpeljali v okviru elementarne teorije upogiba. Vendar nam izrek o virtualnih silah ponuja dosti bolj udobno pot, ki jo bomo spoznali v nadaljevanju. V ta namen obtežimo osnovno statično določeno konstrukcijo z virtualno silo δX_1 v točki C in z virtualnima dvojicama δX_2 v stiku B, kot kaže *slika 6.20-c*. Virtualna obtežba je seveda povsem neodvisna od dejanske obtežbe in nadomestnih sil. Vendar se izkaže, da je ugodno izbrati virtualne sile tako, da se njihove smeri ujemaajo s smermi nadomestnih sil X_1 in X_2 . Dopolnilno virtualno delo zunanjih sil je tedaj

$$\delta W^* = u_{\xi C} \delta X_1 + (\omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L) \delta X_2. \quad (6.292)$$

Upoštevali smo, da je dopolnilno virtualno delo, ki ga dvojica δX_2 opravi na dejanskem zasuku $\omega_{\eta B}^L$, negativno, saj sta smeri virtualne dvojice in dejanskega zasuka nasprotni med seboj.

Dopolnilno virtualno delo notranjih sil je v obravnavanem ravninskem primeru ($M_z = 0$) določeno z izrazom

$$\delta \bar{D}^* = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} \right) dx. \quad (6.293)$$

Ob predpostavki, da je konstrukcija linearno elastična, si zapis dopolnilnega virtualnega dela znatno olajšamo, če pri določitvi notranjih sil uporabimo zakon superpozicije. Tako osno silo kakor tudi upogibni moment izrazimo kot vsoto prispevkov dejanske zunanje obtežbe ter obeh nadomestnih sil

$$\begin{aligned} N_x &= N_x(p) + N_x(X_1) + N_x(X_2) \\ M_y &= M_y(p) + M_y(X_1) + M_y(X_2), \end{aligned} \quad (6.294)$$

kjer smo z $N_x(p)$ in $M_y(p)$ označili skupna prispevka celotne dejanske zunanje obtežbe k osni sili N_x oziroma k upogibnemu momentu M_y .

V nadaljevanju uporabljamo za omenjena prispevka še bolj pregledni označbi

$$N_{xp} = N_x(p) \quad \text{in} \quad M_{yp} = M_y(p). \quad (6.295)$$

Zapise notranjih sil dodatno poenostavimo z vpeljavo tako imenovanih *normiranih notranjih sil*, ki bi nastopile v osnovni statično določeni konstrukciji, če bi jo obtežili z enotsko nadomestno silo $X_1 = 1$ oziroma z enotskima dvojicama $X_2 = 1$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x1} &= N_x(X_1 = 1) & \bar{M}_{y1} &= M_y(X_1 = 1) \\ \bar{N}_{x2} &= N_x(X_2 = 1) & \bar{M}_{y2} &= M_y(X_2 = 1). \end{aligned} \quad (6.296)$$

Ker je

$$\begin{aligned} N_x(X_1) &= X_1 N_x(X_1 = 1) \\ N_x(X_2) &= X_2 N_x(X_2 = 1) \end{aligned} \quad (6.297)$$

in

$$\begin{aligned} M_y(X_1) &= X_1 M_y(X_1 = 1) \\ M_y(X_2) &= X_2 M_y(X_2 = 1), \end{aligned} \quad (6.298)$$

preideta enačbi (6.294) v pregledno obliko

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xp} + X_1 \bar{N}_{x1} + X_2 \bar{N}_{x2} \\ M_y &= M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}. \end{aligned} \quad (6.299)$$

Ker smo za virtualni sili δX_1 in δX_2 izbrali enaki smeri kot za X_1 in X_2 , lahko podobno kakor dejansko osno silo in dejanski upogibni moment izrazimo tudi virtualno osno silo in virtualni upogibni moment

$$\begin{aligned} \delta N_x &= \delta X_1 \bar{N}_{x1} + \delta X_2 \bar{N}_{x2} \\ \delta M_y &= \delta X_1 \bar{M}_{y1} + \delta X_2 \bar{M}_{y2}. \end{aligned} \quad (6.300)$$

Izraz (6.293) za dopolnilno virtualno delo notranjih sil lahko sedaj zapišemo takole

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{D}^* = & \\
 & \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left[\frac{1}{EA_x} (N_{xp} + X_1 \bar{N}_{x1} + X_2 \bar{N}_{x2}) (\delta X_1 \bar{N}_{x1} + \delta X_2 \bar{N}_{x2}) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{EI_y} (M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}) (\delta X_1 \bar{M}_{y1} + \delta X_2 \bar{M}_{y2}) \right] dx.
 \end{aligned} \tag{6.301}$$

Desno stran enačbe (6.301) uredimo tako, da zberemo vse člene, ki so pomnoženi z virtualno silo δX_1 , in vse, ki so pomnoženi z virtualno dvojico δX_2 . Tako dobimo

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{D}^* = & \delta X_1 \left[X_1 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx + \right. \\
 & X_2 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx + \\
 & \left. \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \right] + \\
 & \delta X_2 \left[X_1 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx + \right. \\
 & X_2 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx + \\
 & \left. \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \right]. \tag{6.302}
 \end{aligned}$$

Integrale, ki nastopajo v dobljeni enačbi, lahko izračunamo vnaprej, saj

se nanašajo na statično določeni osnovni sistem. Z oznakami

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{12} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx \\
 b_1 &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{21} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{22} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx \\
 b_2 &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} M_{yp}}{EI_y} \right) dx
 \end{aligned} \tag{6.303}$$

lahko izraz (6.302) za dopolnilno virtualno delo notranjih sil zapišemo na kratko

$$\delta \bar{D}^* = \delta X_1 (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1) + \delta X_2 (a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2) \tag{6.304}$$

in ga v skladu z izrekom o dopolnilnem virtualnem delu izenačimo z dopolnilnim virtualnim delom zunanjih sil δW^* , ki smo ga že določili z enačbo (6.292). Po ureditvi tako dobimo

$$\begin{aligned}
 &\delta X_1 (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 - u_{\xi C}) + \\
 &\delta X_2 (a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2 - \omega_{\eta B}^D + \omega_{\eta B}^L) = 0.
 \end{aligned} \tag{6.305}$$

Pri poljubni izbiri virtualnih sil δX_1 in δX_2 je enačba (6.305) izpolnjena le v primeru, da sta oba izraza v okroglih oklepajih enaka nič. Teda j velja

$$\begin{aligned} u_{\xi C} &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 \\ \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2. \end{aligned} \quad (6.306)$$

Tako smo določili vodoravni pomik $u_{\xi C}$ in medsebojni zasuk $\Delta\omega_{\eta} = \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L$ v odvisnosti od dejanske zunanje obtežbe in nadomestnih sil X_1 in X_2 . Upošteva je zakon superpozicije zlahka prepoznamo fizikalni pomen posameznih koeficientov v gornjih enačbah:

- a_{11} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročila sila $X_1 = 1$,
- a_{12} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročili dvojici $X_2 = 1$,
- b_1 je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročila celotna dejanska zunanja obtežba nosilca,
- a_{21} je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročila sila $X_1 = 1$,
- a_{22} je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročili dvojici $X_2 = 1$,
- b_2 je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročila celotna dejanska zunanja obtežba nosilca.

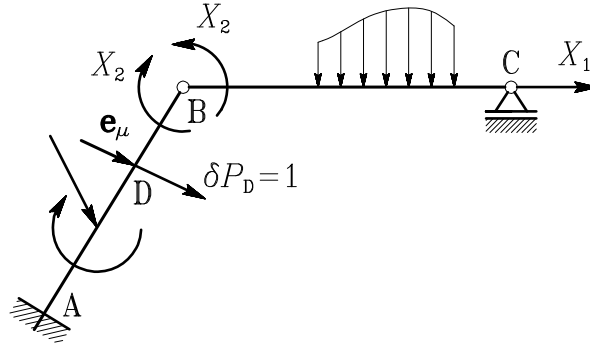
Iz druge in četrte od enačb (6.303) tudi vidimo, da sta koeficienta a_{12} in a_{21} enaka med seboj.

V našem primeru iz robnega pogoja (6.289) in kompatibilnostnega pogoja (6.291) sledi, da je $u_{\xi C} = 0$ in $\Delta\omega_{\eta} = \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L = 0$. Sistem (6.306) se s tem glasi

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 &= 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.307)$$

Koeficiente a_{11}, \dots, a_{22} in prosta člena (desni strani) b_1 in b_2 smo določili z enačbami (6.303). Tako smo dobili sistem dveh linearnih algebraskih enačb, iz katerih s katero od znanih metod določimo nadomestni zunanji sili X_1 in X_2 . S tem poznamo celotno zunanjo obtežbo osnovne statično določene konstrukcije (slika 6.20-b). Reakcije določimo z ravnotežnimi pogoji, notranje sile pa z enačbama (6.299).

Nalogo lahko sedaj še razširimo z zahtevo, da je treba določiti, na primer, pomik točke D v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_μ (slika 6.21).



Slika 6.21

V skladu z dosedanjimi ugotovitvami obtežimo osnovno statično določeno konstrukcijo v točki D z virtualno silo $\delta P_D = 1$ v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_μ in izračunamo iskani pomik u_μ kot pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil

$$u_\mu = \delta \bar{D}^*(p, X_1, X_2, \delta P_D = 1) = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} \right) dx. \quad (6.308)$$

N_x in M_y sta osna sila in upogibni moment, ki pripadata dejanski zunanji obtežbi na prvotni statično nedoločeni konstrukciji, vendar ju ob upoštevanju zakona superpozicije lahko izračunamo na osnovnem statično določenem sistemu z enačbama (6.299), saj sta sedaj X_1 in X_2 znani zunanji sili. Prav tako na osnovnem statično določenem sistemu izračunamo virtualno osno silo $\delta N_x(\delta P_D = 1)$ in virtualni upogibni moment $\delta M_y(\delta P_D = 1)$. Ugotovitev, da tudi notranje sile zaradi virtualne obtežbe določamo kar na statično določeni osnovni konstrukciji, je znana kot *redukcijsko pravilo* in znatno olajšuje računanje pomikov in zasukov statično nedoločenih konstrukcij.

Vse ugotovitve o računanju statično nedoločenih linijskih konstrukcij po metodi sil lahko posplošimo za primer n -krat statično nedoločene

storimo tudi s preostalimi notranjimi silami in momenti, ki nastopajo v splošnem primeru

$$\begin{aligned}\bar{N}_{yi} &= N_y (X_i = 1) & \bar{M}_{xi} &= M_x (X_i = 1) \\ \bar{N}_{zi} &= N_z (X_i = 1) & \bar{M}_{zi} &= M_z (X_i = 1) .\end{aligned}\quad (6.313)$$

Podobno z $\bar{V}_i^{(k)}$ označimo silo oziroma moment, ki se zaradi enotske nadomestne sile X_i pojavi v k -ti vzmeti

$$\bar{V}_i^{(k)} = V^{(k)}(X_i = 1) . \quad (6.314)$$

S tem in ob upoštevanju zakona superpozicije zapišemo notranje sile in notranje momente v odvisnosti od dejanske zunanje obtežbe p in nadomestnih sil in dvojic X_i z enačbami

$$\begin{aligned}N_x &= N_{xp} + \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} X_i & M_x &= M_{xp} + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{xi} X_i \\ N_y &= N_{yp} + \sum_{i=1}^n \bar{N}_{yi} X_i & M_y &= M_{yp} + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} X_i \\ N_z &= N_{zp} + \sum_{i=1}^n \bar{N}_{zi} X_i & M_z &= M_{zp} + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{zi} X_i .\end{aligned}\quad (6.315)$$

Z enako logiko izrazimo sile oziroma momente v vzmeteh

$$V^{(k)} = V_p^{(k)} + \sum_{i=1}^{n_v} \bar{V}_i^{(k)} X_i . \quad (6.316)$$

Za notranje sile in momente ter za sile in momente v vzmeteh, ki pripadajo virtualni obtežbi, lahko analogno z enačbami (6.315) zapišemo

$$\begin{aligned}\delta N_x &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} \delta X_i & \delta M_x &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{xi} \delta X_i \\ \delta N_y &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{yi} \delta X_i & \delta M_y &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} \delta X_i \\ \delta N_z &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{zi} \delta X_i & \delta M_z &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{zi} \delta X_i\end{aligned}\quad (6.317)$$

in

$$\delta V^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_v} \bar{V}_i^{(k)} \delta X_i. \quad (6.318)$$

V nadaljevanju postopamo povsem enako kakor v osnovni izpeljavi: zapišemo izrek o dopolnilnem virtualnem delu in izrazimo dopolnilno virtualno delo kot vsoto prispevkov osnih in prečnih sil, upogibnih in torzijskega momenta, spremembe temperature in linearno elastičnih vzmeti. Po nekoliko obsežnejši izpeljavi dobimo končne izraze za koeficiente kompatibilnostnih enačb

$$\begin{aligned} a_{ij} = a_{ji} = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{xi} \bar{N}_{xj}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{yi} \bar{M}_{yj}}{EI_y} + \frac{\bar{M}_{zi} \bar{M}_{zj}}{EI_z} \right) dx + \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{yi} \bar{N}_{yj}}{GA_y} + \frac{\bar{N}_{zi} \bar{N}_{zj}}{GA_z} \right) dx + \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{l_e} \frac{\bar{M}_{xi} \bar{M}_{xj}}{GI_x} dx + \\ & \sum_{k=1}^{n_v} \frac{1}{k^{(k)}} \bar{V}_i^{(k)} \bar{V}_j^{(k)} \end{aligned} \quad (6.319)$$

$$\begin{aligned} b_j = & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{xj} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{yj} M_{yp}}{EI_y} + \frac{\bar{M}_{zj} M_{zp}}{EI_z} \right) dx + \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{yj} N_{yp}}{GA_y} + \frac{\bar{N}_{zj} N_{zp}}{GA_z} \right) dx + \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{l_e} \frac{\bar{M}_{xj} M_{xp}}{GI_x} dx + \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{l_e} (\alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{xj} - \alpha_T \Delta T_y \bar{M}_{zj} + \alpha_T \Delta T_z \bar{M}_{yj}) dx + \\ & \sum_{k=1}^{n_v} \frac{1}{k^{(k)}} V_p^{(k)} \bar{V}_j^{(k)}. \end{aligned} \quad (6.320)$$

Pri tem smo poudarili, da je $a_{ij} = a_{ji}$ in da je torej matrika $[a_{ij}]$ simetrična. V splošnem zapisu enačb (6.309) smo z $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$ označili posplošene pomike, na primer pomike in zasuke v sproščenih podporah oziroma medsebojne pomike in medsebojne zasuke v točkah, kjer smo pri izbiri osnovne statično določene konstrukcije vpeljali dodatne prostostne stopnje. Pri nepomičnih podporah in togih povezavah elementov so ti posplošeni pomiki praviloma enaki nič. Pri elastično podprtih konstrukcijah oziroma pri elastično povezanih elementih pa so posplošeni pomiki lahko tudi različni od nič. Razen tega so kinematične enačbe v obliki (6.309) ugodne tudi za obravnavanje problemov, pri katerih so v posameznih točkah konstrukcije predpisani pomiki in zasuki, na primer pri posedanju podpor ali vodenju pomikov pri eksperimentih.

Iz enačb (6.309) določimo nadomestne sile X_1, X_2, \dots, X_n , nato pa z enačbami (6.315) še osne sile in upogibne momente.

Metoda sil je v kombinaciji z metodo Vereščagina razmeroma preprosto, vendar učinkovito orodje za določanje reakcij, notranjih sil ter pomikov in zasukov statično nedoločenih linijskih konstrukcij. Še posebej je primerna za hitro statično analizo ravninskih linijskih konstrukcij z nizko stopnjo statične nedoločenosti.

6.13 Betti[†]–Rayleighov[‡] izrek o vzajemnosti virtualnega dela

V razdelku 6.7 smo virtualne pomike opredelili kot poljubne, dovolj majhne, kinematično dopustne pomike, ki so povsem neodvisni od dejanske zunanje obtežbe telesa. Ob upoštevanju te opredelitve lahko izpeljemo zelo koristen izrek.

Vzemimo linearno elastično, stabilno podprto telo in obravnavajmo dva medsebojno neodvisna, statično dopustna primera zunanje obtežbe: v prvem primeru deluje na telo zunanja specifična površinska obtežba $\mathbf{p}_n^{(1)}$

[†] Enrico Betti, italijanski matematik, 1823-1892.

[‡] John William Strut, lord Rayleigh, angleški fizik, 1842-1919.

in specifična prostorninska obtežba $\mathbf{v}^{(1)}$; napetosti, pomike in deformacije, ki pripadajo tej obtežbi, označimo s $\boldsymbol{\sigma}_i^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)}$. V drugem primeru pa telo obtežimo z zunanjo obtežbo $\mathbf{p}_n^{(2)}$ in $\mathbf{v}^{(2)}$; tej obtežbi pripadajo napetosti $\boldsymbol{\sigma}_i^{(2)}$, pomiki $\mathbf{u}^{(2)}$ in deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)}$

$$\begin{aligned} (1) \dots \quad \mathbf{p}_n^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} &\quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_i^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} \\ (2) \dots \quad \mathbf{p}_n^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)} &\quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_i^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.321)$$

Ker so pomiki in deformacije $\mathbf{u}^{(2)}$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)}$, ki pripadajo drugemu obtežnemu primeru, neodvisni od prvega obtežnega primera, jih lahko v odnosu do obtežbe $\mathbf{p}_n^{(1)}$ in $\mathbf{v}^{(1)}$ razumemo kot virtualne pomike in deformacije. Virtualno delo, ki ga zunanja obtežba prvega obtežnega primera opravi na pomikih, ki pripadajo drugemu obtežnemu primeru, označimo z $\delta W^{(1,2)}$

$$\delta W^{(1,2)} = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n^{(1)} \mathbf{u}^{(2)} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{u}^{(2)} dV. \quad (6.322)$$

Podobno zapišemo virtualno delo $\delta W^{(2,1)}$, ki ga zunanja obtežba drugega obtežnega primera opravi na pomikih, ki pripadajo prvemu obtežnemu primeru.

$$\delta W^{(2,1)} = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n^{(2)} \mathbf{u}^{(1)} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{u}^{(1)} dV. \quad (6.323)$$

Ker je telo v obeh obtežnih primerih v ravnotežju, velja izrek o virtualnih pomikih in virtualno delo zunanjih sil lahko v obeh primerih izenačimo z ustreznim virtualnim delom notranjih sil.

$$\begin{aligned} \delta W^{(1,2)} = \delta \bar{D}^{(1,2)} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} dV \\ \delta W^{(2,1)} = \delta \bar{D}^{(2,1)} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} dV. \end{aligned} \quad (6.324)$$

Ob upoštevanju konstitucijskega zakona (3.134) pri $\Delta T = 0$ dobimo

$$\begin{aligned}\delta W^{(1,2)} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \left(2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} + \lambda I_1^{\varepsilon(1)} \mathbf{e}_i \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} dV \\ \delta W^{(2,1)} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \left(2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} + \lambda I_1^{\varepsilon(2)} \mathbf{e}_i \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} dV\end{aligned}\tag{6.325}$$

in ob upoštevanju enačbe (3.138) sledi

$$\begin{aligned}\delta W^{(1,2)} &= \int_{\mathcal{V}} \left(2\mu \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} + \lambda I_1^{\varepsilon(1)} I_1^{\varepsilon(2)} \right) dV \\ \delta W^{(2,1)} &= \int_{\mathcal{V}} \left(2\mu \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} + \lambda I_1^{\varepsilon(2)} I_1^{\varepsilon(1)} \right) dV.\end{aligned}\tag{6.326}$$

Zaradi komutativnosti skalarnega produkta sta desni strani v obeh enačbah (6.326) enaki, kar zapišemo kot *Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela*

$$\delta W^{(1,2)} = \delta W^{(2,1)}\tag{6.327}$$

ali z besedami:

Pri linearno elastičnem telesu je virtualno delo obtežbe, ki pripada prvemu obtežnemu primeru, na pomikih, ki pripadajo drugemu obtežnemu primeru, enako virtualnemu delu obtežbe, ki pripada drugemu obtežnemu primeru, na pomikih, ki pripadajo prvemu obtežnemu primeru.

6.14 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela, ki smo ga izpeljali v prejšnjem razdelku, ima daljnosežne posledice. Kot prvo,

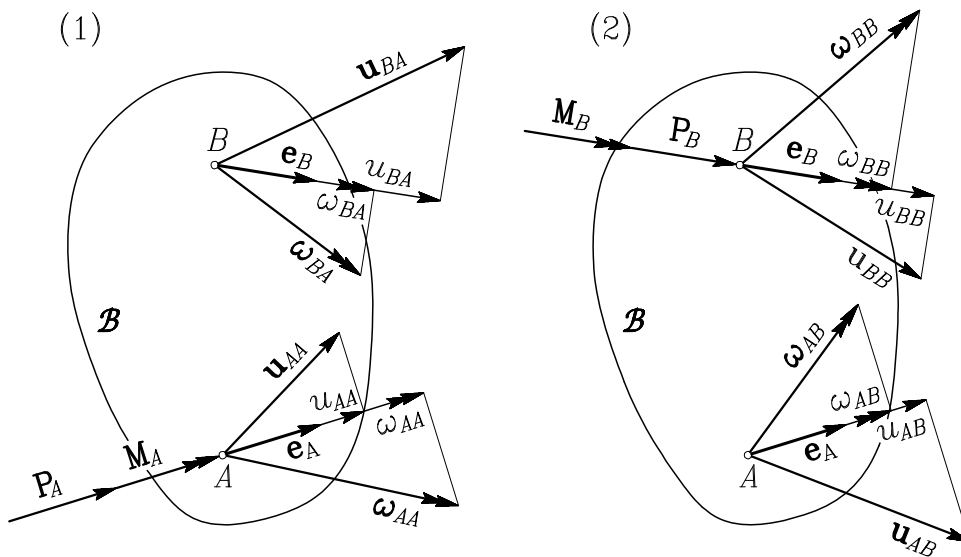
neposredno posledico izpeljemo Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov.

Spet obravnavamo stabilno podprto linearno elastično telo pri dveh medsebojno neodvisnih statično dopustnih obtežnih primerih, le da je tokrat zunanja obtežba sestavljena zgolj iz točkovnih sil in dvojic v dveh različnih točkah telesa (slika 6.22)

V prvem obtežnem primeru je telo v točki A obteženo s točkovno silo \mathbf{P}_A in s točkovno dvojico \mathbf{M}_A , ki pa sta obe usmerjeni vzdolž enotskega vektorja \mathbf{e}_A . Če velikosti obeh točkovnih obtežb označimo s P_A in M_A , lahko pišemo

$$\mathbf{P}_A = P_A \mathbf{e}_A \quad \text{in} \quad \mathbf{M}_A = M_A \mathbf{e}_A. \quad (6.328)$$

Pomik in zasuk, ki se zaradi te obtežbe pojavita v točki B , označimo z \mathbf{u}_{BA} in ω_{BA} .



Slika 6.22

V drugem obtežnem primeru pa je telo obteženo le v točki B , in sicer s točkovno silo \mathbf{P}_B in s točkovno dvojico \mathbf{M}_B v smeri enotskega vektorja

\mathbf{e}_B

$$\mathbf{P}_B = P_B \mathbf{e}_B \quad \text{in} \quad \mathbf{M}_B = M_B \mathbf{e}_B. \quad (6.329)$$

Pomik in zasuk, ki se zaradi te obtežbe pojavita v točki A , označimo z \mathbf{u}_{AB} in $\boldsymbol{\omega}_{AB}$. Ker gre za dva medsebojno povsem neodvisna obtežna primera, lahko uporabimo Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela in zapišemo *Maxwellov izrek* kot sledi

$$\delta W^{(1,2)} = \delta W^{(2,1)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}_A \mathbf{u}_{AB} + \mathbf{M}_A \boldsymbol{\omega}_{AB} = \mathbf{P}_B \mathbf{u}_{BA} + \mathbf{M}_B \boldsymbol{\omega}_{BA}. \quad (6.330)$$

Ob upoštevanju enačb (6.328) in (6.329) ter komutativnosti skalarnega produkta lahko izrek zapišemo takole

$$P_A \mathbf{u}_{AB} \mathbf{e}_A + M_A \boldsymbol{\omega}_{AB} \mathbf{e}_A = P_B \mathbf{u}_{BA} \mathbf{e}_B + M_B \boldsymbol{\omega}_{BA} \mathbf{e}_B. \quad (6.331)$$

Skalarni produkt $\mathbf{u}_{AB} \mathbf{e}_A$, ki predstavlja projekcijo vektorja pomika \mathbf{u}_{AB} na smer \mathbf{e}_A , označimo z u_{AB} . Podobne oznake vpeljemo tudi za preostale tri nastopajoče skalarne produkte

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{AB} \mathbf{e}_A &= u_{AB} & \mathbf{u}_{BA} \mathbf{e}_B &= u_{BA} \\ \boldsymbol{\omega}_{AB} \mathbf{e}_A &= \omega_{AB} & \boldsymbol{\omega}_{BA} \mathbf{e}_B &= \omega_{BA}. \end{aligned} \quad (6.332)$$

Maxwellov izrek (6.330) lahko sedaj zapišemo v splošni skalarni obliki

$$P_A u_{AB} + M_A \omega_{AB} = P_B u_{BA} + M_B \omega_{BA}. \quad (6.333)$$

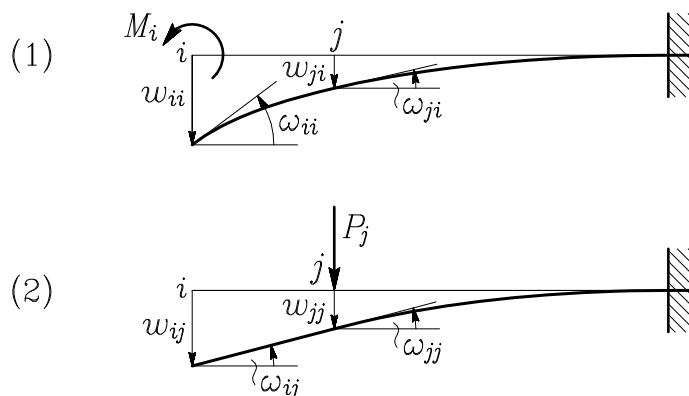
Za praktično delo v konstrukcijski mehaniki so pomembne štiri posebne oblike Maxwellovega izreka, ki ustrezajo različnim izbiram točkovnih obtežb v obeh obtežnih primerih

$$\begin{aligned} P_A = 1, \quad M_A = 0, \quad P_B = 1, \quad M_B = 0 &\rightarrow u_{AB} = u_{BA} \\ P_A = 0, \quad M_A = 1, \quad P_B = 0, \quad M_B = 1 &\rightarrow \omega_{AB} = \omega_{BA} \\ P_A = 1, \quad M_A = 0, \quad P_B = 0, \quad M_B = 1 &\rightarrow u_{AB} = \omega_{BA} \\ P_A = 0, \quad M_A = 1, \quad P_B = 1, \quad M_B = 0 &\rightarrow \omega_{AB} = u_{BA}. \end{aligned} \quad (6.334)$$

Ob upoštevanju vsega povedanega skušajmo prvo od dobljenih oblik Maxwellovega izreka izraziti še z besedami:

Pomik, ki se zaradi delovanja enotske sile iz drugega obtežnega primera pojavi v prijemališču in v smeri enotske sile iz prvega obtežnega primera, je enak pomiku, ki se zaradi delovanja enotske sile iz prvega obtežnega primera pojavi v prijemališču in v smeri enotske sile iz drugega obtežnega primera.

Na podobno neroden način bi ubesedili tudi preostale tri oblike Maxwellovega izreka. Pri tretji in četrti obliki nas ne sme zmotiti navidezno neskladje v enotah izenačenih pomikov in zasukov. Obe enakosti smo namreč dobili tako, da smo v izvornih enačbah eno stran pokrajšali z enoto sile (N), drugo pa z enoto dvojice (Nm).



Slika 6.23

Za ilustracijo si oglejmo previsni nosilec v dveh značilnih obtežnih primerih (slika 6.23): v prvem primeru je nosilec v krajišču i obtežen s točkovno dvojico M_i , v drugem pa v vmesni točki j z navpično točkovno silo P_j . Navpični pomik, ki ga v točki j povzroči dvojica M_i , označimo z w_{ji} , zasuk, ki ga v krajišču i povzroči sila P_j , pa z ω_{ij} . V tem primeru zapišemo Betti–Rayleighov izrek z enačbo

$$M_i \omega_{ij} = P_j w_{ji}. \quad (6.335)$$

Maxwellov izrek pa se, kakor kažejo enačbe (6.334), nanaša na medsebojne enakosti pomikov in zasukov, ki ustrezajo enotskim silam in dvojicam v različnih obtežnih primerih.

Računanje s pomiki in zasuki, ki pripadajo enotskim obtežbam, si lahko občutno olajšamo z vpeljavo tako imenovanih *podajnostnih koeficientov* f_{ij} . V našem primeru bi, na primer, lahko označili

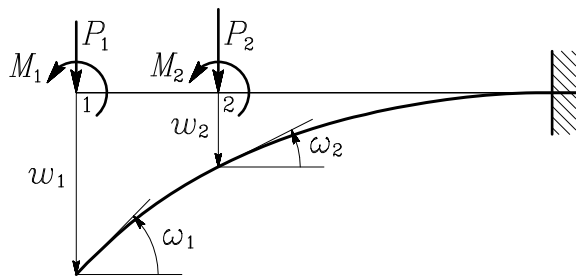
$$\begin{aligned} f_{ij} &= \omega_{ij}(P_j = 1) & \rightarrow & \quad \omega_{ij} = f_{ij}P_j \\ f_{ji} &= w_{ji}(M_i = 1) & \rightarrow & \quad w_{ji} = f_{ji}M_i. \end{aligned} \quad (6.336)$$

Enačba (6.335) preide s tem v zelo zgovorno obliko

$$M_i f_{ij} P_j = P_j f_{ji} M_i \quad \rightarrow \quad f_{ji} = f_{ij}, \quad (6.337)$$

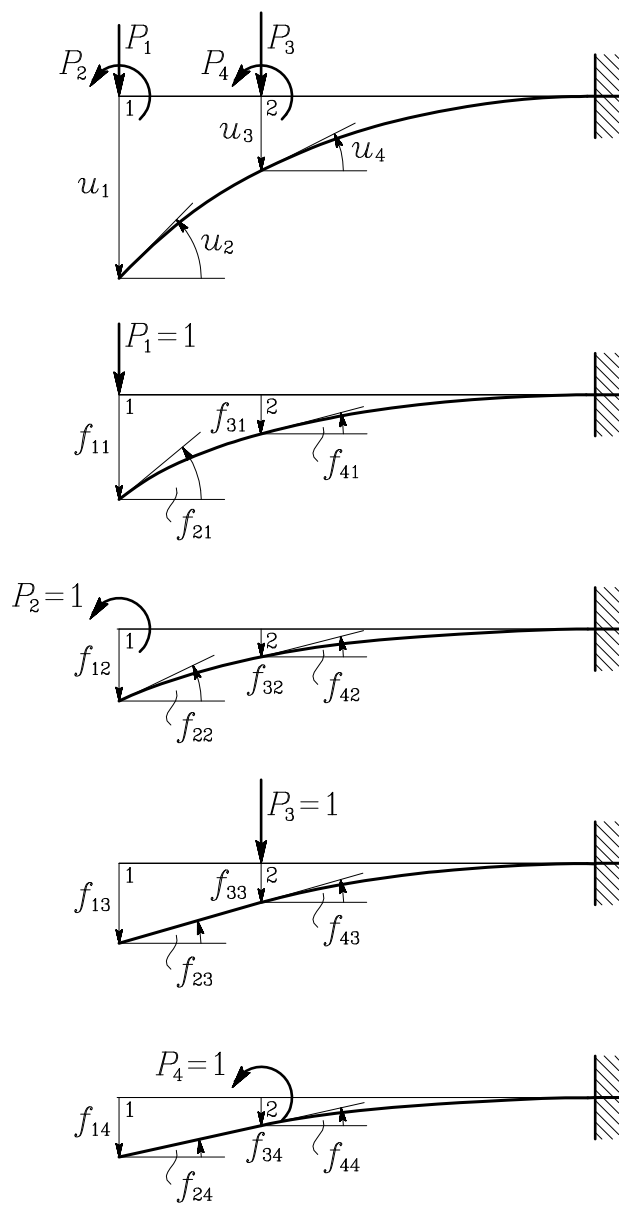
ki pove, da so podajnostni koeficienti pri linearno elastičnem telesu simetrični.

V primeru, da v istem obtežnem primeru na telo deluje več različnih obtežb (*slika 6.24*), bi bil pri običajnem označevanju sil in dvojic ter pomikov in zasukov zapis posameznih pomikov in zasukov v odvisnosti od vseh nastopajočih obtežb zelo nepregleden. Težavam se uspešno izognemo z vpeljavo *posplošenih sil* in *posplošenih pomikov*, ki smo jih že spoznali v razdelku **6.6**.



Slika 6.24

Še enkrat si oglejmo previsni nosilec, prikazan na *sliki 6.24*, tokrat z uvedbo splošenih oznak za sile in pomike (*slika 6.25*). Posplošenim silam P_1, \dots, P_4 ustrezajo splošeni pomiki u_1, \dots, u_4 .



Slika 6.25

Z upoštevanjem zakona superpozicije lahko vsakega od posplošenih pomikov izrazimo kot vsoto prispevkov posameznih posplošenih sil. Za pomik u_1 na primer velja

$$u_1 = u_1(P_1) + u_1(P_2) + u_1(P_3) + u_1(P_4) \quad (6.338)$$

oziroma z uporabo podajnostnih koeficientov

$$u_1 = f_{11}P_1 + f_{12}P_2 + f_{13}P_3 + f_{14}P_4 = \sum_{j=1}^4 f_{1j}P_j. \quad (6.339)$$

Podobno lahko izrazimo tudi preostale posplošene pomike, kar v primeru, da imamo opraviti z n posplošenimi silami in prav tolikimi pomiki, na kratko zapišemo z enačbo

$$u_i = \sum_j f_{ij}P_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.340)$$

Pomen podajnostnih koeficientov je v tem primeru povsem nedvoumen (slika 6.25)

$$f_{ij} = u_i(P_j = 1). \quad (6.341)$$

Pogosto uporabljamo tudi matrični zapis

$$\{u\} = [F] \{P\}, \quad (6.342)$$

kjer je $[F]$ matrika podajnostnih koeficientov oziroma *podajnostna matrika telesa*. Z Maxwellovim izrekom smo ugotovili, da so podajnostni koeficienti simetrični glede na zamenjavo indeksov ($f_{ji} = f_{ij}$), zato je tudi podajnostna matrika simetrična

$$[F] = [F]^T. \quad (6.343)$$

Podajnostna matrika stabilno podprtega telesa je nesingularna, zato lahko naredimo obrat enačbe (6.342), in sicer tako, da jo z leve pomnožimo z inverzno matriko $[F]^{-1}$

$$[F]^{-1} \{u\} = [F]^{-1} [F] \{P\}, \quad (6.344)$$

Za inverzno matriko $[F]^{-1}$ vpeljemo novo oznako

$$[F]^{-1} = [K] \quad (6.345)$$

in jo imenujemo *togostna matrika telesa*. Ker je $[F]^{-1} [F] = [I]$, preide enačba (6.344) v naslednjo obliko

$$\{P\} = [K] \{u\} . \quad (6.346)$$

Matriko $[K]$ sestavljajo togostni koeficienti k_{ij}

$$k_{ij} = P_i(u_j = 1) , \quad (6.347)$$

tako da velja

$$P_i = \sum_j k_{ij} u_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) . \quad (6.348)$$

Podobno kakor podajnostna je tudi togostna matrika simetrična, torej velja

$$[K] = [K]^T \quad \text{ozroma} \quad k_{ji} = k_{ij} . \quad (6.349)$$

6.15 Castiglianov izrek[†]

V razdelku 6.6 smo v izrazu za celotno deformacijsko energijo linearno elastičnega telesa upoštevali prispevek posplošenih točkovnih sil v povezavi s posplošenimi pomiki. Ob upoštevanju zapisa (6.348) preide enačba (6.186) v naslednjo obliko

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n k_{ij} u_i u_j \quad (6.350)$$

[†] Gre dejansko za dva izreka (teorema), za katera je v literaturi mogoče najti različne izpeljave. Tukaj je prikazana ena od preprostejših možnih formulacij.

oziroma v matrični obliki

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\}. \quad (6.351)$$

Analogno lahko ob upoštevanju zapisa (6.340) izrazimo tudi dopolnilno ali komplementarno deformacijsko energijo telesa

$$D^* = \underline{D}^* + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n f_{ij} P_i P_j, \quad (6.352)$$

pri čemer za linearno elastična telesa velja enakost $D^* = D$. V matrični obliki se enačba (6.352) glasi

$$D^* = \underline{D} + \frac{1}{2} \{P\}^T [F] \{P\}. \quad (6.353)$$

Izračunajmo odvod deformacijske energije D po poljubnem posplošenem pomiku u_k . Delež \underline{D} ni odvisen od točkovnih posplošenih pomikov, zato je njegov odvod po u_k enak nič. V drugem sumandu na desni strani enačbe (6.350) upoštevamo pravilo za odvajanje produkta

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial u_k} &= \frac{1}{2} \sum_i^n u_i \frac{\partial}{\partial u_k} (k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \dots + k_{ik}u_k + \dots + k_{in}u_n) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_j^n u_j \frac{\partial}{\partial u_k} (k_{1j}u_1 + k_{2j}u_2 + \dots + k_{kj}u_k + \dots + k_{nj}u_n) \end{aligned} \quad (6.354)$$

in, ker so posplošeni pomiki neodvisni med seboj, dobimo

$$\frac{\partial D}{\partial u_k} = \frac{1}{2} \sum_i^n k_{ik}u_i + \frac{1}{2} \sum_j^n k_{kj}u_j. \quad (6.355)$$

Ob upoštevanju simetrije togostnih koeficientov in zamenljivosti števalnih indeksov velja

$$\sum_i^n k_{ik}u_i = \sum_i^n k_{ki}u_i = \sum_j^n k_{kj}u_j \quad (6.356)$$

in enačba (6.355) se glasi

$$\frac{\partial D}{\partial u_k} = \sum_j^n k_{kj} u_j. \quad (6.357)$$

Indeks k nadomestimo z i in s primerjavo z enačbo (6.348) dobimo

$$\frac{\partial D}{\partial u_i} = \sum_j k_{ij} u_j = P_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.358)$$

Dobljena zveza je znana kot *prvi Castiglianov izrek* in pove, da z odvajanjem celotne deformacijske energije po izbranem posplošenem pomiku dobimo posplošeno silo, ki se po prijemališču in po smeri ujema z izbranim posplošenim pomikom.

Podobno izpeljemo tudi *drugi Castiglianov izrek*. Celotno dopolnilno deformacijsko energijo D^* , ki smo jo zapisali z enačbo (6.352), odvajamo po izbrani posplošeni sili P_i in dobimo pripadajoči posplošeni pomik u_i

$$\frac{\partial D^*}{\partial P_i} = \sum_j f_{ij} P_j = u_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.359)$$

Izpeljana Castiglianova izreka imata predvsem zgodovinski pomen; v nekaterih preprostih primerih, še posebej če lahko celotno deformacijsko energijo oziroma dopolnilno deformacijsko energijo zapišemo zgolj s posplošenimi točkovnimi silami in pomiki ($\underline{D} = 0$ ali $\underline{D}^* = 0$) pa Castiglianova izreka predstavljata zanimivo in učinkovito orodje za računanje točkovnih sil oziroma pomikov.

Da bi lahko uporabili Castiglianova izreka, moramo torej poznati celotno deformacijsko energijo oziroma celotno dopolnilno deformacijsko energijo telesa. V naslednjih dveh razdelkih kot primer izpeljemo izraze za deformacijsko energijo in dopolnilno deformacijsko energijo konstrukcije, sestavljene iz linijskih nosilcev.

6.16 Deformacijska energija linijske konstrukcije

Kakor vemo, govorimo o deformacijski energiji takrat, ko za osnovne spremenljivke za opis energijskega stanja izberemo pomike in zasuke oziroma deformacije telesa. Zaradi boljše preglednosti obravnavajmo izotermni primer ($\Delta T = 0$). Večkrat smo že omenili, da lahko mehansko stanje linearno elastičnega nosilca določimo s superpozicijo osnega, upogibnega in torzijskega obtežnega primera. Tako tudi v tem razdelku ločeno določimo prispevek D_u , ki ga k celotni deformacijski energiji prispevata osna in upogibna obtežba ter prispevek D_t čiste torzijske obtežbe.

Pri upogibu z osno silo smo pomike poljubne točke nosilca izrazili s pomiki in zasuki linijskega računskega modela z enačbami

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x) - y\omega_z(x) + z\omega_y(x) \\ u_y(x, y, z) &= v(x) \\ u_z(x, y, z) &= w(x). \end{aligned} \tag{6.360}$$

V razdelku **5.3** smo izpeljali enačbe tako imenovanega Bernoullijevega nosilca, pri katerem smo vzeli, da je le vzdolžna normalna deformacija ε_{xx} različna od nič, kotni deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} pa smo zanemarili. Tokrat si oglejmo nekoliko strožji *Timoshenkov*[†] *model linijskega nosilca*, s katerim skušamo vsaj približno zajeti tudi vpliv kotnih deformacij ε_{xy} in ε_{xz} na mehansko stanje upogibnega nosilca. Ob upoštevanju kinematičnih enačb (4.4) in (6.360) dobimo deformacije

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} - y\frac{d\omega_z}{dx} + z\frac{d\omega_y}{dx} \tag{6.361}$$

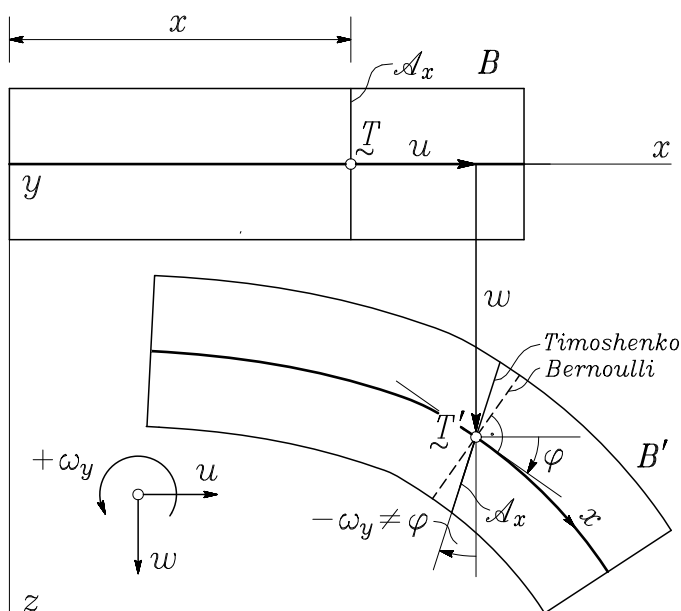
$$2\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{dv}{dx} - \omega_z \tag{6.362}$$

$$2\varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{dw}{dx} + \omega_y. \tag{6.363}$$

[†] Stephen P. Timoshenko, ukrajinsko-ameriški znanstvenik, 1878-1972.

Z enačbama (6.362) in (6.363) smo dejansko vzeli, da prerez, ki je bil v nedeformiranem stanju nosilca raven in pravokoten na vzdolžno računsko os, po deformaciji sicer še vedno ostane raven, vendar za razliko od Bernoullijevega modela ni več pravokoten na deformirano os nosilca. V primeru ravninskega upogiba to pomeni, da kot φ , ki ga v točki \tilde{T} tangenta na deformirano računsko os nosilca oklepa z osjo x , pri Timoshenkovem modelu ni enak negativnemu zasuku prereza \mathcal{A}_x okrog osi y (slika 6.26)

$$\varphi \approx \frac{dw}{dx} \neq -\omega_y. \quad (6.364)$$



Slika 6.26

Napetosti, ki ustrezajo deformacijam, izraženim z enačbami (6.361) do (6.363), določimo iz konstitucijskih zvez

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E \left(\frac{du}{dx} - y \frac{d\omega_z}{dx} + z \frac{d\omega_y}{dx} \right) \quad (6.365)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} = G \left(\frac{dv}{dx} - \omega_z \right) \quad (6.366)$$

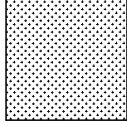
$$\sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} = G \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right) . \quad (6.367)$$

Pozornemu bralcu ni ušlo neskladje med enačbama (6.366) in (6.367) ter dosedanjimi ugotovitvami o poteku strižnih napetosti σ_{xy} in σ_{xz} po prečnem prerezu nosilca. Enačbi (5.118) in (5.119) kakor tudi rezultat Zgleda 5.14 kažejo, da sta strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} najmanj kvadratni funkciji koordinat y oziroma z . Desni strani v enačbah (6.366) in (6.367) pa sta pri izbranem prerezu $\mathcal{A}_x(x = konst.)$ očitno konstantni, saj sta izraženi s pomiki in zasuki linijskega računskega modela, ki so vsi zgolj funkcije tekoče koordinate x . V okviru Timoshenkove teorije je to neskladje upoštevano z vpeljavo korekcijskih koeficientov $\bar{\kappa}_y$ in $\bar{\kappa}_z$

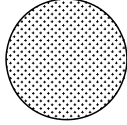
$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \bar{\kappa}_y G \left(\frac{dv}{dx} - \omega_z \right) \\ \sigma_{xz} &= \bar{\kappa}_z G \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right) . \end{aligned} \quad (6.368)$$

Z enačbama (6.368) seveda še vedno nismo natančno opisali poteka strižnih napetosti, saj sta tudi v tej obliki enakomerni po prerezu nosilca. Opisani pristop pomeni zgolj poskus, da bi kljub privzetemu linijskemu računskemu modelu upoštevali tudi neenakomerno razporeditev kotnih sprememb in s tem strižnih napetosti po prečnem prerezu nosilca.

Korekcijska koeficienta $\bar{\kappa}_y$ in $\bar{\kappa}_z$ sta v splošnem odvisna od oblike prečnega prereza in od Poissonovega količnika ν . V literaturi lahko zasledimo različne pristope k določitvi korekcijskih faktorjev, na primer v delih S. P. Timoshenka, R. D. Mindlina, G. R. Cowperja, J. W. Hutchinsona etc. Kot primer navedimo Timoshenkova korekcijska koeficienta za poln pravokotni in poln krožni prerez



$$\bar{\kappa}_y = \bar{\kappa}_z = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (6.369)$$



$$\bar{\kappa}_y = \bar{\kappa}_z = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu} . \quad (6.370)$$

V Zgledu 6.1 smo za pravokotni prerez določili strižni oblikovni koeficient $\kappa_z = 1.2$, s katerim zajamemo vpliv strižne napetosti σ_{xz} na dopolnilno virtualno delo notranjih sil pri upogibnem nosilcu. Hitro se lahko prepričamo, da gre za recipročno vrednost koeficienta $\bar{\kappa}_z$, ki jo dobimo, če v enačbi (6.369) zanemarimo vpliv prečne kontrakcije ($\nu = 0$).

Če upoštevamo, da so pomika u in w kakor tudi zasuk ω_y le funkcije vzdolžne koordinate x , lahko enačbo (6.148) za deformacijsko energijo D_u , ki pripada upogibni in osni obtežbi, sedaj zapišemo takole

$$\begin{aligned} D_u &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_x} E \left(\frac{du}{dx} - y \frac{d\omega_z}{dx} + z \frac{d\omega_y}{dx} \right)^2 dA_x dx + \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_x} \left[\bar{\kappa}_y G \left(\frac{dv}{dx} - \omega_z \right)^2 + \bar{\kappa}_z G \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)^2 \right] dA_x dx . \end{aligned} \quad (6.371)$$

Osi y in z naj bosta spet težiščni in glavni vztrajnostni osi prečnega prereza. S tem pri integriranju po prečnem prerezu \mathcal{A}_x odpadejo lihi členi in po krajšem urejanju dobimo razmeroma preprost izraz za deformacijsko energijo linijskega nosilca pri upogibu z osno silo

$$D_u = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \left[EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)^2 + EI_z \left(\frac{d\omega_z}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \left[\bar{\kappa}_y GA_x \left(\frac{dv}{dx} - \omega_z \right)^2 + \bar{\kappa}_z GA_x \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)^2 \right] dx. \quad (6.372)$$

Tudi v tem primeru je smiselno vpeljati novi oznaki A_y in A_z za tako imenovana *strižna prereza* glede na smeri y in z

$$A_y = \bar{\kappa}_y A_x \quad \text{in} \quad A_z = \bar{\kappa}_z A_x. \quad (6.373)$$

V splošnem primeru prostorske linijske konstrukcije se lahko v poljubnem elementu pojavi tudi torzijski moment in s tem torzijski zasuk ω_x . Prispevek D_t torzijskega stanja k celotni deformacijski energiji nosilca določimo ob upoštevanju enačb (5.284), (5.239) in (5.249)

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= G \frac{d\omega_x}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial z} & 2\varepsilon_{xy} &= \frac{d\omega_x}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \sigma_{xy} &= -G \frac{d\omega_x}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 2\varepsilon_{xy} &= -\frac{d\omega_x}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.374)$$

Po vstavitvi v splošno enačbo za deformacijsko energijo (6.148) sledi

$$D_t = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}) dV = \frac{1}{2} \int_0^l G \left(\frac{d\omega_x}{dx} \right)^2 \int_{\mathcal{A}_x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x dx. \quad (6.375)$$

V Zgledu 6.8 pokažemo, da velja

$$\int_{\mathcal{A}_x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x = I_x \quad (6.376)$$

in torzijski delež deformacijske energije zapišemo s preprostim izrazom

$$D_t = \frac{1}{2} \int_0^l G I_x \left(\frac{d\omega_x}{dx} \right)^2 dx. \quad (6.377)$$

Ob upoštevanju zvez (6.268) in (6.272) lahko brez posebnih izpeljav določimo tudi deformacijsko energijo, ki se nakopiči v linearno elastičnih osnih, polžastih in torzijskih vzmeteh

$$\begin{aligned} D(V_L) &= \frac{1}{2} k_L \Delta u^2 \\ D(V_S) &= \frac{1}{2} k_S \Delta \omega_y^2 \\ D(V_T) &= \frac{1}{2} k_T \Delta \omega_x^2. \end{aligned} \quad (6.378)$$

Končni izraz za celotno deformacijsko energijo konstrukcije, sestavljene iz n_e linijskih nosilcev, in v kateri nastopa skupno n_v osnih, polžastih in torzijskih vzmeti, zapišemo s superpozicijo vseh navedenih prispevkov

$$D = D_u + D_t + D(V_L) + D(V_S) + D(V_T). \quad (6.379)$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \left[E A_x \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + E I_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)^2 + E I_z \left(\frac{d\omega_z}{dx} \right)^2 \right] dx + \\ &\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \left[G A_y \left(\frac{dv}{dx} - \omega_z \right)^2 + G A_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)^2 \right] dx + \\ &\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} G I_x \left(\frac{d\omega_x}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_v} k^{(k)} \left(\Delta u^{(k)} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.380)$$

Pri tem smo vpeljali posplošeni oznaki $k^{(k)}$ in $\Delta u^{(k)}$ za elastično konstanto in spremembo karakterističnega pomika oziroma zasuka k -te vzmeti.

Za kasnejšo rabo si še oglejmo, kako so pri Timoshenkovem nosilcu notranje sile povezane s pomiki in zasuki. V ta namen se na kratko vrnemo k enačbam (5.29), v katerih upoštevamo zveze (6.365) in (6.368) ter oznaki (6.373). Tako dobimo

$$N_x = \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x = EA_x \frac{du}{dx} \quad (6.381)$$

$$N_y = \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xy} dA_x = GA_y \left(\frac{dv}{dx} - \omega_z \right) \quad (6.382)$$

$$N_z = \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xz} dA_x = GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right) \quad (6.383)$$

$$M_y = \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x = EI_y \frac{d\omega_y}{dx} \quad (6.384)$$

$$M_z = - \int_{\mathcal{A}_x} y \sigma_{xx} dA_x = EI_z \frac{d\omega_z}{dx}. \quad (6.385)$$

6.17 Dopolnilna deformacijska energija linijske konstrukcije

Izraz za celotno dopolnilno deformacijsko energijo linijske konstrukcije najhitreje izpeljemo s primerjavo enačbe (6.164) za dopolnilno deformacijsko energijo

$$D^* = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (6.386)$$

z enačbo (6.220) za dopolnilno virtualno delo notranjih sil

$$\delta \bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV. \quad (6.387)$$

Razen faktorja 2 je razlika med enačbama v tem, da v enačbi (6.387) deformacije ε_{ij} pripadajo dejanski zunanji obtežbi, napetosti $\delta\sigma_{ij}$ pa virtualni obtežbi, medtem ko v enačbi (6.386) tako deformacije kakor tudi napetosti pripadajo dejanski obtežbi konstrukcije. Od tod ni težko ugotoviti, da lahko dopolnilno deformacijsko energijo linijske konstrukcije zapišemo kar po analogiji z enačbo (6.282), v kateri pa moramo virtualne notranje sile in virtualne sile v vzmeteh nadomestiti z dejanskimi notranjimi in vzmetnimi silami. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
 D^* = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x^2}{EA_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) dx + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \left(\kappa_y \frac{N_y^2}{GA_x} + \kappa_z \frac{N_z^2}{GA_x} \right) dx + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} \frac{M_x^2}{GI_x} dx + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_0^{l_e} (\alpha_T \Delta T_x N_x - \alpha_T \Delta T_y M_z + \alpha_T \Delta T_z M_y) dx + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_v} \frac{(V^{(k)})^2}{k^{(k)}}. \tag{6.388}
 \end{aligned}$$

6.18 Izrek o minimumu potencialne energije

Znova si oglejmo trdno telo \mathcal{B} (slika 4.1) in vzemimo, da se je po nanosu zunanje obtežbe \mathbf{p}_n in \mathbf{v} umirilo v ravnotežni legi, ki je opisana s poljem pomikov \mathbf{u} in pripadajočimi deformacijami $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Pri tem je specifična površinska obtežba \mathbf{p}_n predpisana na delu \mathcal{S}_p zunanje mejne ploskve, z \mathcal{S}_u pa je označen tisti del zunanje mejne ploskve, na katerem so zaradi podpiranja ali na kak drugačen način predpisani pomiki \mathbf{u} .

V razdelku 6.7 smo ugotovili, da lahko sistem parcialnih diferencialnih enačb ravnotežja, ki smo ga izpeljali v poglavju o napetostih,

enakovredno nadomestimo z izrekom o virtualnem delu (6.201). Zapišimo ta izrek v nekoliko drugačni obliki

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i p_{ni} \delta u_i dS - \int_{\mathcal{V}} \sum_i v_i \delta u_i dV = 0. \quad (6.389)$$

Kakor vidimo, je ravnotežni pogoj, zapisan z enačbo (6.389), zelo splošen in neodvisen od materialnih lastnosti obravnavanega telesa. V nadaljevanju vpeljemo dve pomembni omejitvi:

i material je elastičen, torej obstoji taka funkcija deformacijskega stanja $\mathcal{D}(\varepsilon_{ij})$ (v razdelku 6.4 smo jo prepoznali kot specifično deformacijsko energijo telesa), da velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad (6.390)$$

ii zunanja obtežba je *potencialna*. To pomeni, da lahko najdemo taki *potencialni funkciji* $\Phi(u_i)$ in $\Psi(u_i)$, da velja

$$p_{ni} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad \text{in} \quad v_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial u_i}. \quad (6.391)$$

Kot zgled navedimo potencialno funkcijo

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta u_z^2 \quad \rightarrow \quad p_{nz} = -\beta u_z,$$

s katero, na primer, ponazorimo kontaktni tlak med dnom temelja in elastično zemljino s koeficientom podlage β , pri kateri je interakcijska površinska obtežba, s katero temeljna tla delujejo na temelj, premosorazmerna s posedkom temelja.

Če omejitvi (6.390) in (6.391) upoštevamo v ravnotežnem pogoj (6.389), sledi

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \delta u_i dS + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \delta u_i dV = 0. \quad (6.392)$$

V skladu z definicijo, ki smo jo vpeljali v Uvodu v variacijski račun, vpeljemo prve variacije funkcij \mathcal{D} , Φ in Ψ

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{D} &= \sum_i \sum_j \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} & \delta\Phi &= \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \delta u_i \\ & & \delta\Psi &= \sum_i \frac{\partial\Psi}{\partial u_i} \delta u_i \end{aligned} \quad (6.393)$$

in jih vstavimo v enačbo (6.392)

$$\int_{\mathcal{V}} \delta\mathcal{D} dV + \int_{\mathcal{S}_p} \delta\Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \delta\Psi dV = 0. \quad (6.394)$$

Uporabimo še pravilo o komutativnosti operatorja δ in dobimo

$$\delta \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV + \delta \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \delta \int_{\mathcal{V}} \Psi dV = 0. \quad (6.395)$$

Prvi integral v dobljeni enačbi predstavlja celotno deformacijsko energijo telesa D , vsoto drugega in tretjega integrala pa označimo z \mathcal{V} in jo imenujemo *potencial zunanjih sil*

$$\mathcal{V} = \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \Psi dV. \quad (6.396)$$

S tem se enačba (6.395) glasi

$$\delta D + \delta\mathcal{V} = \delta(D + \mathcal{V}) = 0. \quad (6.397)$$

Vsoto v oklepaju imenujemo *potencialna energija telesa Π*

$$\Pi = D + \mathcal{V} = D + \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \Psi dV. \quad (6.398)$$

V splošnem primeru potencialne obtežbe moramo torej poznati potencialni funkciji Φ in Ψ , da bi lahko izračunali potencialno energijo Π .

Izrek o virtualnem delu (6.389) preide s tem v zahtevo, da je prva variacija potencialne energije v ravnotežnem stanju telesa enaka nič

$$\delta\Pi = 0. \quad (6.399)$$

V okviru vpeljanih omejitev je zahteva (6.399) znana kot *izrek o stacionarni vrednosti potencialne energije*, ki velja tako za linearno kakor tudi za nelinearno elastična telesa:

Med vsemi polji pomikov, ki zadoščajo kinematičnim robnim pogojem, ustreza ravnotežnemu stanju telesa tisto polje pomikov, pri katerem ima potencialna energija telesa stacionarno vrednost.

Pri tem smo vzeli, da je potencialna energija funkcija pomikov $\Pi = \Pi(u_i)$. Ker so pomiki u_i v splošnem funkcije koordinat, je potencialna energija *funktional*. Z enačbo (6.399) smo torej zahtevali, da ima funkcional Π v ravnotežnem stanju telesa *stacionarno točko*, ne vemo pa še, ali gre pri tem za lokalni minimum, lokalni maksimum ali sedlo. Vrsto stacionarne točke lahko določimo le ob nadaljnji omejitvi na *konservativno obtežbo*. V tem primeru se obtežbi \mathbf{p}_n in \mathbf{v} med deformiranjem telesa ne spreminjata, torej nista odvisni od pomikov. Tedaj sta potencialni funkciji Φ in Ψ kvečjemu linearni funkciji pomikov in velja

$$\begin{aligned} \Phi &= - \sum_i p_{ni} u_i & \rightarrow & \frac{\partial p_{ni}}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} = 0 \\ \Psi &= - \sum_i v_i u_i & & \frac{\partial v_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_j} = 0. \end{aligned} \quad (6.400)$$

Potencialna energija je tedaj

$$\Pi = D - \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i p_{ni} u_i dS - \int_{\mathcal{V}} \sum_i v_i u_i dV \quad (6.401)$$

oziroma ob upoštevanju enačb (6.139) in (6.400)

$$\Pi = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV + \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \Psi dV. \quad (6.402)$$

Vzemimo, da ima potencialna energija pri aktualnem polju pomikov u_j in pripadajočih deformacijah ε_{ij} stacionarno vrednost. Kakor smo pokazali v poglavju o osnovah variacijskega računa, odločajo o nara-vi ugotovljene stacionarne točke funkcionala druga in višje variacije. Ugotoviti moramo, kako se spremeni vrednost funkcionala Π , če se pomiki spremenijo za δu_j , pri čemer se deformacije spremenijo za $\delta\varepsilon_{ij}$. Funkcional Π razvijemo v Taylorjevo vrsto glede na vrednost pri pomikih u_j in deformacijah ε_{ij} in izrazimo njegovo spremembo z vsoto variacij

$$\Delta\Pi = \Pi(u_j + \delta u_j) - \Pi(u_j) = \delta\Pi + \delta^2\Pi + \delta^3\Pi + \dots \quad (6.403)$$

Obravnavamo stacionarno točko funkcionala, zato je $\delta\Pi = 0$. Ker so variacije pomikov poljubne, jih lahko izberemo tako majhne, da druga variacija $\delta^2\Pi$ določa predznak vsote vseh preostalih členov na desni strani enačbe (6.403). Izračunamo jo z izrazom

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi &= \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} dV + \\ &\quad \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j dS + \\ &\quad \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j dV. \end{aligned} \quad (6.404)$$

Zaradi lastnosti (6.400) sta drugi in tretji člen enaka nič, o pomenu prvega pa se najlaže prepričamo, če specifično deformacijsko energijo \mathcal{D} razvijemo v potenčno vrsto okrog deformacijskega stanja ε_{ij}

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) &= \mathcal{D}(\varepsilon_{ij}) + \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial\varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} + \\ &\quad \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (6.405)$$

Sedaj pa zapišimo vrsto (6.405) za nedeformirano stanje telesa, ko je $\varepsilon_{ij} = 0$. Ob upoštevanju enačbe (6.390) dobimo

$$\mathcal{D}(\delta\varepsilon_{ij}) = \mathcal{D} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} + \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} \delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} + \dots \quad (6.406)$$

Umestno je vzeti, da je specifična deformacijska energija nedeformiranega telesa enaka nič in da so v tem stanju enake nič tudi vse napetosti

$$\mathcal{D} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} = 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{ij} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} = 0. \quad (6.407)$$

Prav tako lahko predpostavimo, da so prirastki deformacij $\delta\varepsilon_{ij}$ tako majhni, da kvadratni člen določa predznak celotne desne strani v enačbi (6.406). Kakor vidimo, gre pri tem za spremembo specifične deformacijske energije, če se v začetku nedeformirano telo deformira za $\delta\varepsilon_{ij}$. To pomeni, da je bilo v deformiranje elementa telesa s enotsko prostornino vloženo določeno mehansko delo, za prav toliko pa se je povečala specifična deformacijska energija tega elementa. Sprememba specifične deformacijske energije je torej pri elastičnem telesu vedno pozitivna (le v primeru, da so vsi prirastki deformacij enaki nič, je tudi sprememba specifične deformacijske energije enaka nič). Do enakega sklepa bi prišli tudi s čisto matematičnim razmislekom, saj vsota v kvadratnem členu predstavlja pozitivno definitno kvadratno formo, za katero velja, da je vedno pozitivna, le v primeru $\delta\varepsilon_{ij} = 0$ je enaka nič. S tem smo dokazali, da je sprememba potencialne energije $\Delta\Pi$ v okolici ravnotežne lege $\varepsilon_{ij} = 0$ pozitivna, torej gre za lokalni minimum funkcionala Π . To ugotovitev brez dokaza posplošimo na poljubno deformirano stanje telesa[†] in jo predstavimo kot *izrek o minimumu potencialne energije*:

[†] Za linearno elastično telo je dokaz ob upoštevanju enačbe (6.136) razmeroma preprosto, zato ga prepuščamo prizadevnemu bralcu.

Med vsemi polji pomikov, ki zadoščajo kinematičnim robnim pogojem, ustreza ravnotežnemu stanju telesa tisto polje pomikov, pri katerem ima potencialna energija telesa lokalni minimum.

Ravnotežno stanje, ki ustreza minimalni vrednosti potencialne energije telesa, imenujemo *stabilno ravnotežje*. V primeru, da bi bila sprememba potencialne energije $\Delta\Pi$ negativna, bi govorili o lokalnem maksimumu funkcionala Π in *nestabilnem ravnotežju telesa*. Primer $\Delta\Pi = 0$ pa opredelimo kot nevtralno stacionarno točko ali sedlo funkcionala in s tem *nevtralno ravnotežje telesa*.

$$\begin{array}{lll} \delta\Pi = 0 & \text{in} & \Delta\Pi > 0 & \text{stabilno ravnotežje} \\ \delta\Pi = 0 & \text{in} & \Delta\Pi = 0 & \text{nevtralno ravnotežje} \\ \delta\Pi = 0 & \text{in} & \Delta\Pi < 0 & \text{nestabilno ravnotežje.} \end{array}$$



Slika 6.27

Omenjene vrste ravnotežja si ponazorimo s klasično fizikalno skico kroglice v različnih ravnotežnih položajih glede na razgibano podlago (slika 6.27). Ta skica nas med drugim tudi opozori na zelo pomembno dejstvo, da je pojem ravnotežja v vseh treh primerih povezan z lokalnimi stacionarnimi točkami funkcionala Π , torej z majhnimi premiki iz ravnotežne lege. Če bi se namreč kroglica iz nevtralne lege premaknila preveč v levo, bi prešla iz nevtralnega v stabilno ravnotežno stanje, pri velikem premiku v desno pa v stanje nestabilnega ravnotežja.

Kot zanimivost si še oglejmo posebni primer, pri katerem je dejanska zunanja obtežba stabilno podprtega telesa sestavljena le iz medsebojno neodvisnih točkovnih sil in dvojic, ki delujejo na mejno ploskev

telesa \mathcal{S}_p . Zunanjo obtežbo lahko tedaj zajamemo z nizom posplošenih sil P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ki jim ustrezajo posplošeni pomiki u_i ($i = 1, 2, \dots, n$). V skladu z enačbo (6.401) izrazimo potencialno energijo telesa v odvisnosti od posplošenih pomikov u_i

$$\Pi(u_i) = D(u_i) - \sum_{i=1}^n P_i u_i. \quad (6.408)$$

Izrek o minimumu potencialne energije zahteva, da je prva variacija potencialne energije glede na variacije pomikov δu_i enaka nič. Ob upoštevanju pravila (6.74) sledi

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial D}{\partial u_i} \delta u_i - \sum_{i=1}^n P_i \delta u_i = 0 \quad (6.409)$$

in dalje

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial D}{\partial u_i} - P_i \right) \delta u_i = 0. \quad (6.410)$$

Ker so variacije δu_i poljubne in neodvisne med seboj, je ravnotežni pogoj (6.410) izpolnjen le, če velja

$$\frac{\partial D}{\partial u_i} - P_i = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial D}{\partial u_i} = P_i. \quad (6.411)$$

Dobljeno zakonitost smo že spoznali kot prvi Castiglianov izrek, le da smo jo tokrat, podobno kot je to narejeno v številnih mehanskih učbenikih, izpeljali iz izreka o minimumu potencialne energije. Lahko torej ugotovimo, da prvi Castiglianov izrek dejansko predstavlja eno od možnih oblik ravnotežnih pogojev.

6.19 Izrek o minimumu dopolnilne potencialne energije

Še enkrat se vrnimo k trdnemu telesu \mathcal{B} (slika 4.1), ki se je po nanosu zunanje obtežbe \mathbf{p}_n in \mathbf{v} umirilo v ravnotežni legi. Ta

ravnotežna lega je v geometrijskem pogledu opisana s poljem pomikov \mathbf{u} , ki je s pripadajočimi deformacijami ε_i in zasuki ω povezano s kinematičnimi pogoji (6.188). Pri tem je na delu \mathcal{S}_p zunanje mejne ploskve predpisana specifična površinska obtežba \mathbf{p}_n , z \mathcal{S}_u pa je označen tisti del zunanje mejne ploskve, na katerem so zaradi podpiranja ali na kak drugačen način predpisani pomiki \mathbf{u} .

Kakor smo ugotovili v razdelku 6.8, lahko kinematični pogoj, ki ga v vektorski obliki zapišemo z enačbo (6.188), v skalarnem zapisu pa ga izraža sistem devetih parcialnih diferencialnih enačb (2.96) in (2.97), enakovredno nadomestimo z izrekom o dopolnilnem virtualnem delu (6.210). Zapišimo ta izrek v nekoliko drugačni obliki

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{\mathcal{S}_u} \sum_i u_i \delta p_{ni} dS - \int_{\mathcal{V}} \sum_i u_i \delta v_i dV = 0. \quad (6.412)$$

Kinematični pogoj, zapisan z enačbo (6.412), je zelo splošen in neodvisen od materialnih lastnosti obravnavanega telesa. Bolj posebno obliko kinematičnih enačb dobimo, če sta izpolnjena dva dodatna pogoja:

(1) material je elastičen, torej obstoji taka funkcija napetostnega stanja $\mathcal{D}^*(\sigma_{ij})$ (v razdelku 6.5 smo jo prepoznali kot specifično dopolnilno deformacijsko energijo telesa), da velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad (6.413)$$

(2) najti je mogoče potencialno funkcijo zunanje obtežbe \mathcal{V}^*

$$\mathcal{V}^* = - \int_{\mathcal{S}_u} \sum_i u_i p_{ni} dS - \int_{\mathcal{V}} \sum_i u_i v_i dV, \quad (6.414)$$

katere prva variacija $\delta \mathcal{V}$ je podana z izrazom

$$\delta \mathcal{V}^* = - \int_{\mathcal{S}_u} \sum_i u_i \delta p_{ni} dS - \int_{\mathcal{V}} \sum_i u_i \delta v_i dV. \quad (6.415)$$

Tedaj lahko enačbo (6.412) zapišemo v naslednji obliki

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dV + \delta \mathcal{V}^* = 0. \quad (6.416)$$

Ob upoštevanju enačb (6.74), (6.71) in (6.161) velja

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{\mathcal{V}} \delta \mathcal{D}^* dV = \delta \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D}^* dV = \delta D^* \quad (6.417)$$

in enačba (6.416) se glasi

$$\delta D^* + \delta \mathcal{V}^* = \delta (D^* + \mathcal{V}^*) = 0. \quad (6.418)$$

Vsoto v oklepaju imenujemo *dopolnilna potencialna energija telesa* Π^*

$$\Pi^* = D^* + \mathcal{V}^* = D^* - \int_{\mathcal{S}_u} \sum_i u_i p_{ni} dS - \int_{\mathcal{V}} \sum_i u_i v_i dV. \quad (6.419)$$

Izrek o dopolnilnem virtualnem delu (6.412) preide s tem v zahtevo, da je prva variacija dopolnilne potencialne energije telesa enaka nič

$$\delta \Pi^* = 0. \quad (6.420)$$

To pomeni, da predstavlja aktualno napetostno stanje, pri katerem je izpolnjen pogoj (6.420), *stacionarno točko* dopolnilne potencialne energije telesa.

V praktičnih primerih praviloma variiramo zgolj specifično površinsko obtežbo in vzamemo $\delta v_i = 0$, tako da je

$$\delta \Pi^* = \int_{\mathcal{V}} \delta \mathcal{D}^* dV - \int_{\mathcal{S}_u} \sum_i u_i \delta p_{ni} dS = 0. \quad (6.421)$$

V okviru vpeljanih omejitev je zahteva (6.420) znana kot *izrek o stacionarni vrednosti dopolnilne potencialne energije*, ki velja tako za linearno kakor tudi za nelinearno elastična telesa:

Za tisto izmed vseh možnih statično dopustnih napetostnih stanj, pri katerem ima dopolnilna potencialna energija telesa stacionarno vrednost, pripadajoči pomiki in deformacije zadoščajo kinematičnim pogojem.

Dokaz, da ima dopolnilna potencialna energija v stacionarni točki svoj minimum, je podoben kot pri potencialni energiji. V tem učbeniku se mu zato odrečemo in zapišemo izrek o stacionarni vrednosti dopolnilne potencialne energije v še bolj opredeljeni obliki kot *izrek o minimumu dopolnilne potencialne energije*:

Za tisto izmed vseh možnih statično dopustnih napetostnih stanj, pri katerem ima dopolnilna potencialna energija telesa lokalni minimum, pripadajoči pomiki in deformacije zadoščajo kinematičnim pogojem.

Še enkrat se vrnimo k primeru, pri katerem vso dejansko zunanjo obtežbo opišemo z nizom posplošenih sil P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ki jim ustrezajo posplošeni pomiki u_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Dopolnilno deformacijsko energijo D^* in potencialno funkcijo \mathcal{V}^* lahko tedaj določimo z enačbama

$$D^* = D^*(P_i) \quad \text{in} \quad \mathcal{V}^* = - \sum_{i=1}^n u_i P_i. \quad (6.422)$$

Izrek o minimumu dopolnilne potencialne energije se s tem glasi

$$\delta \Pi^* = \delta (D^* + \mathcal{V}^*) = \delta \left[D^*(P_i) - \sum_{i=1}^n u_i P_i \right] = 0. \quad (6.423)$$

Ob upoštevanju pravila za določitev prve variacije funkcionala Π^* sledi

$$\delta \Pi^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial D^*}{\partial P_i} \delta P_i - \sum_{i=1}^n u_i \delta P_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial D^*}{\partial P_i} - u_i \right) \delta P_i = 0. \quad (6.424)$$

Ker so variacije δP_i posplošenih sil poljubne, je dobljeni pogoj za minimum dopolnilne potencialne energije izpolnjen le, če velja

$$\frac{\partial D^*}{\partial P_i} - u_i = 0 \quad \text{oziroma} \quad \frac{\partial D^*}{\partial P_i} = u_i. \quad (6.425)$$

Dobili smo eno od možnih oblik drugega Castiglianovega izreka (6.359), ki velja tako za linearno kakor tudi za nelinearno elastična telesa in je v mehaniki znana kot *Engesserjev izrek*.

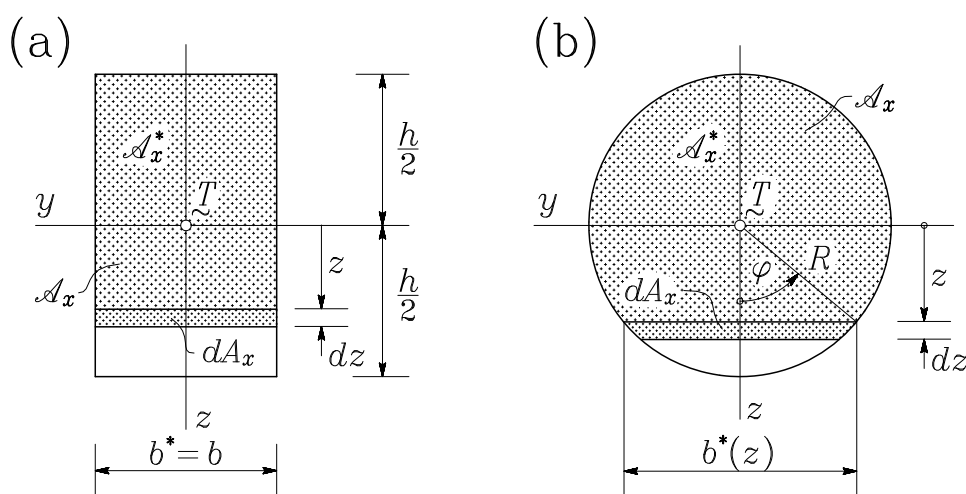
Kakor se bomo prepričali na praktičnih zgledih, ponujajo energijske in variacijske metode, ki smo jih spoznali v tem poglavju, različne udobne možnosti za reševanje praktičnih konstruktorskih nalog.

6.20 Energijske metode - Zgledi.

Zgled 6.1

Določi strižne oblikovne koeficiente κ_y in κ_z za pravokotni in krožni prečni prerez linijskega nosilca.

Tako pravokotni kakor tudi krožni prerez sta dvojno simetrična glede na lokalni osi y in z , zato sta pri obeh koeficienta κ_y in κ_z enaka med seboj ($\kappa_y = \kappa_z$).



Slika Z-6.1

Da bi lahko uporabili rezultate zgledov 5.14 in 5.16, določimo za vsakega od omenjenih prerezov le oblikovni koeficient κ_z , ki smo ga v razdelku 6.10 vpeljali z drugo od enačb (6.237)

$$\kappa_z = \frac{A_x}{I_y^2} \int_{A_x} \left(\frac{S_y^*}{b^*} \right)^2 dA_x.$$

Začnimo s pravokotnim prerezom (slika Z-6.1 a), pri katerem je

$$A_x = bh, \quad I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad b^* = b \quad \text{in} \quad dA_x = b dz.$$

V zgledu 5.14 smo izpeljali tudi izraz za statični moment $S_y^*(z)$ delnega prereza \mathcal{A}_x^* glede na os y

$$S_y^*(z) = \frac{bh^2}{8} \left[\left(\frac{2z}{h} \right)^2 - 1 \right].$$

Po vstavitvi v formulo za κ_z sledi

$$\kappa_z = \frac{9}{4h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(\frac{2z}{h} \right)^2 - 1 \right]^2 dz.$$

Integral najhitreje izračunamo z uvedbo nove integracijske spremenljivke ζ

$$\zeta = \frac{2z}{h} \quad \rightarrow \quad dz = \frac{h}{2} d\zeta \quad \text{in} \quad \begin{cases} z = -\frac{h}{2} \dots \zeta = -1 \\ z = \frac{h}{2} \dots \zeta = 1. \end{cases}$$

Določitev koeficienta κ_z je sedaj čisto preprosta

$$\kappa_z = \frac{9}{8} \int_{-1}^1 (\zeta^2 - 1)^2 d\zeta = \frac{9}{8} \left[\frac{\zeta^5}{5} - 2\frac{\zeta^3}{3} + \zeta \right]_{-1}^1.$$

Vstavimo meje in dobimo

$$\kappa_y = \kappa_z = \frac{6}{5} = 1.2.$$

Na podoben način se lotimo tudi določitve strižnega oblikovnega koeficienta za krožni prerez. V zgledu 5.16 smo že pripravili izraze, ki nastopajo v formuli za κ_z

$$A_x = \pi R^2, \quad I_y = \frac{\pi R^4}{4}, \quad b^* = 2\sqrt{R^2 - z^2},$$

$$dA_x = 2\sqrt{R^2 - z^2} dz \quad \text{in} \quad S_y^* = -\frac{2}{3}\sqrt{(R^2 - z^2)^3}.$$

S tem po krajšanju dobimo

$$\kappa_z = \frac{32}{9\pi R^6} \int_{-R}^R \sqrt{(R^2 - z^2)^5} dz.$$

V tem primeru se za izvrednotenje integrala na desni strani kot najugodnejša izkaže zamenjava (slika Z-6.1 b)

$$z = R \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{R^2 - z^2} = R \sin \varphi \\ dz = -R \sin \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Pripadajoče meje integrala so sedaj

$$\begin{aligned} z = -R &\rightarrow \cos \varphi = -1 \rightarrow \varphi = \pi \\ z = R &\rightarrow \cos \varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0 \end{aligned}$$

in sledi

$$\kappa_z = \frac{32}{9\pi} \int_0^\pi \sin^6 \varphi d\varphi.$$

Sedaj si že lahko pomagamo z matematičnim priročnikom[†] in dobimo

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^6 \varphi d\varphi &= \left[-\frac{\sin^5 \varphi \cos \varphi}{6} \right]_0^\pi + \frac{5}{6} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi = \\ &= \left[\frac{5}{6} \left(\frac{3\varphi}{8} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi \right) \right]_0^\pi = \frac{15\pi}{48} \end{aligned}$$

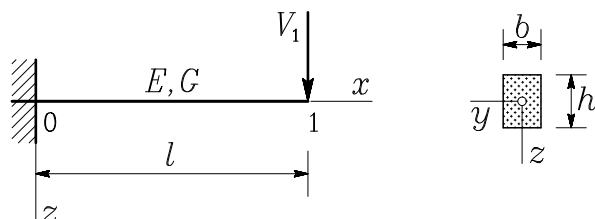
in koeficient κ_z je

$$\kappa_z = \frac{32 \cdot 15\pi}{9\pi \cdot 48} \quad \rightarrow \quad \kappa_y = \kappa_z = \frac{10}{9} = 1.11.$$

[†] Glej na primer: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlig, Matematični priročnik, TZS Ljubljana, 1997, str. 876.

Zgled 6.2

Oceni napako, ki jo naredimo pri določitvi povesa w_1 in zasuka ω_{y1} na prostem koncu previsnega nosilca s pravokotnim prečnim prerezom (slika Z-6.2 a), če ne upoštevamo vpliva strižnih napetosti.



Slika Z-6.2 a

V zgledu 6.1 smo za pravokotni prerez določili strižna oblikovna koeficienta $\kappa_y = \kappa_z = 1.2$, s katerima upoštevamo vpliv strižnih napetosti in s tem prečnih sil pri računanju pomikov in zasukov linijskih nosilcev.

Poves w_1 in zasuk ω_{y1} na koncu previsa določimo z izrekom o dopolnilnem virtualnem delu. Za določitev povesa w_1 obtežimo nosilec z navpično virtualno silo $\delta P_1 = 1$, za določitev zasuka ω_{y1} pa z virtualno dvojico $\delta M_1 = 1$ (slika Z-6.2 b) in določimo potek pripadajočih notranjih sil. Iz enačb (6.218) in (6.282) sledi

$$w_1 = \delta \bar{D}^* (\delta P_1 = 1) = \int_0^l \left[\frac{M_y(V_1) \delta M_y(\delta P_1 = 1)}{EI_y} + \kappa_z \frac{N_z(V_1) \delta N_z(\delta P_1 = 1)}{GA_x} \right] dx.$$

Integral izvednotimo po pravilu Vereščagina in dobimo

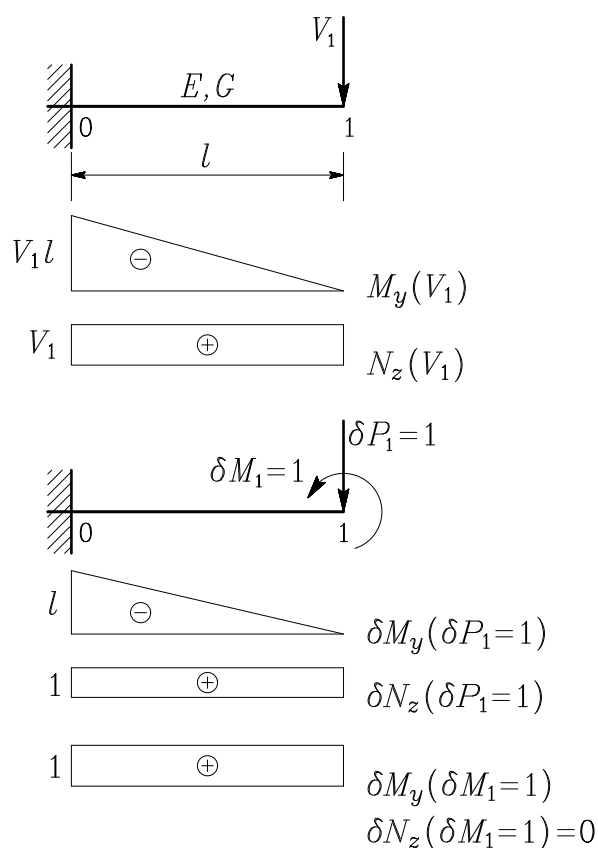
$$w_1 = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{V_1 l \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{\kappa_z}{GA_x} \cdot V_1 l \cdot 1 = V_1 \frac{l^3}{3EI_y} + V_1 \frac{\kappa_z}{GA_x}.$$

Podobno določimo zasuk ω_{y1}

$$\omega_{y1} = \delta \bar{D}^* (\delta M_1 = 1) = \int_0^l \left[\frac{M_y(V_1) \delta M_y(\delta M_1 = 1)}{EI_y} + \kappa_z \frac{N_z(V_1) \delta N_z(\delta M_1 = 1)}{GA_x} \right] dx .$$

Ker je $\delta N_z(\delta M_1 = 1) = 0$, sledi

$$\omega_{y1} = -V_1 \frac{l^2}{2 EI_y} .$$



Slika Z-6.2 b

Če dobljena rezultata primerjamo z rezultati iz zgleđa Z-5.6, ugotovimo, da prečna sila na zasuk prostega konca konzole ne vpliva, pri povesu w_1

pa je vpliv prečne sile zajet v drugem členu. Da bi lahko ocenili ta vpliv, zapišimo izraz za w_1 tako, da za primerjavo vzamemo "Bernoullijevo" vrednost w_1^B

$$w_1^B = V_1 \frac{l^3}{3EI_y},$$

ki jo dobimo, če vpliva prečne sile ne upoštevamo. Tedaj je

$$w_1 = V_1 \frac{l^3}{3EI_y} \left(1 + \kappa_z \frac{3EI_y}{GA_x l^2} \right).$$

Upoštevamo, da je pri pravokotnem prerezu

$$A_x = bh, \quad I_y = \frac{bh^3}{12} \quad \text{in} \quad \kappa_z = 1.2$$

in dobimo

$$w_1 = w_1^B \left[1 + 0.3 \frac{E}{G} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

Rezultat potrjuje že večkrat omenjeno predpostavko, da je vpliv strižnih napetosti in s tem prečnih sil na pomike in zasuke linijskega nosilca tem manjši, čim manjše je razmerje med merodajno dimenzijo prečnega prereza (v našem primeru je to višina h) in dolžino nosilca. Z drugimi besedami: čim bolj je za nosilec upravičena vpeljava linijskega računskega modela, tem manjšo napako naredimo z zanemaritvijo vpliva prečnih sil na pomike in zasuke nosilca. Da bi napako tudi numerično ocenili, vzemimo, da gre za material s Poissonovim koeficientom $\nu = 0.17$. Tedaj je

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2.34} \quad \text{in} \quad 0.3 \frac{E}{G} = 0.702.$$

Tako dobimo

$$w_1 = w_1^B \left[1 + 0.702 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

Napako nap definiramo glede na točnejšo vrednost w_1

$$nap = \frac{w_1^B - w_1}{w_1} = -\frac{0.702 \left(\frac{h}{l}\right)^2}{1 + 0.702 \left(\frac{h}{l}\right)^2}.$$

Velikosti napake nap so za različna razmerja h/l prikazane v preglednici P-6.1.

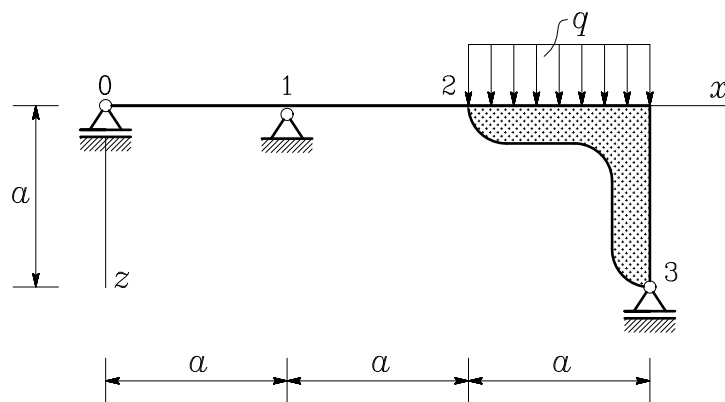
Preglednica P-6.1

$h : l$	nap	$nap(\%)$
1 : 10	-0.007	-0.7 %
1 : 8	-0.011	-1.1 %
1 : 6	-0.019	-1.9 %
1 : 5	-0.027	-2.7 %
1 : 4	-0.042	-4.2 %

Rezultati so zgovorni: Pri nosilcu z razmerjem višine proti dolžini 1 : 10 je napaka manjša od enega odstotka. Še pri razmerju 1 : 5 je napaka zgolj 2.7 %, kar je v večini praktičnih primerov znotraj inženirske natančnosti. Pri razmerju 1 : 4 se napaka nekoliko poveča, pri čemer pa že vpeljava linijskega računskega modela za nosilec s takim razmerjem dimenzij načeloma ni več primerna. Ob tem še spomnimo, da navedeno ugotovitev o zanemarljivem vplivu prečnih sil na pomike in zasuke izrazito podolgovatih nosilcev lahko posplošimo na večino linijskih konstrukcij. Numerične vrednosti napak, ki so prikazane v tem zgledu, pa seveda pripadajo zgolj obravnavanemu tipu nosilca in privzeti obtežbi, če za primerjavo vzamemo povos in zasuk na prostem koncu konzole.

Zgled 6.3

Po metodi sil določi reakcije v podporah za nosilec iz zglada 5.10 (slika Z-6.3 a). Določi tudi vodoravni pomik in zasuk v točki 3.



Slika Z-6.3 a

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Statično določen osnovni sistem dobimo tako, da v skladu z idejo metode sil sprostimo podporo v točki 3 in njen vpliv nadomestimo z navpično silo X_1 . To seveda ni edini možni način sprostitve konstrukcije, vendar se pri nadaljnjem delu izkaže za ugodnega.

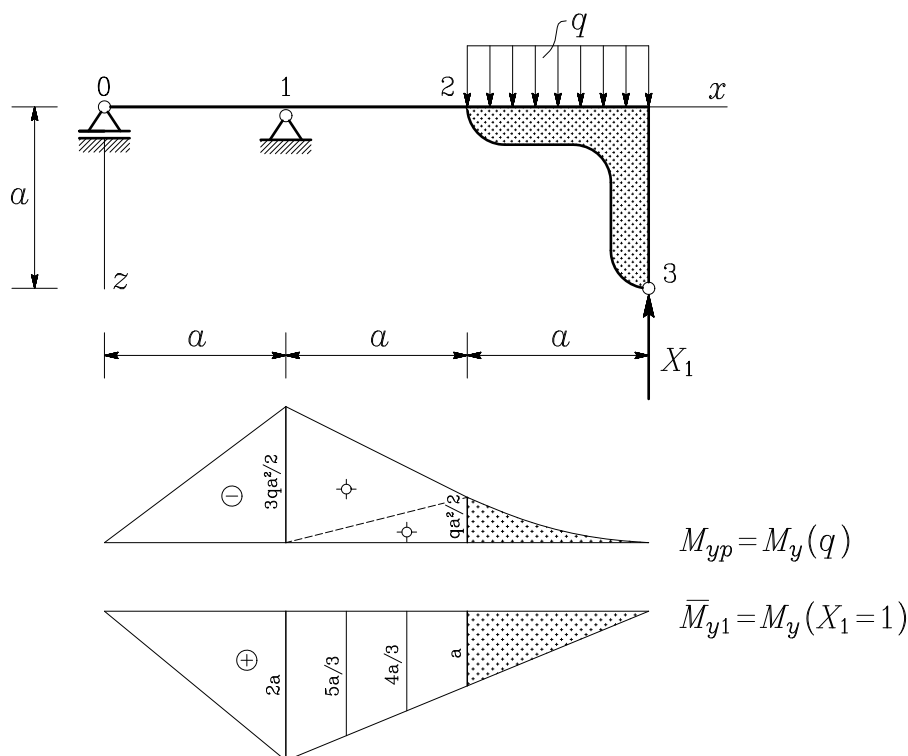
V naslednjem koraku konstruiramo diagrama upogibnih momentov, ki pripadata dejanski zunanji obtežbi q in enotski nadomestni sili $X_1 = 1$ (slika Z-6.3 b). Dejansko vrednost nadomestne sile X_1 izračunamo iz kinematičnega robnega pogoja

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0,$$

ki zahteva, da je navpični pomik točke 3 enak nič. Koeficienta a_{11} in b_1 izrazimo z enačbama (6.319) in (6.320)

$$a_{11} = \int_0^{3a} \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} dx \quad \text{in} \quad b_1 = \int_0^{3a} \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} dx.$$

Integrala izvednotimo z metodo Vereščagina, pri čemer upoštevamo, da je del nosilca med točkama 2 in 3 absolutno tog (pripadajoča dela diagramov upogibnih momentov sta zato zasenčena, njun prispevek v obeh integralih je enak nič).



Slika Z-6.3 b

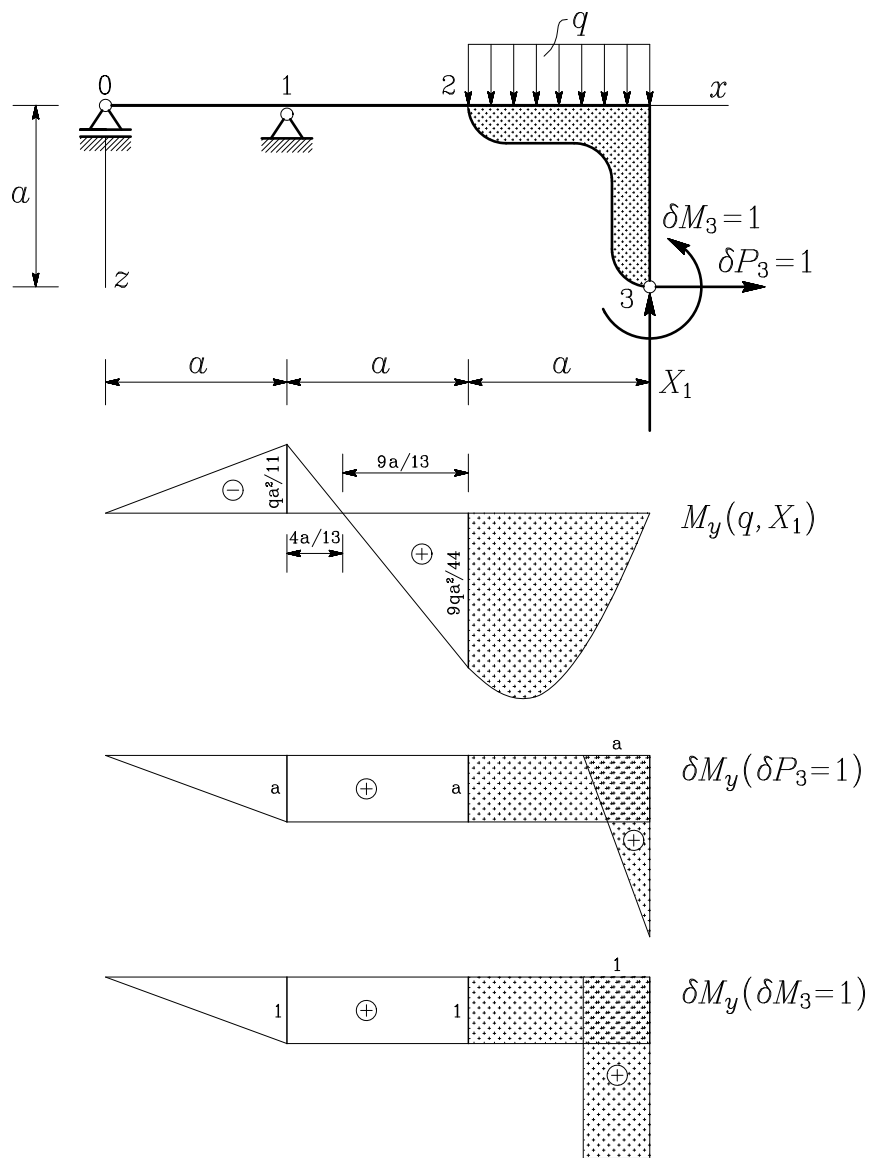
$$EI_y a_{11} = \frac{2a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + \frac{2a \cdot a}{2} \cdot \frac{5a}{3} + \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{4a}{3} = \frac{11 a^3}{3}$$

$$EI_y b_1 = -\frac{3qa^2 \cdot a}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a - \frac{3qa^2 \cdot a}{2 \cdot 2} \cdot \frac{5a}{3} - \frac{qa^2 \cdot a}{2 \cdot 2} \cdot \frac{4a}{3} = -\frac{31}{12} qa^4.$$

Nadomestna sila X_1 je tako

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{31 qa^4 \cdot 3}{12 \cdot 11 a^3} \rightarrow X_1 = \frac{31}{44} qa.$$

Primerjava z reakcijo V_3 iz zгледа 5.10 pove, da smo dobili pravi len rezultat.



Slika Z-6.3 c

Končno določimo še vodoravni pomik u_3 in zasuk ω_3 v točki 3. V ta namen obtežimo točko 3 z enotsko vodoravno virtualno silo $\delta P_3 = 1$ in z enotsko virtualno dvojico $\delta M_3 = 1$ (slika Z-6.3 c). Pomik u_3 in zasuk ω_3 sedaj izračunamo z enačbami (6.218), (6.219) in (6.233)

$$u_3 = \delta \bar{D}^*(\delta P_3 = 1) = \int_0^{3a} \frac{M_y \delta M_y(\delta P_3 = 1)}{EI_y} dx$$

$$\omega_3 = \delta \bar{D}^*(\delta M_3 = 1) = \int_0^{3a} \frac{M_y \delta M_y(\delta M_3 = 1)}{EI_y} dx.$$

Pri tem je M_y dejanski upogibni moment v statično nedoločenem nosilcu

$$M_y = M_y(q, X_1) = M_{yp} + \bar{M}_{y1} X_1.$$

Za integriranje spet uporabimo metodo Vereščagina in za pomik u_3 dobimo

$$u_3 = \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{qa^2 \cdot a}{11 \cdot 2} \cdot \frac{2a}{3} - \frac{qa^2 \cdot 4a}{11 \cdot 13 \cdot 2} \cdot a + \frac{9qa^2 \cdot 9a}{44 \cdot 13 \cdot 2} \cdot a \right)$$

$$u_3 = \frac{7qa^4}{264 EI_y}.$$

Ker sta diagrama $\delta M_y(\delta M_3 = 1)$ in $\delta M_y(\delta P_3 = 1)$ na deformabilnem delu nosilca le za faktor a različna med seboj, lahko zasuk ω_3 zapišemo brez posebnega računanja

$$\omega_3 = \frac{7qa^3}{264 EI_y}.$$

Primerjava z zgledom 5.10 pokaže, da sta rezultata pravilna. Po drugi strani pa lahko tudi ugotovimo, da smo z uporabo izreka o dopolnilnem virtualnem delu in s tem izrekom izpeljane metode sil občutno skrajšali in poenostavili reševanje naloge.

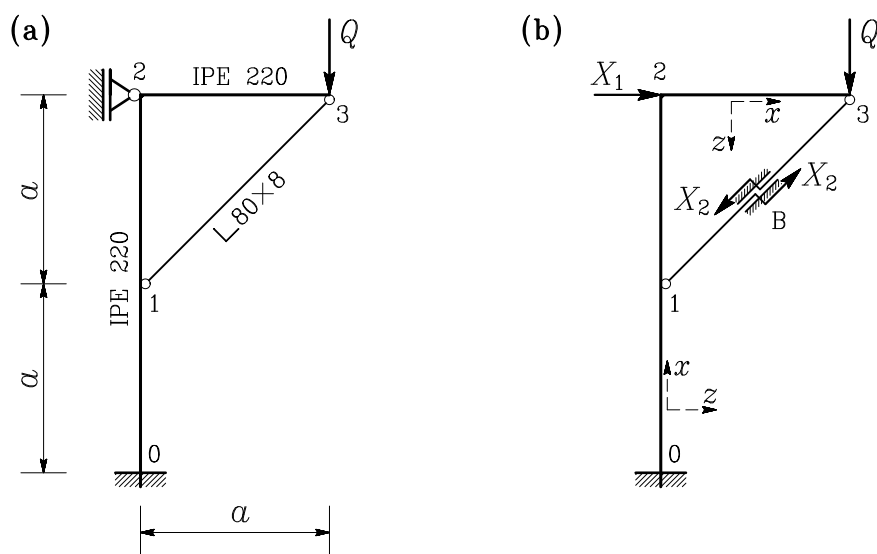
Zgled 6.4

Nosilec konstrukcije pomožnega objekta (slika Z-6.4 a/a) je narejen iz tipskih jeklenih elementov IPE 220. Med točkama 1 in 3 je nameščena opora, izdelana iz tipskega kotnega profila L 80 × 8 mm. Modul elastičnosti jekla je $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$. Dolžina a znaša 240 cm.

Določi kritično vrednost Q_{kr} točkovne obtežbe Q , pri kateri pride do uklona opore $\overline{13}$ ter navpični pomik w_3 točke 3 pri tej vrednosti.

Oceni napako, ki jo naredimo, če zanemarimo vpliv osnih sil v nosilcu IPE 220.

Lastne teže jeklenih profilov ni treba upoštevati.



Slika Z-6.4 a

Z znanimi prijemi elementarne statike nosilcev hitro ugotovimo, da je konstrukcija dvakrat statično nedoločena. Problema se lotimo z metodo sil in zasnujemo statično določeni delovni sistem tako, da sprostimo vodoravno reakcijo v podpori 2 in osno silo v palici $\overline{13}$. Reakcijo v podpori 2 nadomestimo z vodoravno zunanjo silo X_1 , osno silo v palici pa s parom zunanjih sil X_2 , kakor kaže slika Z-6.4 a/b. Vrednosti

nadomestnih sil X_1 in X_2 določimo z rešitvijo pogojnih enačb (6.307)

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 &= -b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 &= -b_2. \end{aligned}$$

Prva od gornjih enačb zahteva, da je vodoravni pomik točke 2 enak nič in torej predstavlja kinematični robni pogoj v tej točki. Druga enačba pa je v svojem bistvu kompatibilnostni pogoj, saj zagotavlja enoličnost pomika v prerezu palice v smeri njene vzdolžne osi. V luči obeh omenjenih pogojev dodajmo še pojasnilo o pomenu koeficientov pogojnih enačb:

a_{11} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki 2 povzročila sila $X_1 = 1$,

a_{12} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki 2 povzročili sili $X_2 = 1$,

b_1 je vodoravni pomik, ki bi ga v točki 2 povzročila točkovna sila Q ,

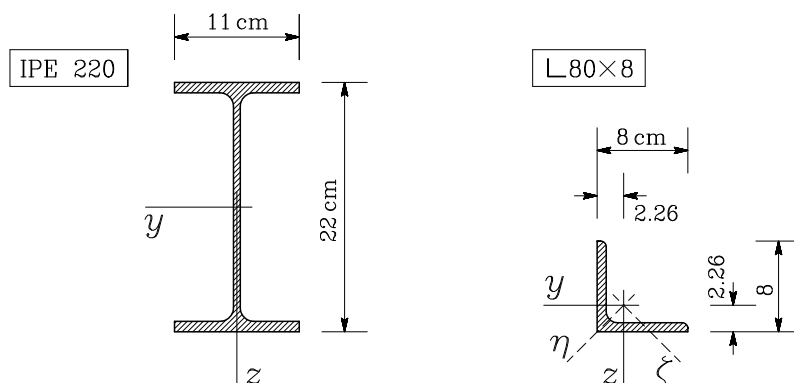
a_{21} je medsebojni osni zamik obeh koncev palice $\overline{13}$, ki bi ga v prerezni točki B povzročila sila $X_1 = 1$,

a_{22} je medsebojni osni zamik obeh koncev palice $\overline{13}$, ki bi ga v prerezni točki B povzročili sili $X_2 = 1$,

b_2 je medsebojni osni zamik obeh koncev palice $\overline{13}$, ki bi ga v prerezni točki B povzročila točkovna obtežba Q .

Za določitev koeficientov pogojnih enačb bomo potrebovali podatke o geometrijskih karakteristikah uporabljenih tipskih jeklenih elementov (slika Z-6.4 b). Odčitamo jih iz katerega od številnih priročnikov[†]. Pri palici $\overline{13}$, za katero moramo določiti kritično osno silo glede na uklon, nas razen ploščine prečnega prereza $A_x \equiv A_p$ zanima tudi minimalni upogibni vztrajnostni moment $I_{min} = I_\zeta$, ki ga prav tako odčitamo iz ustrezne tabele za profil L 80 × 8

[†] Glej na primer: Stahl im Hochbau, Verlag Stahleisen M.B.H., Düsseldorf, 1969.



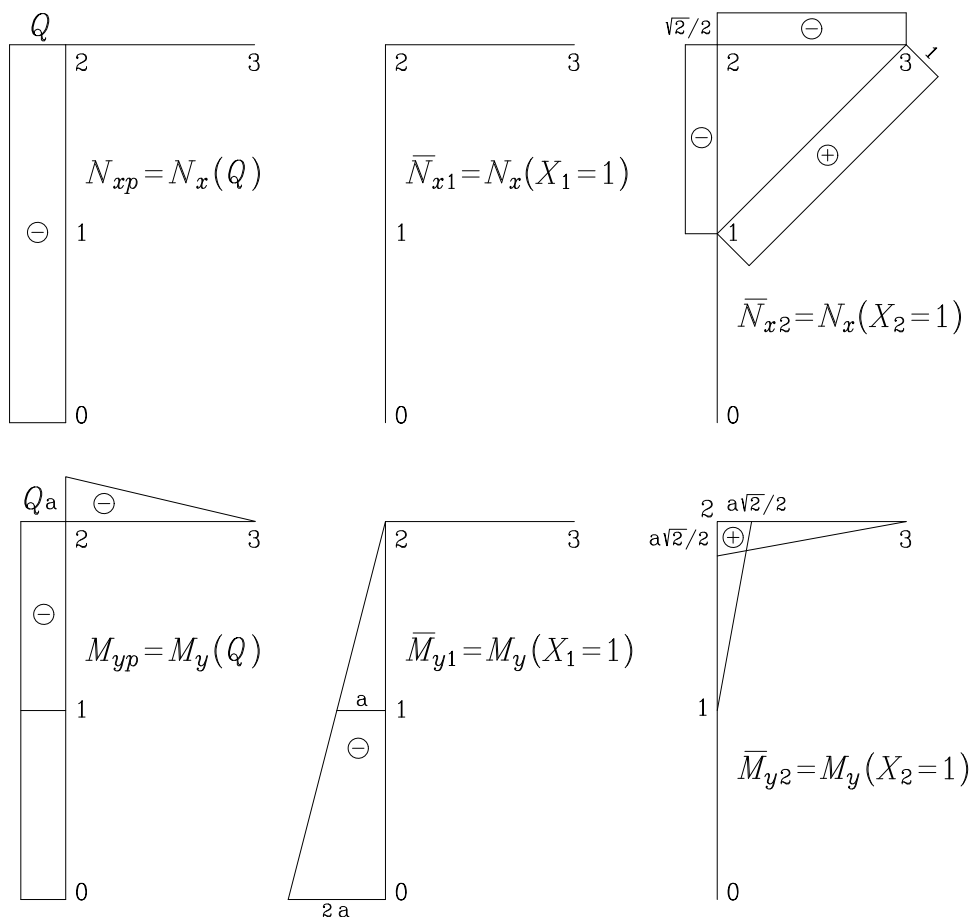
Slika Z-6.4 b

$$\begin{aligned} \text{IPE 220 : } A_x \equiv A_n &= 33.4 \text{ cm}^4 & \text{L } 80 \times 8 : A_x \equiv A_p &= 12.3 \text{ cm}^2 \\ I_y \equiv I_n &= 2770 \text{ cm}^4 & I_\zeta &= I_{min} = 29.6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Koeficiente in desne strani pogojnih enačb določimo s smiselno uporabo enačb (6.303), pri čemer upoštevamo, da je konstrukcija sestavljena iz dveh upogibnih nosilcev $\overline{02}$ in $\overline{23}$ in iz palice $\overline{13}$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx \\ a_{12} &= \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx = a_{21} \\ a_{22} &= \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx \\ b_1 &= \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \\ b_2 &= \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} M_{yp}}{EI_y} \right) dx . \end{aligned}$$

Diagrami osnih sil in upogibnih momentov, ki se v sproščeni konstrukciji pojavijo zaradi delovanja točkovne zunanje obtežbe Q ter enotskih nadomestnih sil $X_1 = 1$ in $X_2 = 1$ so določeni z znanimi prijemi elementarne statike nosilcev in so prikazani na *sliki Z-6.4 c*.



Slika Z-6.4 c

Integrale, ki nastopajo v izrazih za koeficiente in desne strani pogojnih enačb, lahko sedaj iz vrednotimo z metodo Vereščagina

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{EI_n} \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{8a^3}{3EI_n} \\
a_{12} &= \frac{1}{EI_n} \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12EI_n} = a_{21} \\
a_{22} &= \frac{2}{EA_n} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{EA_p} \cdot a\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 1 + \\
&\quad \frac{2}{EI_n} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot a}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{EA_n} + \frac{a\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{a^3}{3EI_n} \\
b_1 &= \frac{1}{EI_n} \cdot Qa \cdot 2a \cdot a = \frac{2Qa^3}{EI_n} \\
b_2 &= \frac{1}{EA_n} \cdot Qa \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{EI_n} \left(\frac{Va \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + Qa \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \frac{Qa\sqrt{2}}{2EA_n} + \frac{5Qa^3\sqrt{2}}{12EI_n}.
\end{aligned}$$

Po vstavitvi številskih podatkov o geometriji in materialu sledi

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{8 \cdot 240^3}{3 \cdot 21\,000 \cdot 2770} = 0.63373 \text{ cm/kN} \\
a_{12} &= \frac{240^3 \cdot \sqrt{2}}{12 \cdot 21\,000 \cdot 2770} = 0.02801 \text{ cm/kN} \\
a_{22} &= \frac{240}{21\,000 \cdot 33.4} + \frac{240 \cdot \sqrt{2}}{21\,000 \cdot 12.3} + \frac{240^3}{3 \cdot 21\,000 \cdot 2770} = \\
&\quad 0.00034 + 0.08053 = 0.08087 \text{ cm/kN} \\
b_1 &= \frac{2Q \cdot 240^3}{21\,000 \cdot 2770} = 0.47530 \text{ [cm/kN]} \cdot Q \text{ [kN]} \\
b_2 &= \frac{Q \cdot 240 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 21\,000 \cdot 33.4} + \frac{5Q \cdot 240^3 \cdot \sqrt{2}}{12 \cdot 21\,000 \cdot 2770} = \\
&\quad 0.00024Q + 0.14004Q = 0.14028 \text{ [cm/kN]} \cdot Q \text{ [kN]}.
\end{aligned}$$

V naslednjem koraku rešimo sistem pogojnih enačb

$$\begin{bmatrix} 0.63373 & 0.02801 \\ 0.02801 & 0.08087 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.47530 Q \\ -0.14028 Q \end{Bmatrix}$$

in dobimo nadomestni sili X_1 in X_2 v odvisnosti od točkovne sile Q

$$X_1 = -0.68381 Q \quad \text{in} \quad X_2 = -1.49774 Q.$$

Rezultat kaže, da v palici $\bar{13}$ nastopa tlačna osna sila velikosti $1.49774 Q$. Kritično uklonsko silo N_{kr} v tej palici določimo kakor v drugem osnovnem uklonskem primeru, saj gre za obojestransko členkasto pritrjen nosilec, v katerem nastopa samo tlačna osna sila. Uklonska dolžina palice je v tem primeru kar enaka sistemski dolžini $a\sqrt{2}$, tako da je

$$N_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21\,000 \cdot 29.6}{2 \cdot 240^2} = 53.25474 \text{ kN}.$$

Kritično vrednost obtežbe Q_{kr} izračunamo iz pogoja, da je osna sila v palici enaka kritični uklonski sili N_{kr}

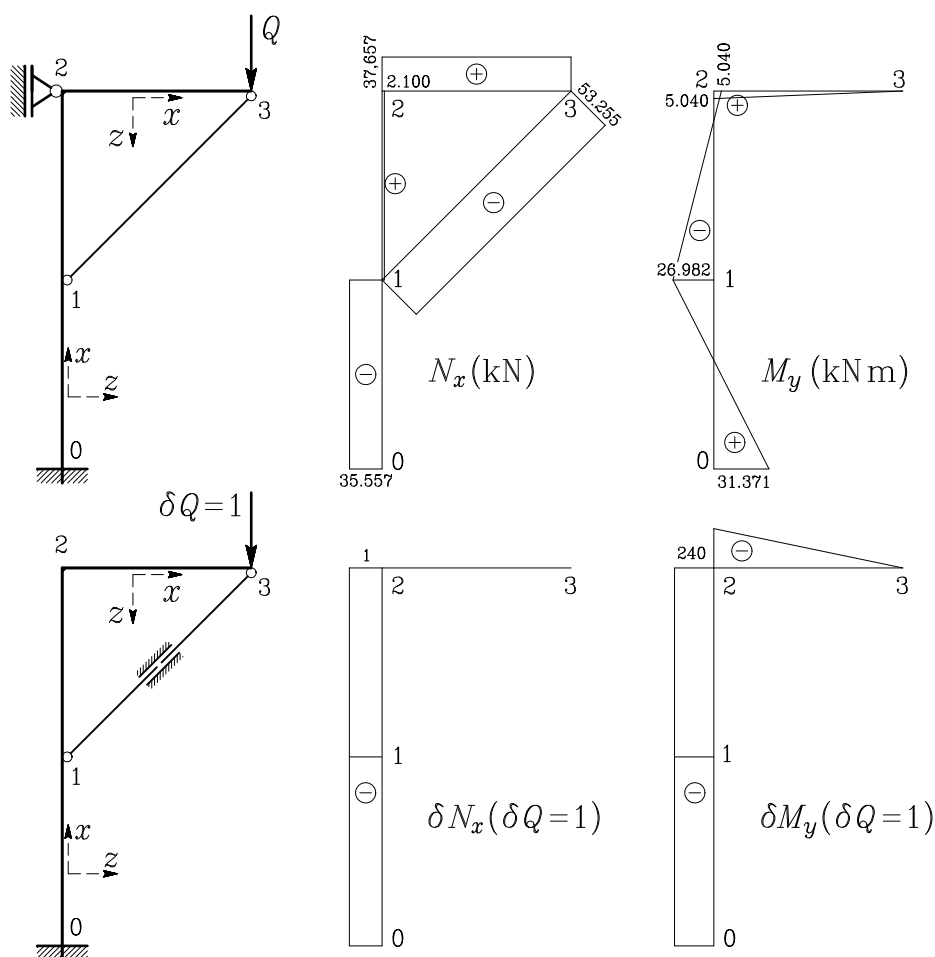
$$1.49774 Q_{kr} = N_{kr} \quad \rightarrow \quad Q_{kr} = \frac{53.25474}{1.49774} = 35.55673 \text{ kN}.$$

Pripadajoči vrednosti nadomestnih sil X_1 in X_2 sta tedaj

$$\begin{aligned} X_1 &= -0.68381 \cdot 35.55673 & \rightarrow & & X_1 &= -24.31405 \text{ kN} \\ X_2 &= -1.49774 \cdot 35.55673 & & & X_2 &= -53.25474 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Diagrame in značilne vrednosti osnih sil in upogibnih momentov določimo z enačbami (6.299) in jih prikažemo na *sliki Z-6.4 d*

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xp} + X_1 \bar{N}_{x1} + X_2 \bar{N}_{x2} \\ M_y &= M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}. \end{aligned}$$



Slika Z-6.4 d

Sedaj lahko določimo tudi navpični pomik w_3 vozlišča 3. Uporabimo izrek o dopolnilnem virtualnem delu in obtežimo osnovno statično določeno konstrukcijo z virtualno navpično točkovno silo $\delta Q = 1$ v točki 3. Poves w_3 je tedaj določen z enačbo (6.308)

$$w_3 = \delta \bar{D}^*(Q, X_1, X_2, \delta Q = 1) = \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} \right) dx .$$

Ob upoštevanju diagramov notranjih sil na *sliki Z-6.4 d* in z uporabo metode Vereščagina tako dobimo

$$w_3 = \frac{1}{E A_n} (-2.100 \cdot 240 + 35.557 \cdot 240) + \frac{100}{E I_n} \left[-5.040 \cdot \frac{240}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 240 + \frac{240}{2} (2 \cdot 26.982 - 31.371 - 5.040) \right] =$$

$$w_3 = \frac{8\,029.601}{E A_n} + \frac{100 \cdot 408\,796.440}{E I_n}.$$

Po vstavitvi številskih podatkov za E , A_n in I_n sledi

$$w_3 = \frac{8\,029.601}{21\,000 \cdot 33.4} + \frac{100 \cdot 408\,796.440}{21\,000 \cdot 2770} \quad \rightarrow \quad w_3 = 0.741 \text{ cm}.$$

Končno še pogledjmo, kolikšno napako naredimo, če pri določitvi kritične obtežbe Q_{kr} zanemarimo vpliv osnih sil v profilu IPE 220, torej v tistem delu nosilca, kjer se nosilnost realizira pretežno z upogibom. Vpliva osne sile v palici $\overline{13}$, kjer je to edina notranja sila, v splošnem seveda ne smemo zanemariti. S tem bi namreč naredili hudo, predvsem načelno napako, saj bi ne glede na njeno dejansko podajnost vzeli, da je palica absolutno toga. Oceno napake začnemo s tem, da v izrazih za koeficiente in desne strani pogojnih enačb za določitev nadomestnih sil X_1 in X_2 izločimo prispevke osnih sil v upogibnem delu nosilca. Sistem pogojnih enačb je tedaj

$$\begin{bmatrix} 0.63373 & 0.02801 \\ 0.02801 & 0.08053 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.47530 Q \\ -0.14004 Q \end{Bmatrix},$$

rešitvi pa sta

$$X_1 = -0.68366 Q \quad \text{in} \quad X_2 = -1.50121 Q.$$

Kritična vrednost Q_{kr} je tokrat

$$Q_{kr} = \frac{53.25474}{1.50121} = 35.47454 \text{ kN}.$$

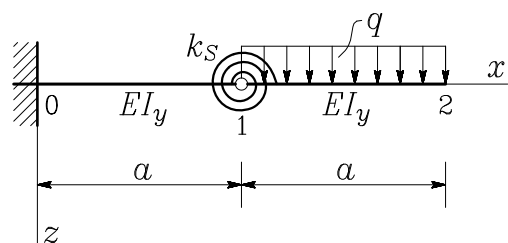
Napako ocenimo tako, da za primerjalno vrednost vzamemo točno vrednost $Q_{kr} = 35.55673 \text{ kN}$

$$nap = 100 \cdot \frac{35.47454 - 35.55673}{35.55673} = -0.23 \%$$

Kakor je bilo že omenjeno, je zanemaritev vpliva osnih sil v elementih, v katerih prevladujejo upogibni momenti, upravičena.

Zgled 6.5

Konzolni nosilec je narejen iz dveh enakih tipskih elementov IPE 330, ki sta v točki 1 z vijačnim stikom povezana med seboj. Stik ni povsem tog in ga modeliramo z linearno elastično polžasto vzmetjo s konstanto k_S (slika Z-6.5 a).



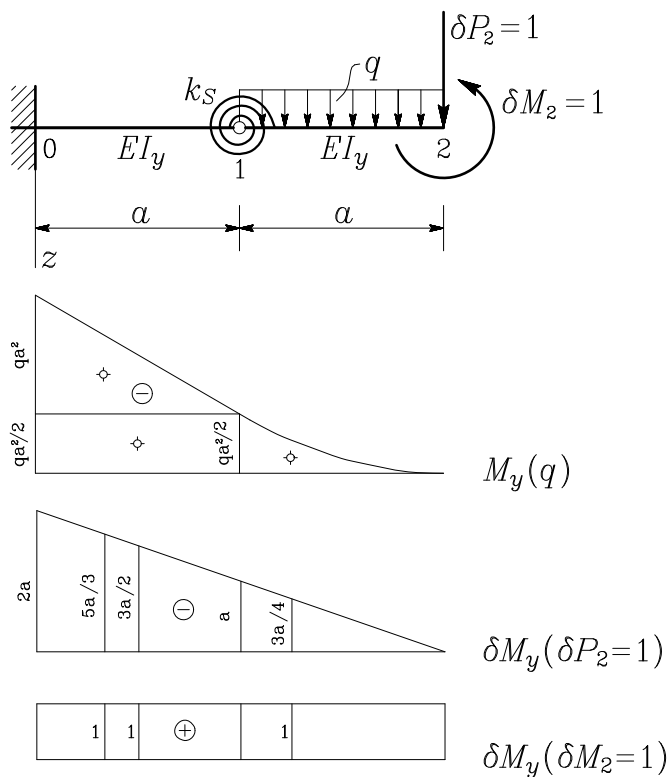
Slika Z-6.5 a

$$\begin{aligned} a &= 1.60 \text{ m} \\ I_y &= 11\,770 \text{ cm}^4 \\ E &= 21\,000 \text{ kN/cm}^2 \\ k_S &= 5910 \text{ kNm/rad} \\ q &= 20 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Določi povos w_2 in zasuk ω_2 v točki 2!

Naloga se lotimo z izrekom o dopolnilnem virtualnem delu. Povos w_2 določimo tako, da nosilec v točki 2 obtežimo z enotsko virtualno silo $\delta P_2 = 1$ v smeri osi z (slika Z-6.5 b) in v skladu z enačbo (6.282) izračunamo pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil

$$w_2 = \delta \bar{D}^*(\delta P_2 = 1) = \int_0^{2a} \frac{M_y(q) \cdot \delta M_y(\delta P_2 = 1)}{EI_y} dx + \frac{1}{k_S} M_y^{(1)}(q) \cdot \delta M_y^{(1)}(\delta P_2 = 1).$$



Slika Z-6.5 b

Uporabimo metodo Vereščagina in dobimo

$$w_2 = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{qa^2 \cdot a}{2} \cdot \frac{5a}{3} + \frac{qa^2 \cdot a}{2} \cdot \frac{3a}{2} + \frac{qa^2 \cdot a}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3a}{4} \right) + \frac{1}{k_S} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a$$

$$w_2 = \frac{41 qa^4}{24 EI_y} + \frac{qa^3}{2 k_S}.$$

Za določitev zasuka ω_2 obtežimo nosilec v točki 2 z enotsko dvojico $\delta M_2 = 1$ v pozitivni smeri y (slika Z-6.5 b) in izračunamo pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil

$$\omega_2 = \delta \bar{D}^*(\delta M_2 = 1) = \int_0^{2a} \frac{M_y(q) \cdot \delta M_y(\delta M_2 = 1)}{EI_y} dx + \frac{1}{k_S} M_y^{(1)}(q) \cdot \delta M_y^{(1)}(\delta M_2 = 1).$$

Integral spet izvednotimo z metodo Vereščagina in dobimo

$$\omega_2 = -\frac{1}{EI_y} \left(\frac{qa^2 \cdot a}{2} \cdot 1 + \frac{qa^2 \cdot a}{2} \cdot 1 + \frac{qa^2 \cdot a}{2 \cdot 3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{k_S} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot 1$$

$$\omega_2 = -\frac{7qa^3}{6EI_y} - \frac{qa^2}{2k_S}.$$

Končno v dobljene splošne izraze vstavimo konkretne podatke obravnavanega primera in izračunamo številske vrednosti obeh količin

$$w_2 = \frac{41 \cdot 0.2 \cdot 160^4}{24 \cdot 21\,000 \cdot 11\,770} + \frac{0.2 \cdot 160^3}{2 \cdot 591\,000} = 1.599 \text{ cm}$$

$$\omega_2 = -\frac{7 \cdot 0.2 \cdot 160^3}{6 \cdot 21\,000 \cdot 11\,770} - \frac{0.2 \cdot 160^2}{2 \cdot 591\,000} = -8.198 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

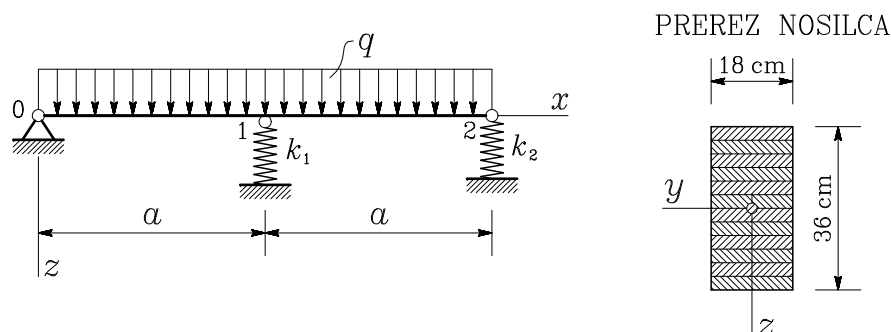
Do enakih rezultatov bi seveda lahko prišli tudi z neposredno uporabo podajnostnih koeficientov konzolnega nosilca, ki smo jih izpeljali v zgledu 5.6. Pri tem bi morali upoštevati, da se zasuk nosilca v elastičnem členkastem stiku v točki 1 spremeni za $\Delta\omega_1$

$$\Delta\omega_1 = \frac{qa^2}{2k_S}.$$

To preprosto kontrolo prepuščamo skrbnemu bralcu.

Zgled 6.6

Lepljen lesen nosilec preko dveh polj z razpetinama $a = 3.6$ m je v točki 0 nepomično vrtljivo podprt, podpori v točkah 1 in 2 pa sta linearno elastični z vzmetnima konstantama $k_1 = 140$ kN/cm in $k_2 = 70$ kN/cm (slika Z-6.6 a). Lastna teža nosilca je všteta v enakomerni zvezni obtežbi $q = 32$ kN/m. Modul elastičnosti uporabljenega lesa je $E = 1\,100$ kN/cm².



Slika Z-6.6 a

Določi največjo vzdolžno normalno napetost v lesenem nosilcu ter povesa nosilca v točkah 1 in 2.

Konstrukcija je očitno enkrat statično nedoločena. Reševanja se lotimo po metodi sil in zasnujemo osnovni statično določeni sistem tako, da vzmetno podporo v točki 1 nadomestimo z zaenkrat neznano zunanjo silo X_1 (slika Z-6.6 b). Velikost nadomestne sile X_1 izračunamo iz pogojne enačbe

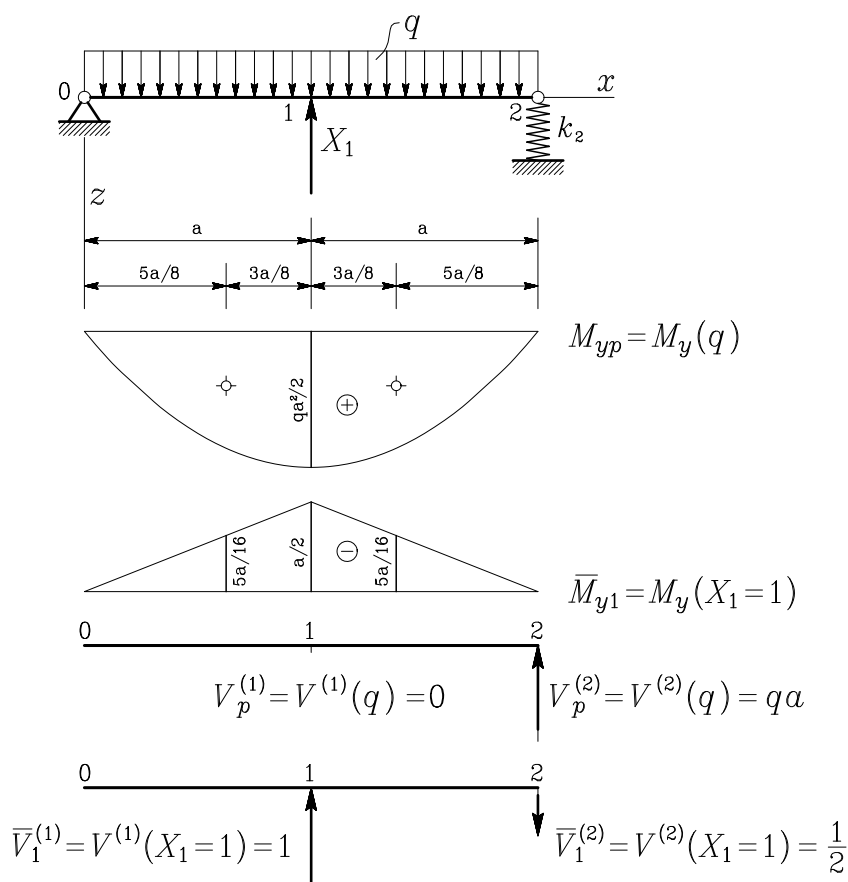
$$a_{11}X_1 + b_1 = 0,$$

ki dejansko zahteva, da je povese nosilca v točki 1 enak skrčku vzmeti. Koeficient a_{11} in desno stran b_1 izračunamo s smiselno uporabo enačb (6.319) in (6.320).

$$a_{11} = \int_0^{2a} \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} dx + \frac{\bar{V}_1^{(1)} \bar{V}_1^{(1)}}{k_1} + \frac{\bar{V}_1^{(2)} \bar{V}_1^{(2)}}{k_2}$$

$$b_1 = \int_0^{2a} \frac{M_{yp} \bar{M}_{y1}}{EI_y} dx + \frac{V_1^{(2)} \bar{V}_1^{(2)}}{k_2}.$$

Diagrama upogibnih momentov in sile v vzmeteh, ki pripadajo zunanji obtežbi q in nadomestni sili $X_1 = 1$ na statično določenem osnovnem sistemu, prikazuje slika Z-6.6 b.



Slika Z-6.6 b

Integrala iz vrednotimo z metodo Vereščagina in dobimo

$$a_{11} = \frac{2}{EI_y} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{5a}{16} + \frac{1}{k_1} \cdot 1^2 + \frac{1}{k_2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{6EI_y} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{4k_2}$$

$$b_1 = -\frac{2}{EI_y} \cdot \frac{a \cdot a}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{k_1} \cdot qa \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5qa^4}{24EI_y} - \frac{qa}{2k_2}.$$

Dobljena izraza vstavimo v pogojno enačbo

$$\left[\frac{a^3}{6EI_y} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{4k_2} \right] X_1 - \left[\frac{5qa^4}{24EI_y} + \frac{qa}{2k_2} \right] = 0$$

in po krajšem urejanju dobimo

$$X_1 = \frac{5a^3k_1k_2 + 12EI_yk_1}{4a^3k_1k_2 + 6EI_y(k_1 + 4k_2)} qa.$$

Pred nadaljevanjem izračunajmo upogibni vztrajnostni moment I_y pravokotnega prečnega prereza lesenega nosilca

$$I_y = \frac{18 \cdot 36^3}{12} \quad \rightarrow \quad I_y = 69\,984 \text{ cm}^4.$$

Nadomestno silo X_1 najprej določimo v odvisnosti od produkta qa

$$X_1 = \frac{5 \cdot 360^3 \cdot 140 \cdot 70 + 12 \cdot 1\,100 \cdot 69\,984 \cdot 140}{4 \cdot 360^3 \cdot 140 \cdot 70 + 6 \cdot 1\,100 \cdot 69\,984 \cdot (140 + 4 \cdot 70)} qa = 1.194 qa.$$

Sedaj lahko izračunamo tudi navpični reakciji v podporah 0 in 2

$$V_0 = V^{(2)} = V_p^{(2)} + \bar{V}_1^{(2)} X_1 = qa - \frac{1}{2} \cdot 1.194 qa = 0.403 qa.$$

Podobno določimo tudi potek upogibnega momenta M_y vzdolž nosilca (slika Z-6.6 c).

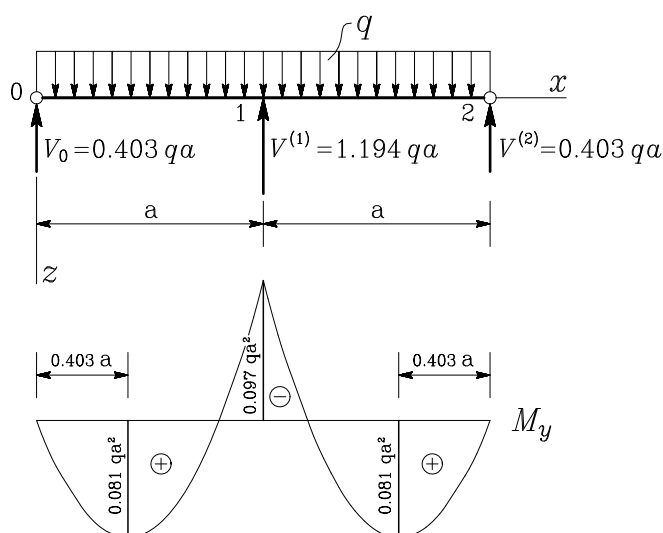
$$M_y = M_{yp} + \bar{M}_{y1} \cdot X_1$$

Največjo vrednost pozitivnega momenta v polju M_{max}^+ določimo na znani način kot ekstrem funkcije $M_y(x)$, ki nastopa v prerezu s koordinato $x = x_m$

$$M_y = 0.403 qa x - \frac{1}{2} q x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dM_y}{dx} = 0.403 qa - qx$$

$$\left. \frac{dM_y}{dx} \right|_{x=x_m} = 0 \quad \rightarrow \quad x_m = 0.403 a$$

$$M_y(x_m) = M_{max}^+ = 0.081 qa^2.$$



Slika Z-6.6 c

Največji negativni upogibni moment M_{max}^- očitno nastopa nad vmesno podporo

$$M_{max}^- = M_y(a) = \frac{qa^2}{2} - \frac{a}{2} X_1 = \frac{1}{2} (1 - 1.194) qa^2$$

$$M_{max}^- = -0.097 qa^2.$$

Največjo vzdolžno normalno napetost σ_{xx}^{max} določimo glede na največjo absolutno vrednost upogibnega momenta; v našem primeru je to mo-

ment nad vmesno podporo. V konstruktorski praksi za določitev največjih napetosti običajno vpeljemo tako imenovani *upogibni odpornostni moment prereza* W_y , s katerim neposredno izračunamo robne, torej največje možne normalne napetosti. Če z z_r označimo pravokotno razdaljo robu od osi y , je

$$W_y = \frac{I_y}{z_r}.$$

Pri pravokotnem prerezu dimenzij $b \times h$ je odpornostni moment enak ne glede na to, ali računamo napetost na spodnjem ali zgornjem robu

$$W_y = \frac{2 I_y}{h} = \frac{b h^2}{6}$$

in v našem primeru dobimo

$$W_y = \frac{69\,984}{18} = \frac{18 \cdot 36^2}{6} = 3\,888 \text{ cm}^3.$$

V našem primeru je merodajen prerez nad vmesno elastično podporo 1, kjer je vzdolžna normalna napetost na spodnjem robu prereza tlačna, na zgornjem pa natezna. Po velikosti sta obe enaki

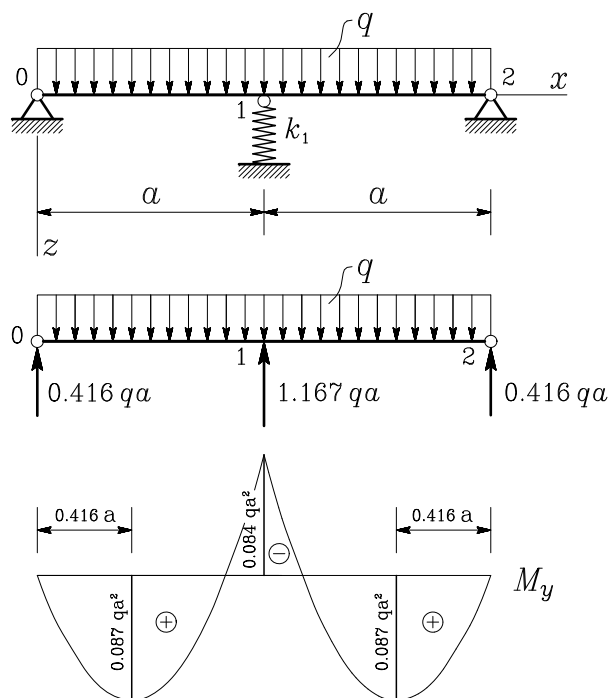
$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{max} &= \frac{0.097 qa^2}{W_y} = \frac{0.097 \cdot 0.32 \cdot 360^2}{3\,888} \\ \sigma_{xx}^{max} &= 1.035 \text{ kN/cm}^2 = 1\,035 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Končno moramo določiti še povesa nosilca v točkah 1 in 2, ki pa sta kar enaka skrčkoma vzmeti, s katerima je nosilec v omenjenih točkah podprt. Zato je

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{X_1}{k_1} = \frac{1.194 qa}{k_1} = \frac{1.194 \cdot 0.32 \cdot 360}{140} && w_1 = 0.983 \text{ cm} \\ w_2 &= \frac{V^{(2)}}{k_2} = \frac{0.403 qa}{k_2} = \frac{0.403 \cdot 0.32 \cdot 360}{70} && w_2 = 0.663 \text{ cm}. \end{aligned} \quad \rightarrow$$

Naloga je s tem končana; vendar se še na kratko pomudimo pri obravnavanem primeru in ga izkoristimo za “inženirski” razmislek o vplivu

togosti podajnih podpor na statično stanje linijske konstrukcije. Najprej se vprašajmo, kako se spremenijo reakcije in upogibni momenti, če je nosilec na obeh koncih nepomično vrtljivo podprt, vmesna podpora pa ostane linearno elastična s konstanto k_1 (slika Z-6.6 d).



Slika Z-6.6 d

Pripadajočo vrednost vmesne reakcije X_1 za ta primer določimo z limitnim postopkom, ko togost k_2 vzmeti v točki 2 narašča proti neskončni vrednosti

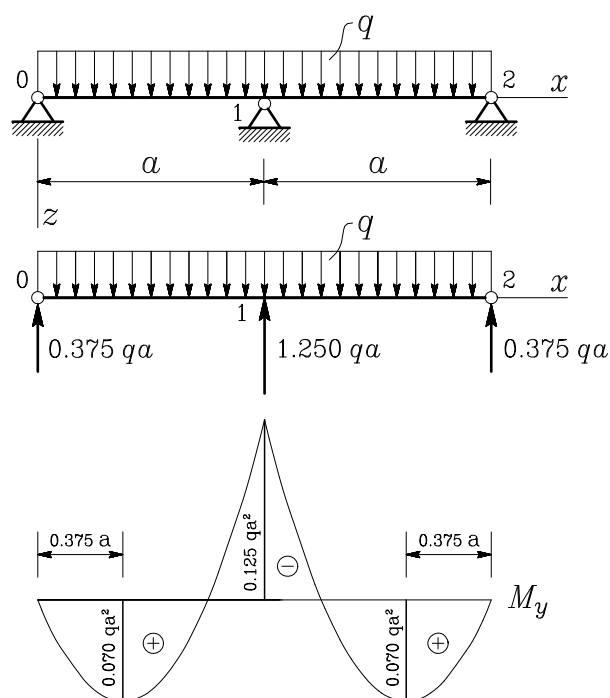
$$X_1 = qa \lim_{k_2 \rightarrow \infty} \frac{5 a^3 k_1 + \frac{12 EI_y k_1}{k_2}}{4 a^3 k_1 + 6 EI_y \left(\frac{k_1}{k_2} + 4 \right)} = qa \frac{5 a^3 k_1}{4 a^3 k_1 + 24 EI_y}$$

V našem primeru dobimo

$$X_1 = qa \frac{5 \cdot 360^3 \cdot 140}{4 \cdot 360^3 \cdot 140 + 24 \cdot 1100 \cdot 69984} \rightarrow X_1 = 1.167 qa .$$

Sila, s katero elastična podpora v točki 1 deluje na nosilec, je pričakovano manjša kakor v prejšnjem primeru, saj tokrat nepomična desna podpora prevzame večji delež obtežbe. Podobno kakor v prejšnjem primeru določimo tudi reakciji v obeh nepomičnih podporah in potek upogibnega momenta vzdolž nosilca (slika Z-6.6 d). Pri tem lahko opazimo, da je tokrat največji pozitivni moment v polju po absolutni vrednosti večji od negativnega momenta nad vmesno podporo.

Oglejmo si še mejni primer, ko nosilec tudi v vmesni točki 1 nepomično vrtljivo podpremo (slika Z-6.6 e).



Slika Z-6.6 e

Pripadajočo vrednost reakcije v tej točki spet poiščemo z limitnim postopkom, pri katerem gre še togost k_1 proti neskončno veliki vrednosti

$$X_1 = qa \lim_{k_1 \rightarrow \infty} \frac{5a^3}{4a^3 + \frac{24EI_y}{k_1}} = \frac{5}{4} qa = 1.250 qa.$$

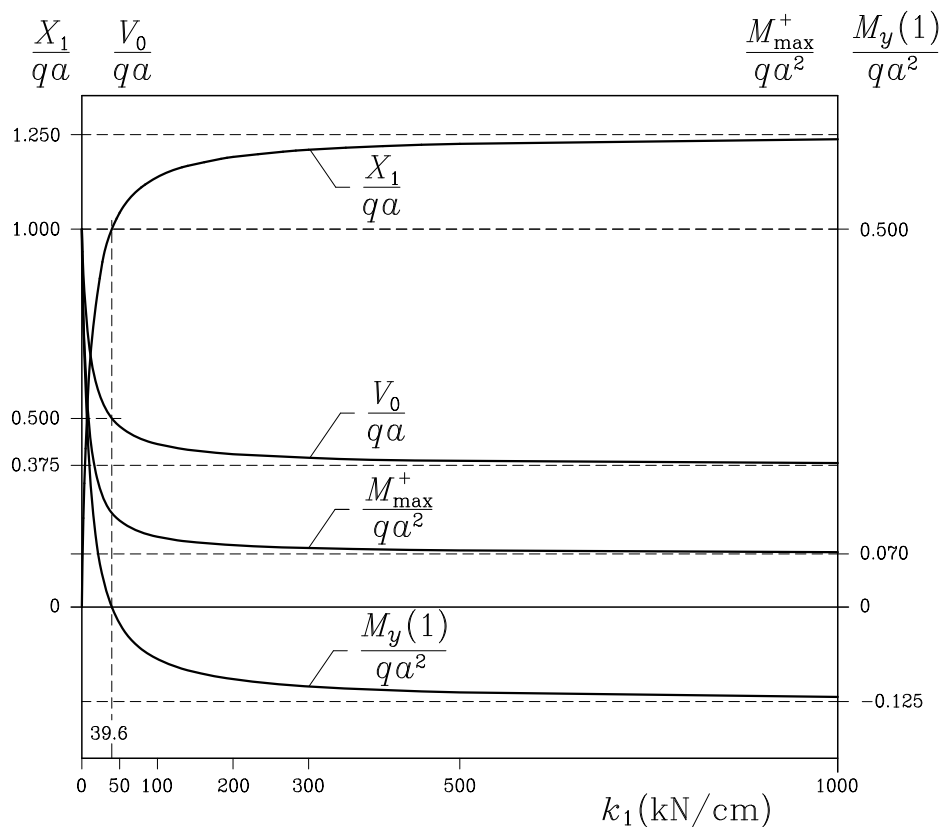
Dobili smo dobro znan rezultat, ki ga lahko najdemo v vsakem konstruktorskem priročniku. Pripadajoči reakciji v krajnih podporah in potek upogibnega momenta vzdolž nosilca prikazuje *slika Z-6.6 e*.

Preglednica P-6.2

k_1 (kN/cm)	$\frac{X_1}{qa}$	$\frac{V_0}{qa}$	$\frac{M_{max}^+}{qa^2}$	$\frac{M_y(1)}{qa^2}$
0	0	1.000	0.500	0.500
0.1	0.013	0.994	0.494	0.494
1	0.115	0.943	0.444	0.443
10	0.628	0.686	0.235	0.186
39.6	1.000	0.500	0.125	0.000
50	1.043	0.478	0.114	-0.022
100	1.137	0.431	0.093	-0.069
140	1.167	0.416	0.087	-0.084
200	1.191	0.405	0.082	-0.096
300	1.210	0.395	0.078	-0.105
500	1.226	0.387	0.075	-0.113
1000	1.238	0.381	0.073	-0.119
∞	1.250	0.375	0.070	-0.125

Za celovitejšo predstavo o vplivu elastične vmesne podpore na reakcije in značilne vrednosti upogibnega momenta obravnavanega nosilca (*slika Z-6.6 d*) so v *preglednici P-6.2* tabelarično prikazane njihove vrednosti za primer, da se togost elastične vzmeti v točki 1 postopoma povečuje od vrednosti nič (nosilec v točki 1 ni podprt) do neskončno velike vrednosti (nosilec je v točki 1 nepomično vrtljivo podprt). Rezultati so na *sliki*

Z-6.6 f prikazani tudi z grafi omenjenih količin. Kakor je pričakovati, se reakcija v elastični podpori pri tem nelinearno povečuje od vrednosti nič do mejne vrednosti $1.250 qa$, ustrezno pa se spreminjajo tudi vrednosti reakcij v obeh nepomičnih podporah ter vrednosti največjega pozitivnega upogibnega momenta v polju in upogibnega momenta v prerezu nad vmesno podporo. Slednji je pri zelo podajni vmesni elastični podpori pozitiven, pri vrednosti $k_1 = 39.6$ kN/cm preide v negativno območje in pri nepodajni podpori doseže vrednost $-0.125 qa^2$.

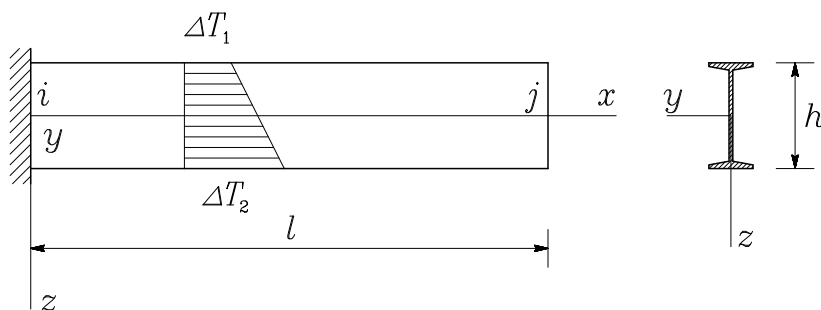


Slika Z-6.6 f

Na podoben način bi opravili statično analizo nosilca v primeru, da bi bil ta v točki 1 nepomično, v točki 2 pa elastično podprt. To zanimivo nalogo prepuščamo skrbnemu bralcu.

Zgled 6.7

Po metodi sil določi reakcije ter oba pomika in zasuk v podpori j za nosilec iz zgleda Z-5.11 (slika Z-6.7 a) v obeh obravnavanih primerih podpiranja.



Slika Z-6.7 a

Podatke povzamemo po zgledu Z-5.11. To pomeni, da poznamo dolžino nosilca l , ploščino A_x in upogibni vztrajnostni moment I_y prečnega prereza, modul elastičnosti E , koeficient temperaturnega raztezanja in krčenja α_T ter parametra linearnega nastavka za potek temperature spremembe po višini prereza ΔT_x in ΔT_z .

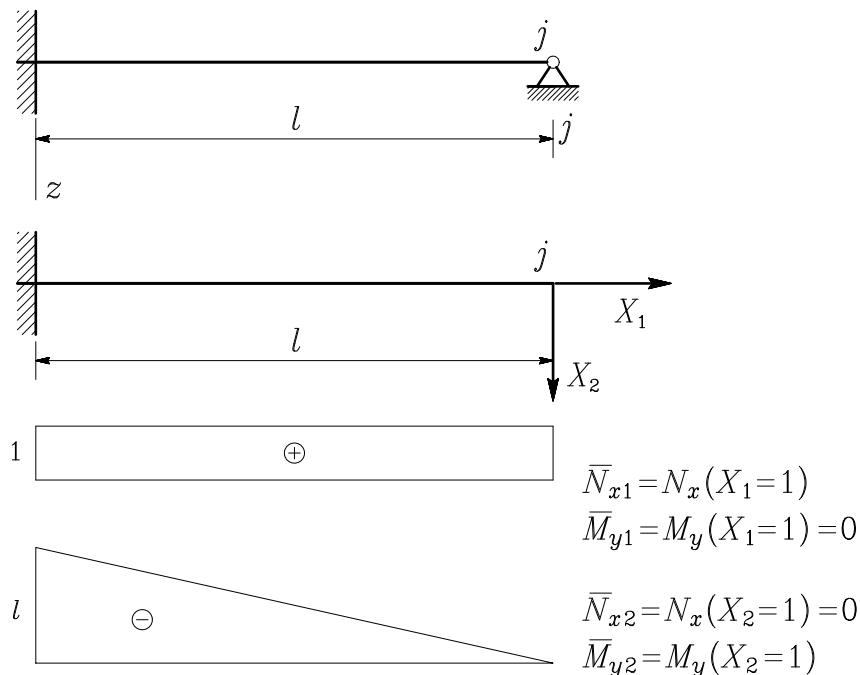
Začnimo kar s primerom, da je nosilec v točki j nepomično vrtljivo podprt in torej dvakrat statično nedoločen. V smislu metode sil sprostimo nepomično vrtljivo podporo in njen vpliv nadomestimo z zunanjsima silama X_1 in X_2 (slika Z-6.7 b). Nadomestni sili določimo z rešitvijo sistema pogojnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 &= 0 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2 &= 0, \end{aligned}$$

ki v obravnavanem primeru zahtevata, da sta tako vodoravni pomik u_j kakor tudi povs w_j v krajišču j enaka nič.

Koeficiente in desni strani določimo v skladu z enačbami (6.319) in (6.320) ob upoštevanju diagramov notranjih sil na osnovni statično

določeni konstrukciji (slika Z-6.7 b). Na nosilcu ni mehanske zunanje obtežbe, zato je $N_{xp} = 0$ in $M_{yp} = 0$.



Slika Z-6.7 b

Splošni izrazi za koeficiente a_{11} , a_{12} , a_{22} in desni strani b_1 , b_2 pogojnih enačb so tako

$$a_{11} = \int_0^l \left(\frac{\bar{N}_{x1}\bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1}\bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx$$

$$a_{12} = \int_0^l \left(\frac{\bar{N}_{x1}\bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1}\bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx = a_{21}$$

$$a_{22} = \int_0^l \left(\frac{\bar{N}_{x2}\bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2}\bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx$$

$$b_1 = \int_0^l (\alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{x1} + \alpha_T \Delta T_z \bar{M}_{y1}) dx$$

$$b_2 = \int_0^l (\alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{x2} + \alpha_T \Delta T_z \bar{M}_{y2}) dx.$$

Nastopajoče integrale izvednotimo z metodo Vereščagina in dobimo

$$a_{11} = \frac{1}{EA_x} \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EA_x}$$

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

$$a_{22} = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3EI_y}$$

$$b_1 = \alpha_T \cdot \Delta T_x \cdot l$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \alpha_T \cdot \Delta T_z \cdot l^2.$$

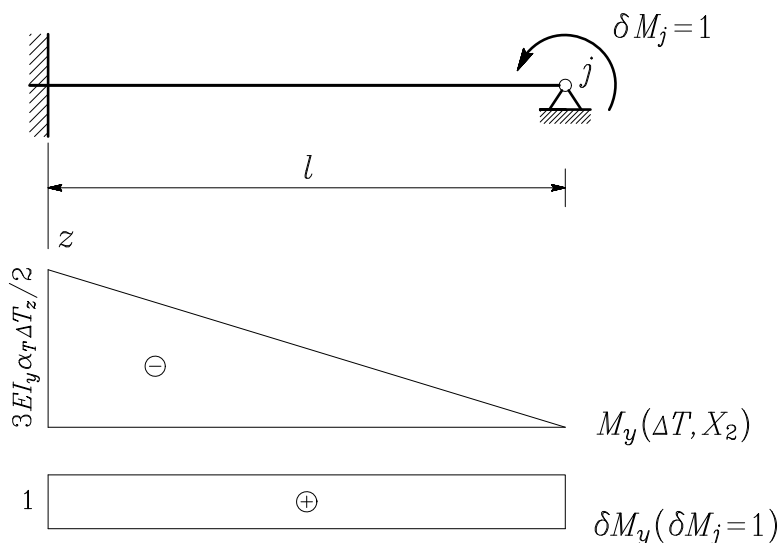
Ker je $a_{12} = a_{21} = 0$, je rešitev sistema pogojnih enačb čisto enostavna

$$X_1 = -EA_x \alpha_T \Delta T_x \quad \text{in} \quad X_2 = \frac{3EI_y \alpha_T \Delta T_z}{2l}.$$

Preostane nam še določitev pomikov in zasukov v točki j za oba primera podpiranja. Za pomika u_j in w_j je stvar jasna: če je nosilec v točki j nepomično vrtljivo podprt, sta oba omenjena pomika enaka nič. Če je desni konec nosilca prost, pa ob upoštevanju fizikalnega pomena desnih strani pogojnih enačb velja

$$u_j = b_1 = \alpha_T \cdot \Delta T_x \cdot l \quad \text{in} \quad w_j = b_2 = -\frac{1}{2} \alpha_T \cdot \Delta T_z \cdot l^2.$$

Določiti moramo še zasuk ω_j v obeh primerih podpiranja. Spet začnemo s primerom, da je nosilec v točki j nepomično vrtljivo podprt. Uporabimo izrek o dopolnilnem virtualnem delu in obtežimo nosilec v točki j z virtualno dvojico $\delta M_j = 1$ (slika Z-6.7 c)



Slika Z-6.7 c

Kakor vemo, je zasuk ω_j enak pripadajočemu dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil, ki ga izračunamo z enačbo (6.282)

$$\omega_j = \delta \bar{D}^*(\delta M_j = 1) = \int_0^l \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} dx + \int_0^l \alpha_T \Delta T_z \delta M_y dx.$$

V primeru, da je desni konec nosilca prost, je $M_y = 0$ in zasuk je

$$\omega_j = \alpha_T \Delta T_z l.$$

Pri podprtem nosilcu pa najprej konstruiramo diagram upogibnega momenta M_y na statično nedoločenem nosilcu in z metodo Vereščagina dobimo

$$\omega_j = -\frac{1}{EI_y} \cdot \frac{3EI_y \alpha_T \Delta T_z}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot 1 + \alpha_T \Delta T_z \cdot 1 \cdot l$$

$$\omega_j = \frac{1}{4} \alpha_T \Delta T_z l.$$

Dobili smo seveda enake rezultate kakor v zgledu 5.11 vendar v primerjavi z izpeljavo enačb (5.135) do (5.140) in njihovo uporabo v zgledu 5.11 na bistveno lažji in preglednejši način.

Zgled 6.8

Dokaži, da integral

$$J = \int_{\mathcal{A}_x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x$$

predstavlja torzijski vztrajnostni moment I_x , kakor smo ga izpeljali v razdelku 5.5.

Ob upoštevanju pravila za odvajanje produkta lahko integral J zapišemo kot razliko dveh integralov

$$J = \int_{\mathcal{A}_x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dA_x - \int_{\mathcal{A}_x} \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) dA_x.$$

Člen v oklepaju v drugem integralu je zaradi enačbe (5.285) enak -2 , prvi integral pa z Greenovim izrekom (5.94) prevedemo na krivuljni integral po mejni črti \mathcal{C}_x prečnega prereza. Tako dobimo

$$J = \oint_{\mathcal{C}_x} \left[\left(-\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dy + \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz \right] dx + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x$$

oziroma

$$J = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \oint_{\mathcal{C}_x} \varphi \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right).$$

Pri $(m+1)$ -krat sovisnem prerezu postopamo enako, kakor smo to naredili v razdelku 5.5. Sklenjeno mejno krivuljo \mathcal{C}_x sestavimo iz več

delov, tako da z njo zajamemo celotno območje prečnega prereza \mathcal{A}_x (slika 5.25). Integrali vzdolž ravnih odsekov integracijske poti, s katerimi pridemo z zunanje mejne krivulje na notranjo in nazaj, se odštejejo, saj integriramo isto funkcijo enkrat v eni, drugič pa v drugi smeri. Preostane nam torej integriranje po zunanji mejni krivulji \mathcal{C}_z , kjer ima napetostna funkcija konstantno vrednost φ_z , ter po notranjih mejnih krivuljah \mathcal{C}_{ni} ($i = 1, 2, \dots, m$), kjer ima napetostna funkcija konstantne vrednosti φ_{ni}

$$J = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \oint_{\mathcal{C}_z} \varphi_z \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right) + \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} \oint_{\mathcal{C}_{ni}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right).$$

Pri tem smo integralom, ki nastopajo v vsoti v tretjem členu, spremenili predznak, ker gre za integriranje v sourni, torej "negativni" smeri. Za napetostno funkcijo φ_z na zunanji mejni krivulji \mathcal{C}_z praviloma privzamemo vrednost $\varphi_z = 0$, krivuljni integral v tretjem členu pa je zaradi enačbe (5.288) enak $2A_{ni}$. Tako dobimo

$$J = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} A_{ni},$$

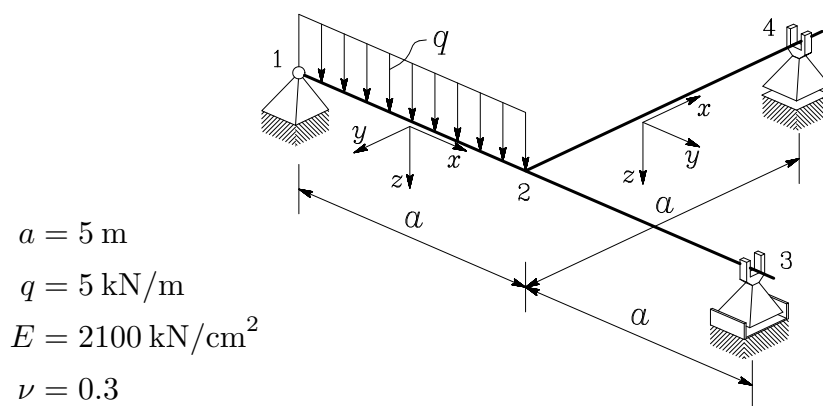
to pa je izraz, ki smo ga v razdelku 5.5 izpeljali kot torzijski vztrajnostni moment I_x prečnega prereza nosilca. S tem smo dokazali enakost

$$\int_{\mathcal{A}_x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x = I_x,$$

kar je zahtevala naša naloga.

Zgled 6.9

Vsi elementi branaste konstrukcije (slika Z-6.9 a) so jekleni in imajo enak dvocelični zaprt tankostenski prečni prerez (slika Z-6.9 b). V točki 1 je nosilec nepomično vrtljivo podprt; podpora v točki 3 preprečuje oba prečna pomika in torzijski zasuk ω_x . V točki 4 sta preprečena le navpični pomik w in torzijski zasuk ω_x glede na lokalno vzdolžno os x .

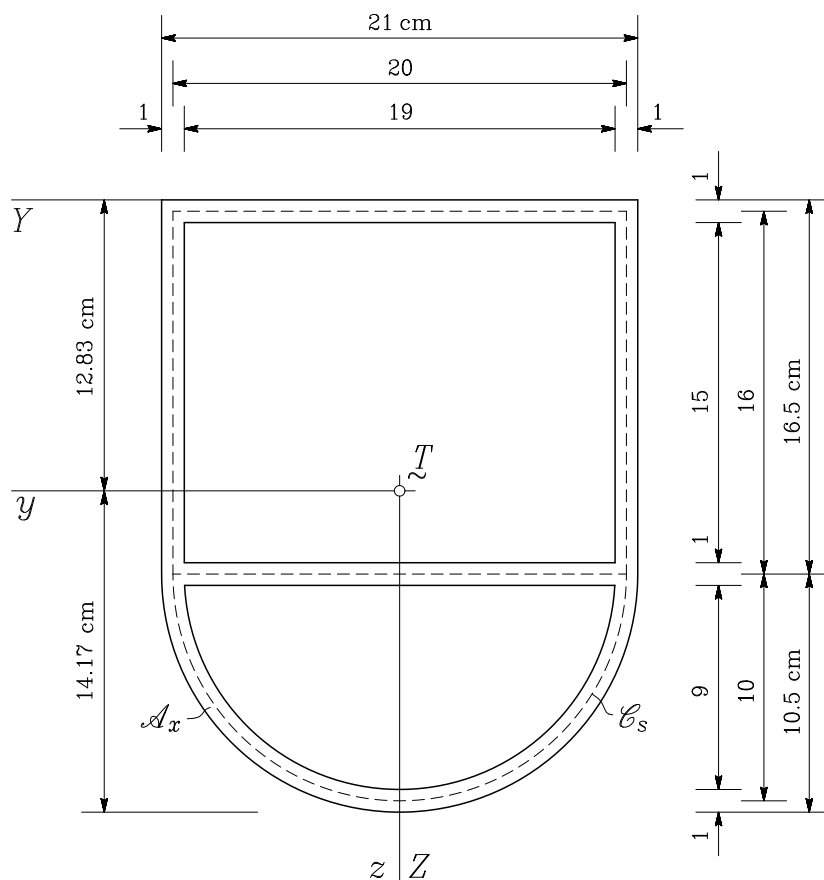


Slika Z-6.9 a

Ob upoštevanju dejanske geometrije prereza \mathcal{A}_x sta določena težiščna razdalja Z_T glede na pomožno os Y in vztrajnostni moment I_y glede na težiščno os y (skrben bralec bo sam preveril pravilnost obeh vrednosti)

$$Z_T = 12.83 \text{ cm} \quad \text{in} \quad I_y = 7798.17 \text{ cm}^4.$$

- Določi torzijski vztrajnostni moment I_x prereza \mathcal{A}_x in oceni napako zaradi zanemaritve prispevka ozkih pravokotnikov.
- Ob predpostavki, da gre v torzijsko obremenjenih elementih za čisto torzijo, določi reakcije v podporah prikazane branaste konstrukcije.
- Določi in skiciraj potek upogibnih in torzijskih momentov po elementih konstrukcije.



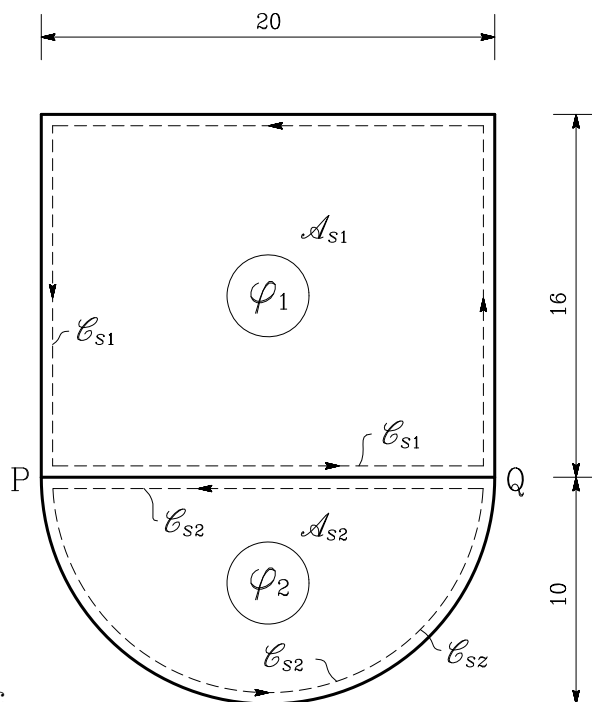
Slika Z-6.9 b

a.

Da bi lahko izračunali torzijski vztrajnostni moment obravnavanega tankostenskega zaprtega dvoceličnega prereza, moramo najprej določiti konstantni vrednosti φ_1 in φ_2 napetostne funkcije φ na robovih notranjih odprtih. Uporabimo sistem kompatibilnostnih enačb (5.389), ki se v našem primeru glasi

$$\begin{aligned} a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 &= b_1 \\ a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Koeficiente in desni strani določimo z enačbami (5.387) in (5.388) ob upoštevanju slike Z-6.9 c



Slika Z-6.9 c

$$a_{11} = \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} = \frac{1}{1} (2 \cdot 20 + 2 \cdot 16) = 72.0$$

$$a_{22} = \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{d\zeta}{\delta} = \frac{1}{1} (20 + 10\pi) = 51.4$$

$$a_{12} = a_{21} = - \int_P^Q \frac{d\zeta}{\delta} = -\frac{1}{1} \cdot 20 = -20.0$$

$$b_1 = 2 A_{s1} = 2 \cdot 20 \cdot 16 = 2 \cdot 320.0 = 640.0 \text{ cm}^2$$

$$b_2 = 2 A_{s2} = 2 \frac{\pi \cdot 10^2}{2} = 2 \cdot 157.1 = 314.2 \text{ cm}^2.$$

V naslednjem koraku rešimo sistem kompatibilnostnih enačb

$$\begin{bmatrix} 72.0 & -20.0 \\ -20.0 & 51.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 640.0 \\ 314.2 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= 11.87 \text{ cm}^2 \\ \varphi_2 &= 10.73 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Torzijski vztrajnostni moment M_x določimo z enačbo (5.393)

$$I_x = \frac{1}{3} \left(\oint_{\mathcal{C}_{sz}} \delta^3 d\zeta + \sum_{l_{ij}} \int \delta^3 d\zeta \right) + 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si}.$$

Posebej določimo delež, ki ga prispevajo ozki pravokotniki (ne glede na obliko srednje črte)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\oint_{\mathcal{C}_{sz}} \delta^3 d\zeta + \sum_{l_{ij}} \int \delta^3 d\zeta \right) &= \\ \frac{1}{3} [2 \cdot (20 + 16) \cdot 1^3 + 10 \cdot \pi \cdot 1^3] &= 34.5 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

in delež, ki pripada zaprtemu dvoceličnemu črtnemu liku

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si} &= 2 (\varphi_1 A_{s1} + \varphi_2 A_{s2}) = \\ &= 2 (11.87 \cdot 320.0 + 10.73 \cdot 157.1) = 10\,968.2 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Torzijski vztrajnostni moment je tako

$$I_x = 34.5 + 10\,968.2 = 11\,002.7 \text{ cm}^4.$$

Če prispevek ozkih pravokotnikov zanemarimo in računamo naprej kar z vrednostjo $I_x = 10\,968.2 \text{ cm}^4$, naredimo s tem zelo majhno napako, ki jo lahko, na primer, definiramo takole

$$\text{napaka} = 100 \cdot \frac{10\,968.2 - 11\,002.7}{11\,002.7} = -0.3\%.$$

Za nadaljnje računanje je koristno, če, na primer, specifično torzijsko togost GI_x izrazimo v odvisnosti od specifične upogibne togosti EI_y , tako da je $GI_x = \beta EI_y$. V našem primeru je

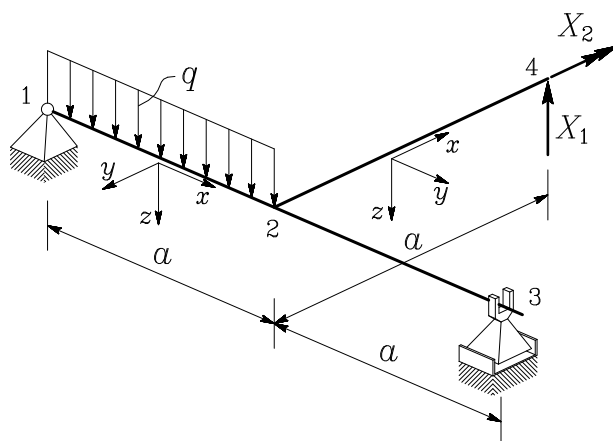
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+0.3)} = \frac{E}{2.6}$$

in sledi

$$\frac{GI_x}{EI_y} = \frac{E \cdot 11\,002.7}{2.6 \cdot E \cdot 7\,798.2} = 0.5427 \quad \rightarrow \quad \beta = 0.5427.$$

b.

Hitro lahko ugotovimo, da je konstrukcija dvakrat statično nedoločena. Reakcije v podporah določimo z metodo sil. Kot eno od možnih izberemo osnovno statično določeno konstrukcijo tako, da v točki 4 sprostimo obe nastopajoči podporni sili (slika Z-6.9 d).



Slika Z-6.9 d

Nadomestno navpično reakcijo označimo z X_1 , nadomestni reakcijski torzijski moment pa z X_2 . Obe nadomestni sili določimo iz pogojnih enačb (6.307)

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 &= -b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 &= -b_2. \end{aligned}$$

Dodajmo še pojasnilo o pomenu koeficientov pogojnih enačb:

a_{11} je navpični pomik, ki bi ga v točki 4 povzročila sila $X_1 = 1$,

a_{12} je navpični pomik, ki bi ga v točki 4 povzročila dvojica $X_2 = 1$,

b_1 je navpični pomik, ki bi ga v točki 4 povzročila zvezna obtežba q ,

a_{21} je torzijski zasuk, ki bi ga v točki 4 povzročila sila $X_1 = 1$,

a_{22} je torzijski zasuk, ki bi ga v točki 4 povzročila dvojica $X_2 = 1$,

b_2 je torzijski zasuk, ki bi ga v točki 4 povzročila zvezna obtežba q .

Diagrami upogibnih in torzijskih momentov, ki pripadajo nadomestnim silam in zunanji obtežbi, so prikazani na sliki Z-6.9 e. S smiselno uporabo enačb (6.319) in (6.320) določimo koeficiente in desni strani pogojnih enačb, pri čemer zanemarimo vpliv prečnih sil in upoštevamo, da je konstrukcija sestavljena iz dveh ravnih linijskih nosilcev $\bar{13}$ in $\bar{24}$

$$a_{11} = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{M}_{x1} \bar{M}_{x1}}{GI_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx$$

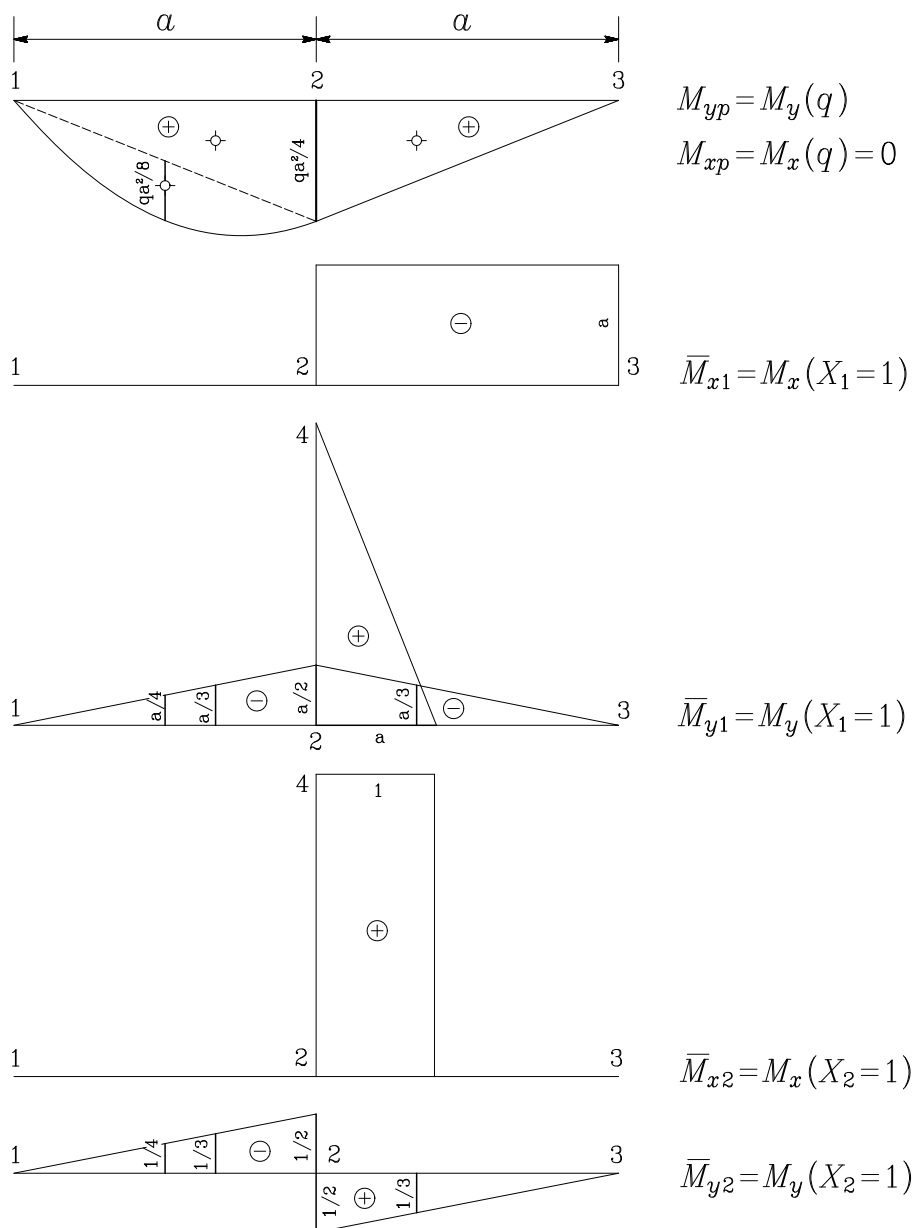
$$a_{12} = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{M}_{x1} \bar{M}_{x2}}{GI_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx = a_{21}$$

$$b_1 = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{M}_{x1} M_{xp}}{GI_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} \right) dx$$

$$a_{22} = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{M}_{x2} \bar{M}_{x2}}{GI_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx$$

$$b_2 = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{M}_{x2} M_{xp}}{GI_x} + \frac{\bar{M}_{y2} M_{yp}}{EI_y} \right) dx .$$

Nastopajoče integrale izvednotimo z metodo Vereščagina in dobimo



Slika Z-6.9 e

$$a_{11} = \frac{1}{GI_x} a \cdot a \cdot a + \frac{1}{EI_y} \left(\frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2a}{3} + 2 \frac{a \cdot a}{2 \cdot 2} \cdot \frac{a}{3} \right) = \frac{a^3}{GI_x} + \frac{a^3}{2EI_y}$$

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

$$b_1 = -\frac{1}{EI_y} \left(2 \cdot \frac{qa^2}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} + \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{4} \right) = -\frac{5qa^4}{48EI_y}$$

$$a_{22} = \frac{1}{GI_x} 1 \cdot a \cdot 1 + \frac{1}{EI_y} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a}{GI_x} + \frac{a}{6EI_y}$$

$$b_2 = -\frac{1}{EI_y} \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{qa^3}{48EI_y}.$$

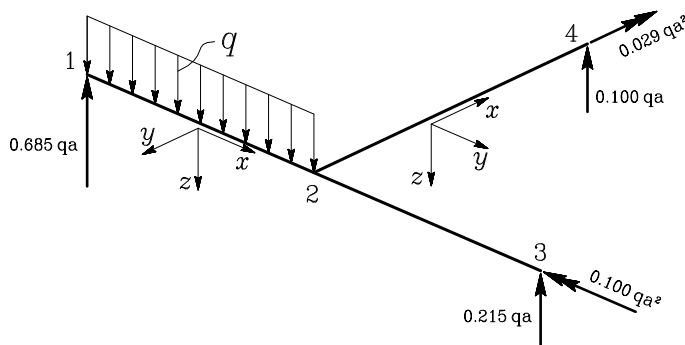
Ob upoštevanju zveze $GI_x = \beta EI_y$ lahko še pišemo

$$a_{11} = \frac{a^3}{2EI_y} (1 + 2\beta)$$

$$a_{22} = \frac{a}{6EI_y} (1 + 6\beta)$$

in končno izračunamo nadomestni sili

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5qa}{24(1+2\beta)} & \rightarrow & X_1 = 0.100 qa \\ X_2 &= -\frac{b_2}{a_{22}} = \frac{qa^2}{8(1+6\beta)} & \rightarrow & X_2 = 0.029 qa^2. \end{aligned}$$



Slika Z-6.9 f

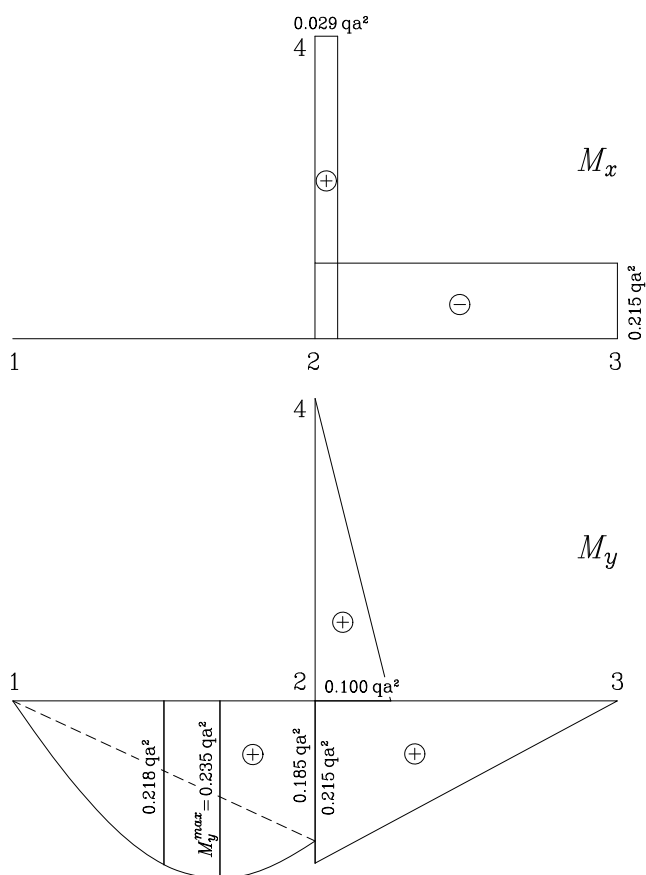
Po metodah elementarne statike togih nosilcev lahko sedaj določimo vse podporne sile in momente (slika Z-6.9 f)

c.

Diagrame in značilne vrednosti upogibnih in torzijskih momentov določimo z enačbami (6.315) in jih prikažemo na sliki Z-6.9 g

$$M_x = M_{xp} + X_1 \bar{M}_{x1} + X_2 \bar{M}_{x2}$$

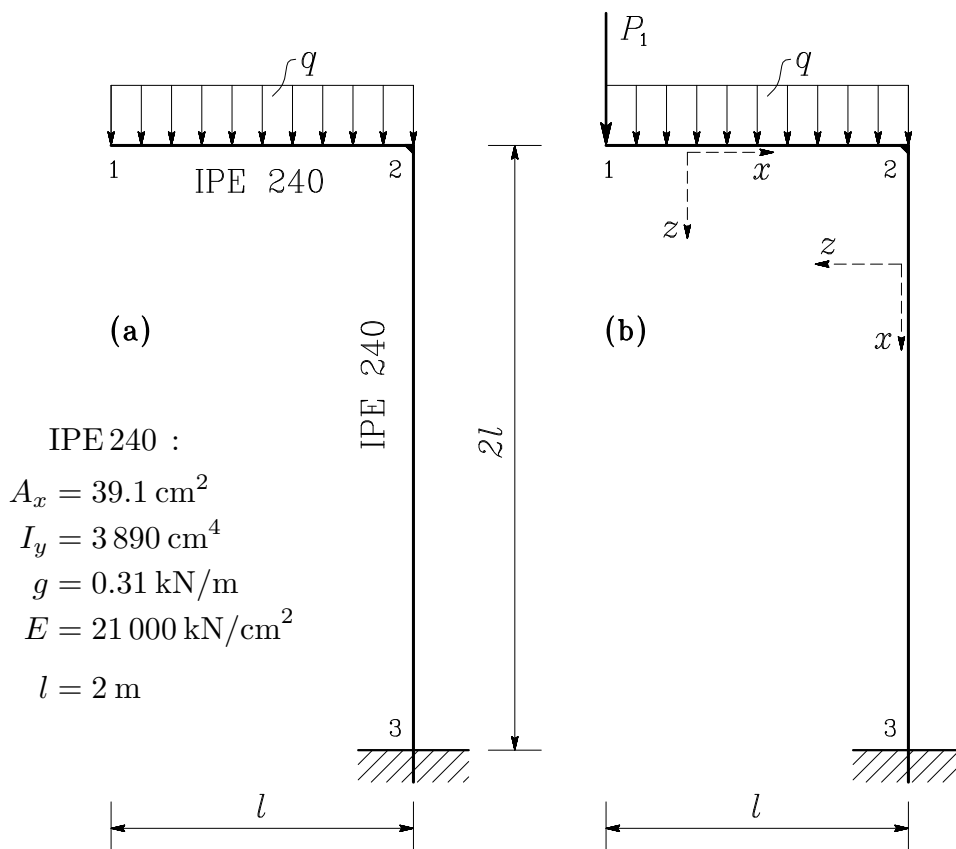
$$M_y = M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}.$$



Slika Z-6.9 g

Zgled 6.10

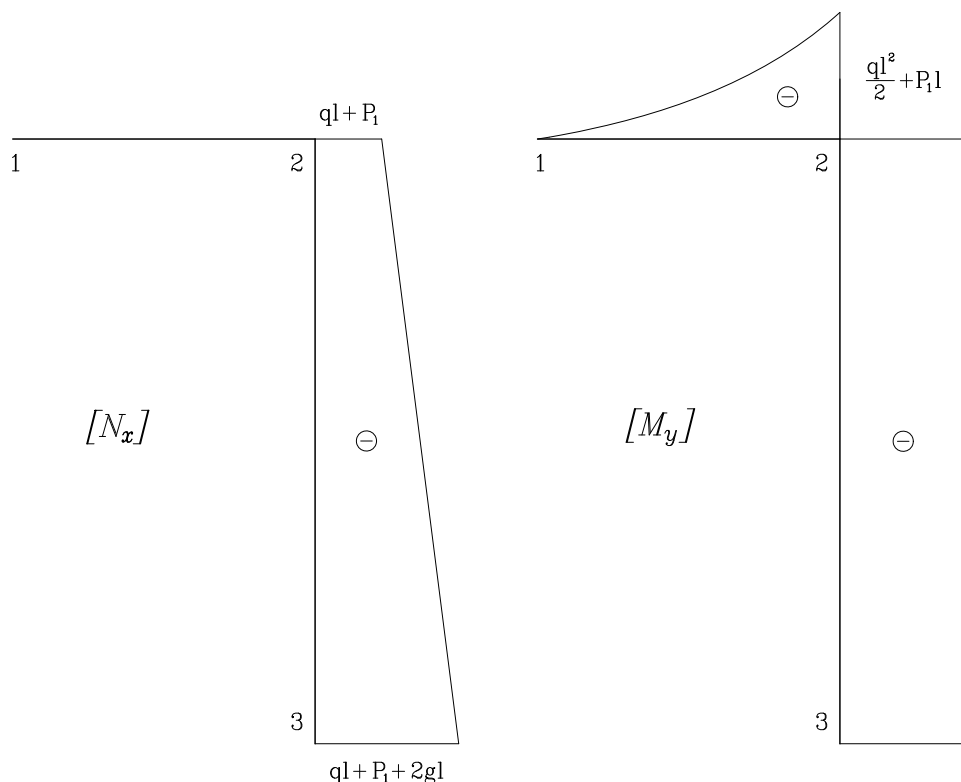
Oba elementa nosilne konstrukcije industrijskega nadstreška sta narejena iz tipskega jeklenega nosilca IPE 240 (slika Z-6.10 a). S Castiglianovim izrekom določi navpični pomik (poves) v točki 1 in oceni napako, ki jo narediš, če pri tem zanemariš vpliv osnih sil. V enakomerni zvezni obtežbi $q = 4.52 \text{ kN/m}$, ki deluje na element $\bar{1}2$, je že zajeta lastna teža g jeklenega profila.



Slika Z-6.10 a

Kakor vemo, s Castiglianovim izrekom izračunamo pomik v izbrani točki in v izbrani smeri tako, da dopolnilno deformacijsko energijo konstrukcije odvajamo po točkovni sili, ki v izbrani točki deluje v izbrani

smeri. V našem primeru moramo zato v točki 1 dodati točkovno silo, označimo jo s P_1 , v navpični smeri, torej v smeri lokalne koordinatne osi z nosilca $\overline{12}$. Konstrukcija je statično določena, zato je določitev notranjih sil čisto preprosta (slika Z-6.10 b).



Slika Z-6.10 b

Dopolnilno deformacijsko energijo obravnavane konstrukcije izračunamo z enačbo (6.388), ki se v našem primeru glasi

$$D^* = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x^2}{EA_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) dx .$$

Kakor vidimo, je funkcija upogibnega momenta na odseku $\overline{12}$ kvadratna parabola. Zato za izvrednotenje integrala na tem odseku ne moremo

uporabiti metode Vereščagina, saj gre za integral produkta nelinearne funkcije same s seboj. Zaradi boljše preglednosti zapišemo funkcije osne sile N_x in upogibnega momenta M_y na odsekih $\overline{12}$ in $\overline{23}$ vnaprej in nastopajoče integrale izračunamo po običajni poti.

$$\begin{aligned} \overline{12} : \quad N_x &= 0, & M_y &= \frac{qx^2}{2} + P_1x \\ \overline{23} : \quad N_x &= ql + P_1 + gx, & M_y &= \frac{ql^2}{2} + P_1l. \end{aligned}$$

Dopolnilna deformacijska energija obravnavane konstrukcije je tako

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{1}{2EI_y} \int_0^l \left(\frac{qx^2}{2} + P_1x \right)^2 dx + \frac{1}{2EI_y} \int_0^{2l} \left(\frac{ql^2}{2} + P_1l \right)^2 dx + \\ &\quad \frac{1}{2EA_x} \int_0^{2l} (ql + P_1 + gx)^2 dx. \end{aligned}$$

Po nekoliko daljšem, vendar preprostem računanju nastopajočih integralov dobimo

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{11q^2l^5}{40} + \frac{9P_1ql^4}{8} + \frac{7P_1^2l^3}{6} \right) + \\ &\quad \frac{1}{EA_x} \left[q^2l^3 + 2qgl^3 + \frac{4g^2l^3}{3} + 2P_1l^2(q+g) + P_1^2l \right]. \end{aligned}$$

Sedaj lahko navpični pomik w_1 v točki 1 določimo s Castiglianovim izrekom. Pri tem upoštevamo, da na podano konstrukcijo delujeta le enakomerna zvezna obtežba q in lastna teža jeklenega profila g , točkovno silo P_1 pa smo dodali zgolj zato, da bi lahko uporabili ome-njeni izrek

$$w_1 = \left. \frac{\partial D^*}{\partial P_1} \right|_{P_1=0} \rightarrow w_1 = \frac{9ql^4}{8EI_y} + \frac{2(q+g)}{EA_x}.$$

Očitno je, da prvi člen v izrazu za poves w_1 predstavlja delež, ki ga k povesu prispeva upogibni moment, drugi člen pa predstavlja prispevek osne sile. Zato vsakega od obeh členov izvednotimo posebej

$$\frac{9ql^4}{8EI_y} = \frac{9 \cdot 0.0452 \cdot 200^4}{8 \cdot 21\,000 \cdot 3890} = 0.9960 \text{ cm}$$

$$\frac{2(q+g)}{EA_x} = \frac{2(0.0453 + 0.0031) \cdot 200^2}{21\,000 \cdot 39.1} = 0.0047 \text{ cm}.$$

Poves w_1 , ki zajema tako vpliv upogibnih momentov kakor tudi osnih sil, je tedaj

$$w_1 = 0.9960 + 0.0047 = 1.0007 \text{ cm}.$$

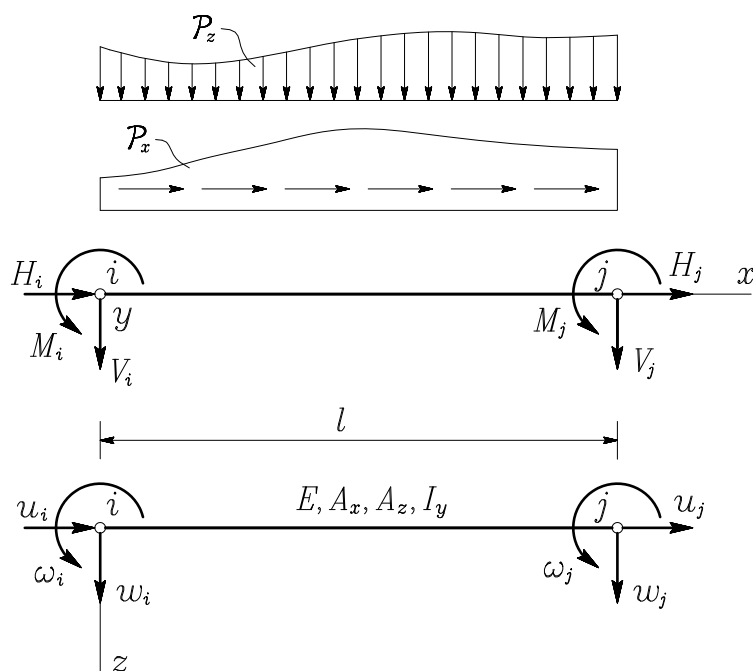
Ocenimo še napako, ki jo naredimo, če pri določitvi povesa w_1 vpliv osnih sil zanemarimo

$$\text{napaka} = 100 \cdot \frac{0.9960 - 1.0007}{1.0007} = -0.5 \%$$

V mehaniki linijskih konstrukcij na splošno velja, da je vpliv osnih sil na mehansko stanje konstrukcije zanemarljivo majhen v primerjavi z vplivom upogibnih momentov. Seveda pa to ne velja za tiste elemente konstrukcije, v katerih je osna sila prevladujoča notranja sila, na primer za členkasto priključene nosilce (palice) brez prečne obtežbe v polju. V takih elementih namreč praktično ni upogibnih momentov (razen praviloma zelo majhnih "parazitskih" momentov zaradi nepopolne členkaste izvedbe priključkov) in se praktično celoten prispevek takšnih elementov h globalni nosilnosti konstrukcije realizira z osnimi silami.

Zgled 6.11

Z izrekom o minimumu potencialne energije izpelji ravnotežne enačbe za element linearno elastičnega ravnega nosilca, obteženega s konservativno zvezno porazdeljeno vzdolžno in prečno obtežbo (slika Z-6.11 a). Upoštevaj Timoshenkov model nosilca.



Slika Z-6.11 a

V razdelku **6.18** smo potencialno energijo elastičnega telesa definirali kot vsoto vložene deformacijskega dela in potenciala zunanje obtežbe. Celotno deformacijsko delo linijskega elementa smo v razdelku **6.16** izrazili s pomiki in zasuki linijskega računskega modela. V ravninskem primeru, s kakršnim imamo opraviti v tem zgledu, dobimo

$$D = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \left[EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_e} GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)^2 dx. \quad (\text{a})$$

Potencial prikazane zunanje obtežbe pa je

$$\mathcal{V} = - \int_0^l (\mathcal{P}_x u + \mathcal{P}_z w) dx - H_i u_i - V_i w_i - M_i \omega_i - H_j u_j - V_j w_j - M_j \omega_j. \quad (\text{b})$$

Potencialna energija nosilca je tedaj

$$\Pi = D + \mathcal{V} \quad (\text{c})$$

in po vstavitvi izrazov (a) in (b) sledi

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \left[EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)^2 \right] dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^{l_e} GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)^2 dx - \int_0^l (\mathcal{P}_x u + \mathcal{P}_z w) dx - \\ & H_i u_i - V_i w_i - M_i \omega_i - H_j u_j - V_j w_j - M_j \omega_j. \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Kakor smo pokazali v razdelku **6.18**, ima potencialna energija lokalni minimum v stacionarni točki, torej pri tistem polju pomikov, pri katerem je njena prva variacija enaka nič. Po pravilu, ki smo ga spoznali v razdelku **6.2**, določimo prvo variacijo funkcionala Π kot linearni del spremembe potencialne energije pri poljubnih variacijah funkcij pomikov $u(x)$ in $w(x)$ in zasuka $\omega_y(x)$ ter njihovih krajiščnih vrednosti $u_i, w_i, \dots, \omega_j$. Pogoji za nastop lokalnega minimuma potencialne energije se tako glasi

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_0^l \left[EA_x \frac{du}{dx} \delta \left(\frac{du}{dx} \right) + EI_y \frac{d\omega_y}{dx} \delta \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right) \right] dx + \\ & \int_0^l GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right) \delta \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right) dx - \int_0^l (\mathcal{P}_x \delta u + \mathcal{P}_z \delta w) dx - \\ & H_i \delta u_i - V_i \delta w_i - M_i \delta \omega_i - H_j \delta u_j - V_j \delta w_j - M_j \delta \omega_j = 0. \end{aligned} \quad (\text{e})$$

V prvih dveh integralih nastopajo variacije prvih odvodov pomikov u in w ter zasuka ω_y . Da bi lahko prvo variacijo potencialne energije $\delta\Pi$ izrazili zgolj v odvisnosti od variacij osnovnih poskusnih funkcij u , w , ω_y , uporabimo pri členih z odvodi pravilo za integriranje po delih ("per partes") in dobimo

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \frac{du}{dx} \delta\left(\frac{du}{dx}\right) dx &= \left[\frac{du}{dx} \delta u\right]_0^l - \int_0^l \frac{d^2u}{dx^2} \delta u dx \\
 \int_0^l \frac{d\omega_y}{dx} \delta\left(\frac{d\omega_y}{dx}\right) dx &= \left[\frac{d\omega_y}{dx} \delta\omega_y\right]_0^l - \int_0^l \frac{d^2\omega_y}{dx^2} \delta\omega_y dx \\
 \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y\right) \delta\left(\frac{dw}{dx}\right) dx &= \left[\left(\frac{dw}{dx} + \omega_y\right) \delta w\right]_0^l - \\
 &\quad \int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\omega_y}{dx}\right) \delta w dx.
 \end{aligned} \tag{f}$$

Dobljene izraze vstavimo v enačbo (e) in jo uredimo tako, da zberemo člene, ki so pomnoženi z istimi variacijami pomikov u in w ter zasuka ω_y

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi &= - \int_0^l \left(EA_x \frac{d^2u}{dx^2} + \mathcal{P}_x \right) \delta u dx - \\
 &\quad \int_0^l \left[GA_z \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\omega_y}{dx} \right) + \mathcal{P}_z \right] \delta w dx + \\
 &\quad \int_0^l \left[EI_y \frac{d^2\omega_y}{dx^2} - GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right) \right] \delta\omega_y dx - \\
 &\quad \left[EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)_i + H_i \right] \delta u_i - \left[GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)_i + V_i \right] \delta w_i -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)_i + M_i \right] \delta\omega_i + \left[EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)_j - H_j \right] \delta u_j + \\ & \left[GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)_j - V_j \right] \delta w_j + \left[EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)_j - M_j \right] \delta\omega_j = 0. \end{aligned} \quad (g)$$

Variacije pomikov u in w ter zasuka ω_y kakor tudi variacije njihovih krajiščnih vrednosti so poljubne. Najprej si oglejmo primer, da je variacija $\delta u(x)$ pomika u poljubna od nič različna funkcija, vse ostale variacije pa so enake nič ($\delta w = \delta\omega_y = \delta u_i = \delta w_i = \delta\omega_i = \delta u_j = \delta w_j = \delta\omega_j = 0$). Tedaj iz pogoja (g) za stacionarno točko sledi

$$\delta\Pi = - \int_0^l \left(EA_x \frac{d^2u}{dx^2} + \mathcal{P}_x \right) \delta u \, dx = 0. \quad (h)$$

Ker je $u(x)$ poljubna funkcija na intervalu $[0, l]$, iz osnovnega izreka variacijskega računa, ki smo ga spoznali v razdelku **6.2**, sledi, da mora biti izraz v oklepaju enak nič po celotni dolžini obravnavanega nosilca

$$EA_x \frac{d^2u}{dx^2} + \mathcal{P}_x = 0 \quad \text{na} \quad [0, l]. \quad (i)$$

V naslednjem koraku vzamemo, da so enake nič vse variacije pomikov in zasukov razen δw in s podobnim sklepanjem kakor prej dobimo

$$GA_z \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\omega_y}{dx} \right) + \mathcal{P}_z = 0 \quad \text{na} \quad [0, l]. \quad (j)$$

Če pa vzamemo, da so enake nič vse variacije pomikov in zasukov razen $\delta\omega_y$, sledi

$$EI_y \frac{d^2\omega_y}{dx^2} - GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right) = 0 \quad \text{na} \quad [0, l]. \quad (k)$$

Matematično gledano so enačbe (i) do (k) Euler-Lagrangeve enačbe obravnavanega variacijskega problema in morajo biti izpolnjene povsod na območju dolžine nosilca. S stališča mehanike pa so to ravnotežne enačbe, ki povezujejo pomike in zasuke nosilca z nadomestno zunanjo obtežbo. V obravnavanem ravninskem primeru ($\mathcal{M}_y = 0$) se o tem lahko hitro prepričamo, če v omenjenih enačbah upoštevamo zveze (6.381), (6.383) in (6.384), kar pripelje do ravnotežnih enačb (5.30), (5.32) in (5.34).

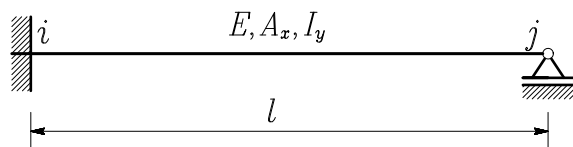
Preostane nam še razmislek o variacijah vozliščnih pomikov in zasukov. V tem pogledu imamo dve skrajni možnosti. Če so vsi vozliščni pomiki in zasuki predpisani, so vse njihove variacije enake nič in pogoj (g) za minimum potencialne energije je izpolnjen. V drugem skrajnem primeru, ko so vsi vozliščni pomiki in zasuki omogočeni, pa so njihove variacije lahko poljubne in morajo biti izpolnjeni tako imenovani naravni robni pogoji:

$$\begin{aligned} EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)_i + H_i &= 0 \\ GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)_i + V_i &= 0 \\ EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)_i + M_i &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)_j - H_j &= 0 \\ GA_z \left(\frac{dw}{dx} + \omega_y \right)_j - V_j &= 0 \\ EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)_j - M_j &= 0. \end{aligned} \tag{m}$$

Skrben bralec se bo brez težav prepričal, da prikazani naravni robni pogoji v našem primeru predstavljajo statične robne pogoje, izražene z odvodi pomikov in zasukov v krajiščih nosilca.

Med obema navedenima skrajnima primeroma so v odvisnosti od načina podpiranja možni različni vmesni primeri. V ilustracijo si oglejmo primer, da je nosilec v krajišču i togo vpet, v krajišču j pa pomično vrtljivo podprt (slika Z-6.11 b).



Slika Z-6.11 b

V tem primeru morata biti v vozlišču j izpolnjena dva naravna robna pogoja:

$$\begin{aligned} EA_x \left(\frac{du}{dx} \right)_j - H_j &= 0 \\ EI_y \left(\frac{d\omega_y}{dx} \right)_j - M_j &= 0. \end{aligned} \tag{n}$$

Brez težav lahko ugotovimo, da pogoja (n) zahtevata, da sta v točki j osna sila in upogibni moment enaka nič. Gre torej za dobro znana statična robna pogoja v pomični vrtljivi podpori.

VIRI†

1. A. P. BORESI, O. M. SIDEBOTTOM, *Advanced Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons, Inc., 1985.
2. V. BRČIĆ, *Otpornost materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.
3. J. BRNIĆ, *Elastomehanika i plastomehanika*, Školska knjiga Zagreb, 1996.
4. I. N. BRONŠTEJN, K. A. SEMENDJAJEV, *Matematični priročnik*, Založba Življenje in tehnika, Ljubljana, 1963.
5. I. N. BRONŠTEJN, K. A. SEMENDJAJEV, G. MUSIOL, H. MÜHLIG, *Matematični priročnik*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1997.
6. C. R. CALLADINE, *Engineering Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1969.
7. J. CASE, A. H. CHILVER, *Strength of Materials and Structures*, Edward Arnold (Publishers) Ltd, London, 1971.
8. D. S. CHANDRASEKHARAIHAH, L. DEBNATH, *Continuum Mechanics*, Academic Press, Inc., San Diego, 1994.
9. W. F. CHEN, D. J. HAN, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.

† Literature s področja mehanike trdnih teles in trdnosti je zelo veliko. V Evropi in Severni Ameriki pa tudi drugod po svetu prevladujejo knjige v angleškem, nemškem in francoskem jeziku. V poglavju VIRI so navedena le najpomembnejša domača in tuja dela, ki obravnavajo problematiko na ravni pričujočega učbenika, ter nekaj matematične literature in priročnikov, ki utegnejo biti v pomoč pri razumevanju obravnavanih vsebin.

10. S. H. CRANDALL, N. C. DAHL, *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill Book Company, 1978.
11. Y. C. FUNG, *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
12. Y. C. FUNG, PIN TONG, *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2001.
13. H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1980.
14. J. M. GERE, S. P. TIMOSHENKO, *Mechanics of Materials*, Stanley Thornes (Publishers) Ltd., Cheltenham UK, 1999.
15. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Dover Publications, Inc., New York, 1968.
16. C. HARTSUIKER, J. W. WELLEMAN, *Engineering Mechanics*, Vol. 2: Stresses, Strains, Displacements, Springer, Dordrecht, 2007.
17. A. HIGDON, E. H. OHLSEN, W. B. STILES, J. A. WEESE, *Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons, Inc., 1967.
18. K. D. HJELMSTAD, *Fundamentals of Structural Mechanics*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2005.
19. J. HLITČIJEV, M. VREČKO, *Otpornost materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1963.
20. A. A. ILYUSHIN, V. S. LENSKY, *Strength of Materials*, Pergamon Press, Oxford, 1967.
21. D. JURŠIČ, S. SRPČIČ, *Mehanika trdnih teles*, Študijsko gradivo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1976–1980.
22. A. S. KHAN, S. HUANG, *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, Inc., 1995.
23. F. KRIŽANIČ, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.

-
24. L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity*, Course of Theoretical Physics, Vol. 7, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986.
 25. J. LEMAITRE, J.-L. CHABOCHE, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
 26. L. MALVERN, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
 27. G. A. MASE, *Continuum Mechanics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1970.
 28. T. MURA, T. KOYA, *Variational Methods in Mechanics*, Oxford University Press, Inc., New York, 1992.
 29. N. NAERLOVIĆ–VELJKOVIĆ, *Teorija elastičnosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
 30. N. NAERLOVIĆ–VELJKOVIĆ, M. PLAVŠIĆ, *Teorija elastičnosti*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
 31. W. A. NASH, *Strength of Materials*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1998.
 32. J. T. ODEN, *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
 33. E. P. POPOV, *Introduction to Mechanics of Solids*, Ginn and Company, Boston, 1961.
 34. W. PRAGER, *Introduction to Mechanics of Continua*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
 35. A. PYTEL, J. KIUSALAAS, *Mechanics of Materials*, Brooks/Cole, Thomson Learning, Inc., 2003.
 36. W. F. RILEY, L. D. STURGES, D. H. MORRIS, *Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
 37. A. R. RŽANICIN, *Teorija puženja materiala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.
 38. A. S. SAADA, *Elasticity - Theory and Applications*, Pergamon Unified Engineering Series, Pergamon Press, New York, 1974.

39. M. SAJE, *Enačbe snovi*, Katedra za mehaniko, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1989.
40. M. SAJE, S. SRPČIČ, *Osnove nelinearne mehanike trdnih teles*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1993.
41. M. SAJE, *Kinematika in dinamika*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1994.
42. V. D. DA SILVA, *Mechanics and strength of materials*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
43. I. H. SHAMES, F. A. COZZARELLI, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*, Taylor & Francis, Washington, 1997.
44. SAZU, *Slovenski pravopis, I Pravila*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1990.
45. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956.
46. M. STANEK, G. TURK, *Statika I in II*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1996.
47. M. STANEK, G. TURK, *Osnove mehanike trdnih teles*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998.
48. V. ŠIMIĆ, *Otpornost materijala I. in II*, Školska knjiga Zagreb, 1995.
49. B. ŠTOK, *Mehanika deformabilnih teles*, Zbirka rešenih problemov, I. in II. del, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1988.
50. S. P. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teorija elastičnosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1962.
51. S. P. TIMOSHENKO, *History of Strength of Materials*, Dover Publications, 1983.
52. S. P. TIMOSHENKO, *Strength of Materials, Part 2*, CBS Publishers, Delhi, 1986.

53. S. VALLIAPPAN, *Continuum Mechanics - Fundamentals*, A. A. Balkema, Rotterdam, 1981.
54. I. VIDAV, *Višja matematika I, II, III*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1981, 1976, 1975.
55. D. ŽITNIK ...[ET AL.], *Gradbeniški priročnik*, peta, dopolnjena izdaja, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 2012.
56. H. M. WESTERGAARD, *Theory of Elasticity and Plasticity*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952.