

Peter Lukan

MNOGI SVETovi VERJETNOSTI



Uvod

V članku se ukvarjam z razmerjem med t. i. subjektivno in objektivno verjetnostjo ter med različnimi interpretacijami verjetnosti. Po zgoščnem povzemanju stališč vidnejših raziskovalcev filozofije verjetnosti uvajam tipologijo, s pomočjo katere zarišem odnose med interpretacijami na način, ki odseva bistvene razlike med njimi. Prednosti ne dajem nobeni od obravnavanih interpretacij verjetnosti posebej in v tem smislu zagovarjam različna razumevanja verjetnosti oziroma v naslovu omenjene mnoge svetove verjetnosti. Dalje podajam svoje ugotovitve glede razcepa med subjektivno in objektivno verjetnostjo ter nakažem odgovor na vprašanje, kako je mogoče na verjetnost gledati na bolj poenoten način. Za konec poudarjam svojo ugotovitev o nujnosti povezave med pojmom verjetnosti in pojmom informacije, ki se mi zdi širšega pomena za epistemologijo.

Stališča proučevalcev interpretacij verjetnosti

V prvem razdelku povzemam stališča nekaterih vidnejših raziskovalcev filozofije verjetnosti. Med njimi imajo eni bolj, drugi manj izvirna in dodelana stališča do vprašanja interpretacije verjetnosti in razcepa med subjektivno ter objektivno verjetnostjo. Večinoma ločijo naslednje interpretacije verjetnosti: logično, ultrasubjektivno, frekventistično in mersko-teoretsko, pri čemer prvi dve sodita med subjektivne, drugi dve pa med objektivne interpretacije verjetnosti. Vsem raziskovalcem je skupno stališče, da ne obstaja samo ena pravilna interpretacija pojma verjetnosti, temveč vsaj dve, ki ju ni mogoče zvesti drugo na drugo. Nekateri proučevalci gredo še dlje od tega skupnega stališča in se izrekajo o tem, kako bi bilo treba ravnati glede rabe verjetnosti v praksi.

Ian Hacking (1975) piše, da je dualnost verjetnosti postala možna z razširitvijo pojma evidence na notranjo in konvencionalno-zunanjo; slednja je bila zaobsežena v srednjeveškem pojmu *opinio*. Delitev na zunanjo in notranjo evidenco naj bi do določene mere ustrezala delitvi na objektivno in subjektivno verjetnost, pri čemer prva temelji na stvareh samih, druga pa na mnenjih. S tem je postal mogoč tudi analitični problem indukcije, ker so različne statistične regularnosti v naravi začele veljati kot verjetnosti. Hacking torej vidi neposredno povezavo med uveljavljanjem pojma verjetnosti in razvojem induktivnih znanstvenih metod.

Hackingovo stališče o modernem razlikovanju med subjektivno in objektivno verjetnostjo je na kratko povzeto takole: »Temeljna razlika med ‚objektivno‘ in ‚subjektivno‘ verjetnostjo [...] je razlika med modeliranjem in sklepanjem.«¹ Gre torej za razliko med matematičnim modelom, ki govori o relativnih frekvencah, in načinom sklepanja, ki se sicer lahko nanaša tudi na relativne frekvence, vendar ne nujno. Predvsem se tiče zanesljivosti in tehtanja na podlagi argumentov različnih tipov.

Po mnenju Davida Salsburga (2002) je interpretacija verjetnosti stvar tega, kako aksiome verjetnosti (Kolmogorova) identificiramo v realnih življenjskih situacijah, torej stvar pragmatičnosti. »Iskanja pomena verjetnosti v resničnem življenju se po navadi lotevajo s predlaganjem realnih življenjskih pomenov za abstraktne prostore verjetnosti Kolmogorova.«² Njegove kritične refleksije se sučejo v glavnem okrog tega.

1 Hacking, *The Taming of Chance*, str. 98.

2 Salsburg, *The Lady Tasting Tea*, str. 146.

Ker gre pri Kolmogorovu v osnovi za »mero množic v abstraktnem prostoru dogodkov«,³ je pogosto problem že to, kako definirati prostor vseh dogodkov, iz katerega nato določimo verjetnost in njeno porazdelitev. Razumljiv pomen verjetnosti je ustrezno definiran za raziskave na vzorcih – tam je prostor vseh dogodkov množica vseh možnih naključnih vzorčenj, ki bi lahko bila izbrana, zato je verjetnost tudi mogoče ustrezno izračunati. Toda ko se statistične metode uporabljajo na primer v astronomiji, sociologiji, epidemiologiji in meteorologiji, po njegovem mnenju pravi pomen verjetnosti ni ustrezno določen ravno zato, ker množica vseh dogodkov ni ustrezno definirana. Zato je na teh področjih več modelov, ki si konkurirajo in ponujajo različne zaključke, čeprav noben ni bolj veljaven od drugega, če ni mogoče identificirati prostora realnih dogodkov, za katere verjetnost računamo.

Verjetnost po Salsburgu lahko dopušča tudi le delno urejenost in ni nujno številska, tako kot so menili tudi Keynes, de Finetti in Ramsey. Tudi pri kvalitativni verjetnosti je treba še vedno upoštevati kriterij koherence. V tem smislu 95-odstotna verjetnost dežja v odnosu do 75-odstotne verjetnosti dežja ne pomeni ničesar *konsistentnega* in med tema ocenama ni mogoče smiselno opredeliti razlike, trdi Salsburg. Takšen pogled na verjetnost je po njegovem mnenju lahko podlaga za odločanje na podlagi statističnih modelov. V tej perspektivi verjetnost ne temelji na prostoru vseh možnih dogodkov, ampak na tem, da so verjetnosti produkt posameznikov in jih je mogoče uporabljati na konsistenten način. Salsburgovo sporočilo je torej to, da je za objektivno verjetnost temeljna *identifikacija prostora dogodkov v realnosti*, za subjektivno pa *koherenca in urejevalni značaj tehtanja v perspektivi odločanja*.

Precej dodelano stališče o interpretaciji verjetnosti ima Donald Gillies (2000). Gilliesov pristop je povezan z njegovim stališčem do filozofije znanosti, znanost namreč razume kot rabo znanstvenih modelov. V tem smislu tudi v verjetnosti in statistiki vidi predvsem rabo modelov, podobno kot Kolmogorov, zato meni, da nam ti ne morejo *odgovoriti* na globlja filozofska vprašanja, očitno pa jih lahko *zastavljajo*.

Gilliesova kritika se tiče predvsem pojmovanja modelov. T. i. frekventistično pojmovanje kritizira s stališča, da frekvence enačiz verjetnostmi s pomočjo operacionalnih definicij. Te pa se v znanosti ne obnesejo, zato sam prisega na neoperacionalno teorijo konceptualne inovacije, pri kateri pojem uvedemo kot primitiven, nato pa ga opomenimo kontekstualno glede na rabo znotraj teorije. Gillies kot primer tovrstne dobre prakse navaja Newtonovo uvajanje mase v

3 Prav tam, str. 301.

teorijo gravitacije, s čimer je Newton razložil prejšnjo teorijo (Keplerjevo in Galilejevo), ob tem pa je moral napraviti smiseln približek (zanemariti maso Zemlje, ker je veliko manjša od mase Sonca). Na soroden način Gillies uvaja pojem verjetnosti tako, da uvede približek verjetnostnih sodb, kot da so *dokončno* falsifikabilne, čeprav v resnici niso, saj običajno lahko najdemo kake protiprimer. S tem problemom se je ukvarjal že Popper v svoji epohalni *Logiki znanstvenega odkritja*. Na ta način oblikujemo približek potrditve hipoteze, za katero običajno dogovorno velja 5-odstotno tveganje, in tej hipotezi priredimo njene logične ekvivalente. Gillies temu pravi »metodološka falsifikabilnost«. Skratka, sodbe, pri katerih je statistično tveganje 5 %, razglasi za *praktično resnične*. To je po njegovem mnenju potreben dodatni privzetek, če hočemo teorijo povezati z empirično realnostjo. Za to povezavo je potrebno pravilo za falsifikacijo verjetnostnih stavkov.

Po Gilliesu je razlika med teorijo verjetnosti in naravoslovjem v tem, da pri slednjem oblikujemo deterministične zakone, s katerimi dobimo napovedi, ki se ujemajo z meritvami, pri prvi pa moramo poleg aksiomov verjetnosti privzeti še pravilo za falsifikacijo (kot ga je uvedel že Popper). S tem stališčem se strinja tudi de Finetti. Vendar je treba poudariti, da se tudi naravoslovje, ko se prek svojih napovedi stika z meritvami, nanje opira s pomočjo statističnih hipotez. Med meritvami in teorijo vlada enak odnos kot med podatki in hipotezo, kar pomeni, da tudi pri meritvah potrebujemo takšen ali drugačen kriterij za »mikro« falsifikacijo.

Gillies zagovarja tripojmovno zasnovano verjetnosti. Na splošno meni, da je objektivni pojem verjetnosti uporaben v znanosti, subjektivni pa v družbenih vedah, tema dvema pa dodaja še intersubjektivni pojem verjetnosti. Ta se nanaša na delovanje množice subjektov in interakcijo med njimi ter se uporablja v teoriji iger. Status intersubjektivne verjetnosti Gillies razume kot vmesen med subjektivno in objektivno. Za to varianto verjetnosti prevzame teoreme od Ryderja, ki sicer hoče z njimi ovreči subjektivno teorijo verjetnosti. Nasprotno pa Gillies meni, da je slednja predpogoj za intersubjektivno teorijo verjetnosti.

Za intersubjektivno verjetnost v smislu usklajenega epistemološkega ekipnega delovanja sta potrebna dva pogoja: skupen interes posameznikov glede določene zadeve in dober pretok informacij v skupini, kar jamči za to, da skupina ve več kot posameznik. Glavni preizkusni kamen, na katerem je intersubjektivna verjetnost utemeljena, je t. i. »argument nizozemske knjige«, ki implicira koherenco tako pri subjektivni verjetnosti kot pri intersubjektivni. Ena osnovnih ugotovitev glede intersubjektivne verjetnosti je, da je pri skupinski

stavi edini način, da ne pride do vnaprej izgubljene stave, to, da vsi udeleženci kolektiva stavijo enako. V spoznavnem smislu to pomeni, da se morajo strinjati oziroma enako verjeti v teorijo. Intersubjektivna verjetnost je po Gilliesu torej uporabna na področjih, na katerih obstaja skupni interes, pri čemer navaja predvsem ekonomijo in dejavnost potrjevanja znanstvenih teorij.

Patrick Suppes (1984) je v zvezi z verjetnostjo predlagal, da je edina lestvica, ki ustreza osebni, tj. ultrasubjektivni verjetnosti, v resnici kvalitativna, pri čemer naj bi bila smiselna petstopenjska lestvica verjetnosti: gotovo resnično, bolj verjetno kot ne, enako verjetno kot ne, manj verjetno kot ne, gotovo napačno. S tem se pridružuje de Finettiju, ki je ravno tako podal aksiome kvalitativne verjetnosti in po katerem se je tudi zgledoval. Subjektivna verjetnost je v takšnem sistemu petstopenjska urejenostna spremenljivka. Takšnega mnenja je, kot že omenjeno, tudi Salsburg.

Druga pomembna kritika, ki jo podaja Suppes v zvezi z verjetnostjo, je ta, da verjetnost pravzaprav ni ustrezno umeščena v širše mišljenje nasploh, ne samo v strogo naravoslovno znanost, kar ima za posledico težave pri njeni interpretaciji. Sam vidi celo potrebo po verjetnostni metafiziki (*probabilistic metaphysics*), s čimer razume paradigmo mišljenja, ki bi sprostila razumevanje tega pojma. To temo je poglobljeno razdelal v svoji knjigi *Probabilistic Metaphysics* (1984). Klasična verjetnost namreč sloni na determinizmu in zato prinaša s seboj določeno interpretacijo pojma verjetnosti, t. i. epistemsko verjetnost. Porast novih interpretacij v 20. stoletju kaže tudi na težnjo po predrugačenju razumevanja verjetnostnega mišljenja nasploh. Glavne točke, ki jih Suppes očita filozofski in znanstveni metafiziki, so:

- Prihodnost je povsem določena s preteklostjo.
- Vsak dogodek ima zadostni določevalni vzrok.
- Védenje mora temeljiti na gotovosti.
- Znanstveno védenje je lahko načeloma zaključeno.
- Znanstveno védenje in metoda sta v osnovi lahko združena.

Te predpostavke imenuje predpostavke »neotradicionalne« metafizike, najti pa jih je mogoče v velikem delu postkantovske filozofske misli in analitične filozofije ter deloma v sodobnem logičnem empirizmu oziroma pozitivizmu. Iz Suppesovega zavračanja vseh navedenih točk po njegovem mnenju izhaja potreba po novi paradigmi mišljenja. Ravno tako za znanstveni jezik meni, da je za mnoge lingviste in filozofe še vedno domovanje determinizma.

Namesto logičnega empirizma Suppes zagovarja to, čemur pravi *verjetnostni empirizem*, ki ni reduktiven in ponuja »dovolj bogat okvir, da lahko upraviči tako naše vsakdanje načine mišljenja o svetu kot tudi naše znanstvene metode preučevanja«. ⁴ Tako kot Harold Jeffreys torej vidi povezavo med znanstvenim in splošnim znanjem. Po njem ⁵ bi takšna verjetnostna metafizika vključevala naslednje temeljne predpostavke:

- Temeljni zakoni naravnih fenomenov so v osnovi verjetnostni in niso deterministični.
- Naše pojmovanje snovne materije mora vsebovati intrinzični element verjetnosti.
- Vzročnost je po značaju verjetnostna in ni deterministična, zato ni nasprotja med naključnostjo v naravi in obstojem veljavnih vzročnih zakonov.
- Gotovost vedenja je nedosegljiva, bodisi v psihološkem smislu ali v smislu logične resnice ali v smislu popolne natančnosti merjenja.
- Zbor vseh znanstvenih teorij se ne približuje nobeni končni teoriji o vsem. ⁶
- Znanosti so v osnovi pluralistične, tako glede jezika in predmeta proučevanja kot glede metode.
- Učenje jezika in njegovo izvajanje sta intrinzično verjetnostna.
- Teorija racionalnosti je intrinzično verjetnostna.

Za temo interpretacije verjetnosti so zanimive predvsem prve štiri postavke.

Yair M. Guttman (1999) identificira štiri interpretacije verjetnosti, ki jih »spričo pomanjkanja boljših izrazov« označi kot fizikalistično, frekventistično (tudi empiricistično), logično in personalistično. Za fizikalistično verjetnost sta značilna raba v fiziki in poskus fizikalne interpretacije verjetnosti. Zgodovinsko gledano je ta interpretacija vezana na razvoj statistične mehanike. Za frekventistično verjetnost, ki jo imenuje tudi empiricistično, je značilno opiranje na relativne frekvence ter ukvarjanje z načini zbiranja podatkov oziroma vzorčenjem. Ta tip verjetnosti tvori osnovo sodobne statistike. Logična verjetnost temelji na uporabi matematičnega pojma simetrije, najbolj se je razvila v matematiki in logiki. Personalistična verjetnost se ukvarja s teorijo odločanja.

4 Suppes, *Probabilistic Metaphysics*, str. 2.

5 Prav tam, str. 10.

6 O tem problemu piše tudi Uršič v *Daljni bližini neba* (2010), in sicer ugotavlja, da takšna teorija ne bi mogla zaobjeti resnično vsega, npr. mentalnih, družbenih, umetniških idr. fenomenov (str. 472).

Pri omenjenih štirih interpretacijah poudari nekatere prevladujoče poteze, zaradi česar je njegove oznake mogoče uporabiti tudi v tipološkem, ne samo v historičnem smislu. Med njimi vlada določena kompatibilnost, koherentnega pogleda pa nimata le fizikalistična in personalistična varianta. Iz tega razloga se Guttmannu ne zdi smiselno govoriti o štirih temeljnih šolah, ampak kvečjemu o štirih metodah ali pristopih k verjetnosti. Sam vztraja, da ni štirih definicij verjetnosti ter da je v osnovi pomemben samo precep med subjektivno in objektivno verjetnostjo, zato se izreka samo za to delitev, tako kot Hacking.

Glavni splošni poudarek Andreia Khrennikova (1999) je, da je neverjeten uspeh mersko-teoretske interpretacije verjetnosti na področjih matematike, fizike, biologije, psihologije in ekonomije v drugi polovici 20. stoletja prinesel problem, da so ostale interpretacije verjetnosti premalo – ali pa sploh niso – upoštevane. Verjetnosti je treba po njegovem mnenju ocenjevati v odvisnosti od konteksta, kakor meni tudi Gillies, česar večinoma ne počnemo, zato prihaja do neustreznih aplikacij in razumevanj. Po njegovem mnenju je jasno, da dandanes ni mogoče imeti enega in edinega modela verjetnosti za opis vseh fenomenov.

Tipološka razdelava interpretacij verjetnosti

Iz pregleda posameznih interpretacij verjetnosti in problemov, ki jih odpirajo, bi rad izpeljal nekakšen sintetičen sklep. Drugače rečeno, iz historičnega pregleda želim izpeljati tipološko osnovo, ki bi odražala posebnosti in težave teh interpretacij ter s pomočjo katere bi lahko označil različne pristope in rabe verjetnosti. Moje izhodišče torej ni v tem, da je katera od teh interpretacij pravilna in da so vse druge napačne, zato tudi kategorije, ki jih bom uvedel, niso vsebinsko popolnoma določujoče, saj dopuščajo prostor za različne interpretacije. Nekaj podobnega je – morda nehote – naredil Guttmann v dodatku k svoji monografiji o pojmu verjetnosti v statistični fiziki, kjer sicer samo povzema štiri interpretacije verjetnosti in njihove glavne poteze (tj. fizikalistično, frekventistično, logicistično in personalistično). To se ujema z njegovim stališčem, da te interpretacije razume bolj kot *metode* oziroma različne pristope, ki pa imajo podobne temelje.

Interpretacije verjetnosti, kakor sem jih obravnaval v prejšnjem razdelku, so večinoma vezane na določene avtorje ali miselne tokove ter so v tem smislu historično pogojene. Imajo tudi nekaj medsebojnih podobnosti, saj nobena ni »povsem drugačna« od ostalih. Če že ne drugega, se vse ujemajo s temeljnimi aksiomi verjetnosti. Na tem mestu predlagam poskusno tipologijo, ki se nanaša

na elemente oziroma vidike rabe verjetnosti v različnih kontekstih. Ti elementi so:

- Frekventistično-empirični element – pomeni nanašanje verjetnosti na relativne frekvence, kot jih dobimo s pomočjo enostavnega štetja. Gre za povsem deskriptivni vidik teorije, za podajanje relativnih frekvenc za končne množice elementov z racionalnimi števili.
- Logično-simetrijski element – uporaba verjetnostnih porazdelitev in njihovih simetrij pri pripisovanju verjetnosti, kot so normalna, enakomerna itd. Najbolj znano načelo tega tipa je načelo nezadostnega razloga. Sem spadata tudi upoštevanje limite relativnih frekvenc, ki je implicitno vsebovana v pojmu zveznih porazdelitev, ter uporaba simetričnih porazdelitev v teoriji napak in metodi največjega verjetja ter v sklepalni statistiki nasploh.
- Matematično-fizikalistični element – uporaba zveznih porazdelitev na kontinuumih prostora in časa oziroma za količine, povezane z gibanjem. Tehnično rečeno, gre za uporabo pojma verjetnostne gostote.
- Subjektivistično-razvojni element – poudarek je na razvoju koherentnega pripisovanja verjetnosti z vključevanjem novih izidov, ki je povezan z apriornimi verjetnostmi.

S pomočjo te tipologije lahko govorimo o razlikah in povezavah med posameznimi šolami verjetnosti ali področji, ki verjetnost uporabljajo. Rečemo lahko, na primer, da sta pri frekventistični statistiki poudarjena frekventistično-empirični in logično-simetrijski element, pri bayesijanski statistiki pa poleg njiju nastopa še subjektivistično-razvojni element. Razliko med opisno in sklepalno statistiko lahko artikuliramo tako, da rečemo, da pri prvi nastopa pretežno frekventistično-empirični element, pri drugi pa nekoliko bolj izstopa tudi logično-simetrijski. Visoka stopnja slednjega je značilna za matematično teorijo verjetnosti, iz katere je tudi prišel v statistiko, frekventistično-empirični element pa je pri njej zmanjššan.

V fiziki pogosto uporabljamo simetrije, kar velja tudi za statistično mehaniko, zato je logično-simetrijski element nekako naravno vključen vanjo. Razliko med fizikalno in matematično rabo verjetnosti lahko grobo opredelimo tako, da rečemo, da slednja, čeprav vključuje zvezne porazdelitve, ne vključuje matematično-fizikalističnega elementa navezave na kontinuum. Povezavo med frekventizmom in fizikalizmom je poskušala zgraditi, historično gledano, matematična ergodična teorija.

Subjektivistično-razvojni element ne izključuje nujno logično-simetrijskega. Vprašanje njune (ne)kompatibilnosti zadeva predvsem izbiro začetnih verjetnosti, kar je bilo označeno kot ena pomembnih tem. Ko personalist izbere svojo začetno verjetnost, lahko izbere tudi enake verjetnosti za vse možne izide, torej takšno porazdelitev, ki uporablja neko simetrijo, vendar to ni nujno. V tem smislu ima personalistični element bolj sproščen odnos do apriornih verjetnosti kot logično-simetrijski, ki tipično zahteva, da so verjetnosti enake. To je tudi razlika med rabo subjektivne verjetnosti v naravoslovni znanosti, kar je prvi uspešno počel Jeffreys, in njeno rabo v nenaravoslovnih kontekstih.

Frekventistično-empirični element se z logično-simetrijskim najmočneje povezuje prek t. i. centralnega limitnega izreka, ki povezuje opažene relativne frekvence in teoretične verjetnostne porazdelitve. Če parafraziram Guttmana, uporabljajoč svojo tipologijo, sta edina nekoherentna elementa matematično-fizikalni in subjektivistično-razvojni. V nadaljevanju najprej podajam kratek povzetek posameznih interpretacij s svojega stališča, na koncu pa na tabelarični način njihovo opredelitev v odnosu do kategorij, ki sem jih vpeljal.

Klasična interpretacija je zanimiva, ker kaže, kako lahko objektivna in subjektivna interpretacija sobivata znotraj enega samega pristopa, čeprav ta ni povsem enoten. Njena slabost je po drugi strani ravno ta, da ne kaže dovolj ostro na to razliko, ki je še kako pomembna. Kar lahko iz nje razberemo, je to, da lahko subjektivna in objektivna verjetnost sobivata, ko imamo opravka s ponovljivimi sistemi in z možnostjo večjega števila poskusov. Če tega dvojega ni, pride do razcepa med tema pogledoma. O tem odločajo empirične danosti, tj. narava danih pojavov, ki sodoloča, ali bo mogoče uporabiti en ali drug pristop. Klasične verjetnosti ni mogoče uporabljati npr. v bioloških ali družbenih vedah.

Frekventistična interpretacija je poudarila objektivni vidik verjetnosti kot štetja in merjenja, v teoretičnem smislu pa je pokazala domet prve formalizacije teorije verjetnosti, tako z definicijo verjetnosti kot limite relativnih frekvenc kakor tudi z definicijo pojma naključnih ansamblov. Kritiki so poudarjali, da definicija verjetnosti kot limite relativnih frekvenc ne zdrži rigorozne analize, saj pri opredelitvi načina konvergence relativnih frekvenc k limiti vedno pride do neskončnega regresa, ki ga je mogoče zaježiti samo dogovorno, torej z uvedbo nekega ne povsem kvantitativnega kriterija. Drugače povedano, relativne frekvence konvergirajo k neki konstantni vrednosti, imenovani verjetnost, z neko ne natančno opredeljivo verjetnostjo. S tem dobimo nekaj takšnega kot »verjetnost, da neka verjetnost dobro drži«. Ta dva pojma verjetnosti nista ekvivalentna, zato že sama frekventistična definicija verjetnosti implicitno vse-

buje dva načina uporabe pojma verjetnosti. Najuspešnejši del frekventizma, tj. Fisherjev, ki se je vgradil v statistiko, se je oddaljil od proučevanja velikih populacij in se usmeril v proučevanje manjših vzorcev ter v sklepanje na populacije na njihovi osnovi, kar je zelo pomembno za znanstveno prakso. Še en prispevek frekventistične teorije, natančneje von Misesove, je poskus eksplisitne opredelitve pojma naključnosti, česar v drugih interpretacijah ni – v teh je izražen kvečjemu deklarativen odnos do prvotnega pojma naključja. Iz tega poskusa lahko pridobimo razumevanje, da je pojem naključja povezan z verjetnostno porazdelitvijo in vrstnim redom dogodkov, da temelji na limiti relativnih frekvenc in da je v praksi torej nujno povezan z velikostjo vzorcev, privzema pa tudi neodvisnost dogodkov. Frekventistična verjetnost je s svojim uspehom delovala kot promotorka znanstvenega indeterminizma.

Mersko-teoretska interpretacija je pokazala polni domet formalizacije verjetnosti. Štetje je operacija s celimi števili, od tod izvirajoče verjetnosti bodo vedno racionalna števila. Uporaba zveznih matematičnih modelov za verjetnost po drugi strani dopušča pojmovanje verjetnosti kot realnega števila, poleg tega pa pomeni tudi uvedbo prostora neskončnega števila možnih izidov, kot je izrecno storil Kolmogorov. To po eni strani prinaša možnost matematično bolj rigorozne aplikacije verjetnosti v fizikalnih modelih, a po drugi strani uvaja pojem »kontinuum možnosti«, kar pa je vprašljiv in v sebi nekonsistenten pojem. V to območje se vpisuje tudi problematika t. i. števne ali sigma aditivnosti ter merjenja verjetnosti. To interpretacijo za razliko od frekventistične opredeljujemo kot ne nujno nasprotujočo klasičnim determinističnim modelom, temveč z njimi sobiva. Njeno osrednjo pomanjkljivost lahko označimo kot »podinterpretiranost«.

Logična interpretacija kaže predvsem na to, da je mogoče teorijo verjetnosti aplicirati na hipoteze in ne zgolj na števne oziroma merljive pojave, kar je zelo pomembno predvsem za znanstvene teorije. Uporaba hipotez je mogoča tudi v primerih, ko imamo opravka z merjenimi količinami, kar je uspelo pokazati Jeffreysu. V bolj tehničnem smislu je logična interpretacija to dosegla z uporabo pojma pogojne verjetnosti. Pri tem je pomembno, da uporaba hipotez vedno neizogibno pomeni vnos subjektivnega elementa presoje, kar se kaže v problemu t. i. apriornih verjetnosti. Logična interpretacija se je osredotočila tudi na dinamiko spreminjanja verjetnosti na podlagi posameznih izidov, torej na proces učenja na podlagi relativnih frekvenc. Izpostavila je nekatere logične paradokse v zvezi z verjetnostjo, ki pa se izkažejo za rešljive, če upoštevamo različne možnosti uporabe verjetnosti v sorodnih, vendar različnih situacijah.

Vsi ti t. i. paradoksi kažejo na problem kvantifikacije verjetnosti, natančneje, na nezmožnost enolične objektivne kvantifikacije. Verjetnost je v tem smislu po Keynesu kulturno relativna, v širšem smislu pa kontekstno odvisna. Logična interpretacija je zaradi svojega težišča v subjektivnem, vendar logično uniformnem izhodišču naklonjena znanstvenemu determinizmu ali pogosto priznava njegovo veljavnost. Njena pomanjkljivost je – v tem se strinjam z Lucasom –, da zamenjuje med evidenco in opisom oziroma specifikacijo.

Ultrasubjektivna interpretacija je pokazala predvsem to, da je mogoče imeti več koherentnih sistemov verjetnostnega mišljenja. Razlike med njimi izhajajo iz različnih apriornih verjetnosti, z upoštevanjem istih izidov pa se subjektivne ocene verjetnosti vedno zblizujejo, bodisi hitreje bodisi počasneje. Z različnimi apriornimi verjetnostmi dobimo torej različno *dinamiko* spreminjanja ocen verjetnosti. Problem kvantifikacije verjetnosti, ki je pri logični interpretaciji privedel do paradoksov, se izostri, tipično se rešuje z uvedbo paradigme denarnih stav, čeprav je jasno, da to ni zadovoljivo, kar priznava tudi de Finetti. S pomočjo stav lahko iz njihovih denarnih vrednosti izračunamo, kakšne implicitne verjetnosti neki subjekt pripisuje izidom, pod privzetkom, da je racionalen, in posameznim dogodkom. Vendar se s tem hkrati spet pokaže širši problem kvantifikacije vrednosti, saj tudi vrednost denarja ni nekaj enolično določenega. Subjektivna verjetnost se v tej luči pokaže predvsem kot uteženo presojanje ali tehtanje zanesljivosti, kredibilnosti ipd. v perspektivi odločanja. Zato nekateri dajejo prednost kvalitativnemu pojmu subjektivne verjetnosti (npr. Suppes). Da bi lahko bolje zapopadli takšen pojem verjetnosti, je treba uvesti komplementarni pojem splošne koristi, saj gre pri odločanju v posameznih primerih vedno za to. Glavni očitek ultrasubjektivni interpretaciji s strani kritikov je de Finettijeva trditev, da verjetnost »ne obstaja«, saj mora imeti nekakšno vez z dejanskostjo, na katero se nanaša. V smislu opredelitve do determinizma je to agnostična interpretacija, kar se zdi njena še posebno zanimiva poteza.

Spodaj podajam tabelo primerjav posameznih obravnavanih interpretacij verjetnosti v odnosu do uvedenih kategorij. Iz nje je med drugim razvidno, da se po uvedenih elementih vse interpretacije razlikujejo.

	Frekventistično-empirični	Matematično-fizikalistični	Logično-simetrijski	Subjektivistično-razvojni
Klasična	DA	NE	DA	DA
Frekventistična	DA	NE	DA	NE
Mersko-teoretska	DA	DA	DA	NE
Logična	Dopušča	NE	DA	Dopušča
Ultrasubjektivna	Dopušča	NE	Dopušča	DA

Tabela: Karakterizacije posameznih interpretacij verjetnosti z uvedenimi kategorijami

Iz tabele je razvidno, da vse interpretacije verjetnosti prisegajo na tehtnost empiričnega vidika relativnih frekvenc. Vidimo tudi to, da je najekskluzivnejši element matematično-fizikalistični in da ga vsebuje mersko-teoretska interpretacija, ki ga je uvedla. Ta element je očitno nekoliko trši oreh za poenoteno gledanje na verjetnost.

Odnos med subjektivno in objektivno verjetnostjo

Iz do sedaj zapisanega sledi, da sta t. i. subjektivna in objektivna verjetnost v določenem smislu nekaj precej različnega. Objektivna verjetnost, ki jo zagovarjajo frekventisti, se nanaša na *relativne frekvence števnih ali merljivih pojavov* ter na sklepe in napovedi v zvezi s štetjem oziroma merjenjem. Njen formalno-teoretični poudarek je na zakonu velikih števil. Subjektivna verjetnost se po drugi strani nanaša na oceno *sklepanja, tehtanje, presojanje in vrednotenje hipotez* oziroma možnosti, ki se navezujejo na človeško odločanje ali delovanje, lahko tudi na podlagi medsebojno zelo različnih pojavov, ki niso nujno števni, temveč so razumljeni kot indici, pokazatelji, dodatne informacije. Subjektivna verjetnost se opira na pojem koherentnosti, to, kar postavlja v ospredje, pa je konsistentnost mišljenja, vrednotenja in razsojanja med možnostmi. Do tega sklepa lahko pridemo tudi, če se vprašamo, kaj pri subjektivnih verjetnostih pomeni polna verjetnost oziroma gotovi dogodek oziroma enota in kaj to pomeni pri objektivnih verjetnostih. Vsekakor drži, da se tudi relativne frekvence v frekventizmu seštevajo v enoto in so v tem smislu inherentno koherentne, vendar frekventizem tega ne poudarja, ampak poudarja

objektivistično plat nanašanja na realnost prek relativnih frekvenc, medtem ko subjektivna verjetnost premakne poudarek zgolj na koherenco kot temeljno potezo teorije verjetnosti, in sicer ravno zato, ker so njeni predmeti, kot so hipoteze in prepričanja, nečutni.

Zato se uporaba različnih izrazov za subjektivno in objektivno verjetnost zdi povsem upravičena. Glavni razliki med subjektivističnim in objektivističnim taborom po Guttmanu ostajata področji statistične ocene in statistične razlage. Na teh dveh področjih je razlika največja, zelo pa je pomembna za znanstvene razlage in posledično za razumevanje pojavov nasploh. Eno pomembnih vprašanj s tem v zvezi je, kakšen je status statistične premise pri verjetnostnem sklepu, saj so pojmovanja statistične razlage odvisna od tega, kakšen je status te premise. Šele ko je premisa pojmovana kot izjava o objektivnem naključju, postane za subjektivista problematična.

Raba subjektivne verjetnosti se zdi precej širša kot raba objektivne, ki je omejena na relativne frekvence množičnih ponovljivih pojavov. Pojavlja se tudi v kontekstih znanstvene prakse, kjer se nanaša na tehtanje o zanesljivosti hipotez in posameznih meritev ter na to, kako kombinirati enkratni nabor meritev iz različnih naprav, s čimer je zaslovel Jeffreys. Drugače povedano, pri objektivni verjetnosti gre vedno za kombinacijo enakorodnih informacij, pri subjektivni pa pogosto za kombinacijo raznorodnih informacij. V tem primeru lahko govorimo o različnem zanašanju na različne tipe informacij ali celo na iste tipe informacij, recimo na različne meritve iste količine iz različno zanesljivih virov. Vse to lahko artikuliramo s pogojno verjetnostjo, ki ji na frekventistični strani stoji nasproti problem referenčnih razredov.

V nekem smislu je subjektivna verjetnost vedno podlaga za objektivno, saj lahko vase sprejme tudi razmišljanje o relativnih frekvencah, vendar vedno ohranja zavest o stopnji zanesljivosti naše ocene. Po drugi strani je objektivna verjetnost legitimacijski temelj za subjektivno, recimo tedaj, ko se mišljenje o relativnih frekvencah pretvarja v domeno zanesljivosti za nastop posameznega dogodka. S tem je mišljeno sklepanje od prejšnjih izidov k posameznemu konkretnemu naslednjemu izidu, kar pogosto počnemo, čeprav za to ni dokončne racionalne utemeljitve, kot je poudaril že Hume. Pri tem naredimo korak od objektivne verjetnosti k subjektivni, ki je po obliki sicer dedukcija, vendar je vedno vprašanje, kako tehten razlog obstaja za tako potezo.

Pri subjektivni verjetnosti gre za vnaprejšnje poznavanje konteksta, tj. eksperimentalne postavitve, merilne naprave, vedênja in razmišljanja ljudi in podobno, za kontekst, ki ga vključimo v naša verjetnostna predvidevanja. Tudi

v primerih, ko nimamo opravka z množico entitet in se presojanje dogaja na podlagi peščice konkretnih primerov (ali celo samo na enem), v ozadju ostaja pričakovanje glede nadaljnjih možnih izidov. Subjektivna verjetnost se v tem pogledu zdi nekakšen odmev objektivnih frekvenc. Z matematično metaforo bi lahko rekli, da subjektivno verjetnost dobimo, če število izidov oziroma podatkov limitiramo proti 1. Zdi se, da *struktura pričakovanj* ostaja zelo podobna, kljub temu da imamo opravka z enim ali le z majhnim številom objektivnih dogodkov, ki se v to strukturo vpišejo. Drugače rečeno, verjetnosti, ki jih pripišemo redkim dogodkom, bi spremenili, če bi imeli dodatno informacijo o relativnih frekvencah; opiranje na takšne nove informacije dopuščamo. Subjektivna verjetnost je torej vedno v odnosu do potencialno ponovljivih pojavov, naj bodo situacije presojanja še tako specifične.

Kljub vsem poudarjenim razlikam ne moremo prezreti, da se zmešnjava glede domnevne dvojnosti pojma verjetnosti vleče že več stoletij. To mora biti znak, da je v temelju nekaj, kar obe interpretaciji močno družijo, in ravno to je morda bolj zanimivo kot razlike, ki jih lahko zdaj končno odmislim. Naj začnem pri mnenju nekaterih statistikov, da bayesijanski in frekventistični pristop v statistiki vodita do istih rezultatov. Kot piše Howie (2002), sta to ugotovila že zaslužna statistika Fisher in Jeffreys, ki sta imela obsežno korespondenco na to temo. Bistvo razcepa med tema pristopoma je, da prinašata različna konceptualna svetova, torej različne spremljevalne pojme, ne pa različnih rezultatov.

Povezavo med objektivno verjetnostjo v smislu relativnih frekvenc in racionalnim mišljenjem v smislu koherentnosti je David Lewis povzdignil v načelo, v t. i. »poglavitni princip« (*principal principle*), ki ga je uvedel v članku »A Subjectivist's Guide to Objective Chance« (1986); Toby Handfield ga poimenuje »načelo koordinacije«. ⁷ To načelo, ki je podano kot imperativ za racionalne agense, je seveda treba v osnovi sprejeti, vendar to ni že kar »konec zgodbe«. Ko gre za verjetnost v perspektivi dejanj, se je treba vedno vprašati, ali smo izčrpali vse relevantne informacije v zvezi z dogajanjem, ki nas zanima, saj to lahko vpliva na spremembo pripisa verjetnosti.

Guttmann (1999) piše, da je poglavitna povezava med obravnavanima vrstama verjetnosti t. i. centralni limitni izrek, ki je nekoliko bolj teoretična artikulacija medsebojne povezave obeh vrst verjetnosti. Ta izrek ima pravzaprav status teorema in je teoretična artikulacija prepričanja o obstoju enolične limite relativnih frekvenc. Subjektivna in objektivna verjetnost lahko povsem sovpadeta, kadar centralni limitni izrek drži, kar pa ni vedno nujno. Še posebej

7 Gl. Handfield, *A Philosophical Guide to Chance*.

ni mogoče tega vnaprej trditi poljubno. Toda kadar to velja, je to sovpadanje enakovredno *prepričanju o obstoju enolične verjetnostne porazdelitve relativnih frekvenc*, kar je bistvo objektivnih verjetnosti, oziroma prepričanju o obstoju stacionarnih verjetnosti, ki so odraz stacionarnega stanja stvarnosti.

Centralni limitni izrek lahko razumemo kot formalno pokritje nečesa, na kar lahko v svetu naletimo ali pa ne. V bolj temeljnem smislu pa je tisto, kar povezuje obe vrsti verjetnosti, nekaj, kar bi lahko označili kot težnjo, ki se v dolgoročnih izidih zgolj odraža. V tem se strinjam s Popperjem (1995), ki poudarja, da so realna podlaga verjetnosti težnje (*propensities*) v dogajanjih, ki vodijo k določenim relativnim frekvencam ter so zato nekaj realno obstoječega. Naša prepričanja naj bi se ravnala po njih, kar se ujema z načelom koordinacije.

Povezavo med subjektivno in objektivno verjetnostjo lahko po eni strani, če gremo iz smeri objektivne k subjektivni verjetnosti, razumemo kot določeno *mišljenjsko strukturo*, ki je *posledica* interakcije uma s svetom, po drugi strani pa, če gremo iz smeri subjektivne k objektivni verjetnosti, kot *miselni nastavek* za interakcijo z empiričnim svetom. V tem smislu je subjektivno zasidrani pojem zanesljivosti nekakšen odmev relativnih frekvenc, ki jih lahko opazimo v empiričnem svetu, po drugi strani pa pojem zanesljivosti implicitno (lahko pa tudi eksplicitno) pomeni neko vnaprejšnjo projekcijo relativnih frekvenc v empirični svet, tudi v vsakdanjem smislu besede »zanesti se na nekoga«.

Za interpretacijo verjetnosti v širšem smislu je ključna delitev vrste dogodkov na pogoste, manj pogoste in redke. Takega mnenja je bil že Aristotel s svojo delitvijo na dogodke, ki se dogajajo »vedno«, tiste, ki se dogajajo »večinoma«, in tiste, ki se ne zgodijo »niti vedno niti večinoma«. Znanost se po njegovem prepričanju ukvarja samo s prvo vrsto dogodkov. Podobno v splošnem menijo frekventisti, ki nasploh trdijo, da se je smiselno statistično ukvarjati samo z množičnimi dogodki; ti so lahko tudi relativno redki glede na celotno proučevano populacijo dogodkov. V tem tudi sklepalna statistika ni izjema, saj čeprav sklepamo na podlagi majhnih vzorcev, sklepamo na domnevno veliko populacijo in je sklep bolj ali manj trden tudi zaradi tega. Jeffreys je pokazal, da se znanost lahko koherentno ukvarja tudi z dogodki, ki se dogajajo redko oziroma so specifični, vendar za to potrebuje izdatno opiranje na vse možne informacije. Kljub temu tudi v teh primerih perspektiva novih in novih ponovitev ostaja odprta.

Povezava pojmov verjetnosti in informacije

Pojem verjetnosti razumem v bistveni povezavi s pojmom informacije. O tem govori Popper (1995), bolj dodelano pa Lucas (1970). Hacking (1975) piše o pomenu pojma znaka oziroma indica za uveljavljanje teorije verjetnosti v novem veku. Ta povezava med pojmom se pojavlja v sklopu enega temeljnih problemov v zvezi z verjetnostjo, pri t. i. problemu referenčnih razredov. Kot že omenjeno, mu na subjektivističnem polu stojijo nasproti pogojne verjetnosti. Informacije, ki opredeljujejo pogojne verjetnosti, lahko v teh primerih razumemo dobesedno kot pogoje pripisov verjetnosti.

Pojem informacije se v zvezi z verjetnostjo pojavlja pri subjektivni verjetnosti, kjer gre za relevantne informacije o nekem pojavu, ki nam pomagajo preusmeriti pozornost na določene podskupine populacije. Na primer, pri diagnozi bolezni so takšne relevantne vrste informacij prisotnost določenih simptomov, življenjski slog bolnika in podobno. Gre torej za informacije v smislu indicev in označevalcev statističnih podskupin. Informacije, ki določajo referenčne razrede, so po eni strani objektivne, ker povzemajo objektivne relativne frekvence, po drugi strani pa je njihovo (ne)poznavanje subjektivno-relativno. V tem smislu je pojem informacije nekje na vmesnem območju med subjektivno in objektivno verjetnostjo.

Zdi se mi pomembno poudariti, da se lahko ta pojem pojavlja tudi zgolj na enem od obeh področij, tj. bodisi pri subjektivni bodisi pri objektivni verjetnosti, kar pomeni, da je tesno povezan z verjetnostjo. Na subjektivističnem polu gre za informacije v najbolj vsakdanjem smislu besede, za takšne indice, ki krepijo ali zmanjšujejo naše zaupanje ali prepričanje v nekaj, na primer zaupanje v neko osebo ali prepričanje v to, da je nekaj dobro ali slabo. To so primeri, za katere je težko podati mero verjetnosti, kar je sicer nasploh problem pri subjektivni verjetnosti. Po moji analizi ima tudi takšen pojem informacije, ravno tako kot subjektivni pojem verjetnosti, potencialno vsebino projekcije relativnih frekvenc nekaterih pojavov v fenomenalni svet, ni pa to nujno. Recimo, nekemu lahko zaupamo, ker se je do sedaj vedno izkazal, ko smo ga nekaj prosili, pri čemer smo ga prosili za različne ali enake usluge. Če smo ga prosili za enako vrsto uslug, recimo mehanika za popravilo avta, smo s tem pridobili nekakšno mini statistiko, na kateri temelji naše zaupanje vanj, hkrati pa mu zaupamo predvsem glede določene vrste nalog in ne kar na splošno, v tem primeru glede popravila avta. Če smo ga prosili za različne vrste uslug, naša mini statistika po eni strani ni tako specialna ter je v tem smislu manj ponovlji-

va in zanesljiva, saj se tiče zgolj dejstva, da smo nekoga prosili za usluge, po drugi strani pa ravno to dejstvo daje našemu zaupanju v tega človeka večjo težo, zaupamo mu bolj na splošno in ne zgolj na neki specifičen način.

V drugi polovici 20. stoletja se je z razvojem telekomunikacij razvil tudi tehnični pojem informacije. Uvedel ga je Shannon na podlagi pojma t. i. informacijske entropije. V našem kontekstu gre pri tem za povsem frekventistični in torej verjetnostno-objektivistični pojem entropije in posledično informacije, saj je definiran s pomočjo relativnih frekvenc, oziroma za posamezne porazdelitve. Objektivistična verjetnost nastopa kot mera informacije o naključnem procesu. V tem primeru je informacija kvantitativna in ne nastopa kot subjektivno-relativna, ne določa referenčnih razredov, ker smo omejeni samo na enega (tj. na homogeno populacijo), ampak se tiče lastnosti porazdelitve.

Na podlagi teh razmislekov lahko rečemo, da je mogoče s pomočjo interpretacije verjetnosti tudi pojmu informacije pripisati bolj objektivistični ali bolj subjektivistični značaj, pač glede na to, ali govori strogo o relativnih frekvencah (in torej o objektivnih verjetnostih) ali pa služi kot relevanten podatek za pripis (subjektivnih) verjetnosti ter s tem govori o relativnih frekvencah le posredno in na neenolično določljiv potencialni način. V prvem primeru je informacija izražena kvantitativno, v drugem pa je kvalitativna, čeprav ima lahko kvantitativne implikacije (če poznamo relativne frekvence za neki referenčni razred).

Ko Lucas piše o povezavi med pojmom informacije in verjetnostjo, pravi, da se je z Newtonovo fiziko zgradila »metafizika popolne informacije« (*metaphysics of perfect information*). S tem posega na področje vprašanja o epistemskem statusu verjetnosti. Lucas se izreka za pojem verjetnosti, ki ni odraz naše nezmožnosti, da bi »vedeli vse« (je torej proti epistemski interpretaciji verjetnosti). »Verjetnosti niso nekaj drugorazrednega, kar uporabljamo, ko védenje ni uspešno, temveč nekaj, kar je dobro samo po sebi in kar včasih izberemo raje kot popolno védenje, ki je sicer razpoložljivo.«⁸

Lucas verjetnost razume v logičnem smislu kot »nekompletno specifikacijo«, ne v epistemološkem smislu kot »nepopolno informacijo«, saj imeti na razpolago več informacij ni vedno prednost. Pogosto nas v resnici ne zanima, da bi imeli opravka z več informacijami, to je prednost samo tedaj, ko nas zanima posamezna konkretna situacija in entitete z določeno identiteto, recimo, ko gre za konkretnega bolnika ali konkretno stavo. Ko pa želimo imeti splošen opis, želimo ravno abstrahirati od informacij. Lucas poda primer z zavarovalnim

8 Lucas, *The Concept of Probability*, str. 191.

agentom in biologom: »Zavarovalni agent želi imeti čim več informacij, da lahko minimizira izgube na vsako posamezno pogodbo; biolog želi izpustiti ne-relevantne posameznosti, da bi lahko maksimiral védenje o splošnem.«⁹

Zaključek

Na interpretacije pojma verjetnosti vpliva mnogo dejavnikov. Nekateri avtorji dajejo prednost matematični rigoroznosti, drugi znanstveni praksi sklepanja na podlagi meritev in logike, tretji opisu prakse odločanja in delovanja na osnovi znanih (lahko tudi znanstvenih) dejstev in informacij. Zato mora temeljitejša analiza upoštevati razmerja med vsemi temi izhodišči ter jih znati tudi predstaviti, da bi postalo čim bolj jasno, v kakšnem *kontekstu* govorimo o verjetnosti, ko ta pojem interpretiramo. Nekaj pa je jasno: verjetnost kot celovitejši pojem gotovo zajema dinamiko spoznavnega dogajanja med našimi stopnjami prepričanj in relativnimi pogostostmi pojavov.

Zato se zdi za interpretacijo pojma verjetnosti pomembno upoštevati oziroma opredeliti elemente, kot so širši filozofski nazori (vprašanja svobode, naključja), ontološki nazori, epistemološki nazori (kaj je racionalno mišljenje, kako se dogaja spoznavanje), odnos do znanstvene teorije in prakse (filozofija znanosti), odnos do aplikativnosti v znanosti oziroma do aplikativnih znanosti, odnos do matematičnih in logičnih resnic ter aplikacije matematike na izkustveno realnost. Vsi svetovi verjetnosti oziroma vse interpretacije verjetnosti se bodo neizogibno srečale s tovrstnimi vprašanji. To je namreč tip vprašanj, na katerega naletimo, če poskušamo zajeti vse te mnoge in mnogotere svetove, v katerih nastopa verjetnost.

Viri in literatura

- Gillies, Donald. *Philosophical Theories of Probability*. New York: Routledge, 2000.
- Guttman, Yair M. *The Concept of Probability in Statistical Physics*. Cambridge [etc.]: Cambridge University Press, 1999.
- Hacking, Ian. *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*. Cambridge [etc.]: Cambridge University Press, 1975.
- Hacking, Ian. *The Taming of Chance*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

9 Prav tam, str. 189.

- Handfield, Toby. *A Philosophical Guide to Chance*. Cambridge, New York [etc.]: Cambridge University Press, 2012.
- Howie, David. *Interpreting Probability: Controversies and Developments in the Early Twentieth Century*. Cambridge [etc.]: Cambridge University Press, 2002.
- Khrennikov, Andrei. *Interpretations of Probability. 2nd Edition*. Berlin & New York: W. de Gruyter, 2009.
- Lewis, David. A Subjectivist's Guide to Objective Chance. V: *Philosophical Papers, Volume II*. Oxford, New York [etc.]: Oxford University Press, 1986, str. 83–113.
- Lucas, J. R. *The Concept of Probability*. Glasgow [etc.]: Oxford University Press, 1970.
- Popper, Karl. *A World of Propensities*. Bristol: Thoemmes Press, 1995.
- Salsburg, David. *The Lady Tasting Tea: How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century*. New York: H. Holt, 2002.
- Suppes, Patrick. *Probabilistic Metaphysics*. Oxford, New York: Basil Blackwell Publisher Ltd., 1984.
- Uršič, Marko. *Štirje časi: filozofski pogovori in samogovori. Jesen: tretji čas. Daljna bližina neba: človek in kozmos*. Ljubljana: Cankarjeva založba, 2010.