Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

Zbirka rešenih kolokvijev in izpitov iz Matematike I za študente univerzitetnih študijev Geodezije in geoinformatike, Gradbeništva ter Vodarstva in okoljskega inženirstva

Martin Jesenko, Mojca Premuš, Marjeta Škapin Rugelj

Ljubljana, 2023

Kazalo

Predgovor

V tej zbirki smo zbrali rešene kolokvije in izpite iz akademskih let 2021/22 in 2022/23 iz predmeta Matematika I, ki ga poslušajo študentje Geodezije in geoinformatike (UN), Gradbeništva (UN) ter Vodarstva in okoljskega inženirstva (UN) na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Njen namen je,

- da študentje dobijo občutek težavnosti in dolžine računskih preizkusov znanja iz tega predmeta,
- da imajo na voljo dovolj nalog za primerno pripravo nanje,
- ter predvsem, **da prepoznajo, kako napisati celovito in matematično korektno rešitev zastavljene naloge**.

Prav jasno izražanje ter logično sklepanje je poleg obvladanja osnov višje matematike bistvena sposobnost, ki jo mora razviti vsak bodoči inženir.

Martin Jesenko, Mojca Premuš in Marjeta Škapin Rugelj

1. kolokvij (29. 11. 2021)

1. naloga [20 točk]

V kompleksni ravnini narišite množico vseh kompleksnih števil z, ki ustrezajo pogoju

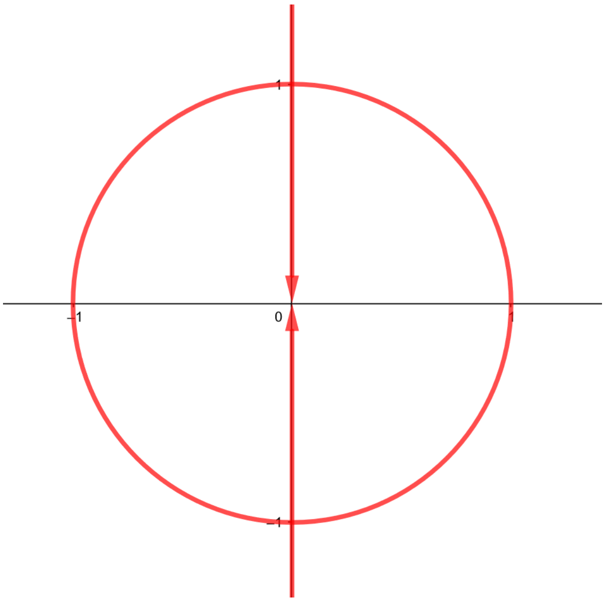
$$\operatorname{Re}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)=0\,.$$

Če pišemo $z=x+yi$, dobimo

$$\frac{z^2-1}{z}=z-\frac{1}{z}=x+yi-\frac{1}{x+yi}=x+yi-\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=x+yi-\frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

Torej iščemo rešitve enačbe

$$0=\operatorname{Re}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)=x-\frac{x}{x^2+y^2}=x\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$



Imamo dve možnosti:

- $x=0$:

  To so točke na imaginarni osi.

- $1-\frac{1}{x^2+y^2}=0$:

  To so točke, za katere velja $1=x^2+y^2$, kar je pa enačba krožnice s središčem v izhodišču in polmerom 1.

Opazimo še, da moramo izključiti $z=0$, sicer imamo deljenje z 0.

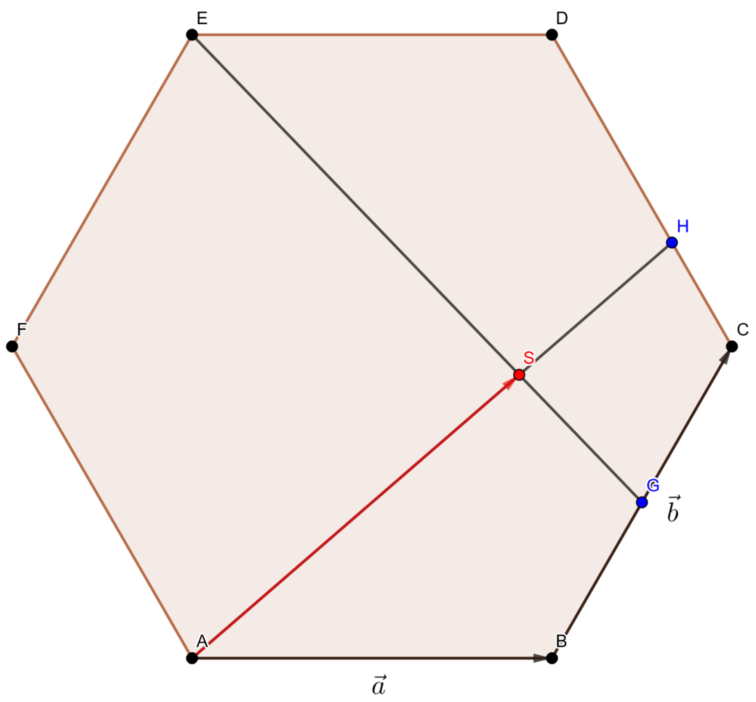
2. naloga [30 točk]

V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ označimo vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Točka G razpolavlja stranico BC, točka H pa deli stranico CD v razmerju $1 : 2$. Daljici AH in GE se sekata v točki S.

(a) Izrazite $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(b) Pokažite, da je ploščina šestkotnika $ABCDEF$ enaka $3|\vec{a} \times \vec{b}|$.

(c) Kakšno je razmerje med ploščino trikotnika ABS in ploščino šestkotnika $ABCDEF$?



(a) Najprej opazimo, da so vektorji vzdolž stranic

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Točka S po eni strani leži na daljici AH, tako da obstaja taka $\lambda > 0$, da je $\overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AH}$. Ker je

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} = \vec{a} + \vec{b} + \tfrac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \tfrac{2}{3}\vec{a} + \tfrac{4}{3}\vec{b},$$

je torej

$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{2}{3}\lambda\vec{a} + \tfrac{4}{3}\lambda\vec{b}.$$

Po drugi strani pa leži S tudi na daljici GE. Ker je

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \tfrac{1}{2}\vec{b} + (\vec{b} - \vec{a}) + (-\vec{a}) = -2\vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b},$$

je za neki $\mu > 0$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AG} + \mu\overrightarrow{GE} = (\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}) + \mu(-2\vec{a} + \tfrac{3}{2}\vec{b}) = (1 - 2\mu)\vec{a} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mu)\vec{b}.$$

Iz

$$\tfrac{2}{3}\lambda\vec{a} + \tfrac{4}{3}\lambda\vec{b} = (1-2\mu)\vec{a} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mu)\vec{b}$$

sledi

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}\lambda &= 1-2\mu \\ \tfrac{4}{3}\lambda &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mu \end{aligned}$$

Če od druge enačbe odštejemo dvakratnik prve, dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mu - 2(1-2\mu) \\ 0 &= \tfrac{1}{2} - 2 + \tfrac{3}{2}\mu + 4\mu \\ 0 &= -\tfrac{3}{2} + \tfrac{11}{2}\mu \\ \mu &= \tfrac{3}{11} \end{aligned}$$

Sledi še $\lambda = \frac{3}{2}(1 - 2\cdot\frac{3}{11}) = \frac{15}{22}$. Torej je

$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{15}{22}\vec{a} + \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{15}{22}\vec{b} = \tfrac{5}{11}\vec{a} + \tfrac{10}{11}\vec{b}.$$

(b) Ploščina šestkotnika je šestkratnik ploščine trikotnika, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Ker je le-ta $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$, je

$$p_{ABCDEF} = 6\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = 3|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

(c) Trikotnik ABS določata vektorja $\overrightarrow{AS}$ in $\overrightarrow{AB}$. Torej je

$$p_{ABS} = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{AS}\times\overrightarrow{AB}| = \tfrac{1}{2}|(\tfrac{5}{11}\vec{a} + \tfrac{10}{11}\vec{b})\times\vec{a}| = \tfrac{1}{2}|\vec{0} + \tfrac{10}{11}\vec{b}\times\vec{a}| = \tfrac{5}{11}|\vec{b}\times\vec{a}|.$$

Sledi

$$\frac{p_{ABS}}{p_{ABCDEF}} = \frac{\frac{5}{11}}{3} = \frac{5}{33}.$$

3. naloga [30 točk]

Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & z & + & u & = & 2 \\ x & + & ay & + & z & + & 2u & = & 3-a \\ -2x & & & - & (1+a)z & - & u & = & -5+a \\ & & ay & & & + & 2u & = & 2-a \end{array}$$

(a) Določite, za katere vrednosti parametra a sistem nima rešitve.

(b) Za ostale vrednosti a zapišite vse rešitve sistema.

Sistem zapišemo v razširjeno matriko. Nato v prvem koraku dosežemo, da so v prvem stolpcu pod diagonalo same ničle, in sicer tako, da od druge vrstice odštejemo prvo in da tretji prištejemo dvakratnik prve.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 & 3-a \\ -2 & 0 & -1-a & -1 & -5+a \\ 0 & a & 0 & 2 & 2-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & -1+a \\ 0 & a & 0 & 2 & 2-a \end{array}\right].$$

Nato še od četrte vrstice odštejemo drugo:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & -1+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Za $a \notin \{0,1\}$ je zgornja matrika že v stopničasti obliki. Ker je (neničelnih) vrstic toliko kot neznank, je rešitev enolična, in sicer

$$\begin{aligned} & & u &= 1 \\ (1-a)z + 1\cdot 1 = -1+a &\implies & z &= \tfrac{a-2}{1-a} \\ ay + 1\cdot 1 = 1-a &\implies & y &= -1 \\ x + 1\cdot \tfrac{a-2}{1-a} + 1\cdot 1 = 2 &\implies & x &= 1 - \tfrac{a-2}{1-a} = \tfrac{2a-3}{a-1} \end{aligned}$$

Pri $a = 0$ dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

pri čemer smo zamenjali drugo in tretjo vrstico in nato od četrte vrstice odšteli tretjo. Zadnja vrstica je ničelna, a je tudi na desni strani 0, zato je sistem rešljiv. Neničelne vrstice so tri, torej je v splošni rešitvi $4-3=1$ prost parameter. Dobimo

$$u = 1, \quad z = -2, \quad y = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad x = 3.$$

Pri $a = 1$ imamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

kjer smo odšteli tretjo od četrte vrstice. Zadnja vrstica je ničelna, desna stran pa ni 0, torej v tem primeru sistem ni rešljiv.

Torej:

- pri $a = 1$ sistem nima rešitve,
- pri $a = 0$ je splošna rešitev $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \alpha \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- sicer pa $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a-3}{a-1} \\ -1 \\ \frac{a-2}{1-a} \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. naloga [20 točk]

Dani sta funkciji

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}{x + 2} \quad \text{in} \quad g(x) = x + 4.$$

(a) Poiščite naravno definicijsko območje funkcije f.

(b) Določite predpis kompozituma $f \circ g$.

(a) Izraz pod korenom mora biti nenegativen. Ker je zunanja funkcija logaritem, ne sme biti 0, tako da mora veljati

$$x^2 - 8x + 7 > 0.$$

Ker je

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 7)(x - 1)$$

in je vodilni koeficient kvadratne funkcije pozitiven, mora biti $x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty)$.

Drugi pogoj pa je, da mora biti izraz pod logaritmom pozitiven, torej

$$\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}{x + 2} > 0.$$

Ker je izraz v števcu pozitiven, mora biti $x + 2 > 0$, oziroma $x > -2$. Torej je

$$D_f = (-2, 1) \cup (7, \infty).$$

(b) Še kompozitum:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(x + 4) \\
&= \ln \frac{\sqrt{(x + 4)^2 - 8(x + 4) + 7}}{(x + 4) + 2} \\
&= \ln \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16 - 8x - 32 + 7}}{x + 6} \\
&= \ln \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x + 6}.
\end{aligned}$$

2. kolokvij (17. 1. 2022)

1. naloga [20 točk]

Za rekurzivno podano zaporedje

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

pokažite, da je monotono in omejeno ter izračunajte njegovo limito.

Prva dva člena sta

$$a_1 = 3 \quad \text{in} \quad a_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

torej pričakujemo padajoče zaporedje. Naslednji člen vedno dobimo tako, da vzamemo obratno vrednost prejšnjega in ga odštejemo od 2. Če je člen zaporedja (kot na primer prvi) večji od 1, torej odštejemo manj kot 1, in je zato tudi naslednji večji od 1. Torej je kandidat za spodnjo mejo 1.
Pokažimo zato z indukcijo, da je $a_n > 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

- Izjava drži za $n = 1$, saj je $a_1 = 3 > 1$. ✓
- Predpostavimo, da je $a_n > 1$ za neki $n \in \mathbb{N}$.
- Iz $a_n > 1$ sledi $\frac{1}{a_n} < 1$ in $-\frac{1}{a_n} > -1$. Zato je $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 = 1$. ✓

Pokažimo zdaj monotonost. Iz

$$a_n - a_{n+1} = a_n - (2 - \tfrac{1}{a_n}) = \tfrac{a_n^2 - 2a_n + 1}{a_n} = \tfrac{(a_n-1)^2}{a_n}$$

sledi, da je zaporedje strogo padajoče, saj sta zaradi $a_n > 1$ števec in imenovalec pozitivna. Zgornja meja je zato prvi člen, spodnjo mejo smo pa pokazali zgoraj. Torej

$$1 < a_n \leq 3.$$

Vsako omejeno monotono zaporedje konvergira. Limito a dobimo tako, da v rekurzivni formuli pošljemo $n \to \infty$. Dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{a_n}\right) \\ a &= 2 - \frac{1}{a} \\ a^2 - 2a + 1 &= 0 \\ (a-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2. naloga [15 točk]

Določite vrednosti a, b in c, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x^3-2x^2+x-2}; & x<0 \\ c; & x=0 \\ \frac{x\sin x}{1-e^{x^2}}; & x>0 \end{cases}$$

zvezna.

V predpisih za negativna oziroma pozitivna števila ne delimo z 0. Ker so vse nastopajoče funkcije zvezne, sledi, da manjka le še zveznost v 0.

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{ax+b}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{a\cdot 0+b}{0+0+0-2} = -\frac{b}{2},$$

saj je ta racionalna funckija v okolici 0 zvezna, tako da je njena limita v 0 enaka njeni funkcijski vrednosti v 0.
Po drugi strani pa je $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{x\sin x}{1-e^{x^2}}$ limita tipa $\frac{0}{0}$, tako da se je lotimo po L'Hospitalovem pravilu:

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{x\sin x}{1-e^{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x + x\cos x}{-e^{x^2}\cdot 2x} = \lim_{x\searrow 0} -\frac{1}{2e^{x^2}}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right) = -\frac{1}{2e^0}\left(1+\cos 0\right) = -1.$$

Limita v 0 obstaja, če je leva limita enaka desni, torej če je $-\frac{b}{2} = -1$, oziroma $b = 2$. Funkcija je v točki 0 zvezna, če je njena funkcijska vrednost enaka limiti, torej $c = -1$.
Posledično

$$a \text{ poljuben}, \quad b = 2, \quad c = -1.$$

3. naloga [40 točk]

Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

(b) Z uporabo Taylorjevega polinoma 2. reda približno izračunajte $f(0.9)$.

(c) Izračunajte $\int_1^e f(x)\,dx$. Ali je vrednost izračunanega integrala enaka ploščini lika, ki ga oklepata graf funkcije $f(x)$ in os x na intervalu $[1, e]$?

(a) Naravni logaritem je definiran na $(0, \infty)$. S temi števili tudi lahko delimo, tako da je

$$D_f = (0, \infty).$$

Ničle f so ničle števca, logaritem pa ima eno ničlo, in sicer pri 1.

Odvod f dobimo po formuli za kvocient:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Stacionarne točke so ničle odvoda. Tu je ena sama pri $x = e$. Vrednost funkcije v njej je $f(e) = \frac{1}{e}$. Velja še:

- Na $(0, e)$ je f' pozitiven, torej f narašča.
- Na (e, ∞) je f' negativen, torej f pada.

To med drugim pomeni, da je $M(e, \frac{1}{e})$ lokalni maksimum.

Tudi drugi odvod dobimo po formuli za kvocient:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}.$$

Kandidati za prevoje so njegove ničle. Konkretno

$$f''(x) = 0 \iff -3 + 2\ln x = 0 \iff \ln x = \tfrac{3}{2} \iff x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Imenovalec drugega odvoda je na definicijskem območju povsod pozitiven. Zato je njegov predznak odvisen od predznaka izraza $-3 + 2\ln x$. Tako sledi:

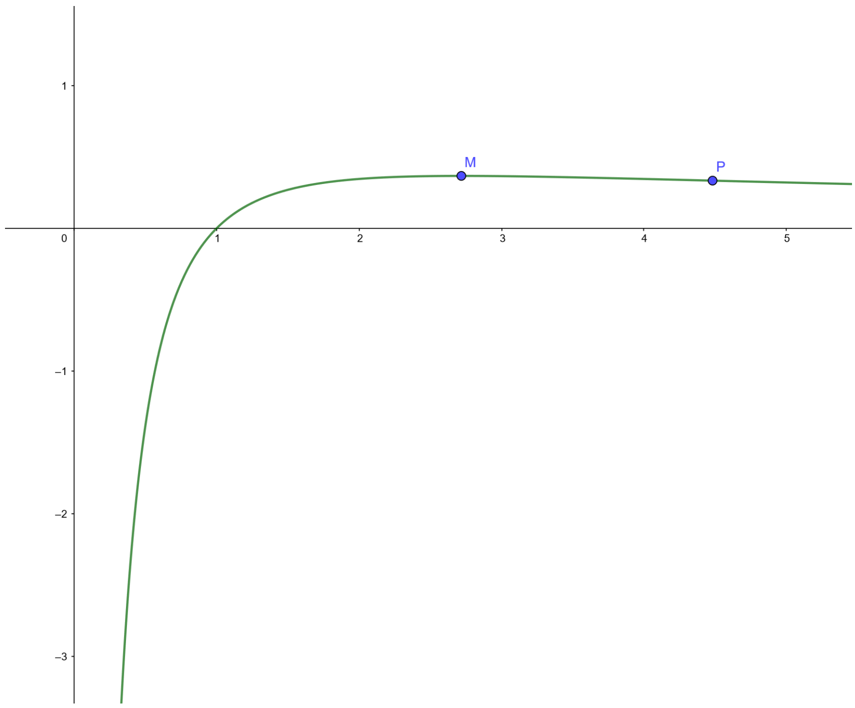
- Na $(0, e^{\frac{3}{2}})$ je f'' negativen, torej je f konkavna.
- Na $(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$ je f'' pozitiven, torej je f konveksna.

Sledi, da je v točki $P(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$ res prevoj.

Raziščimo še obnašanje na robu definicijskega območja:

- Ker je $\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$ in $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, je
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \searrow 0} \left(\ln x \cdot \tfrac{1}{x}\right) = -\infty.$$
(Izračun z L'Hospitalovim pravilom je napačen, čeprav dobimo pravilen rezultat.)
- Ker je $\lim_{x \to \infty} \ln x = \lim_{x \to \infty} x = \infty$, lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo, ki nam da
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Z vsemi temi podatki potem skiciramo graf:



(b) Za približek za $f(0.9)$ uporabimo Taylorjev polinom okoli 1:
$$T_2 f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{1}{2} f''(1)(x-1)^2.$$
Tako dobimo
$$f(0.9) \approx T_2 f(0.9) = 0 + 1 \cdot (-0.1) + \tfrac{1}{2}(-3)(-0.1)^2 = -0.1 - 0.015 = -0.115.$$

(c) Za izračun integrala uvedemo novo spremenljivko
$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}\, dx, \quad u(1) = 0, \quad u(e) = 1.$$
Sledi
$$\int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_0^1 u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$
Ker na intervalu $[1, e]$ ves graf f leži nad osjo x, smo dejansko dobili ploščino lika med grafom in osjo x na $[1, e]$.

4. naloga [25 točk]

Dana je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n(n+5)}$.

(a) Pokažite, da je konvergentna.

(b) Ocenite, koliko členov morate sešteti, da boste dobili njeno vsoto na 0.1 natančno.

(c) Ali vrsta tudi absolutno konvergira?

(a) Po Leibnizovem kriteriju alternirajoča vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konvergira, če je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenaraščajoče in konvergira k 0. Za vsak n je izraz

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \frac{n+1}{n(n+5)} - \frac{n+2}{(n+1)(n+6)} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+6) - n(n+2)(n+5)}{n(n+1)(n+5)(n+6)} \\
&= \frac{(n^3+8n^2+13n+6) - (n^3+7n^2+10n)}{n(n+1)(n+5)(n+6)} \\
&= \frac{n^2+3n+6}{n(n+1)(n+5)(n+6)}
\end{aligned}$$

pozitiven, torej je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje. Nadalje velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+5n} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}} = 0.$$

Izpolnjena sta oba pogoja, torej vrsta res konvergira.

(b) Velja ocena za napako $|s - s_n| < a_{n+1}$. Torej iščemo (prvi) n, da bo $a_{n+1} < \frac{1}{10}$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} < \tfrac{1}{10} \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{n+2}{(n+1)(n+6)} < \tfrac{1}{10} \\
&\Longleftrightarrow \quad 10(n+2) < (n+1)(n+6) \\
&\Longleftrightarrow \quad 10n+20 < n^2+7n+6 \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 < n^2-3n-14
\end{aligned}$$

Ničli desne strani sta $\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 14}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{65}}{2}$. Iskani n je prvo naravno število, ki je večje od pozitivne ničle, torej 6.

(c) Dana vrsta absolutno konvergira, če konvergira vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n(n+5)}$. Le-ta pa ne konvergira, saj jo lahko navzdol ocenimo s (premaknjeno) harmonično vrsto, namreč očitno

$$\frac{n+1}{n(n+5)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+5} > \frac{1}{n+5}.$$

1. izpit (24. 1. 2022)

1. naloga [20 točk]

Dane so točke $A(1,-2,-1)$, $B(2,3,1)$, $C(-2,3,-2)$ in $D(3,4,2)$.

(a) Pokažite, da točke A, B, C in D ležijo na isti ravnini. Določite njeno enačbo.

(b) Naj bo p premica skozi točki A in D, q pa premica skozi točki B in C. Dokažite, da se p in q sekata, določite koordinate sečišča in izračunajte kot med njima.

(a) Poiščimo enačbo ravnino, na kateri ležijo točke A, B in C. Njen normalni vektor je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,5,2) \times (-3,5,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-15,-5,20).$$

Zaradi enostavnosti ga pomnožimo z $-\frac{1}{5}$, torej $\vec{n} = (3,1,-4)$. Iskana enačba ravnine je torej

$$3x + y - 4z = 3 \cdot 1 + (-2) - 4 \cdot (-1) = 5.$$

Če vstavimo koordinate točke D v levo stran enačbe, dobimo

$$3 \cdot 3 + 4 - 4 \cdot 2 = 5.$$

Koordinate točke D torej ustrezajo enačbi, zato tudi D leži na tej ravnini.

(b) Premica p ima smerni vektor $\overrightarrow{AD} = (2,6,3)$. Njena vektorska oblika je torej

$$p: \quad \vec{r} = (1,-2,-1) + t(2,6,3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podobno je $\overrightarrow{BC} = (-4,0,-3)$ smerni vektor premice q in tako dobimo

$$q: \quad \vec{r} = (2,3,1) + u(-4,0,-3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Premici se sekata, če obstajata taka t in u, da je

$$(1,-2,-1) + t(2,6,3) = (2,3,1) + u(-4,0,-3),$$

iz česar sledi sistem

$$2t + 4u = 1, \quad 6t = 5, \quad 3t + 3u = 2.$$

Iz druge enačbe sledi $t = \frac{5}{6}$. Iz prve potem dobimo $u = \frac{1}{4}(1 - 2 \cdot \frac{5}{6}) = -\frac{1}{6}$. Zadoščati morata tudi tretji enačbi. Če vstavimo izračunani vrednosti v levo stran, res dobimo $3 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot (-\frac{1}{6}) = 2$. Premici se torej sekata, in sicer v točki s krajevnim vektorjem

$$\vec{r}_S = (1,-2,-1) + \tfrac{5}{6}(2,6,3) = (\tfrac{8}{3}, 3, \tfrac{3}{2}).$$

Kot med njima je kot med njunima smernima vektorjema. Dobimo ga po enačbi

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{(2,6,3) \cdot (-4,0,-3)}{\sqrt{2^2+6^2+3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{-17}{7 \cdot 5} = -\frac{17}{35}.$$

Torej je $\varphi = \arccos(-\frac{17}{35})$.

2. naloga [30 točk]

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte inverzno matriko A^{-1}.

(b) Izračunajte lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A in določite diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P, tako da bo veljalo $A = PDP^{-1}$.

(a) V prvem koraku pomnožimo tretjo vrstico z -1 in jo zamenjamo s prvo vrstico:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nato prištejemo prvo vrstico drugi. Zatem prištejemo drugo vrstico prvi, njen dvakratnik pa odštejemo od tretje:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Nato pomnožimo zadnjo vrstico z -1 in njen dvakratnik prištejemo drugi. Na koncu delimo drugo vrstico z 2:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

Torej je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 0-\lambda & 4 & -5 \\ -1 & 4-\lambda & -4 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda)+8) - 4((2+\lambda)-4) - 5(-2+(4-\lambda)) \\
&= (-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) - 4(\lambda-2) + 5(\lambda-2) \\
&= (\lambda-2)(1-\lambda)(1+\lambda).
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej -1, 1 in 2.

Določimo sedaj pripadajoče lastne vektorje.

- $\lambda = -1$: Iščemo rešitve enačbe $(A - (-1)I)x = 0$. V prvem koraku prvo vrstico prištejemo ostalima dvema. Potem eliminacijo izvedemo do konca. Tako dobimo

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Rešitve tega sistema so $x = \alpha \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\lambda = 1$: Tukaj določamo vektorje z $(A-1I)x = 0$. Začnemo z odštevanjem prve vrstice od ostalih dveh.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Rešitve so tako vektorji $\alpha \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\lambda = 2$: Iz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 4 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  dobimo, da so rešitve $(A - 2I)x = 0$ vektorji $\alpha \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Za vsako lastno vrednost so pripadajoči lastni vektorji vse neničelne rešitve pripadajočega sistema.

Vzamemo lahko

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. naloga [30 točk]

Dana je funkcija

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4x+8}{x^2+4}.$$

(a) Določite njene globalne ekstreme na intervalu $[0, 4]$ in točke, kjer so doseženi.

(b) Izračunajte ploščino lika med grafoma funkcije f in premice $y = 2$.

(c) Ali konvergira izlimitirani integral $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$?

(a) f je zvezna funkcija, zato doseže na zaprtem omejenem intervalu $[0, 4]$ zagotovo svoj maksimum in minimum. Ker je odvedljiva, ju lahko doseže samo v stacionarnih točkah iz intervala $(0, 4)$ in v krajiščih. Iščemo ničle odvoda

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - (4x+8) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2 - 16x + 16}{(x^2+4)^2}.$$

Torej

$$f'(x) = 0 \iff -4x^2 - 16x + 16 = 0 \iff x^2 + 4x - 4 = 0.$$

Stacionarni točki sta

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Samo $-2 + 2\sqrt{2}$ leži v intervalu $[0, 4]$. Vrednost v njej je

$$f(-2+2\sqrt{2}) = \frac{4 \cdot (-2+2\sqrt{2}) + 8}{(-2+2\sqrt{2})^2 + 4} = \frac{8\sqrt{2}}{16 - 8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

V krajiščih sta vrednosti

$$f(0) = 2 \quad \text{in} \quad f(4) = \frac{6}{5}.$$

Imamo torej tri kandidate. Zato je

- globalni maksimum $\sqrt{2} + 1$, dosežen je pri $x = \sqrt{2} + 1$,
- globalni minimum $\frac{6}{5}$, funkcija ga zavzame pri $x = 4$.

(b) Najprej izračunajmo sečišča grafa f in premice $y = 2$:

$$\frac{4x+8}{x^2+4} = 2 \;\Rightarrow\; 4x + 8 = 2x^2 + 8 \;\Rightarrow\; 0 = 2x^2 - 4x \;\Rightarrow\; 0 = 2x(x-2).$$

Sečišči sta torej pri $x = 0$ in $x = 2$. Graf leži višje (saj je globalni maksimum dosežen dosežen vmes), zato je ploščina enaka

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 \left(\frac{4x+8}{x^2+4} - 2 \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(2 \cdot \frac{2x}{x^2+4} + \frac{8}{4} \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} - 2 \right) dx \\ &= \Big[2 \cdot \ln(x^2+4) + 2 \cdot 2 \arctan \frac{x}{2} - 2x \Big]_0^2 \\ &= (2 \cdot \ln 8 + 4 \arctan 1 - 4) - (2 \cdot \ln 4 + 4 \arctan 0 - 0) \\ &= 2 \ln 2 + \pi - 4. \end{aligned}$$

(c) Po definiciji

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{4x+8}{x^2+4}\, dx = \lim_{c\to\infty} \Big[2\ln(x^2+4) + 4 \arctan \frac{x}{2} \Big]_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left(2\ln(c^2+4) + 4\arctan \frac{c}{2} - 2\ln 4 \right).$$

Ker je $\lim\limits_{c\to\infty} \ln(c^2+4) = \infty$ in $\lim\limits_{c\to\infty} \arctan \frac{c}{2} = \frac{\pi}{2}$, integral ne konvergira.

4. naloga [20 točk]

Podani imamo dve zaporedji s členi

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad b_n = \frac{n^2+4n+7}{8^{n+1}}.$$

(a) Izračunajte njuni limiti.

(b) Raziščite konvergenco vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Prva limita je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \tfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \tfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{1+0}+1} \\
&= \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ker zaporedje ne konvergira proti 0, pripadajoča vrsta ne konvergira.
Za drugo zaporedje velja

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+7}{8^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{8^n}}{\frac{1}{8^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{8^n} + 4\cdot\frac{n}{8^n} + \frac{7}{8^n}}{8} = \frac{0+0+0}{8} = 0.$$

Uporabimo kvocientni kriterij

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+4(n+1)+7}{8^{n+2}}}{\frac{n^2+4n+7}{8^{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+4(n+1)+7}{8^{n+2}} \cdot \frac{8^{n+1}}{n^2+4n+7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{n^2+6n+12}{n^2+4n+7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1+\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{1+0+0}{1+0+0} \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Ker je limita manjša od 1, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

2. izpit (7. 2. 2022)

1. naloga [20 točk]

Določite množico kompleksnih števil

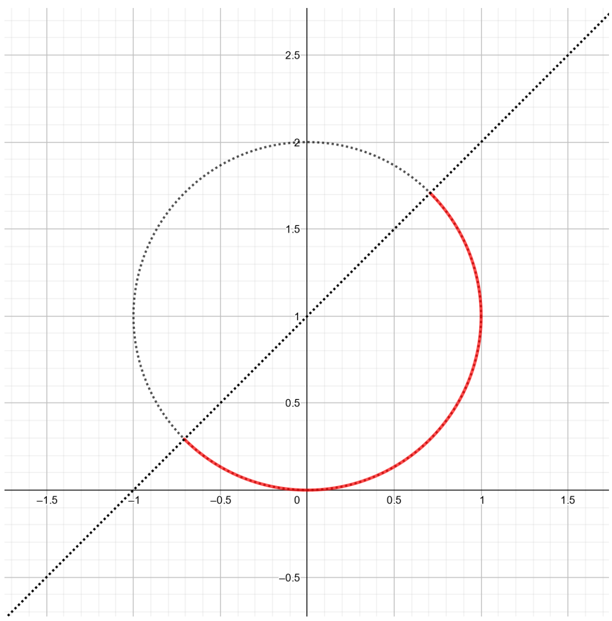
$$A = \{z \in \mathbb{C};\ |z+i| = |2z-i|,\ \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) - 1\}$$

in jo skicirajte v kompleksni ravnini.

Če pišemo $z = x + yi$, drugi pogoj pomeni $x > y - 1$, prvi pa

$$\begin{aligned}
|z+i| &= |2z-i| \\
|x+yi+i| &= |2(x+yi)-i| \\
|x+(y+1)i| &= |2x+(2y-1)i| \\
x^2+(y+1)^2 &= (2x)^2+(2y-1)^2 \\
x^2+y^2+2y+1 &= 4x^2+4y^2-4y+1 \\
0 &= 3x^2+3y^2-6y \\
0 &= x^2+y^2-2y \\
1 &= x^2+(y-1)^2
\end{aligned}$$

A je torej množica vseh točk na krožnici s središčem $(0,1)$ in polmerom 1, (strogo) pod premico $y = x + 1$:



2. naloga [15 točk]

Točke $A(2,1,3)$, $B(3,2,4)$, $C(1,8,8)$ in $D(4,3,11)$ so oglišča tetraedra. Določite dolžino višine tetraedra na ploskev ABD.

Prostornina tetraedra $ABCD$ je

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 6 = 8.$$

(V determinanti smo prvo vrstico prišteli drugi, njen dvakratnik pa odšteli od tretje.)
Ploščina trikotnina ABD pa je

$$p_{ABD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|.$$

Ker je

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = (8-2)\vec{\imath} - (8-2)\vec{\jmath} + (2-2)\vec{k} = (6, -6, 0),$$

je

$$p_{ABD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 0^2} = 3\sqrt{2}.$$

Po drugi strani pa velja

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} p_{ABD} \cdot h,$$

torej je iskana višina

$$h = \frac{3V_{ABCD}}{p_{ABD}} = \frac{3 \cdot 8}{3\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

3. naloga [40 točk]

Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(a) Določite njeno naravno definicijsko območje in obnašanje f na njegovem robu. Določite še ničle, sodost, lihost, ekstreme in prevoje funkcije f ter njene intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti. Skicirajte njen graf.

(b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

(a) Izraz v predpisu je definiran za vsa realna števila, tako da je

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Torej moramo določiti obnašanje za $x \to \pm\infty$. Ker gre prvi faktor proti $\pm\infty$, drugi pa proti 0, lahko izraz zapišemo v obliki ulomka in poskusimo z L'Hospitalovim pravilom:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{xe^{\frac{1}{2}x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{\frac{1}{2}x^2}}.$$

Dobljena limita je tudi tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Še enkrat odvajamo števec in imenovalec in dobimo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{\frac{1}{2}x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{xe^{\frac{1}{2}x^2}} = 0.$$

Na enak način dobimo tudi

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Eksponentna funkcija nikoli ne zavzeme ničle, tako da je edina ničla funkcije f pri 0.

Iz

$$f(-x) = (-x)^3 e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$$

sledi, da je f liha.

Po pravilu za odvod produkta dobimo

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x^3 \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (3x^2 - x^4)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Stacionarne točke so ničle odvoda, torej rešitve enačbe

$$0 = 3x^2 - x^4 = x^2(3 - x^2).$$

Posledično so stacionalne točke pri $x = 0$ in $x = \pm\sqrt{3}$. Vrednosti funkcije v njih so

$$f(0) = 0, \quad f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}, \quad f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}.$$

Velja še

- Na $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ je f' pozitiven (razen v 0), torej f narašča.

- Na $(-\infty, -\sqrt{3})$ in $(\sqrt{3}, \infty)$ je f' negativen, torej f pada.

To med drugim pomeni, da je točka $M_1(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ lokalni minimum, točka $M_2(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ lokalni maksimum, $N(0,0)$ pa ni lokalni ekstrem.

Tudi drugi odvod dobimo po formuli za produkt:

$$f''(x) = (3 \cdot 2x - 4x^3) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + (3x^2 - x^4) \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^5 - 7x^3 + 6x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

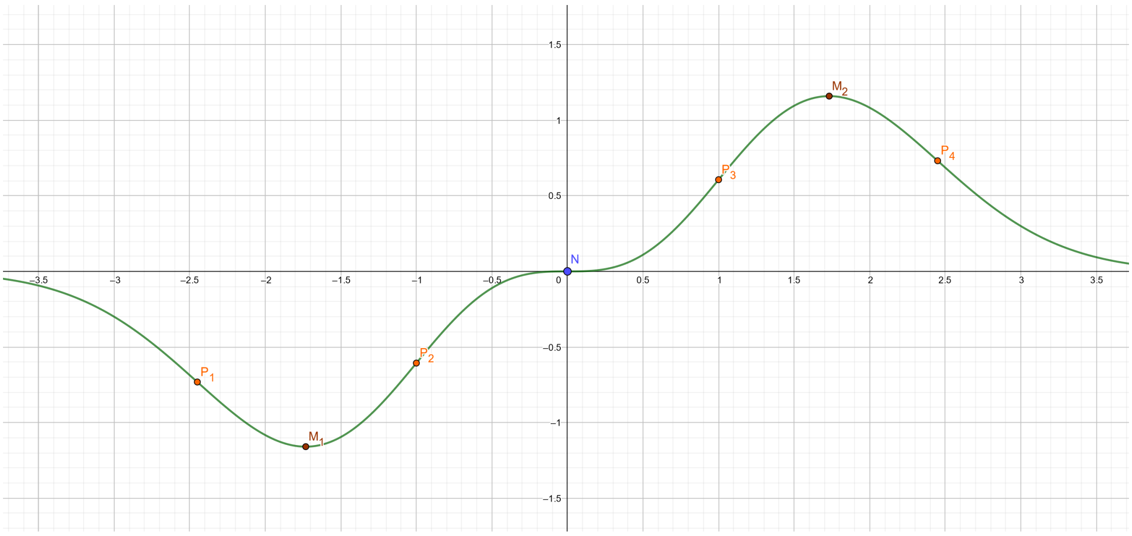
Kandidati za prevoje so njegove ničle. Konkretno

$$f''(x) = 0 \iff x^5 - 7x^3 + 6x = 0 \iff$$
$$\iff x(x^4 - 7x^2 + 6) = 0 \iff x(x^2-1)(x^2-6) = 0.$$

Ničle so torej $0, \pm 1, \pm\sqrt{6}$. Ker so vse enostavne, imamo v vsaki prevoj. Poleg točke N imamo še prevoje $P_1(-\sqrt{6}, -6\sqrt{6}e^{-3})$, $P_2(-1, -e^{-\frac{1}{2}})$, $P_3(1, e^{-\frac{1}{2}})$ in $P_4(\sqrt{6}, 6\sqrt{6}e^{-3})$.

- Na $(-\infty, -\sqrt{6})$, $(-1, 0)$ in $(1, \sqrt{6})$ je f'' negativen, torej je f konkavna.
- Na $(-\sqrt{6}, -1)$, $(0, 1)$ in $(\sqrt{6}, \infty)$ je f'' pozitiven, torej je f konveksna.

Z vsemi temi podatki skicirajmo graf:



(b) Za izračun integrala uvedemo novo spremenljivko

$$u = -\frac{x^2}{2}, \quad du = -x\ dx.$$

Sledi

$$\int f(x)\ dx = \int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \int (-x^2)(-xe^{-\frac{x^2}{2}})\ dx = \int 2ue^u\ du.$$

Z integriranjem po delih dobimo

$$\int ue^u\ du = ue^u - \int e^u\ du = ue^u - e^u + C = (u-1)e^u.$$

Torej je

$$\int f(x)\ dx = -(x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$$

4. naloga [25 točk]

Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & a & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Za katere vrednosti parametra a je matrika A obrnljiva?

(b) Rešite matrično enačbo $AX = X + 4A$ za $a = 1$.

(a) Determinanta matrike A je enaka

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & a & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} =$$
$$= 2(16 - a^2) - (8 - a) - (2a - 4) = -2a^2 - a + 28$$

in je enaka 0, če je

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2) \cdot 28}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{-4} = \frac{1 \pm 15}{-4}.$$

Matrika je torej obrnljiva, če $a \notin \{-4, \frac{7}{2}\}$.

(b) Kot vidimo, mora biti X enakih dimenzij kot A. Enačbo lahko napišemo kot

$$(A - I)X = 4A.$$

Če je matrika

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

obrnljiva, bomo dobili rešitev kot $X = 4(A - I)^{-1}A$.

Najprej odštejemo prvo vrstico od tretje, njen dvakratnik pa od druge. Nato odštejemo drugo vrstico od prve:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Zdaj prištejemo zadnjo vrstico prvi in zadnjo vrstico delimo s 4:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right].$$

Njen trikratnik nato odštejemo od druge vrstice:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right].$$

Torej je

$$(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

in

$$X = 4(A-I)^{-1}A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 4 \\ -5 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -5 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. izpit (23. 5. 2022)

1. naloga [20 točk]

(a) Pokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+3)(4k-1)} = \frac{n}{3(3+4n)}.$$

(b) Izračunajte vsoto vrste $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k-1)}$.

(a) Označimo za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+3)(4k-1)} \quad \text{in} \quad D_n = \frac{n}{3(3+4n)}.$$

Za $n = 1$ trditev velja, saj je

$$L_1 = \tfrac{1}{(4+3)(4-1)} = \tfrac{1}{21} \quad \text{in} \quad D_1 = \tfrac{1}{3(3+4)} = \tfrac{1}{21}.$$

Predpostavimo, da za neki $n \in \mathbb{N}$ velja $L_n = D_n$. Pri $n+1$ imamo potem

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k+3)(4k-1)} \\ &= L_n + \frac{1}{(4(n+1)+3)(4(n+1)-1)} \\ &= D_n + \frac{1}{(4n+7)(4n+3)} \\ &= \frac{n}{3(3+4n)} + \frac{1}{(4n+7)(4n+3)} \\ &= \frac{n(4n+7)+3}{3(4n+7)(4n+3)} \\ &= \frac{4n^2+7n+3}{3(4n+7)(4n+3)} \end{aligned}$$

in

$$D_{n+1} = \frac{n+1}{3(3+4(n+1))} = \frac{n+1}{3(4n+7)} = \frac{(n+1)(4n+3)}{3(4n+3)(4n+7)} = \frac{4n^2+7n+3}{3(4n+3)(4n+7)}.$$

Torej je $L_{n+1} = D_{n+1}$. S tem je trditev dokazana.

(b) Z uporabo točke (a) dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+3)(4k-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(3+4n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(\frac{3}{n}+4)} = \frac{1}{12}.$$

2. naloga [15 točk]

Poiščite vrednosti parametra a, pri katerih matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & a \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & 10 & a & -6 \\ -4 & 10 & -6 & 18 \end{bmatrix}$ ni obrnljiva.

Matrika ni obrnljiva natanko tedaj, ko je njena determinanta enaka 0. Iz determinant lahko izpostavimo faktorje v vrsticah ali stolpcih. Eni vrstici ali stolpcu lahko prištejemo poljuben večkratnik druge(ga). Menjava vrstic ali stolpcev pa spremeni predznak.

Če zadnji vrstici prištejemo dvakratnik prve, od tretje pa odštejemo dvakratnik druge, dobimo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & a \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & 10 & a & -6 \\ -4 & 10 & -6 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & a \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+18 \end{vmatrix}.$$

Sedaj lahko razvijemo determinanto po zadnji vrstici in nato še enkrat

$$\det A = (2a+18) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \end{vmatrix} = (2a+18)(a-6) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Na koncu še izračunamo dva-krat-dva determinanto in dobimo

$$\det A = (2a+18)(a-6)(10-5) = 10(a+9)(a-6).$$

Torej matrika ni obrnljiva natanko tedaj, ko je $a = -9$ ali $a = 6$.

3. naloga [40 točk]

Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}.$$

(a) Določite definicijsko območje funkcije f ter njene ničle, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti. Skicirajte tudi njen graf.

(b) Izračunajte ploščino lika $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le f(x)\}$.

(a) Kvadratni koren je definiran za nenegativna števila. Pri le-teh ni težav z imenovalcem. Torej je
$$D_f = [0, \infty].$$

Funkcija f ima edino ničlo pri 0.

Odvod f dobimo po formuli za kvocient:
$$f'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot (x+1) - x^{\frac{3}{2}} \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}.$$

Opazimo, da je $f'(0) = 0$ in $f' > 0$ sicer. Najmanjšo vrednost ima funkcija pri $x = 0$, potem pa strogo narašča in $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

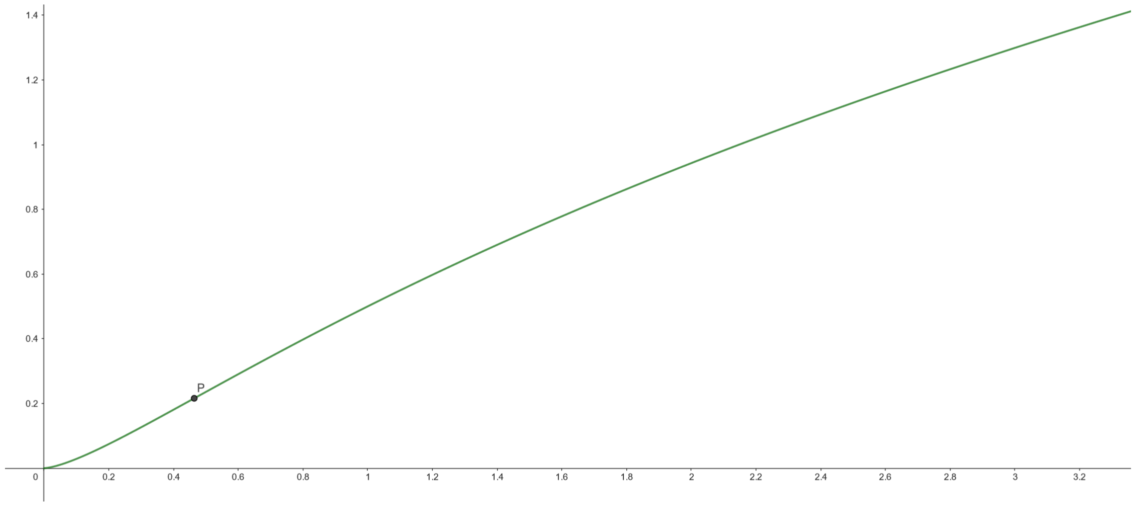
Tudi drugi odvod dobimo po formuli za kvocient:
$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}) \cdot (x+1)^2 - (\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}) \cdot (x+1) - (x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}})}{(x+1)^3} \\
&= \frac{\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^3} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^3} \\
&= \frac{-x^2 - 6x + 3}{4(x+1)^3\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Kandidati za prevoje so njegove ničle. Konkretno
$$f''(x) = 0 \iff -x^2 - 6x + 3 = 0 \iff x = \tfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot(-1)\cdot 3}}{-2} = \tfrac{6 \pm \sqrt{48}}{-2} = -3 \pm 2\sqrt{3}.$$

V definicijskem območju leži le $-3+2\sqrt{3}$. Imenovalec v $f''(x)$ je pozitiven za $x > 0$, kvadratna funkcija v števcu je pa med ničlama pozitivna, drugje pa negativna. Torej ima funkcija f v $-3+2\sqrt{3}$ res prevoj in velja:

- Na $(0, -3+2\sqrt{3})$ je f'' pozitiven, torej je f konveksna.
- Na $(-3+2\sqrt{3}, \infty)$ je f'' negativen, torej je f konkavna.

Z vsemi temi podatki skicirajmo graf:



(b) Ves graf leži nad abscisno osjo. Torej je

$$P=\int_1^3 f(x)\;dx=\int_1^3 \frac{x\sqrt{x}}{x+1}\;dx.$$

Za izračun integrala uvedemo novo spremenljivko $u=\sqrt{x}$, $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\;dx$. Sledi

$$\begin{aligned}P&=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2u}{u^2+1}\;2u\;du=\int_1^{\sqrt{3}} 2\frac{u^4}{u^2+1}\;du=2\int_1^{\sqrt{3}}\left(u^2-1+\frac{1}{u^2+1}\right)du=\\&=2\left[\frac{u^3}{3}-u+\operatorname{arctg}u\right]_1^{\sqrt{3}}=2\left[\frac{\sqrt{3}^3}{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right]-2\left[\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1\right]=\\&=2\left[\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right]-2\left[\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{2\pi}{3}+\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

4. naloga [25 točk]

Dane so premica $p\colon x = \frac{y-1}{2} = -z$ ter ravnini $\Pi_1\colon 2x + y + 3z = 2$ in $\Pi_2\colon 3x - y - z = 3$.

(a) Izračunajte razdaljo med sečiščema premice p z ravninama Π_1 in Π_2.

(b) Napišite enačbo premice q, ki je presek ravnin Π_1 in Π_2.

(c) Določite kot med p in Π_1.

Premico p zapišemo v parametrični obliki:

$$x = t, \qquad y = 1 + 2t, \qquad z = -t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Sečišče premice in ravnine dobimo, če parametrično obliko za premico vstavimo v enačbo ravnine in izračunamo vrednost parametra.

Za p in Π_1 dobimo:

$$2 \cdot t + (1 + 2t) + 3 \cdot (-t) = 2 \quad \Rightarrow \quad t + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Sečišče je torej $P_1(1, 3, -1)$.

Še za p in Π_2:

$$3 \cdot t - (1 + 2t) - (-t) = 3 \quad \Rightarrow \quad 2t - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 2,$$

torej $P_2(2, 5, -2)$.

Razdalja med P_1 in P_2 je

$$|P_1P_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$$

(b) Iščemo torej množico točk, ki rešijo sistem

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 3x - y - z &= 3 \end{aligned}$$

Če enačbi seštejemo, dobimo $5x + 2z = 5$. Izberemo lahko $x = t$. Potem je $z = \frac{5-5t}{2}$. To dvoje vstavimo v npr. prvo enačbo. Tako dobimo

$$2 \cdot t + y + 3 \cdot \frac{5-5t}{2} = 2$$

oziroma $y = \frac{11t-11}{2}$. Parametrična oblika q je torej

$$x = t, \qquad y = \frac{11t - 11}{2}, \qquad z = \frac{5 - 5t}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Kot med smernim vektorjem premice in normalnim vektorjem ravnine dobimo iz formule $\cos\varphi = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$. Konkretno

$$\cos\varphi = \frac{(1,2,-1)\cdot(2,1,3)}{|(1,2,-1)| \cdot |(2,1,3)|} = \\ = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2\sqrt{21}}.$$

Kot med premico p in ravnino Π_1 je komplementaren temu kotu, torej $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{21}}$.

4. izpit (19. 8. 2022)

1. naloga [20 točk]

Dane so točke $A(0,2,1)$, $B(1,3,3)$, $C(3,4,4)$ in $D(2,3,2)$. Poleg tega naj bo E točka, ki razpolavlja daljico DC in F točka, ki deli daljico AD v razmerju $3:2$. Točka S je presečišče premice skozi točki A in E ter premice skozi točki B in F.

(a) Pokažite, da je štirikotnik $ABCD$ paralelogram. Ali je romb?

(b) Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

(c) Določite koordinate točke S.

(d) Poiščite ploščino trikotnika ABS.

(a) Štirikotnik $ABCD$ je paralelogram, saj so vektorji med oglišči paroma enaki. Velja namreč

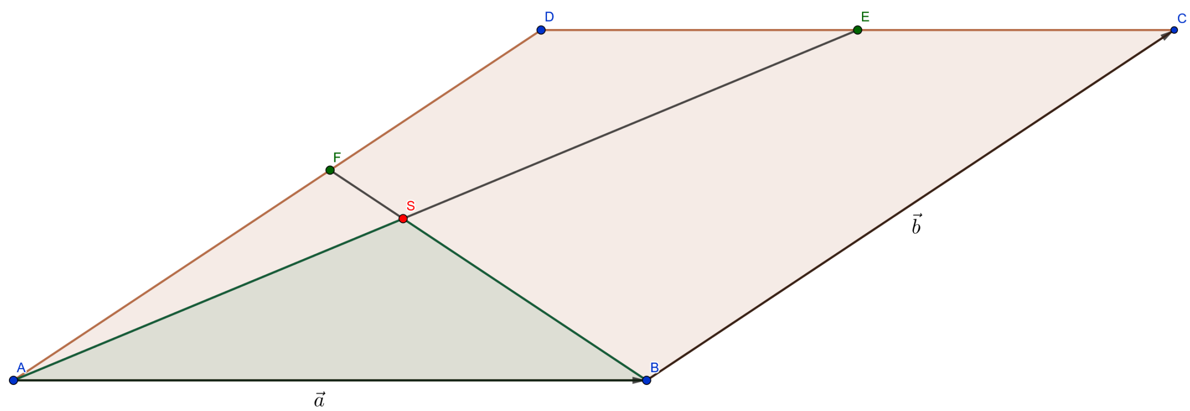
$$\overrightarrow{AB} = (1,3,3) - (0,2,1) = (1,1,2) \quad \text{in} \quad \overrightarrow{DC} = (3,4,4) - (2,3,2) = (1,1,2),$$

ter

$$\overrightarrow{BC} = (3,4,4) - (1,3,3) = (2,1,1) \quad \text{in} \quad \overrightarrow{AD} = (2,3,2) - (0,2,1) = (2,1,1).$$

Gre celo za romb, saj so vse dolžine stranic enake:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6} \quad \text{in} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}.$$



(b) Točka S po eni strani leži na daljici AE, tako da obstaja taka $\lambda > 0$, da je

$$\overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AE} = \lambda(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) = \lambda(\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a}).$$

Po drugi strani pa leži S tudi na daljici BF. Ker je

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\vec{a} + \tfrac{3}{5}\vec{b},$$

je za neki $\mu > 0$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BF} = \vec{a} + \mu(-\vec{a} + \tfrac{3}{5}\vec{b}) = (1-\mu)\vec{a} + \tfrac{3}{5}\mu\vec{b}.$$

Iz
$$\tfrac{1}{2}\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \overrightarrow{AS} = (1-\mu)\vec{a} + \tfrac{3}{5}\mu\vec{b}$$
sledi
$$\tfrac{1}{2}\lambda = 1-\mu \quad \text{in} \quad \lambda = \tfrac{3}{5}\mu.$$
Drugo enakost upoštevamo v prvi in dobimo
$$\tfrac{1}{2}\lambda = 1-\mu \implies \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{5}\mu = 1-\mu \implies \tfrac{13}{10}\mu = 1 \implies \mu = \tfrac{10}{13}.$$
Potem je
$$\lambda = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{10}{13} = \tfrac{6}{13}.$$
Torej je
$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{6}{13}(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) = \tfrac{3}{13}\vec{a} + \tfrac{6}{13}\vec{b}.$$

(c) V koordinatah je
$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{3}{13}(1,1,2) + \tfrac{6}{13}(2,1,1) = (\tfrac{15}{13}, \tfrac{9}{13}, \tfrac{12}{13}).$$
Krajevni vektor točke S je tako
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = (0,2,1) + (\tfrac{15}{13}, \tfrac{9}{13}, \tfrac{12}{13}) = (\tfrac{15}{13}, \tfrac{35}{13}, \tfrac{25}{13}).$$

(d) Trikotnik ABS določata vektorja $\vec{a}$ in $\overrightarrow{AS}$. Iz
$$\vec{a}\times\overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ \frac{15}{13} & \frac{9}{13} & \frac{12}{13} \end{vmatrix} = (-\tfrac{6}{13}, \tfrac{18}{13}, -\tfrac{6}{13})$$
sledi
$$p_{ABS} = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\overrightarrow{AS}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{(-\tfrac{6}{13})^2 + (\tfrac{18}{13})^2 + (-\tfrac{6}{13})^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{6}{13}\sqrt{1+9+1} = \tfrac{3}{13}\sqrt{11}.$$

2. naloga [15 točk]

Dano je rekurzivno zaporedje $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{4}$.

(a) Pokažite, da je $a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(b) Izračunajte limito zaporedja.

(c) Ali konvergira vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

(a) Trditev bomo dokazali z matematično indukcijo. Označimo za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}.$$

Na cilj je dokazati $a_n = b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Za $n = 1$ trditev velja, saj je

$$a_1 = 1 \quad \text{in} \quad b_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^1} = 1.$$

Predpostavimo, da za neki $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n = b_n$. Potem je

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{4} = \frac{2b_n + 3}{4} = \frac{2(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}) + 3}{4} = \frac{6 - \frac{1}{2^{n-1}}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} = b_{n+1}.$$

S tem je trditev dokazana.

(b) Z uporabo točke (a) dobimo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{3}{2}.$$

(c) Če limita zaporedja ni enaka 0, potem pripadajoča vrsta zagotovo ne konvergira. Iz točke (b) torej sledi, da ta vrsta ne konvergira.

3. naloga [40 točk]

Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

(a) Določite definicijsko območje funkcije f in kako se funkcija obnaša na njegovem robu. Določite še njene ničle, lokalne ekstreme, prevoje, intervale monotonosti ter intervale konveksnosti in konkavnosti. Skicirajte tudi njen graf.

(b) Pokažite, da je $\displaystyle\int f(x)\,dx = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) + C.$

(c) Raziščite konvergenco izlimitiranega integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx.$

(a) Izraz pod korenom v imenovalcu je večji od 1 za vsak x. Posledično ni težav z definicijo za noben $x \in \mathbb{R}$ in velja

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Funkcija f nima ničel, saj je števec vselej pozitiven.

Iz $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ sledi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

in

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Odvod f dobimo po formuli za kvocient:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \sqrt{e^{2x}+1} - e^x \cdot \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}}}{e^{2x}+1} = \frac{e^x \cdot (e^{2x}+1) - e^x \cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Opazimo, da je $f' > 0$ povsod. Funkcija f povsod strogo narašča in nima lokalnih ekstremov.

Tudi drugi odvod dobimo po formuli za kvocient:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{e^x \cdot (e^{2x}+1)^{\frac{3}{2}} - e^x \cdot \frac{3}{2}(e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3} \\
&= \frac{e^x \cdot (e^{2x}+1) - e^x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{e^x - 2e^{3x}}{(e^{2x}+1)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{e^x(1-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da za drugi odvod velja

$$f''(x) = 0 \iff 1 - 2e^{2x} = 0 \iff e^{2x} = \tfrac{1}{2} \iff 2x = \ln \tfrac{1}{2} \iff x = -\tfrac{\ln 2}{2}.$$

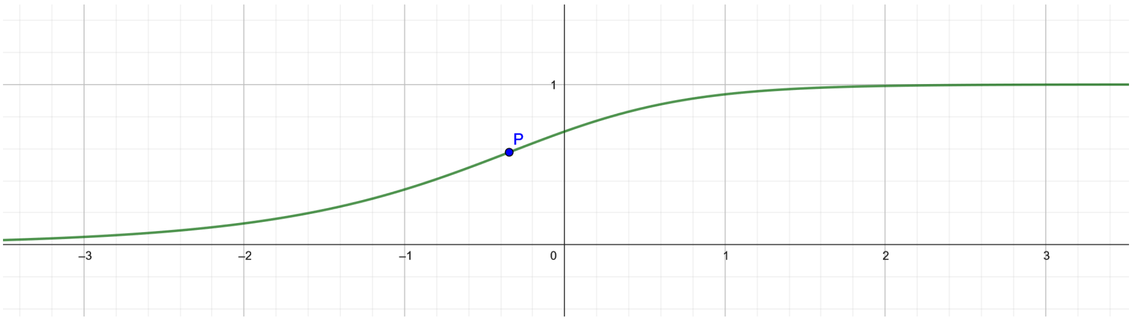
Predznak izraza $1 - 2e^{2x}$ določa preznak f'', zato velja:

- Na $(-\infty, -\frac{\ln 2}{2})$ je f'' pozitiven, torej je f konveksna.
- Na $(-\frac{\ln 2}{2}, \infty)$ je f'' negativen, torej je f konkavna.

Pri $x = -\frac{\ln 2}{2}$ drugi odvod spremeni predznak, zato ima funkcija tam prevoj. Funkcija vrednost znaša

$$f(-\tfrac{\ln 2}{2}) = \frac{e^{-\frac{\ln 2}{2}}}{\sqrt{e^{-\ln 2}+1}} = \frac{(e^{\ln 2})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(e^{\ln 2})^{-1}+1}} = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2^{-1}+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Z vsemi temi podatki skicirajmo graf:



(b) Trditev sledi iz

$$\Big(\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1})\Big)' = \frac{1}{e^x + \sqrt{e^{2x}+1}} \cdot \left(e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{e^x + \sqrt{e^{2x}+1}} \cdot \frac{e^x(\sqrt{e^{2x}+1} + e^x)}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} = f(x).$$

(c) Iz točke (b) po definiciji izlimitiranega integrala dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \Big[\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1})\Big]_a^0 \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) - \lim_{a\to-\infty} \ln(e^a + \sqrt{e^{2a}+1}) \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(0 + \sqrt{0+1}) \\
&= \ln(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

4. naloga [25 točk]

Za matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

(a) izračunajte determinante,

(b) določite ali so obrnljive,

(c) (v primeru, da so obrnljive) izračunajte njihove inverze.

(a) Determinanti matrik A in B sta

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 8$$

in

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) = -1.$$

Če v matriki C odštejemo prvo vrstico od tretje, se njena determinanta ne spremeni. Tako dobimo

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix}.$$

Nadaljujemo in dobimo

$$\det C = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + (-9) - 2 \cdot (-2) = 0.$$

(b) Matrika je obrnljiva natanko tedaj, ko je njena determinanta različna od 0. Torej sta matriki A in B obrnljivi, C pa ne.

(c) Po formuli za inverz 2×2-matrik je

$$A^{-1} = \tfrac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pri matriki B najprej odštejemo prvo vrstico od tretje, njen dvakratnik pa od druge:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Nato odštejemo drugo vrstico od tretje. Potem prištejemo tretjo vrstico prvi, njen dvakratnik pa odštejemo od druge:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Nato dvakratnik druge vrstice prištejemo prvi in na koncu pomnožimo drugo vrstico z -1:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Torej je

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. kolokvij (28. 11. 2022)

1. naloga [25 točk]

(a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = |x^2 - 2x| - x$.

(b) Zapišite naravno definicijsko območje D_g funkcije

$$g : D_g \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(|x^2 - 2x| - x).$$

(c) Ali je funkcija g surjektivna? Ali je injektivna?

(a) Za skico grafa moramo najprej odpraviti absolutno vrednost. Izraz znotraj absolutne vrednosti je kvadratna funkcija

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

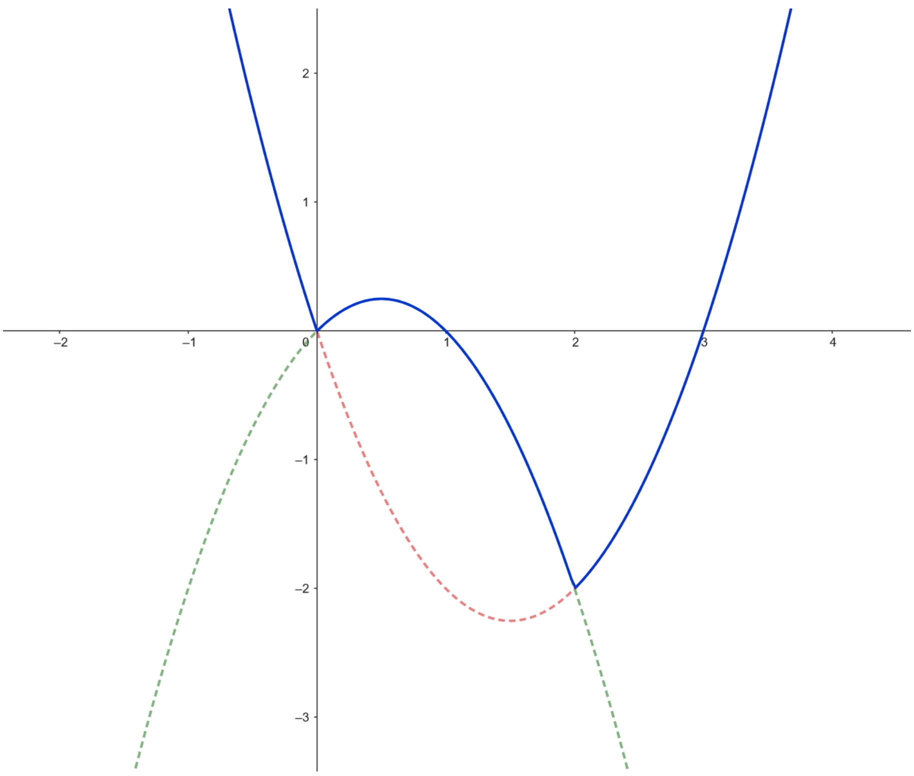
s pozitivnim vodilnim koeficientom ter ničlama 0 in 2. Ločima dva primera:

- Za $x \leq 0$ in $x \geq 2$ je $x^2 - 2x \geq 0$, zato je
$$f(x) = x^2 - 2x - x = x^2 - 3x = x(x-3).$$
- Če pa je $0 < x < 2$, je $x^2 - 2x < 0$ in posledično
$$f(x) = -(x^2 - 2x) - x = -x^2 + x = -x(x-1).$$

Torej

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 0 \text{ ali } x \geq 2 \\ -x^2 + x, & 0 < x < 2 \end{cases}.$$

Skica grafa je



(b) Naravni logaritem je definiran za pozitivna števila, torej ležijo v D_g rešitve neenačbe

$$|x^2 - 2x| - x > 0.$$

Iz točke (a) sledi, da je

$$D_g = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty).$$

(c) Naravni logaritem $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je surjektivna funkcija. Ker notranja funkcija f zavzame vsa pozitivna realna števila, je tudi g surjektivna funkcija. Ni pa g injektivna, saj že funkcija f nima te lastnosti. Kot je razvidno iz grafa, f vsako pozitivno vrednost zavzame dvakrat ali trikrat.

2. naloga [25 točk]

Dani sta kompleksni števili $z_1 = 3i - 4$ in $z_2 = 3 + 4i$.

(a) Določite vsa kompleksna števila z, za katera velja

$$|z \cdot z_1| = 25 \qquad \text{in} \qquad \mathrm{Im}(z \cdot z_2) = 0.$$

(b) Izračunajte vsa kompleksna števila w, ki rešijo enačbo

$$\frac{w^3}{8} = \frac{z_2}{z_1}.$$

(a) Najprej velja

$$25 = |z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|.$$

Ker je

$$|z_1| = |3i - 4| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

prva enačba pomeni, da je $|z| = 5$.

Če pišemo $z = x + yi$, dobimo

$$z \cdot z_2 = (x + yi) \cdot (3 + 4i) = (3x - 4y) + i(4x + 3y).$$

Sledi, da je $4x + 3y = 0$.

Velja torej mora

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = 25 \quad \text{in} \quad 4x + 3y = 0.$$

Če iz druge enačbe izrazimo npr. $y = -\frac{4x}{3}$ in vstavimo v prvo, dobimo

$$25 = x^2 + (-\tfrac{4x}{3})^2 = x^2 + \tfrac{16}{9}x^2 = \tfrac{25}{9}x^2.$$

Torej je $x^2 = 9$, oziroma $x = \pm 3$. Posledično je $y = -\frac{4}{3}(\pm 3) = \mp 4$. Sistem ima dve rešitvi:

$$z = 3 - 4i \quad \text{in} \quad z = -3 + 4i.$$

(b) Količnik je enak

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3+4i}{3i-4} = \frac{3+4i}{-4+3i} \cdot \frac{-4-3i}{-4-3i} = \frac{-12-9i-16i+12}{4^2+3^2} = \frac{-25i}{25} = -i.$$

Torej iščemo rešitve enačbe

$$w^3 = -8i.$$

Polarni zapis desne strani je očitno

$$-8i = 8(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}).$$

Po formuli so rešitve tri, in sicer za $k = 0, 1, 2$

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) = 2\left(\cos(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{2k\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{2k\pi}{3})\right).$$

Natančneje

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = 2i,\\
w_1 &= 2\left(\cos\tfrac{7\pi}{6} + i\sin\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,\\
w_2 &= 2\left(\cos\tfrac{11\pi}{6} + i\sin\tfrac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.
\end{aligned}$$

3. naloga [25 točk]

Premica p in ravnina Σ sta podani z enačbami:

$$\begin{aligned} p:&\ x-2y+3z=3,\ 2x+y-4z=1;\\ \Sigma:&\ 3x-2y+z=4. \end{aligned}$$

(a) Določite parametrično enačbo premice p.

(b) Pokažite, da je premica p vzporedna ravnini Σ.

(c) Poiščite pravokotno projekcijo premice p na ravnino Σ.

(d) Določite razdaljo med premico p in ravnino Σ.

(a) Če iz $x-2y+3z=3$ izrazimo $x=2y-3z+3$ in vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$\begin{aligned} 2(2y-3z+3)+y-4z &= 1\\ 5y-10z+5 &= 0\\ y &= 2z-1 \end{aligned}$$

Potem je

$$x=2y-3z+3=2(2z-1)-3z+3=z+1.$$

Parametrična enačba premice p je torej

$$x=1+\lambda,\quad y=-1+2\lambda,\quad z=\lambda,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

(b) Smerni vektor premice p je $\vec{s}_p=(1,2,1)$, normalni vektor ravnine Σ pa $\vec{n}_\Sigma=(3,-2,1)$. Ker je

$$\vec{s}_p\cdot\vec{n}_\Sigma=(1,2,1)\cdot(3,-2,1)=3-4+1=0,$$

sta pravokotna, iz česar sledi $p\parallel\Sigma$.

(c) Ker je premica p vzporedna ravnini Σ, ima njena pravokotna projekcija p' isti smerni vektor in potrebujemo le neko točko na p'. Vzemimo neko točko na premici p, denimo $T(1,-1,0)$, in poiščimo njeno pravokotno projekcijo T' na Σ. Premica skozi T s smernim vektorjem $\vec{n}_\Sigma$ ima enačbo

$$\vec{r}=(1,-1,0)+\lambda(3,-2,1)=(1+3\lambda,-1-2\lambda,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Točka T' je njeno sečišče z ravnino Σ. Torej je določena z

$$3(1+3\lambda)-2(-1-2\lambda)+\lambda=4\ \Rightarrow\ 14\lambda=-1\ \Rightarrow\ \lambda=-\tfrac{1}{14}.$$

Tako je $T'(\frac{11}{14},-\frac{6}{7},-\frac{1}{14})$ in

$$p':\quad x=\tfrac{11}{14}+\lambda,\quad y=-\tfrac{6}{7}+2\lambda,\quad z=-\tfrac{1}{14}+\lambda,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

(d) Razdalja je

$$d(p,\Sigma)=|\overrightarrow{TT'}|=|(-\tfrac{3}{14},\tfrac{1}{7},-\tfrac{1}{14})|=\sqrt{(-\tfrac{3}{14})^2+(\tfrac{1}{7})^2+(-\tfrac{1}{14})^2}=\sqrt{\tfrac{9+4+1}{14^2}}=\tfrac{1}{\sqrt{14}}.$$

4. naloga [25 točk]

Obravnavamo sistem $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, pri čemer so

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & -2+a \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Za katere vrednosti parametra a ima dani sistem neskončno mnogo rešitev?

(b) Rešite sistem za $a = 0$.

(c) Pri katerih vrednostih parametra a matrika A ni obrnljiva?

(a) Sistem zapišemo v razširjeno matriko. Nato v prvem koraku dosežemo, da so v prvem stolpcu pod diagonalo same ničle, in sicer tako, da od tretje vrstice odštejemo prvo in da drugi prištejemo $(-a)$-kratnik prve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ a & 1 & -2+a & a \\ 1 & -1 & a-1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -2+2a & 0 \\ 0 & -1-a & a & 2 \end{array}\right].$$

Ker je $1 - a^2 = (1-a)(1+a)$ in $-2+2a = 2(a-1)$, je druga vrstica ničelna, če je $a = 1$.

- Če je $a = 1$, imamo

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  V ničelni vrstici je tudi na desni 0, torej je sistem rešljiv. Ker imamo tri neznanke in dve neničelni vrstici, je rešitev neskončno mnogo.

- Če $a \neq 1$, smemo drugo vrstico deliti z $1 - a$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -2+2a & 0 \\ 0 & -1-a & a & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1+a & -2 & 0 \\ 0 & -1-a & a & 2 \end{array}\right].$$

  Nato drugo vrstico prištejemo tretji:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1+a & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right].$$

  Sistem je torej zagotovo enolično rešljiv, če je $a \notin \{-1, 2\}$. Če je $a = 2$, je zadnja vrstica na levi ničelna, na desni pa ni nič, torej sistem ni rešljiv. Če je $a = -1$, vidimo, da zadnji dve vrstici ne moreta biti istočasno izponjeni.

Neskončno rešitev imamo torej natanko tedaj, ko je $a = 1$.

(b) Za $a = 0$ je Gaußova stopničasta oblika enaka

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Torej je $z = -1$, $y = -2$ in $x = 0$.

(c) Matrika je obrnljiva natanko tedaj, ko je njena determinanta različna od 0. Ker se determinantna ne spremeni, če vrsticam prištevamo večkratnike drugih, lahko naredimo podobne korake kot zgoraj:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & -2+a \\ 1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1-a^2 & -2+2a \\ 0 & -1-a & a \end{vmatrix} = (1-a)\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1+a & -2 \\ 0 & -1-a & a \end{vmatrix} =$$
$$= (1-a)\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1+a & -2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (1-a)\cdot 1\cdot(1+a)\cdot(a-2).$$

Torej je matrika obrnljiva, če $a \notin \{-1, 1, 2\}$.

2. kolokvij (16. 1. 2023)

1. naloga [20 točk]

Za matriko A poiščite vse lastne vrednosti in njim pripadajoče lastne vektorje. Če obstajata, zapišite taki matriki D in P, da bo $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike A je

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \cdot ((3-\lambda)(-3-\lambda) + 8) \\ &= (-1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-1). \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so njegove ničle. Vidimo, da je -1 dvojna ničla, 1 pa enojna. Določimo sedaj pripadajoče lastne vektorje.

- $\lambda = -1$: Iščemo rešitve enačbe $(A - (-1)I)x = 0$. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Kot vidimo, imamo dvorazsežen prostor rešitev. Zadnji dve koordinati sta poljubni. Označimo $x_3 = \alpha$ in $x_2 = \beta$. Potem je $x_1 = \alpha - \beta$. Vsi lastni vektorji so

$$x = \begin{bmatrix} \alpha-\beta \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha\beta \neq 0.$$

- $\lambda = 1$: Tukaj določamo vektorje z $(A - 1I)x = 0$. Iz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  sledi, da je $x_3 = \alpha$ poljuben, $x_2 = 2\alpha$ in $x_1 = 0$. Pripadajoči lastni vektorji so tako $\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Matriko A se da diagonalizirati, saj razsežnosti prostora lastnih vektorjev ustrezata stopnji ničel karakterističnega polinoma. V D po diagonali zapišemo lastne vrednosti (glede na njihovo večkratnost), na primer

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V prvih dveh stolpcih matrike P morata stati dva linearno neodvisna lastna vektorja za lastno vrednost -1, v zadnjem pa neki lastni vektor za lastno vrednost 1. Ena možna izbira je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. naloga [20 točk]

Določite parametra a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{3+x}, & x < -3; \\ ax + b, & -3 \leq x \leq 0; \\ \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+4}-2}, & x > 0. \end{cases}$$

zvezna.

Predpis $\arctan \frac{1}{3+x}$ je dobro definiran in zvezen na $(-\infty, -3)$, linearna funkcija iz drugega predpisa je definirana in zvezna povsod na $\mathbb{R}$, zadnji predpis $\frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+4}-2}$ pa je prav tako dobro definiran in zvezen na $(0, \infty)$. Manjka torej še zveznost v točkah -3 in 0. Leva limita v -3 je enaka

$$\lim_{x \nearrow -3} f(x) = \lim_{x \nearrow -3} \arctan \tfrac{1}{3+x} = -\tfrac{\pi}{2},$$

saj je $\lim\limits_{x \nearrow -3} \frac{1}{3+x} = -\infty$. Desna limita in funkcijska vrednost sta pa enaki

$$\lim_{x \searrow -3} f(x) = f(-3) = -3a + b.$$

Funkcija f je torej v točki -3 zvezna natanko tedaj, ko velja

$$-\tfrac{\pi}{2} = -3a + b.$$

Podobno postopamo v točki 0. Tukaj sta leva limita in funkcijska vrednost enaki

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = f(0) = b.$$

Desna limita pa je tipa $\frac{0}{0}$, zato uporabimo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{3\cos(3x)}{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}} = \frac{3\cos 0}{\frac{1}{2\sqrt{4}}} = 12.$$

Funkcija f je torej zvezna v točki 0 natanko tedaj, ko je

$$b = 12.$$

Za zveznost v točki -3 pa mora veljati še $-\frac{\pi}{2} = -3a + b$, oziroma

$$a = 4 + \tfrac{\pi}{6}.$$

3. naloga [35 točk]

(a) Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = x(\ln x)^2.$$
Določite definicijsko območje, ničle, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

(b) Z uporabo metode per partes izračunajte integral $\int_1^e f(x)\,dx$.

(a) Naravni logaritem je definiran za pozitivna števila, ostalih omejitev pa ni. Torej je $D_f = (0, \infty)$.

Edina ničla logaritma je 1. To je tudi edina ničla funkcije f. Prvi faktor ima sicer ničlo v 0, a le-ta leži zunaj D_f.

Odvod je enak
$$f'(x) = 1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \ln x \cdot \tfrac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x\ (\ln x + 2).$$

Ničli odvoda sta

- pri $\ln x = 0$, torej pri $x = 1$,
- ter pri $\ln x = -2$, oziroma $x = e^{-2}$.

Kar se tiče monotonosti, opazimo sledeče:

- Na $(0, e^{-2})$ sta oba faktorja v f' negativna, zato je tam $f' > 0$ in funkcija f narašča.
- Na $(e^{-2}, 1)$ sta faktorja različno predznačena. Posledično je $f' < 0$ in funkcija f pada.
- Na $(1, \infty)$ sta oba faktorja pozitivna, zato f narašča.

Iz zgornjega tudi sledi, da je v $S_1(e^{-2}, 4e^{-2})$ lokalni maksimum funkcije f, v $S_2(1, 0)$ pa lokalni minimum.

Drugi odvod je enak
$$f''(x) = ((\ln x)^2 + 2 \ln x)' = 2 \ln x \cdot \tfrac{1}{x} + \tfrac{2}{x} = \tfrac{2(\ln x + 1)}{x}.$$

Edina njegova ničla je, ko je $\ln x = -1$, torej v e^{-1}. Imenovalec je povsod na D_f pozitiven, torej predznak določa števec. Tako je

- na $(0, e^{-1})$ drugi odvod negativen in je tam funkcija f konkavna,
- na (e^{-1}, ∞) pa je f konveksna.

V točki e^{-1} drugi odvod spremeni predznak, tako da je v $P(e^{-1}, e^{-1})$ prevoj.

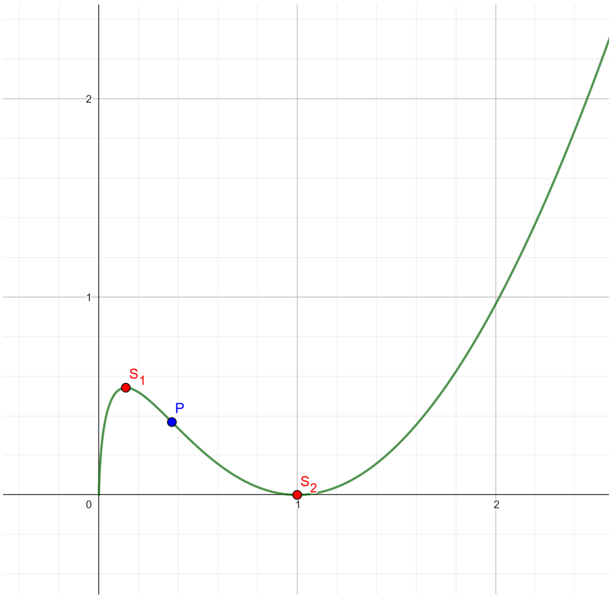
Limita pri 0 je tipa $0 \cdot \infty$. Zato izraz zapišemo najprej v obliki $\frac{\infty}{\infty}$ in uporabimo L'Hospitalovo pravilo dvakrat, saj po prvi uporabi spet dobimo izraz tipa $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \searrow 0} x(\ln x)^2 = \lim_{x \searrow 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= -2 \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} -2 \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \searrow 0} x = 0.$$

Pri ∞ sta oba faktorja neomejena, tako da je

$$\lim_{x \to \infty} x(\ln x)^2 = \infty.$$

Vse te podatke uporabimo za skico grafa:



(b) Z integracijo po delih, pri čemer so

$$u = (\ln x)^2, \quad dv = x\, dx, \quad du = \tfrac{2 \ln x}{x}\, dx, \quad v = \tfrac{x^2}{2},$$

dobimo

$$I = \int_1^e x(\ln x)^2\, dx = \left[(\ln x)^2 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x\, dx.$$

Še enkrat integriramo po delih, tokrat z

$$u = \ln x, \quad dv = x\, dx, \quad du = \tfrac{1}{x}\, dx, \quad v = \tfrac{x^2}{2},$$

kar nam da

$$I = \frac{e^2}{2} - \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \int_1^e \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

4. naloga [25 točk]

Dana je funkcija $f(x) = e^{-x} \sin 2x$.

(a) Zapišite Taylorjev polinom 1. reda funkcije f okoli točke 0.

(b) Izračunajte približek za $e^{-0.01} \sin 0.02$ s pomočjo diferenciala in ocenite ostanek.

(c) Zapišite Taylorjev polinom 2. reda funkcije f okoli točke 0. Izračunajte približek za $e^{-0.01} \sin 0.02$ še z njegovo pomočjo.

Potrebovali bomo prva odvoda funkcije f:

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot \sin 2x + e^{-x} \cdot 2\cos 2x = e^{-x}(-\sin 2x + 2\cos 2x)$$

in

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x} \cdot (-\sin 2x + 2\cos 2x) + e^{-x} \cdot (-2\cos 2x - 4\sin 2x) \\ &= -e^{-x} \cdot (3\sin 2x + 4\cos 2x). \end{aligned}$$

(a) Taylorjev polinom 1. reda okoli 0 je

$$(T_1 f)(h) = f(0) + f'(0)h = 0 + 2h = 2h.$$

(b) Po točki (a) je

$$f(0.01) \approx (T_1 f)(0.01) = 2 \cdot 0.01 = 0.02.$$

Ostanek je enak

$$R_1(0.01) = \tfrac{f''(\xi)}{2} \cdot 0.01^2$$

za neki $\xi \in (0, 0.01)$. Ocenimo

$$\begin{aligned} |f''(\xi)| &= |-e^{-\xi} \cdot (3\sin 2\xi + 4\cos 2\xi)| \\ &= |e^{-\xi}| \cdot |3\sin 2\xi + 4\cos 2\xi| \\ &\le |e^{-\xi}| \cdot (|3\sin 2\xi| + |4\cos 2\xi|) \\ &\le 1 \cdot (3 + 4) \\ &= 7, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da sta sinus in kosinus kvečjemu 1, ter da so vrednosti eksponentne funkcije na negativnem poltraku manjše od 1. Torej je

$$|R_1(0.01)| = \tfrac{|f''(\xi)|}{2} \cdot 0.01^2 \le \tfrac{7}{2} \cdot 0.0001 = 0.00035.$$

(c) Taylorjev polinom 2. reda okoli 0 pa je

$$(T_2 f)(h) = f(0) + f'(0)h + \tfrac{f''(0)}{2}h^2 = 0 + 2h + \tfrac{-4}{2}h^2 = 2h - 2h^2.$$

Z njim dobimo približek

$$f(0.01) \approx (T_2 f)(0.01) = 2 \cdot 0.01 - 2 \cdot 0.01^2 = 0.02 - 0.0002 = 0.0198.$$

1. izpit (23. 1. 2023)

1. naloga [20 točk]

Poiščite vsa kompleksnih števila z, ki zadoščajo enačbama $|z+1| = |z-1-2i|$ in $|z| = 5$.

Če pišemo $z = x + yi$, dobimo

$$\begin{aligned}
|z+1| &= |z-1-2i| \\
|x+yi+1| &= |x+yi-1-2i| \\
|(x+1)+yi| &= |(x-1)+(y-2)i| \\
(x+1)^2+y^2 &= (x-1)^2+(y-2)^2 \\
x^2+2x+1+y^2 &= x^2-2x+1+y^2-4y+4 \\
4x+4y &= 4 \\
x+y &= 1
\end{aligned}$$

To upoštevamo v $|z| = 5$ in dobimo

$$\begin{aligned}
|z| &= 5 \\
x^2+y^2 &= 25 \\
x^2+(1-x)^2 &= 25 \\
x^2+1-2x+x^2 &= 25 \\
2x^2-2x-24 &= 0 \\
x^2-x-12 &= 0 \\
(x-4)(x+3) &= 0
\end{aligned}$$

Torej imamo dve rešitvi:

- $x_1 = 4$, $y_1 = -3$ in $z_1 = 4 - 3i$,
- $x_2 = -3$, $y_2 = 4$ in $z_2 = -3 + 4i$.

2. naloga [25 točk]

(a) Pod kakšnim kotom se sekata ravnini $\Pi\colon x-y+z=6$ in $\Sigma\colon 2x-3y-5z=8$?

(b) Poiščite enačbo ravnine Ω, ki je pravokotna na ravnini Π in Σ, in vsebuje točko $A(-1,0,-2)$.

(c) Pokažite, da ravnine Π, Σ in $\Delta\colon -2x+5y+19z=-18$ nimajo skupne točke.

(a) Kot med ravninama je kot med njunima normalnima vektorjema. Ker je

$$\vec{n}_\Pi = (1,-1,1) \quad \text{in} \quad \vec{n}_\Sigma = (2,-3,-5),$$

je

$$\vec{n}_\Pi \cdot \vec{n}_\Sigma = 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + 1\cdot(-5) = 0.$$

Torej sta ravnini pravokotni.

(b) Normalni vektor ravnine Ω je pravokoten na normalna vektorja ravnin Π in Σ. Torej ga lahko dobimo z vektorskim produktom:

$$\vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = (8,7,-1).$$

Tako je enačba ravnine Ω

$$8x+7y-z = 8\cdot(-1)+0-(-2) = -6.$$

(c) Skupna točka bi ležala na vseh teh ravninah, torej bi njene koordinate rešile sistem

$$\begin{aligned} x-y+z &= 6 \\ 2x-3y-5z &= 8 \\ -2x+5y+19z &= -18 \end{aligned}$$

Zapišemo ga v obliki razširjene matrike in izvedemo Gaußov postopek eliminacije. Najprej dvakratnik prve vrstice odštejemo od druge in prištejemo tretji vrstici. Nato trikratnik druge vrstice prištejemo tretji:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \\ -2 & 5 & 19 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -4 \\ 0 & 3 & 21 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right].$$

Zadnja vrstica je ničelna, na desni pa nimamo 0. Sistem torej ni rešljiv.

3. naloga [20 točk]

Dana je vrsta $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+3)}{n(n+2)}$.

(a) Pokažite, da je konvergentna.

(b) Izračunajte njeno tretjo delno vsoto s_3 in ocenite napako $|s - s_3|$.

(c) S primerjavo s harmonično vrsto pokažite, da vrsta ni absolutno konvergentna.

(a) Gre za alternirajočo vrsto. Uporabiti smemo Leibnizov kriterij. Zaporedje $a_n = \frac{n+3}{n(n+2)}$ je padajoče, saj je

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{n+4}{(n+1)(n+3)} - \frac{(n+3)}{n(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)(n+4) - (n+1)(n+3)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n^3+6n^2+8n) - (n^3+7n^2+15n+9)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= -\frac{n^2+7n+9}{n(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

vselej negativno. Poleg tega je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n(n+2)} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

Vrsta s je posledično res konvergentna.

(b) Imamo

$$s_1 = \frac{4}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad s_3 = \frac{4}{1\cdot 3} - \frac{5}{2\cdot 4} + \frac{6}{3\cdot 5} = \frac{4}{3} - \frac{5}{8} + \frac{2}{5} = \frac{133}{120}.$$

Velja

$$|s - s_3| < a_4 = \frac{7}{4\cdot 6} = \frac{7}{24}.$$

(c) Ker je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

vrsta ne konvergira absolutno, saj harmonična vrsta divergira.

4. naloga [35 točk]

Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \arctan \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, sodost, lihost, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

(a) V ulomku imenovalec ne sme biti enak 0, torej $x \neq \pm 1$. Funkcija arkus tangens pa je definirana povsod. Torej je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Edina ničla arkus tangensa je 0. Torej mora biti $\frac{2x}{x^2-1} = 0$, tako da je edina ničla $x = 0$.

Iz lihosti funkcije arkus tangens sledi

$$f(-x) = \arctan \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \arctan \frac{-2x}{x^2 - 1} = -\arctan \frac{2x}{x^2 - 1} = -f(x),$$

torej je funkcija f liha.

Odvod

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + (\frac{2x}{x^2-1})^2} \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2 + (2x)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 - 2}{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2} = \frac{-2(x^2+1)}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{2}{x^2+1} \end{aligned}$$

je povsod na definicijskem območju negativen. Torej funkcija povsod pada in nima lokalnih ekstremov.

Drugi odvod je enak

$$f''(x) = (-2)(-1)(x^2+1)^{-2} \cdot 2x = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Imenovalec je povsod pozitiven, torej je za predznak odločilen števec. Tako je funkcija konkavna na $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ in konveksna na $(0, 1) \cup (1, \infty)$. V točki 0 drugi odvod spremeni predznak, tako da je v $P(0, 0)$ prevoj.

Še obnašanje na robu definicijskega območja:

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \arctan \frac{2}{x - \frac{1}{x}} = \arctan 0 = 0$$

in podobno

$$\lim_{x \to \infty} \arctan \frac{2x}{x^2 - 1} = 0.$$

V točkah -1 in 1 ima notranja funkcija pol, torej moramo poznati predznak neskončnosti, h kateri konvergira.

Ker je za $x < -1$ in $0 < x < 1$ predznak $\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$ negativen, velja

$$\lim_{x \nearrow -1} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty,$$

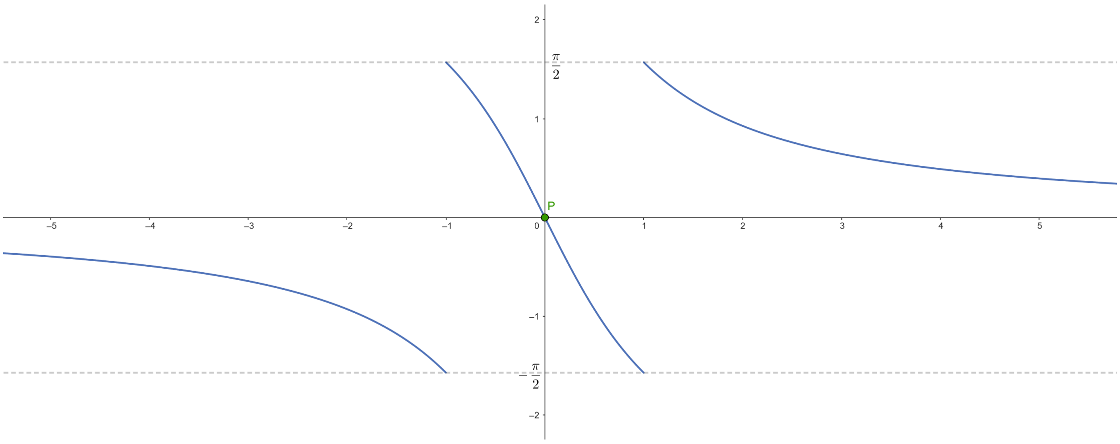
zato je

$$\lim_{x \nearrow -1} \arctan \frac{2x}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{2x}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Podobno iz pozitivnosti izraza $\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$ za $-1 < x < 0$ in $x > 1$ sledi

$$\lim_{x \searrow -1} \arctan \frac{2x}{x^2-1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow 1} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}.$$

S temi podatki skiciramo graf:



(b) Če uporabimo integracijo po delih, pri čemer so

$$u = \arctan \tfrac{2x}{x^2-1}, \quad dv = dx, \quad du = -\tfrac{2}{x^2+1}\, dx, \quad v = x,$$

dobimo

$$\int \arctan \tfrac{2x}{x^2-1}\, dx = x \arctan \tfrac{2x}{x^2-1} - \int x \cdot \left(-\tfrac{2}{x^2+1}\right) dx = x \arctan \tfrac{2x}{x^2-1} + \ln(x^2+1) + C,$$

saj je v ulomku $\frac{2x}{x^2+1}$ števec ravno odvod imenovalca.

2. izpit (6. 2. 2023)

1. naloga [20 točk]

Za matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) izračunajte determinante,

(b) določite ali so obrnljive,

(c) (v primeru, da so obrnljive) izračunajte njihove inverze.

(a) Determinanti matrik A in B sta

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 10$$

in

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 11 + 4 = 5.$$

Determinanto matrike C lahko npr. razvijemo po kaki vrstici ali stolpcu. Lahko pa uporabimo kako drugo lastnost. Če odštejemo tretjo vrstico od prve, se determinanta ne spremeni. Ker je potem zadnja vrstica dvakratnik prve, je determinanta enaka 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Matrika je obrnljiva natanko tedaj, ko je njena determinanta različna od 0. Obrnljivi sta torej A in B, C pa ne.

(c) Za inverz 2×2-matrik imamo formulo, ki nam da

$$A^{-1} = \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pri matriki B najprej odštejemo prvo vrstico od tretje, njen štirikratnik pa od druge. Nato delimo drugo vrstico z -5 in odštejemo tretjo vrstico od prve:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Potem drugo vrstico zamenjamo z zadnjo in jo odštejemo od prve. Na koncu prvo vrstico odštejemo od druge:

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{1}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}\right].$$

Torej je

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{11}{5} & -\frac{1}{5} & 2 \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

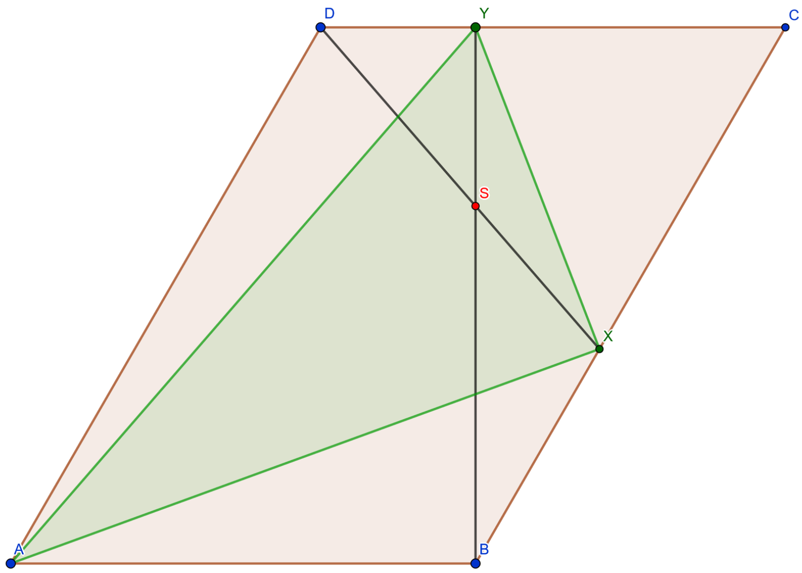
2. naloga [25 točk]

V paralelogramu $ABCD$ je dolžina stranice AB enaka 3, dolžina stranice AD enaka 4, kot med njima pa je $\frac{\pi}{3}$. Točka X deli stranico BC v razmerju $2:3$, točka Y pa stranico CD v razmerju $2:1$. Točka S naj bo sečišče daljic DX in BY.

(a) Izračunajte oddaljenost točke X od točke A ter kot med AX in AB.

(b) Izračunajte ploščino trikotnika AXY.

(c) Izrazite vektor $\overrightarrow{BS}$ z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Ali leži S na diagonali AC?



(a) Oddaljenost točke X od točke A je enaka dolžini vektorja

$$\overrightarrow{AX} = \vec{a} + \tfrac{2}{5}\vec{b}.$$

Iz podatkov $|\vec{a}| = 3$ in $|\vec{b}| = 4$ ter iz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos\tfrac{\pi}{3} = 6$$

sledi

$$|\overrightarrow{AX}|^2 = (\vec{a} + \tfrac{2}{5}\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \tfrac{2}{5}\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a} \cdot \tfrac{2}{5}\vec{b} + \tfrac{4}{25}|\vec{b}|^2 = 9 + 2 \cdot \tfrac{2}{5} \cdot 6 + \tfrac{4}{25} \cdot 16 = \tfrac{409}{25}.$$

Iskana oddaljenost je $\frac{\sqrt{409}}{5}$.

Kot med daljicama AX in AB dobimo iz

$$\cos\angle(\overrightarrow{AX}, \vec{a}) = \frac{\overrightarrow{AX} \cdot \vec{a}}{|\overrightarrow{AX}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{(\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}) \cdot \vec{a}}{\frac{\sqrt{409}}{5} \cdot 3} = \frac{|\vec{a}|^2 + \frac{2}{5}\vec{b} \cdot \vec{a}}{\frac{\sqrt{409}}{5} \cdot 3} = \frac{3^2 + \frac{2}{5} \cdot 6}{\frac{\sqrt{409}}{5} \cdot 3} = \frac{19}{\sqrt{409}}.$$

Torej je $\angle(\overrightarrow{AX}, \vec{a}) = \arccos \frac{19}{\sqrt{409}}$.

(b) Ploščino trikotnika moremo izračunati po formuli

$$p_{AXY} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AX} \times \overrightarrow{AY}| = \frac{1}{2}|(\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}) \times (\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b})| = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b} + \frac{2}{15}\vec{b} \times \vec{a}| = \frac{13}{30}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Iz

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$$

sledi

$$p_{AXY} = \frac{13}{5}\sqrt{3}.$$

(c) Ker točka S leži tako na daljici BY kot na daljici DX, lahko zapišemo vektor $\overrightarrow{BS}$ na dva načina:

$$\overrightarrow{BS} = \lambda\overrightarrow{BY} = \lambda(\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}) \quad \text{in} \quad \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BX} + \mu\overrightarrow{XD} = \frac{2}{5}\vec{b} + \mu(\frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a}).$$

Torej

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{b} - \tfrac{2}{3}\vec{a}) &= \tfrac{2}{5}\vec{b} + \mu(\tfrac{3}{5}\vec{b} - \vec{a}) \\ -\tfrac{2}{3}\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} &= -\mu\vec{a} + (\tfrac{2}{5} + \tfrac{3}{5}\mu)\vec{b} \end{aligned}$$

Sledi $-\frac{2}{3}\lambda = -\mu$ in $\lambda = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mu$. Če vstavimo $\mu = \frac{2}{3}\lambda$ v drugo enačbo, dobimo

$$\lambda = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}\lambda = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

in $\mu = \frac{4}{9}$. Torej je

$$\overrightarrow{BS} = \lambda(\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}) = -\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Potem je

$$\overrightarrow{AS} = \vec{a} + \overrightarrow{BS} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Ker vektor $\overrightarrow{AS}$ ni večkratnik vektorja $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, točka S ne leži na diagonali AC.

3. naloga [20 točk]

Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano v rekurzivni obliki

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}.$$

(a) Pokažite, da vsi členi zaporedja ležijo v intervalu $[2, 3]$.

(b) Ali je zaporedje monotono naraščajoče/padajoče?

(c) Utemeljite njegovo konvergenco in izračunajte njegovo limito.

(a) To pokažemo s popolno indukcijo:

- Za $n = 1$ po definiciji velja $a_1 = 2 \in [2, 3]$.
- Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ naj velja $a_n \in [2, 3]$. Potem

  $$2 \le a_n \le 3 \ \Rightarrow\ 8 \le 4a_n \le 12 \ \Rightarrow\ 5 \le 4a_n - 3 \le 9 \ \Rightarrow\ \sqrt{5} \le \sqrt{4a_n - 3} \le 3.$$

  Iz $\sqrt{5} \ge 2$ sledi $a_{n+1} \in [2, 3]$.

(b) Imamo

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{4a_n - 3} - a_n = \frac{4a_n - 3 - a_n^2}{\sqrt{4a_n - 3} + a_n} = -\frac{(a_n - 3)(a_n - 1)}{\sqrt{4a_n - 3} + a_n} \ge 0,$$

kjer smo uporabili točko (a). Zaporedje je monotono naraščajoče.

(c) Zaporedje konvergira, ker je monotono in omejeno. Označimo njegovo limito z

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

V formuli $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ pošljemo $n \to \infty$ in dobimo

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{4a - 3} \\ a^2 &= 4a - 3 \\ a^2 - 4a + 3 &= 0 \\ (a - 3)(a - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Ker so vsi členi vsaj 2, je torej $a = 3$.

4. naloga [35 točk]

Dan je funkcijski predpis
$$f(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}.$$

(a) Določite definicijsko območje, ničle, ekstreme, prevoje, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije. Raziščite še obnašanje na robu definicijskega območja in narišite graf funkcije.

(b) Izračunajte $I = \int\limits_0^4 f(x)\,dx$.

(a) Kvadratni koren je definiran za nenegativna števila, drugih omejitev pa ni. Torej je $D_f = [0, \infty)$.

Eksponentna funkcija nima ničel, kvadratni koren pa edino pri 0, tako da je edina ničla $x = 0$.

Odvod je
$$f'(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt{x}}(-\tfrac{1}{2\sqrt{x}}) = \tfrac{1}{2}e^{-\sqrt{x}}(\tfrac{1}{\sqrt{x}} - 1).$$

Faktor pred oklepajem je vselej pozitiven. Edina ničla odvoda je tako pri $x = 1$. Imamo torej stacionarno točko $T(1, e^{-1})$.

- Če je $0 < x < 1$, je $0 < \sqrt{x} < 1$ in zato $\frac{1}{\sqrt{x}} > 1$. Posledično funkcija na $(0, 1)$ narašča.
- Če je $x > 1$, je odvod negativen in funkcija pada.

Točka T je torej lokalni maksimum.

Drugi odvod je enak
$$f''(x) = \tfrac{1}{2}\Big(e^{-\sqrt{x}}(-\tfrac{1}{2\sqrt{x}}) \cdot (\tfrac{1}{\sqrt{x}} - 1) + e^{-\sqrt{x}}(-\tfrac{1}{2\sqrt{x}^3})\Big) = \tfrac{x-\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x}^3}e^{-\sqrt{x}}.$$

O predznaku odloča izraz $x - \sqrt{x} - 1$, saj je preostanek povsod pozitiven. Če označimo $t = \sqrt{x}$, dobimo kvadratno funkcijo $t^2 - t - 1$ z ničlama $t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Ker kvadratni koren ne more biti negativen, je edina ničla drugega odvoda pri
$$x = \big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^2 = \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

- Če je $0 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, je $f''(x) < 0$. Torej je f konkavna na $(0, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.
- Na intervalu $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ je funkcija f konveksna.

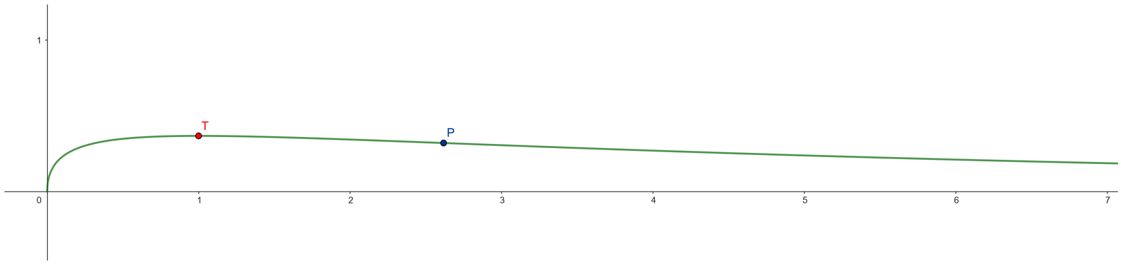
V točki $P(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}})$ ima funkcija torej prevoj.

Še obnašanje na robu definicijskega območja: V krajišču pri 0 je funkcija zvezna, tako da je
$$\lim_{x\searrow 0} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} = \sqrt{0}\; e^0 = 0.$$

Pri ∞ pa uporabimo l'Hospitalovo pravilo in dobimo

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} = 0.$$

S temi podatki skiciramo graf:



(b) Najprej v integral

$$I = \int_0^4 \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

uvedemo novo spremenljivko

$$t = \sqrt{x}, \quad dt = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx, \quad dx = 2t\,dt$$

in dobimo

$$I = \int_0^2 te^{-t}\cdot 2t\,dt = \int_0^2 2t^2e^{-t}\,dt.$$

Sedaj dvakrat izvedemo per partes. Najprej dobimo

$$I = \left[2t^2\cdot(-e^{-t})\right]_0^2 - \int_0^2 4t\cdot(-e^{-t})\,dt = -8e^{-2} + \int_0^2 4te^{-t}\,dt$$

in nato še

$$\begin{aligned} I &= -8e^{-2} + \left[4t\cdot(-e^{-t})\right]_0^2 - \int_0^2 4\cdot(-e^{-t})\,dt = -8e^{-2} - 8e^{-2} + \int_0^2 4e^{-t}\,dt = \\ &= -16e^{-2} + \left[4\cdot(-e^{-t})\right]_0^2 = -16e^{-2} - 4e^{-2} - (-4) = 4 - 20e^{-2}. \end{aligned}$$

3. izpit (29. 5. 2023)

1. naloga [20 točk]

Dani sta premici

$$p : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{in} \quad q : x - 3 = \frac{1 - y}{3} = \frac{z}{2}.$$

(a) Poiščite njuno presečišče in kot med njima.

(b) Določite enačbo ravnine, na kateri ležita premici p in q.

(c) Izračunajte razdaljo točke $T(4, 5, -2)$ od premice p.

(a) Še premico q zapišemo v parametrični obliki:

$$q : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - 3s \\ z = 2s \end{cases}$$

Presečišče leži na obeh premicah, torej zanj obstajata taka parametra t in s, da je

$$\begin{aligned} 2 - t &= x = 3 + s \\ 3 + 2t &= y = 1 - 3s \\ -1 - t &= z = 2s \end{aligned}$$

Če odštejemo prvo enačbo od tretje, dobimo

$$-3 = -3 + s, \quad \text{oziroma} \quad s = 0.$$

Vstavimo $s = 0$ v zadnjo enačbo in dobimo $t = -1$. Preveriti moramo, da velja tudi druga enačba, ki je pri izračunu nismo upoštevali, mora pa tudi biti izpolnjena. Dejansko velja, saj sta

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1 \quad \text{in} \quad 1 - 3 \cdot 0 = 1.$$

Torej je presečišče $P(3, 1, 0)$.

Kot med premicama je kot med njunima smernima vektorja $\vec{s}_p = (-1, 2, -1)$ in $\vec{s}_q = (1, -3, 2)$. Izračunamo ga po formuli

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q}{|\vec{s}_p| \cdot |\vec{s}_q|} = \frac{(-1, 2, -1) \cdot (1, -3, 2)}{|(-1, 2, -1)| \cdot |(1, -3, 2)|} =$$

$$= \frac{-1 - 6 - 2}{\sqrt{1 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{-9}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}.$$

Torej je $\varphi = \arccos \frac{-9}{2\sqrt{21}}$.

(b) Ravnina, ki vsebuje obe premici, poteka skozi P, njena normala pa je pravokotna na smerna vektorja premic p in q, torej jo dobimo z vektorskim produktom

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (4-3)\vec{\imath} + (-2+1)(-\vec{\jmath}) + (3-2)\vec{k} = (1,1,1).$$

Enačba iskane ravnine je torej

$$1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0, \quad \text{oziroma} \quad x + y + z = 4.$$

(c) Razdaljo točke T do premice p dobimo po formuli

$$d(T,p) = \frac{|\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}_p|}{|\vec{s}_p|},$$

pri čemer je T_0 poljubna točka na premici p. Če vzamemo $T_0(2,3,-1)$, dobimo $\overrightarrow{T_0T} = (4,5,-2) - (2,3,-1) = (2,2,-1)$. Potem je

$$\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s}_p = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2+2)\vec{\imath} + (-2-1)(-\vec{\jmath}) + (4+2)\vec{k} = (0,3,6).$$

Tako je

$$d(T,p) = \frac{|(0,3,6)|}{|(-1,2,-1)|} = \frac{\sqrt{0+9+36}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

2. naloga [15 točk]

Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{2n^2+3}{4n^2+1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

(a) Pokažite, da je monotono in omejeno.

(b) Izračunajte njegovo limito.

(c) Koliko členov zaporedja se od limite razlikuje za več kot $\frac{1}{100}$?

(a) Monotonost preverimo z razliko zaporednih členov:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)^2+3}{4(n+1)^2+1} - \frac{2n^2+3}{4n^2+1} \\
&= \frac{(2n^2+4n+5)(4n^2+1) - (2n^2+3)(4n^2+8n+5)}{(4(n+1)^2+1)(4n^2+1)} \\
&= \frac{(8n^4+16n^3+22n^2+4n+5) - (8n^4+16n^3+22n^2+24n+15)}{(4(n+1)^2+1)(4n^2+1)} \\
&= \frac{-20n-10}{(4(n+1)^2+1)(4n^2+1)}.
\end{aligned}$$

Ker je ta izraz za vsak $n \in \mathbb{N}$ negativen, je zaporedje strogo padajoče. Potem je zagotovo navzgor omejeno s prvim členom $a_1 = 1$. Za spodnjo mejo pa lahko vzamemo kar 0, saj je očitno vsak a_n pozitiven.

(b) Limita je

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{4n^2+1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0}{4+0} = \frac{1}{2}.$$

(c) Členi, ki se od limite razlikujejo za več kot $\frac{1}{100}$, rešijo neenačbo

$$|a_n - a| > \frac{1}{100}.$$

Ker je zaporedje padajoče, lahko absolutno vrednost na levi strani izpustimo. Dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{2n^2+3}{4n^2+1} - \frac{1}{2} &> \frac{1}{100} \\
\frac{(4n^2+6)-(4n^2+1)}{2(4n^2+1)} &> \frac{1}{100} \\
\frac{5}{8n^2+2} &> \frac{1}{100} \\
500 &> 8n^2+2 \\
\frac{498}{8} &> n^2
\end{aligned}$$

Iščemo torej naravna števila, za katere je $n^2 < 62.25$. To pa je prvih sedem.

3. naloga [40 točk]

Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}.$$

(a) Določite njeno naravno definicijsko območje in obnašanje f na njegovem robu. Določite še ničle, ekstreme in prevoje funkcije f ter njene intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti. Skicirajte njen graf.

(b) Izračunajte $\int_0^1 (f(x))^2 \, dx$.

(a) Kvadratni koren je definiran za nenegativna števila, drugih omejitev pa ni. Torej je $D_f = [0, \infty)$.

Eksponentna funkcija nima ničel, kvadratni koren pa edino pri 0, tako da je edina ničla $x = 0$.

Odvod je

$$f'(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{2}}(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}}(1 - x).$$

Faktor pred oklepajem je vselej pozitiven. Edina ničla odvoda je tako pri $x = 1$. Imamo torej stacionarno točko $T(1, e^{-\frac{1}{2}})$.

- Če je $0 < x < 1$, je $1 - x > 0$ in zato $f'(x) > 0$. Posledično funkcija na $(0, 1)$ narašča.
- Če je $x > 1$, je odvod negativen in funkcija pada.

Točka T je torej lokalni maksimum.

Za izračun drugega odvod najprej drugače zapišemo prvega:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}).$$

Drugi odvod je tako enak

$$f''(x) = \tfrac{1}{2}\Big(e^{-\frac{x}{2}}(-\tfrac{1}{2}) \cdot (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})\Big) = \tfrac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{3}{2}}(x^2 - 2x - 1).$$

O predznaku odloča izraz v oklepaju $x^2 - 2x - 1$, saj je preostanek povsod pozitiven. Ta kvadratna funkcija ima ničli $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Ker je vodilni koeficient pozitiven velja:

- Če je $0 < x < 1 + \sqrt{2}$, je $f''(x) < 0$. Torej je f konkavna na $(0, 1 + \sqrt{2})$.
- Na intervalu $(1 + \sqrt{2}, \infty)$ je funkcija f konveksna.

V točki $P(1 + \sqrt{2}, \sqrt{1 + \sqrt{2}}\ e^{-\frac{1+\sqrt{2}}{2}})$ ima funkcija prevoj, saj drugi odvod tam spremeni predznak.

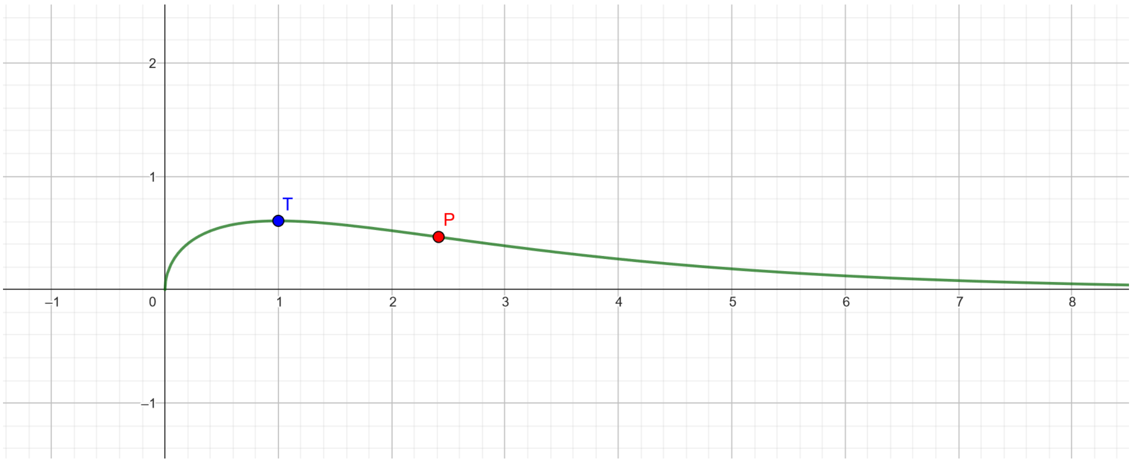
Še obnašanje na robu definicijskega območja: V krajišču pri 0 je funkcija zvezna, tako da je

$$\lim_{x \searrow 0} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}} = \sqrt{0}\ e^0 = 0.$$

Pri ∞ pa uporabimo l'Hospitalovo pravilo in dobimo

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

S temi podatki skiciramo graf:



(b) Izračunati moramo integral

$$I = \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \int_0^1 xe^{-x}\,dx.$$

Integriramo per partes, pri čemer vzamemo $u = x$ in $dv = e^{-x}\ dx$, in izračunamo $du = dx$ in $v = -e^{-x}$, kar nam da

$$I = \left[x\cdot(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})\ dx = (-e^{-1} - 0) + \int_0^1 e^{-x}\ dx =$$
$$= -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + (-e^{-1} + 1) = 1 - 2e^{-1}.$$

4. naloga [25 točk]

Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ je dana matrika $A_a = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 4 \\ a & -1 & -a \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Za katere vrednosti parametra a je matrika A_a obrnljiva?

(b) Izračunajte lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A_0 (torej za $a = 0$). Ali matriko A_0 lahko diagonaliziramo? Če ja, poiščite diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P, da velja $D = P^{-1}A_0P$.

(a) Matrika je obrnljiva natanko tedaj, ko je njena determinanta različna od 0. Ker je

$$\begin{aligned}
\det A_a &= \begin{vmatrix} -5 & -4 & 4 \\ a & -1 & -a \\ -6 & -6 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -a \\ -6 & 5 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} a & -a \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} a & -1 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} \\
&= -5 \cdot (-5 - 6a) + 4 \cdot (5a - 6a) + 4 \cdot (-6a - 6) \\
&= 25 + 30a - 4a - 24a - 24 \\
&= 2a + 1,
\end{aligned}$$

je torej A_a obrnljiva za vse $a \neq -\frac{1}{2}$.

(b) Lastne vrednosti matrike A_0 so ničle njenega karakterističnega polinoma, torej rešitve enačbe

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A_0 - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -4 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{(razvijemo po drugi vrstici)} \\
&= (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda) \cdot ((-5-\lambda)(5-\lambda) + 24) \\
&= (-1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) \\
&= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-1).
\end{aligned}$$

Torej je -1 dvojna ničla karakterističnega polinoma, 1 pa enojna.

Določimo sedaj pripadajoče lastne vektorje.

- $\lambda = -1$: Iščemo rešitve enačbe $(A - (-1)I)x = 0$. Gaußova eliminacija je zelo preprosta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Imamo torej dvorazsežen prostor rešitev. Zadnji dve koordinati sta poljubni, npr. $x_3 = \alpha$ in $x_2 = \beta$. Potem je $x_1 = \alpha - \beta$. Vsi lastni vektorji so

$$x = \begin{bmatrix} \alpha-\beta \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha\beta \neq 0.$$

- $\lambda = 1$: Tukaj določamo vektorje z $(A - 1I)x = 0$. Začnemo z odštevanjem prve vrstice od tretje. Potem še drugo odštejemo od tretje.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -6 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -6 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -6 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Tako je $x_3 = \alpha$ poljuben, $x_2 = 0$, iz prve enačbe pa dobimo še $x_1 = \frac{2}{3}x_3$. Pripadajoči lastni vektorji so $\alpha \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Za vsako ničlo karakterističnega polinoma imamo toliko razsežen prostor lastnih vektorjev, kot je stopnja ničle. Zato je se da matriko diagonalizirati. V D po diagonali zapišemo lastne vrednosti (glede na njihovo večkratnost), na primer

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem moramo v prvih dveh stolpcih matrike P imeti dva linearno neodvisna lastna vektorja za lastno vrednost -1, v zadnjem pa neki lastni vektor za lastno vrednost 1. Ena možnost je torej

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. izpit (25. 8. 2023)

1. naloga [20 točk]

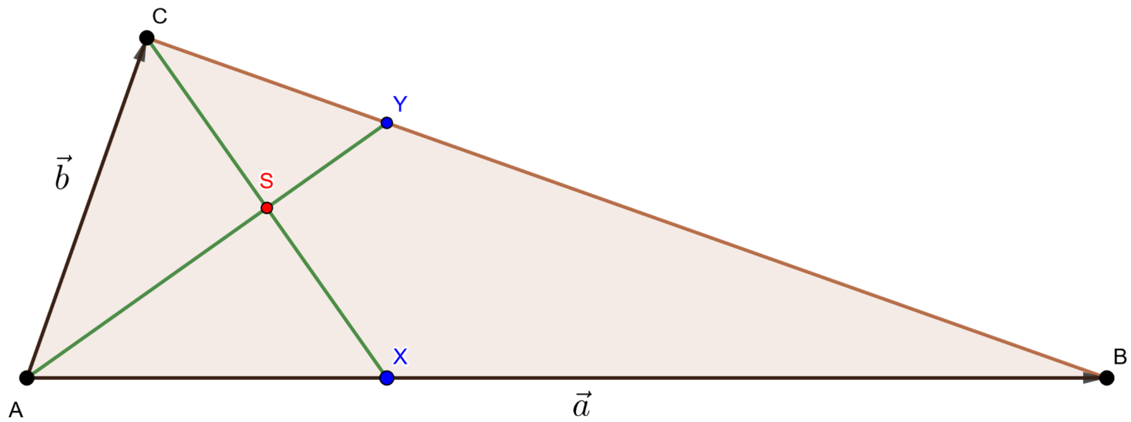
Dane so točke $A(1,1,0)$, $B(7,-2,3)$ in $C(3,2,-1)$.

(a) Izračunajte enega od kotov v trikotniku ABC po Vaši izbiri in ploščino trikotnika ABC.

(b) Zapišite enačbo ravnine, kjer leži trikotnik ABC.

(c) Naj točka X deli daljico AB v razmerju $1:2$, točka Y pa daljico BC v razmerju $3:1$. Določite koordinate točk X in Y.

(d) Naj bo S presečišče daljic AY in CX. Izrazite vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in določite koordinate točke S.



(a) Najprej zapišemo po koordinatah vektorja

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (7,-2,3) - (1,1,0) = (6,-3,3)$$

in

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (3,2,-1) - (1,1,0) = (2,1,-1).$$

Za kot α pri oglišču A potem velja

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(6,-3,3)\cdot(2,1,-1)}{|(6,-3,3)|\cdot|(2,1,-1)|} =$$
$$= \frac{12-3-3}{\sqrt{36+9+9}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{3}.$$

Torej je $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. (Podobno bi dobili kota pri ogliščih B in C.)

Za ploščino velja

$$p_{ABC} = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Iz

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3-3)\vec{\imath} + (-6-6)(-\vec{\jmath}) + (6+6)\vec{k} = (0,12,12)$$

sledi

$$p_{ABC} = \tfrac{1}{2} \cdot |(0,12,12)| = \tfrac{1}{2} \cdot |12(0,1,1)| = \tfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{0+1+1} = 6\sqrt{2}.$$

(b) Ravnina, v kateri leži trikotnik ABC, je pravokotna na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Njun vektorski produkt smo izračunali že v (a). Za normalni vektor lahko vzamemo $\vec{n} = (0,1,1)$. Ker na ravnini leži točka A (pa tudi točki B in C), je njena enačba

$$0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0, \quad \text{oziroma} \quad y + z = 1.$$

(c) Krajevni vektor točke X je enak

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1,1,0) + \tfrac{1}{3}(6,-3,3) = (3,0,1),$$

Ker je

$$\overrightarrow{BC} = (3,2,-1) - (7,-2,3) = (-4,4,-4),$$

je krajevni vektor Y enak

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{3}{4}\overrightarrow{BC} = (1,1,0) + (6,-3,3) + \tfrac{3}{4}(-4,4,-4) = (4,1,0).$$

(d) Točka S leži na daljici AY, tako da obstaja taka $\lambda > 0$, da je

$$\overrightarrow{AS} = \lambda\,\overrightarrow{AY} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BY}) = \lambda(\vec{a} + \tfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}) = \lambda(\vec{a} + \tfrac{3}{4}(-\vec{a} + \vec{b})) = \lambda(\tfrac{1}{4}\vec{a} + \tfrac{3}{4}\vec{b}).$$

Po drugi strani pa leži S tudi na daljici CX, tako da za neki $\mu > 0$ velja

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \mu\,\overrightarrow{CX} = \vec{b} + \mu(-\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{a}) = \tfrac{1}{3}\mu\vec{a} + (1-\mu)\vec{b}.$$

Iz

$$\lambda(\tfrac{1}{4}\vec{a} + \tfrac{3}{4}\vec{b}) = \overrightarrow{AS} = \tfrac{1}{3}\mu\vec{a} + (1-\mu)\vec{b}$$

sledi

$$\tfrac{1}{4}\lambda = \tfrac{1}{3}\mu \quad \text{in} \quad \tfrac{3}{4}\lambda = 1 - \mu.$$

Iz prve enačbe sledi $\mu = \frac{3}{4}\lambda$. Če to vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$\tfrac{3}{4}\lambda = 1 - \tfrac{3}{4}\lambda \implies \tfrac{6}{4}\lambda = 1 \implies \lambda = \tfrac{2}{3}.$$

Potem je

$$\mu = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

Torej je

$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{4}\vec{a} + \tfrac{3}{4}\vec{b}) = \tfrac{1}{6}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}.$$

Še krajevni vektor točke S:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = (1,1,0) + \tfrac{1}{6}(6,-3,3) + \tfrac{1}{2}(2,1,-1) = (3,1,0).$$

2. naloga [20 točk]

Dani sta kompleksni števili $z_1 = 2 + 2i$ in $z_2 = -8 + 8i$.

(a) Določite množico vseh kompleksnih števil z, za katere velja

$$\mathrm{Re}(z \cdot z_1^2) = \mathrm{Im}(\overline{z} \cdot z_2),$$

in jo skicirajte v kompleksni ravnini.

(b) Izračunajte vsa kompleksna števila w, ki rešijo enačbo

$$w^3 = \frac{2 \cdot z_2}{z_1}.$$

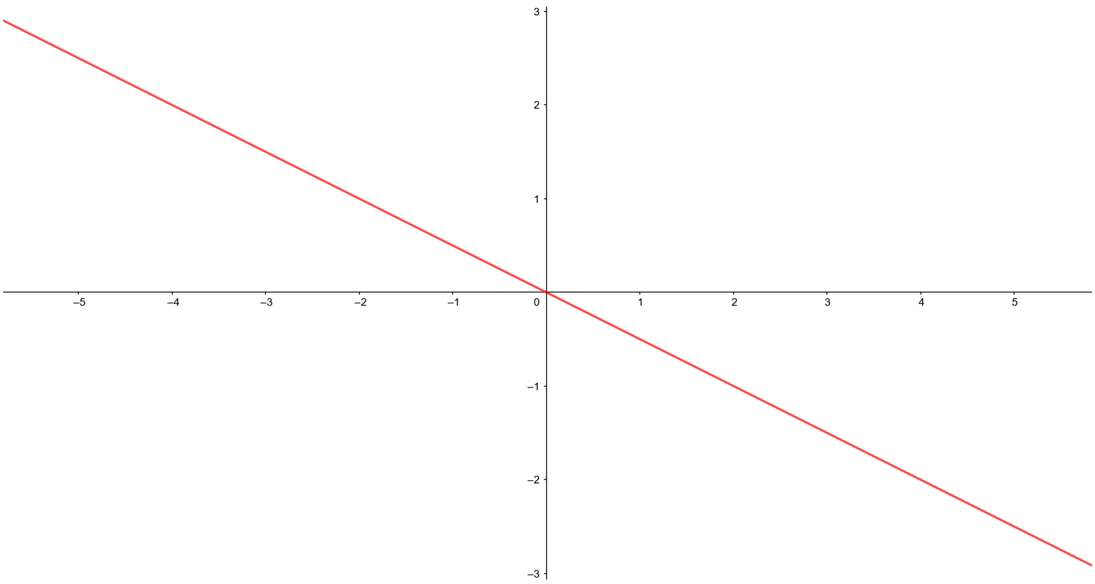
(a) Najprej izračunamo

$$z_1^2 = (2 + 2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i.$$

Če pišemo $z = x + yi$, dobimo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z \cdot z_1^2) &= \mathrm{Im}(\overline{z} \cdot z_2) \\
\mathrm{Re}((x + yi) \cdot 8i) &= \mathrm{Im}((x - yi) \cdot (-8 + 8i)) \\
\mathrm{Re}(-8y + 8xi) &= \mathrm{Im}((-8x + 8y) + (8x + 8y)i) \\
-8y &= 8x + 8y \\
y &= -\tfrac{1}{2}x
\end{aligned}$$

Zgornja enačba torej določa premico v kompleksni ravnini z enačbo $y = -\frac{1}{2}x$.



(b) Količnik je enak

$$\frac{2 \cdot z_2}{z_1} = \frac{2 \cdot (-8 + 8i)}{2 + 2i} = \frac{2 \cdot 8(-1 + i)}{2(1 + i)} = 8 \cdot \frac{-1 + i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} =$$

$$= 8 \cdot \frac{-1 + i + i + 1}{1^2 + 1^2} = 8 \cdot \frac{2i}{2} = 8i.$$

Torej iščemo rešitve enačbe

$$w^3 = 8i.$$

Polarni zapis desne strani je očitno

$$8i = 8(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}).$$

Po formuli so rešitve tri, in sicer za $k = 0, 1, 2$

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) = 2\left(\cos(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{2k\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{2k\pi}{3})\right).$$

Natančneje

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,\\
w_1 &= 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,\\
w_2 &= 2\left(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}\right) = -2i.
\end{aligned}$$

3. naloga [40 točk]

Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

(a) Določite njeno naravno definicijsko območje in obnašanje f na njegovem robu. Določite še ničle, ekstreme in prevoje funkcije f ter njene intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti. Skicirajte njen graf.

(b) Izračunajte $\int\limits_2^3 f(x)\,dx$.

(a) Funkcija f je racionalna funkcija, tako da ležita zunaj definicijskega območja le njuna pola ± 1. Torej je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Očitno je edina ničla v $x = 0$.

Obnašanje pri $\pm\infty$ nam podaja asimptota, ki jo dobimo z deljenjem:

$$x^3 : (x^2 - 1) = x + \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Torej

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Dejansko lahko obnašanje opišemo bolj natančno: Graf se približuje premici $y = x$ in v $x = 0$, ki je edina ničla ostanka, edinokrat to premico seka.

Oba pola sta prve (torej lihe) stopnje. Iz limit pri $\pm\infty$ in, ker je edina ničla v 0, sledi

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow -1} f(x) = \infty$$

ter

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty.$$

Odvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Ničle odvoda so ničle števca $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$. Imamo torej tri stacionarne točke: $-\sqrt{3}$, 0 in $\sqrt{3}$. Odvod moremo zapisati v obliki $f'(x) = \frac{x^2}{(x^2-1)^2} \cdot (x^2 - 3)$. Njegov predznak torej odloča izraz $x^2 - 3$:

- Če je $x^2 > 3$, je $f'(x) > 0$. Torej funkcija na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ narašča.
- Če je $-3 < x < 3$, je odvod negativen (razen pri 0) in funkcija pada.

Z intervali monotonosti moremo klasificirati stacionarne točke:

- $S_1(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ je lokalni maksimum,

- $S_2(0,0)$ ni lokalni ekstrem,
- $S_3(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ je lokalni minimum.

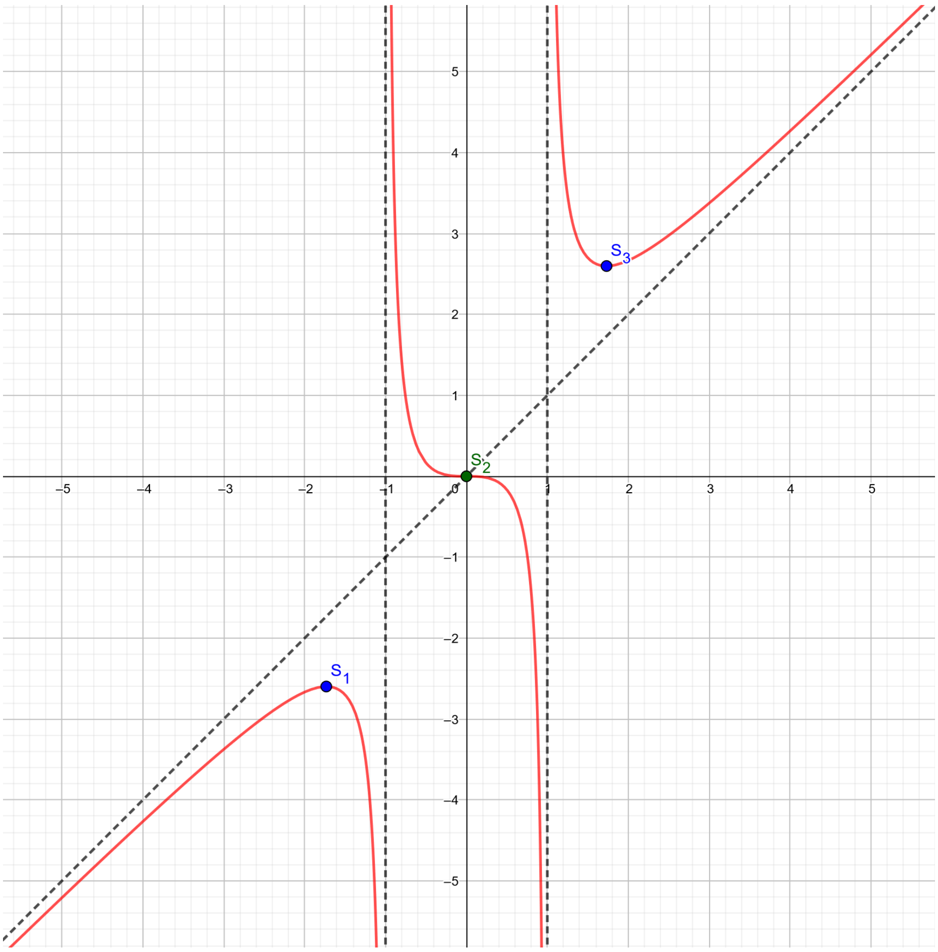
Drugi odvod je

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)-(x^4-3x^2)\cdot 4x}{(x^2-1)^3} \\
&= \frac{(4x^5-6x^3-4x^3+6x)-(4x^5-12x^3)}{(x^2-1)^3} \\
&= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}.
\end{aligned}$$

Edina ničla števca $2x^3+6x=2x(x^2+3)$ je pri $x=0$. Ker je $x^2+3>0$, f'' zamenja predznak v -1, 0 in 1.

- Če je $x<-1$, je števec negativen in imenovalec pa pozitiven. Če je pa $0<x<1$, je pa ravno obratno. Torej je f na $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ konkavna.
- Če je $-1<x<0$, sta števec in imenovalec oba negativna, če $x>1$, pa oba pozitivna. Na $(-1,0)\cup(1,\infty)$ je funkcija konveksna.

V S_2 ima funkcija torej prevoj. S temi podatki skiciramo graf:



(b) Pri izračunu integrala si moremo pomagati tudi s formulo za integral ulomka, čigar števec je odvod imenovalca:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)\,dx = \int_2^3 x\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-1|\right]_2^3 = \frac{9}{2} - 2 + \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 3) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.$$

4. naloga [20 točk]

Dan je sistem

$$\begin{aligned} x - 2y + az &= 1 \\ ax + y - az &= -3 \\ 2ax + y + 2z &= 8a \end{aligned}$$

(a) Obravnavajte sistem za $a = 0$ in $a = -1$.

(b) Določite, pri katerih vrednosti a sistem nima rešitve.

Sistem zapišemo v obliki razširjene matrike:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & a & 1 \\ a & 1 & -a & -3 \\ 2a & 1 & 2 & 8a \end{array}\right].$$

(a) Če je $a = 0$, imamo

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]. \quad \text{Torej je} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Za $a = -1$ najprej prištejemo prvo vrstico drugi, njen dvakratnik pa tretji. Nato odštejemo trikratnik druge vrstice od tretje:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

V zadnji vrstici imamo tudi na desni 0. Torej je sistem rešljiv. Imamo pa dve neničelni vrstici in 3 spremenljivke, tako da nastopa v rešitvi en prost parameter. Splošna rešitev

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + \alpha \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Sistem ni rešljiv natanko tedaj, ko imamo po izvedbi Gaußove metode eliminacije v kaki vrstici na levi same ničle, na desni pa neničelno število.

Naprej pomnožimo prvo vrstico z a oz. $2a$ in jo odštejemo od druge oz. tretje vrstice:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & a & 1 \\ a & 1 & -a & -3 \\ 2a & 1 & 2 & 8a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{lcr|r} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 1+2a & -a-a^2 & -3-a \\ 0 & 1+4a & 2-2a^2 & 6a \end{array}\right].$$

Za analizo je enostavneje, če na diagonali ne nastopa a. Zato najprej tretjo vrstico pomnožimo z $\frac{1}{2}$ in jo odštejemo od druge. Nato drugo pomnožimo z $2(1 + 4a)$ in jo odštejemo od tretje:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{lcr|r} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1-a & -3-4a \\ 0 & 1+4a & 2-2a^2 & 6a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{lcr|r} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1-a & -3-4a \\ 0 & 0 & X_a & Y_a \end{array}\right],$$

pri čemer sta

$$X_a = 2 - 2a^2 - 2(1+4a)(-1-a) = 2(3a^2+5a+2)$$

in

$$Y_a = 6a - 2(1+4a)(-3-4a) = 2(16a^2+19a+3).$$

Sistem torej ni rešljiv, če je $X_a = 0$ in $Y_a \neq 0$. Iz

$$3a^2+5a+2 = 0 \implies a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 1}{6}$$

sledi, da je $X_a = 0$, če je $a \in \{-1, -\frac{2}{3}\}$. V točki (a) smo ugotovili, da sistem za $a = -1$ je rešljiv. Ker je

$$Y_{-\frac{2}{3}} = 2(16 \cdot (-\tfrac{2}{3})^2 + 19 \cdot (-\tfrac{2}{3}) + 3) = -\tfrac{46}{9} \neq 0,$$

za $a = -\frac{2}{3}$ sistem ni rešljiv.

Zbirka rešenih kolokvijev in izpitov iz Matematike I za študente univerzitetnih študijev Geodezije in geoinformatike, Gradbeništva ter Vodarstva in okoljskega inženirstva

Avtorji: Martin Jesenko, Mojca Premuš, Marjeta Škapin Rugelj

Založila: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdala: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

Ljubljana, 2023
Prva e-izdaja
Publikacija je brezplačna.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na https://ebooks.uni-lj.si
DOI: 10.15292/9789612973087

Katložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID 191232003
ISBN 978-961-297-308-7 (PDF)