Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

Zbirka rešenih kolokvijev in izpitov iz Matematike II za študente univerzitetnih študijev Geodezije in geoinformatike, Gradbeništva ter Vodarstva in okoljskega inženirstva

Martin Jesenko, Mojca Premuš, Marjeta Škapin Rugelj

Ljubljana, 2023

Kazalo

Predgovor

V tej zbirki smo zbrali rešene kolokvije in izpite iz akademskih let 2021/22 in 2022/23 iz predmeta Matematika II, ki ga poslušajo študentje Geodezije in geoinformatike (UN), Gradbeništva (UN) ter Vodarstva in okoljskega inženirstva (UN) na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Za razliko od Matematike I, ki je v veliki meri ponovitev srednješolske matematike, gre pri tem predmetu za povsem novo snov. Upamo, da bodo te rešene naloge skupaj s skicami bralcu v pomoč.

Martin Jesenko, Mojca Premuš in Marjeta Škapin Rugelj

1. kolokvij (11. 4. 2022)

1. naloga [20 točk]

Za funkciji

$$f(x,y) = \frac{y}{e^x - y + 1}, \qquad g(x,y) = \frac{4}{\pi}\arcsin(x^2 + y^2 - 2)$$

(a) določite njuno naravno definicijsko območje in

(b) za vsako narišite nivojnice za vrednosti $z = 0, 1, 2$.

Funkcija f je definirana povsod, kjer je imenovalec različen od nič. Izvzeti je treba le pare (x, y), za katere je $e^x - y + 1 = 0$. Torej je

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, e^x + 1) : x \in \mathbb{R}\}.$$

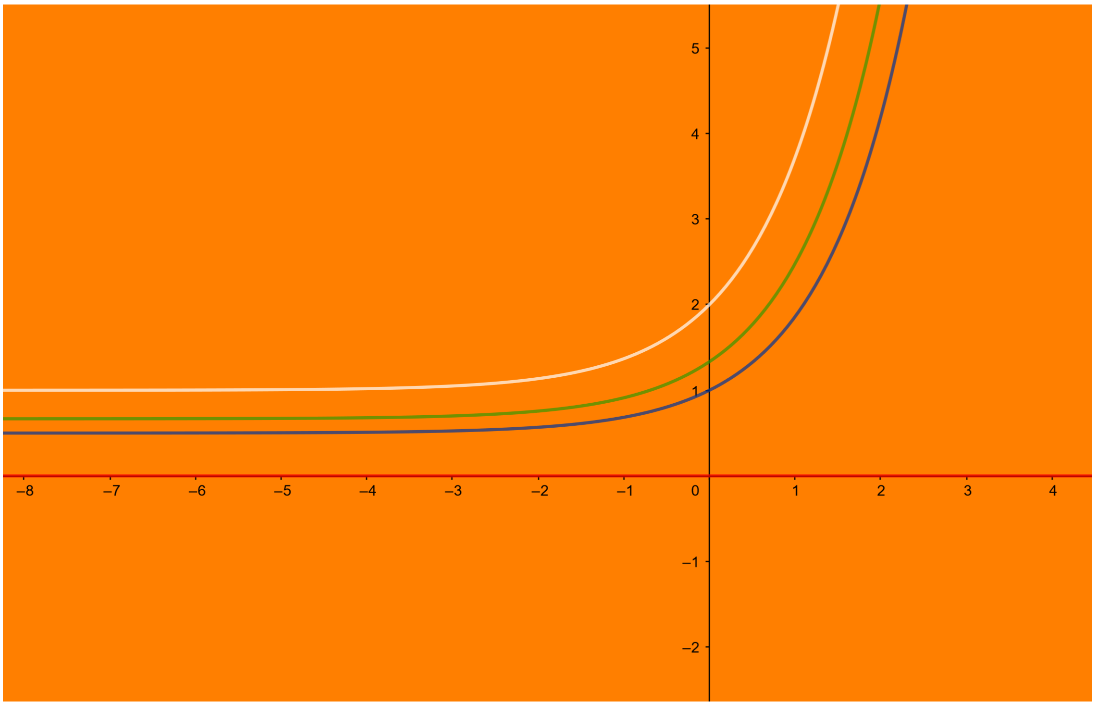
Nivojnica za neki z je množica točk $N_{f,z} = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$. Tukaj jih lahko podamo v obliki grafa, saj se da y izraziti kot funkcijo x:

$$\begin{aligned} \frac{y}{e^x - y + 1} &= z \\ y &= z(e^x - y + 1) \\ (z+1)y &= z(e^x + 1) \\ y &= \frac{z}{z+1}(e^x + 1) \end{aligned}$$

Nivojnice za $z = 0, 1, 2$ so torej podane z

$$y = 0, \quad y = \frac{1}{2}(e^x + 1), \quad y = \frac{2}{3}(e^x + 1).$$

Na sliki so obarvane rdeče, modro in zeleno, definicijsko območje pa oranžno:



Arkus sinus je definiran na $[-1, 1]$, tako da mora biti

$$-1 \leq x^2 + y^2 - 2 \leq 1.$$

Torej je

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\},$$

gre pa za kolobar s središčem v izhodišču, notranjim polmerom 1 in zunanjim polmerom $\sqrt{3}$.

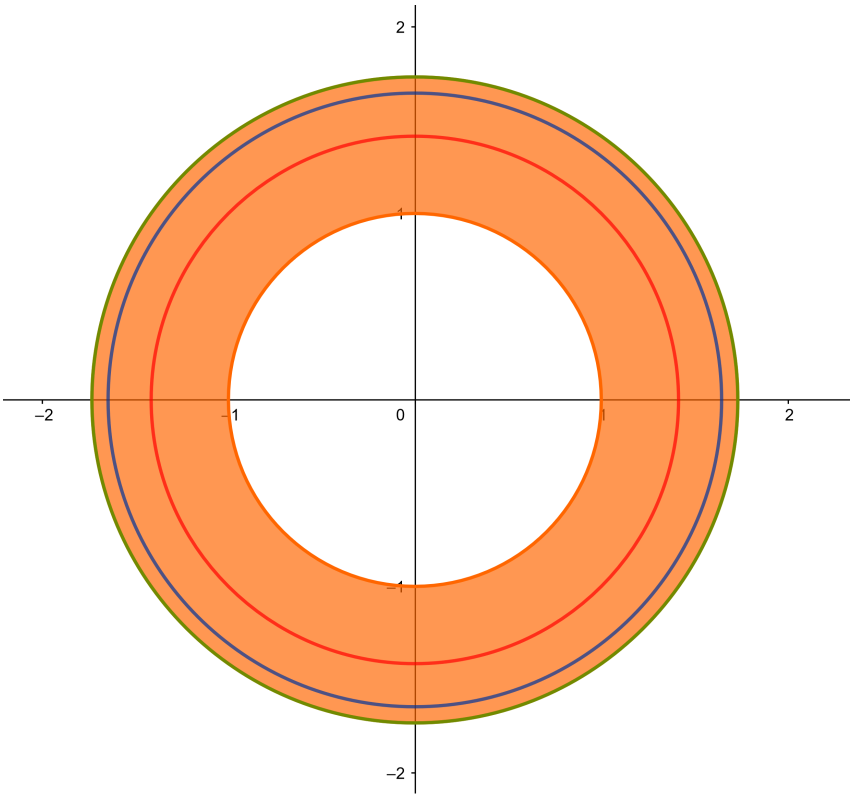
Še nivojnice: Iščemo pare (x, y), tako da je

$$\frac{4}{\pi} \arcsin(x^2 + y^2 - 2) = z.$$

Sledi

$$x^2 + y^2 = 2 + \sin(z\tfrac{\pi}{4}).$$

Nivojnice so torej krožnice. Pri $z = 0$ je polmer $\sqrt{2}$, pri $z = 1$ je polmer $\sqrt{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$, pri $z = 2$ pa $\sqrt{3}$. Spet so obarvane rdeče, modro in zeleno, definicijsko območje pa oranžno:



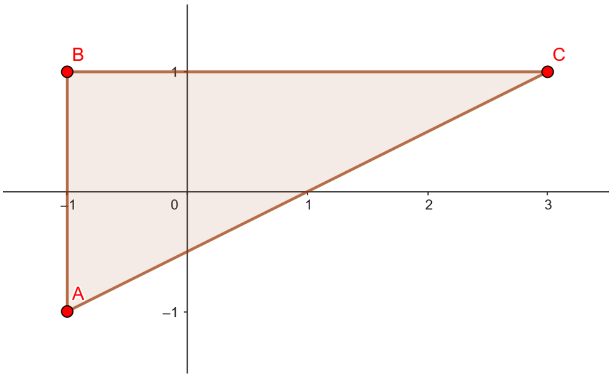
2. naloga [25 točk]

Določite največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + y^3$$

na trikotniku z oglišči $A(-1, -1)$, $B(-1, 1)$ in $C(3, 1)$.

Zvezna funkcija na zaprti in omejeni množici zagotovo zavzame svoj minimum in maksimum. Če je odvedljiva, se to lahko zgodi v stacionarnih točkah v notranjosti ali pa v robnih točkah.



Najprej poiščimo stacionarne točke. To so točke, kjer je gradient enak 0. Torej mora veljati

$$(0, 0) = \operatorname{grad} f(x, y) = (2x - 4y, -4x + 8y + 3y^2).$$

Edina rešitev je $x = y = 0$. Točka $(0, 0)$ je v notranjosti trikotnika, torej je prvi kandidat:

$$\boxed{f(0, 0) = 0}$$

Sedaj pa obravnavajmo še rob.

❶ Stranica AB:
Za parameter lahko vzamemo kar y-koordinato. Torej opazujemo funkcijo

$$g_{AB}(t) = f(-1, t) = 1 + 4t + 4t^2 + t^3, \quad t \in (-1, 1).$$

Ničli odvoda $g'_{AB}(t) = 4 + 8t + 3t^2$ sta $t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm 4}{2 \cdot 3}$. V intervalu leži le $t = -\frac{2}{3}$. Drugi kandidat je

$$\boxed{f(-1, -\tfrac{2}{3}) = g_{AB}(-\tfrac{2}{3}) = 1 + 4 \cdot (-\tfrac{2}{3}) + 4 \cdot (-\tfrac{2}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3})^3 = -\tfrac{5}{27}}$$

❷ Stranica BC:
Tukaj je parameter koordinata x, funkcija pa

$$g_{BC}(t) = f(t, 1) = t^2 - 4t + 5, \quad t \in (-1, 3).$$

Iz $g'_{BC}(t) = 2t - 4$ sledi, da ima edino stacionarno točko pri $t = 2$, torej znotraj intervala. Naslednji kandidat je tako

$$\boxed{f(2, 1) = g_{BC}(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1}$$

❸ Stranica AC:
Ta stranica leži na premici $y = \frac{x-1}{2}$. Zato obravnavamo funckijo

$$g_{AC}(t) = f(t, \tfrac{t-1}{2}) = t^2 - 4t \cdot \tfrac{t-1}{2} + 4(\tfrac{t-1}{2})^2 + (\tfrac{t-1}{2})^3 = 1 + \tfrac{(t-1)^3}{8}, \quad t \in (-1, 3).$$

Njen odvod je $g'_{BC}(t) = \frac{3(t-1)^2}{8}$ z edino ničlo $t = 1$. Torej imamo še

$$\boxed{f(1,0) = g_{AC}(1) = 1}$$

Ekstremi pa lahko nastopijo tudi v ogliščih:

$$\boxed{f(-1,-1) = 0} \qquad \boxed{f(-1,1) = 10} \qquad \boxed{f(3,1) = 2}$$

Torej je najmanjša vrednost $-\frac{5}{27}$, dosežena v točki $(-1, -\frac{2}{3})$, največja pa 10, in sicer v točki B.

3. naloga [30 točk]

Dana je funkcija

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 - 8)e^{x-y^2}.$$

(a) Določite in klasificirajte njene lokalne ekstreme.

(b) Zapišite njen Taylorjev polinom drugega reda okoli točke $(0, 0)$.

(a) Lokalni ekstremi lahko nastopijo le v stacionarnih točkah, torej tam, kjer je gradient enak 0. Prva parcialna odvoda sta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cdot e^{x-y^2} + (x^2 - 8) \cdot e^{x-y^2} \cdot 1 = (x^2 + 2x - 8)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 - 8)e^{x-y^2} \cdot (-2y) = -2(x^2 - 8)ye^{x-y^2}$$

Ker je $e^{x-y^2} > 0$, iz $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ sledi

$$0 = x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2).$$

Torej je $x = -4$ ali $x = 2$.

Zato iz $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ nujno sledi $y = 0$.

Tako imamo stacionarni točki $(-4, 0)$ in $(2, 0)$. Za določitev tipa lokalnih ekstremov potrebujemo Hessejevo matriko. Drugi parcialni odvodi so

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (2x + 2) \cdot e^{x-y^2} + (x^2 + 2x - 8) \cdot e^{x-y^2} \cdot 1 = (x^2 + 4x - 6) \cdot e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = (x^2 + 2x - 8) \cdot e^{x-y^2} \cdot (-2y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2(x^2 - 8)(1 \cdot e^{x-y^2} + y \cdot e^{x-y^2} \cdot (-2y)) = -2(x^2 - 8)(1 - 2y^2)e^{x-y^2}$$

V točki $(-4, 0)$ je

$$\mathcal{H}(f)(-4, 0) = \begin{bmatrix} -6e^{-4} & 0 \\ 0 & -16e^{-4} \end{bmatrix}.$$

Determinanta je $(-6e^{-4}) \cdot (-16e^{-4}) - 0 = 96e^{-8} > 0$, torej gre za ekstrem. Ker je $-6e^{-4} < 0$, je v $(-4, 0)$ lokalni maksimum. (Argumentiramo lahko tudi z lastnimi vrednostmi.)

V točki $(2, 0)$ pa imamo

$$\mathcal{H}(f)(2, 0) = \begin{bmatrix} 6e^2 & 0 \\ 0 & 8e^2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta je $48e^4 > 0$. Tokrat je v $(2, 0)$ lokalni minimum, saj je $6e^2 > 0$.

(b) Taylorjev polinom drugega reda okoli točke $(0, 0)$ je

$$(T^2_{(0,0)} f)(h, k) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)k^2\right).$$

Iz

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= -8\\
\tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= -8\\
\tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= -6\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= 0\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 16
\end{aligned}$$

sledi

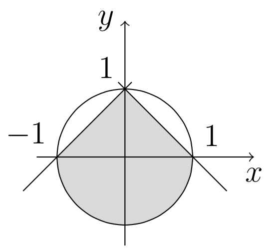
$$T_f^{(0,0)}(h,k) = -8 - 8h - 3h^2 + 8k^2.$$

4. naloga [25 točk]

Izračunajte dvojni integral

$$\iint\limits_D x^4 y \; dxdy,$$

kjer je integracijsko območje D določeno z dvema premicama in krožnico, kot je narisano na skici.



Premici imata enačbi $y = x + 1$ in $y = -x + 1$, krožnica pa $x^2 + y^2 = 1$. Če je zunanji integral po spremenljivki x, potem dobimo moramo razdeliti integracijsko območje na dva dela: levo in desno od osi y. Spodnja meja za notranji integral je v obeh primerih določena s krožnico, in sicer velja $y^2 = 1 - x^2$, oziroma $y = -\sqrt{1 - x^2}$, saj leži na spodnji veji. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x^4 y \; dxdy &= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} x^4 y \; dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{-x+1} x^4 y \; dy \\
&= \int\limits_{-1}^{0} x^4 \; dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=x+1} + \int\limits_{0}^{1} x^4 \; dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=-x+1} \\
&= \int\limits_{-1}^{0} x^4 \; dx \frac{(x+1)^2 - (1-x^2)}{2} + \int\limits_{0}^{1} x^4 \; dx \frac{(-x+1)^2 - (1-x^2)}{2} \\
&= \int\limits_{-1}^{0} x^4 (x^2 + x) \; dx + \int\limits_{0}^{1} x^4 (x^2 - x) \; dx \\
&= \int\limits_{-1}^{0} (x^6 + x^5) \; dx + \int\limits_{0}^{1} (x^6 - x^5) \; dx \\
&= \left[\frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{6}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= 0 - \left(\frac{-1}{7} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{6}\right) - 0 \\
&= \frac{2}{7} - \frac{2}{6} \\
&= -\frac{1}{21}.
\end{aligned}$$

2. kolokvij (6. 6. 2022)

1. naloga [20 točk]

Izračunajte maso telesa

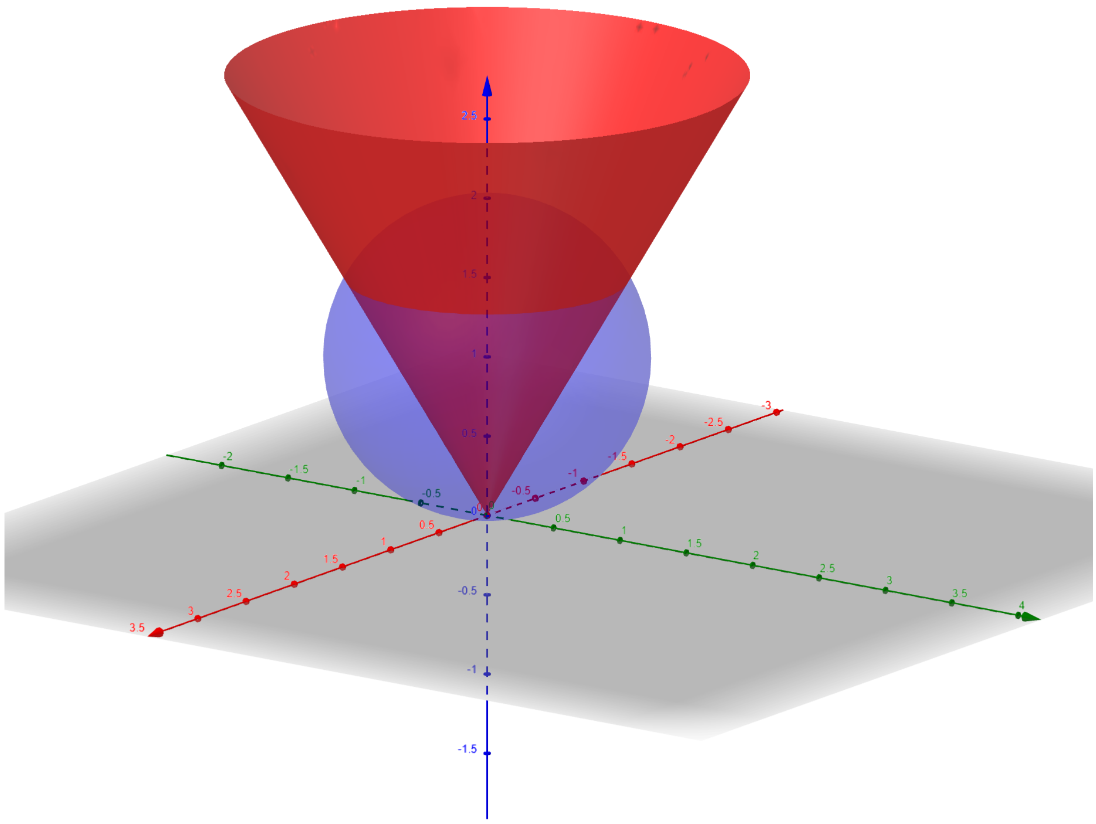
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z,\ z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\},$$

če je gostota v vsaki točki sorazmerna oddaljenosti od ravnine $z = 0$.

Ker velja

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \iff x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1,$$

prva neenačba določa kroglo s polmerom 1 in središčem $(0, 0, 1)$. Od nje vzamemo le del, ki leži pod plaščem stožca z enačbo $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$:



Masa telesa G je

$$m = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\ dx\ dy\ dz.$$

Gostota je v našem primeru enaka $\rho(x, y, z) = k|z|$. (V točkah iz G je $z \geq 0$, tako da smemo absolutno vrednost izpustiti.)

Uporabimo sferne koordinate (r, φ, ϑ). Plašč valja oklepa z xy-ravnino kot $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Za posamezno ϑ imamo $r \in [0, 2\sin\vartheta]$. Torej je

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\vartheta \int_0^{2\sin\vartheta} kr\sin\vartheta \cdot r^2\cos\vartheta \; dr \\
&= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\sin\vartheta} \\
&= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^5\vartheta\cos\vartheta \; d\vartheta \qquad\qquad (t = \sin\vartheta,\; dt = \cos\vartheta \; d\vartheta) \\
&= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4t^5 \; dt \\
&= k\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 4\left[\frac{t^6}{6}\right]_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= k \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{27}{64} \\
&= \frac{9}{16}k\pi.
\end{aligned}
$$

2. naloga [25 točk]

Krivulja $\mathcal{K}$ je dana kot presek ravnine $x+y=1$ in ploskve z enačbo $z=1-x^2-y^2$.

(a) Parametrizirajte dano krivuljo.

(b) Izračunajte fleksijsko ukrivljenost in poiščite točko, v kateri je le-ta največja.

(c) V točki $T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ zapišite enačbo pritisnjene krožnice na krivuljo $\mathcal{K}$.

(a) Za parameter lahko vzamemo kar $x=t$, saj potem iz prve enačbe sledi $y=1-t$ in iz druge $z=1-t^2-(1-t)^2$. Torej

$$\vec{p}(t)=(t,1-t,2t-2t^2),\quad t\in\mathbb{R}.$$

(b) Po formuli je $\kappa(t)=\frac{|\dot{\vec{p}}(t)\times\ddot{\vec{p}}(t)|}{|\dot{\vec{p}}(t)|^3}$. Zato izračunamo

$$\dot{\vec{p}}(t)=(1,-1,2-4t),\quad \ddot{\vec{p}}(t)=(0,0,-4)$$

in

$$\dot{\vec{p}}(t)\times\ddot{\vec{p}}(t)=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2-4t\\ 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=(4,4,0).$$

Fleksijska ukrivljenost je v poljubni točki enaka

$$\kappa(t)=\frac{|\dot{\vec{p}}(t)\times\ddot{\vec{p}}(t)|}{|\dot{\vec{p}}(t)|^3}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+(2-4t)^2}^3}.$$

Ker je števec tega ulomka v vseh točkah enak, je fleksijska ukrivljenost največja tam, kjer je imenovalec najmanjši, torej tam, kjer je $1+1+(2-4t)^2$ minimalna. Zadnji seštevanec je najmanjši, ko je $t=\frac{1}{2}$. Torej je fleksijska ukrivljenost največja v točki $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ in je tam enaka

$$\kappa(\tfrac{1}{2})=\frac{|\dot{\vec{p}}(\frac{1}{2})\times\ddot{\vec{p}}(\frac{1}{2})|}{|\dot{\vec{p}}(\frac{1}{2})|^3}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}^3}=2.$$

(c) Središče pritisnjene krožnice leži v smeri normale na krivuljo. Najprej izračunamo

$$\vec{T}(\tfrac{1}{2})=\frac{\dot{\vec{p}}(\frac{1}{2})}{|\dot{\vec{p}}(\frac{1}{2})|}=\frac{(1,-1,0)}{|(1,-1,0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),$$

$$\vec{B}(\tfrac{1}{2})=\frac{\dot{\vec{p}}(\frac{1}{2})\times\ddot{\vec{p}}(\frac{1}{2})}{|\dot{\vec{p}}(\frac{1}{2})\times\ddot{\vec{p}}(\frac{1}{2})|}=\frac{(4,4,0)}{|(4,4,0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

in

$$\vec{N}(\tfrac{1}{2})=\vec{B}(\tfrac{1}{2})\times\vec{T}(\tfrac{1}{2})=(0,0,-1).$$

Polmer je $R(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\kappa(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$. Središče ima tako krajevni vektor

$$\vec{r}_0 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + R(\tfrac{1}{2})\vec{N}(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0).$$

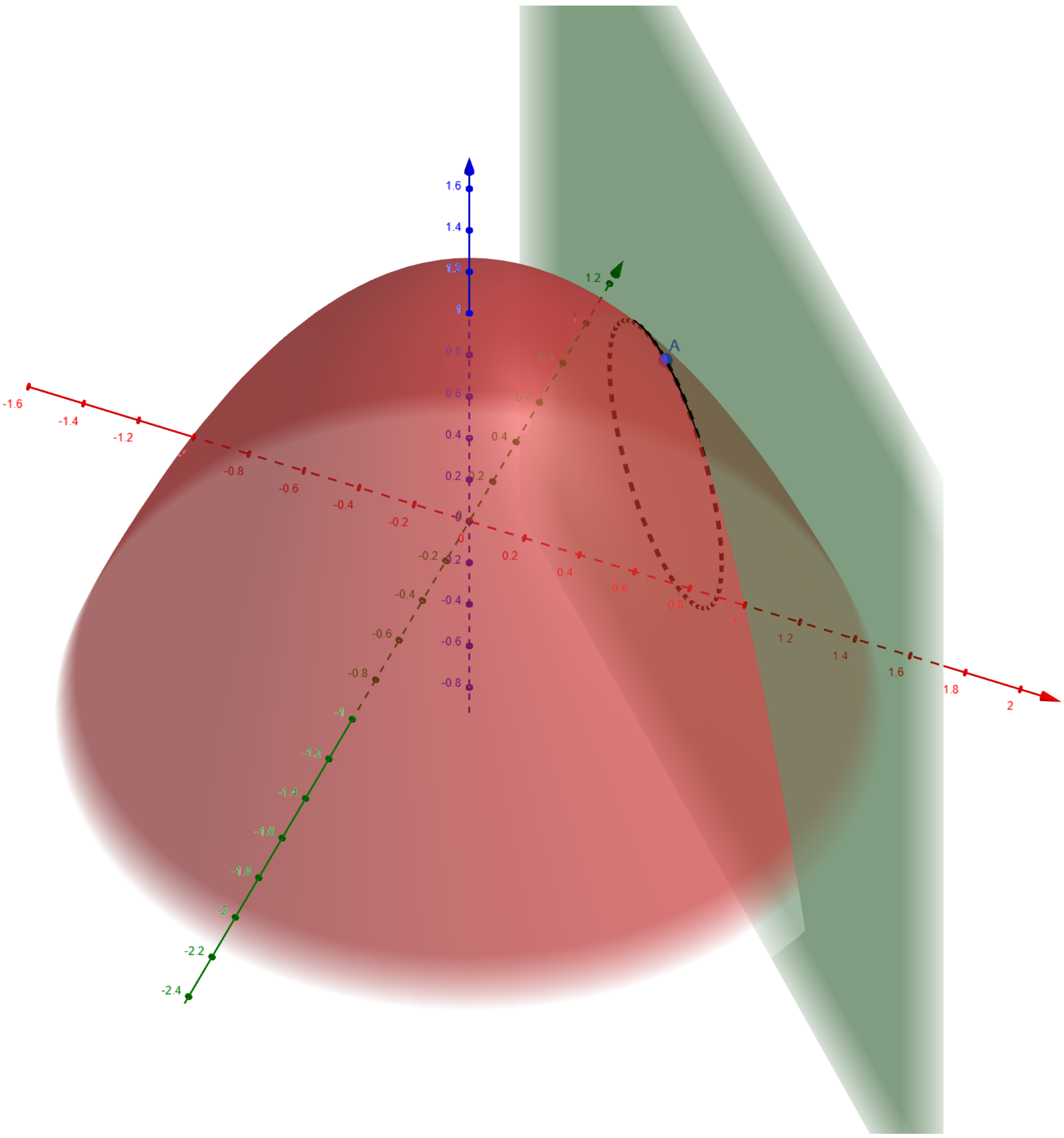
Pritisnjeno krožnico podaja formula

$$\vec{r}(\varphi) = \vec{r}_0 + R\cos\varphi\,\vec{T} + R\sin\varphi\,\vec{N}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

V našem primeru torej

$$\vec{r}(\varphi) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\varphi, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\varphi, -\tfrac{1}{2}\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Na sliki sta prikazani obe ploskvi in iskana pritisnjena krožnica.



3. naloga [20 točk]

Izračunajte z-koordinato geometrijskega središča ploskve

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \le z \le 2\}.$$

Naša ploskev je podana eksplicitno, namreč $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$, in lahko uporabimo to parametrizacijo. Iz

$$1 \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \le 2 \iff 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2$$

sledi, da morajo pari (x, y) ležati v kolobarju K s središčem v izhodišču in polmeroma 1 in 2. Za eksplicitno podane ploskve je

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dx\ dy,$$

pri čemer sta

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{in} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Torej je $dS = \sqrt{2}\ dx\ dy$. Površina ploskve $\mathcal{P}$ je

$$S(\mathcal{P}) = \iint_{\mathcal{P}} 1\ dS = \iint_K \sqrt{2}\ dx\ dy = \sqrt{2}\ S(K) = \sqrt{2}\pi(2^2 - 1^2) = 3\sqrt{2}\pi.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{P}} z\ dS &= \iint_K (3 - \sqrt{x^2 + y^2})\ \sqrt{2}\ dx\ dy \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 (3 - r)\ r\ dr \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=2} \\
&= \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$z_0 = \frac{\frac{13\pi\sqrt{2}}{3}}{3\sqrt{2}\pi} = \frac{13}{9}.$$

4. naloga [35 točk]

Direktno in z uporabo Stokesovega izreka izračunajte

$$\oint_{\overrightarrow{\mathcal{K}}} 2y\,dx + (x+z)\,dy + z\,dz,$$

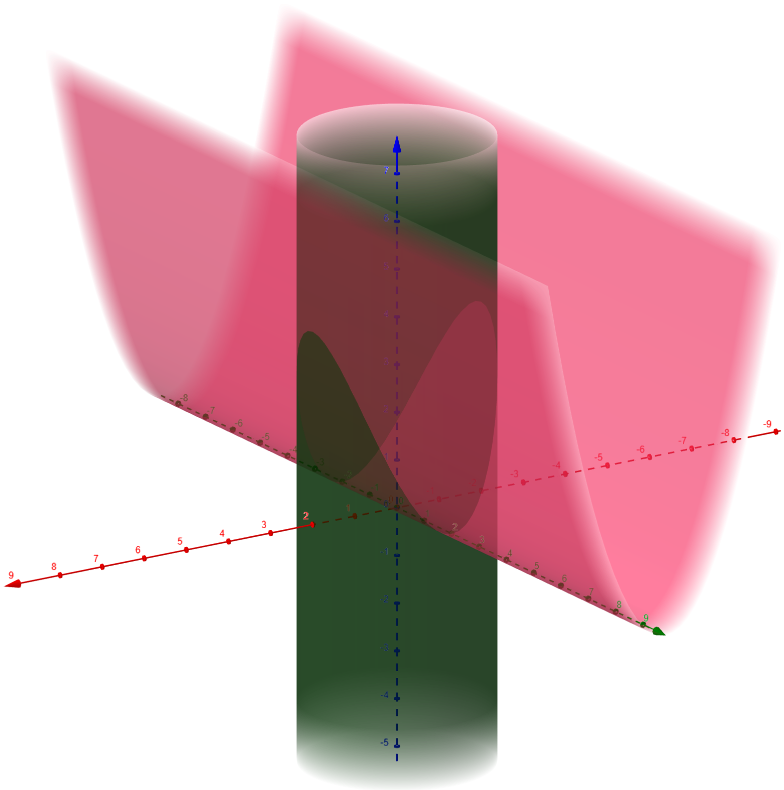
kjer je krivulja $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ presek ploskev $z = x^2$ in $x^2 + y^2 = 4$, orientirana v smeri nasprotni vrtenju urinega kazalca, če jo gledamo iz točke $T(0,0,10)$.

Vektorsko polje, ki ga integriramo, je

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2y, x+z, z).$$

Ker se koordinata z izraža s koordinato x, lahko najprej parametriziramo (x,y) kot točke na krožnici in nato izračunamo z. Tako dobimo parametrizacijo

$$\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4\cos^2 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



Tudi orientacija je ustrezna. Za izračun krivuljnega integrala potrebujemo

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = (4\sin t, 2\cos t + 4\cos^2 t, 4\cos^2 t)$$

in

$$\dot{\overrightarrow{r}}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 8\cos t(-\sin t)).$$

Potem je

$$\oint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{K}}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} (-8\sin^2 t + 4\cos^2 t + 8\cos^3 t - 32\cos^3 t \sin t)\ dt.$$

Z uporabo dvojnih kotov ali funkcije beta dobimo $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt = \pi$, preostala dva sta pa 0. Torej je

$$\oint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{K}}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -8\pi + 4\pi + 0 + 0 = -4\pi.$$

Ker je $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ sklenjena, lahko uporabimo Stokesov izrek. Najprej je

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & x+z & z \end{vmatrix} = (-1, 0, -1).$$

Za ploskev $\mathcal{P}$ lahko vzamemo del ploskve $z = x^2$ nad krogom $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Ker je podana eksplicitno, je

$$d\vec{S} = -(p, q, -1)\ dx\ dy = -(2x, 0, -1)\ dx\ dy.$$

Integrirati moramo po zgornji strani ploskve, da se orientacija ploskve ujema z orientacijo krivulje. Zato mora biti zadnja koordinata normale pozitivna, kar smo dosegli z minusom. Po Stokesovem izreku je

$$\oint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{K}}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_D (-1, 0, -1) \cdot (-2x, 0, 1)\ dx\ dy = \iint\limits_D (2x - 1)\ dx\ dy.$$

Za ta integral uporabimo polarne koordinate ali pa opazimo, da je x-koordinata težišča tega kroga enaka 0 in je zato

$$\iint\limits_D (2x-1)\ dx\ dy = 2x_T S(D) - S(D) = -4\pi.$$

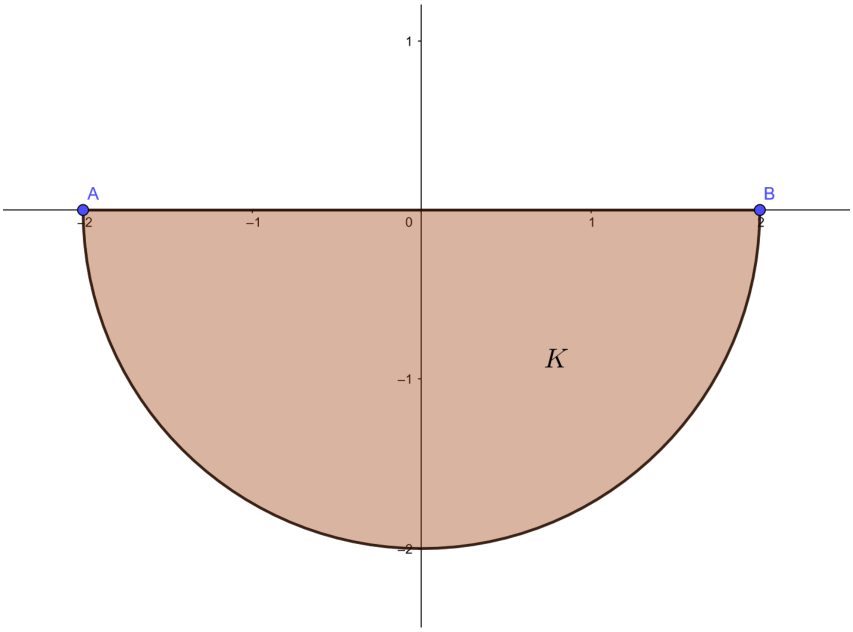
1. izpit (22. 6. 2022)

1. naloga [25 točk]

Poiščite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$ na polkrogu

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq 0\}.$$

Zvezna funkcija na zaprti in omejeni množici zagotovo zavzame svoj minimum in maksimum. Če je odvedljiva, se to lahko zgodi v stacionarnih točkah v notranjosti ali pa v robnih točkah.



Zato najprej poiščimo stacionarne točke, to je točke, kjer je gradient enak 0. Torej mora veljati

$$(0, 0) = \operatorname{grad} f(x, y) = (2x - 2, 2y + 2).$$

Edina rešitev je $x = 1$ in $y = -1$. Točka $(1, -1)$ leži v notranjosti polkroga, saj je $1^2 + (-1)^2 = 2 < 4$, torej je prvi kandidat:

$$\boxed{f(1, -1) = -2}$$

Sedaj pa obravnavajmo še rob.

❶ Premer:
Za parameter lahko vzamemo kar x-koordinato. Torej opazujemo funkcijo

$$g_p(t) = f(t, 0) = t^2 - 2t, \quad t \in (-2, 2)$$

Edina ničla odvoda $g_p'(t) = 2t - 2$ je $t = 1$, ki leži znotraj intervala. Drugi kandidat je

$$\boxed{f(1, 0) = g_p(1) = 1 - 2 = -1.}$$

❷ Krožni lok:
Spodnjo polovico krožnice parametriziramo s kotom, funkcija pa je

$$\begin{aligned} g_{kl}(t) &= f(2\cos t, 2\sin t) = \\ &= 4\cos^2 t - 4\cos t + 4\sin^2 t + 4\sin t = 4 - 4\cos t + 4\sin t, \quad t \in (\pi, 2\pi). \end{aligned}$$

Iz $g'_{kl}(t) = 4\sin t + 4\cos t$ sledi, da mora t zadoščati $\sin t + \cos t = 0$, kar iz danega intervala izpolnjuje $t = \frac{7\pi}{4}$. Naslednji kandidat je tako

$$\boxed{f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = g_{kl}(\tfrac{7\pi}{4}) = 4 - 4 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = 4(1 - \sqrt{2}).}$$

Ekstremi pa lahko nastopijo tudi v točkah A in B:

$$\boxed{f(-2, 0) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = 8} \qquad \boxed{f(2, 0) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0}$$

Torej je najmanjša vrednost -2, dosežena v točki $(1, -1)$, največja pa 8, in sicer v točki $(-2, 0)$.

2. naloga [25 točk]

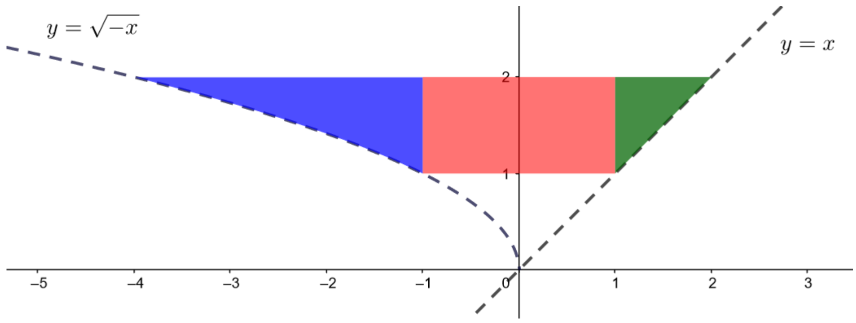
Naj bo

$$I = \int_{-4}^{-1} dx \int_{\sqrt{-x}}^{2} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{1}^{2} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{x}^{2} f(x,y)\,dy.$$

(a) Narišite skico integracijskega območja in zamenjajte vrstni red integracije.

(b) Izračunajte I, če je $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$.

(a) Integracijsko območje prvega integrala vsebuje točke (x,y), pri čemer je $x \in [-4,-1]$ in $y \in [\sqrt{-x}, 2]$. Pri drugem integralu imamo pravokotnik $[-1,1] \times [1,2]$. Nato imamo še trikotnik, določen z $x \in [1,2]$ in $y \in [x,2]$.



Če vrstni red zamenjamo, je zunanja integracija po y. Kot vidimo, lahko vse zapišemo z enim integralom. Za vsak $y \in [1,2]$ imamo vse x med krivuljo $y = \sqrt{-x}$, torej $x = -y^2$, in premico $y = x$. Torej

$$I = \int_{1}^{2} dy \int_{-y^2}^{y} f(x,y)\; dx.$$

(b) Za konkretno funkcijo je najprej

$$I = \int_{1}^{2} dy \int_{-y^2}^{y} e^{\frac{x}{y}}\; dx = \int_{1}^{2} dy \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=-y^2}^{x=y} = \int_{1}^{2} y\left(e - e^{-y}\right) dy.$$

Dobljeni integral izračunamo po delih, pri čemer je $u = y$, $dv = (e - e^{-y})\; dy$, $du = dy$, $v = ey + e^{-y}$. Dobimo

$$\begin{aligned} I &= \left[y\left(ey + e^{-y}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(ey + e^{-y}\right)\; dy \\ &= 2(2e + e^{-2}) - (e + e^{-1}) - \left[e\frac{y^2}{2} - e^{-y}\right]_1^2 \\ &= 3e + 2e^{-2} - e^{-1} - (2e - e^{-2}) + (\tfrac{e}{2} - e^{-1}) \\ &= \tfrac{3}{2}e + 3e^{-2} - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

3. naloga [35 točk]

Dano je vektorsko polje

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xy, x^2 - z^2 + 2y, -2yz).$$

(a) Izračunajte njegovo divergenco in rotor.

(b) Ali je $\overrightarrow{F}$ potencialno polje? Če je, poiščite njegov potencial.

(c) Izračunajte $\iint_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ po zgornji strani polovice sfere

$$\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 + 1 = 0, z \geq 0\}.$$

(d) Izračunajte $\int_{\partial\overrightarrow{\mathcal{P}}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s}$.

(a) Po definiciji je divergenca enaka

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = (\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}) \cdot (2xy, x^2 - z^2 + 2y, -2yz) = 2y + 2 - 2y = 2,$$

rotor pa

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 - z^2 + 2y & -2yz \end{vmatrix} =$$

$$= (-2z - (-2z), 0 - 0, 2x - 2x) = (0,0,0).$$

(b) Ker je definicijsko območje polja $\overrightarrow{F}$ cel $\mathbb{R}^3$, ki je enostavno povezana množica, iz $\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ sledi, da je polje $\overrightarrow{F}$ potencialno. Za potencial u velja

$$\operatorname{grad} u = \overrightarrow{F}.$$

Iz enakosti prvih koordinat dobimo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \ \Rightarrow \ u(x,y,z) = \int 2xy \ dx + f(y,z) = x^2 y + f(y,z).$$

Ta nastavek vstavimo v enačbo za drugo koordinato

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - z^2 + 2y,$$

kar nam da:

$$x^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(y,z) = x^2 - z^2 + 2y \ \Rightarrow \ f(y,z) = \int (-z^2 + 2y) \ dy = -yz^2 + y^2 + g(z).$$

Na koncu vstavimo $u(x,y,z) = x^2 y - yz^2 + y^2 + g(z)$ še v tretjo enačbo:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2yz \ \Rightarrow \ -2yz + g'(z) = -2yz \ \Rightarrow \ g'(z) = 0 \ \Rightarrow \ g(z) = \text{konst}.$$

En potencial je torej

$$u(x,y,z) = x^2 y - yz^2 + y^2.$$

(c) Ker velja

$$x^2+4x+y^2-2y+z^2+1=0 \iff (x+2)^2+(y-1)^2+z^2=4,$$

je $\mathcal{P}$ zgornja polovica sfere s središčem v $(-2,1,0)$ in polmerom 2. Opazimo, da je $\operatorname{div}\vec{F}=2$ zelo preprosta, tako da se splača uporabiti Gaußov izrek. Ploskev $\mathcal{P}$ ni sklenjena, zato ji spodaj dodamo krog

$$\mathcal{K}=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : (x+2)^2+(y-1)^2\le 4\}.$$

Označimo z $\mathcal{V}$ polkroglo, ki jo določa ploskev $\mathcal{P}\cup\mathcal{K}$. Potem je

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{\vec{\mathcal{K}}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\mathcal{V}}\operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz.$$

Iz $\operatorname{div}\vec{F}=2$ sledi, da je

$$\iiint_{\mathcal{V}}\operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\mathcal{V}}2\,dx\,dy\,dz=2\,V(\mathcal{V})=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^3}{3}=\frac{8\pi}{3}.$$

Pri krogu $\mathcal{K}$ moramo integrirati po spodnji strani. Enotsko normalo prepoznamo brez računa, namreč $\vec{n}=(0,0,-1)$. Dobimo

$$\iint_{\vec{\mathcal{K}}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{\mathcal{K}}\vec{F}\cdot(0,0,-1)\;dS=\iint_{\mathcal{K}}2yz\;dS=0,$$

saj je koordinata z na celotnem $\mathcal{K}$ enaka 0. Tako je

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\mathcal{V}}\operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz-\iint_{\vec{\mathcal{K}}}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\frac{8\pi}{3}-0=\frac{8\pi}{3}.$$

(d) Krivulja $\partial\mathcal{P}$ je sklenjena (krožnica), polje $\vec{F}$ pa potencialno, zato je

$$\int_{\overrightarrow{\partial\mathcal{P}}}\vec{F}\cdot d\vec{s}=0.$$

4. naloga [15 točk]

Rešite začetni problem $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1) = 2$.

Enačba je linearna, tako da najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Le-ta ima ločljive spremenljivke:

$$\begin{aligned} y' &= -\tfrac{y}{x} \\ \tfrac{dy}{dx} &= -\tfrac{y}{x} \\ \int \tfrac{1}{y}\, dy &= \int -\tfrac{1}{x}\, dx \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ y &= \tfrac{C}{x} \end{aligned}$$

Rešitev nehomogene enačbe dobimo z variacijo konstante, t. j. z nastavkom

$$y = \tfrac{C(x)}{x}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} y' + \tfrac{y}{x} &= e^x \\ \tfrac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \tfrac{C(x)}{x^2} &= e^x \\ C'(x) &= xe^x \end{aligned}$$

S pomočjo integracije po delih sledi

$$C(x) = \int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + D,$$

pri čemer je $D \in \mathbb{R}$ poljuben. Splošna rešitev je tako

$$y = \tfrac{xe^x - e^x + D}{x}.$$

Ker mora veljati

$$2 = y(1) = e - e + D,$$

je $D = 2$. Torej

$$y(x) = \frac{xe^x - e^x + 2}{x}.$$

2. izpit (6. 7. 2022)

1. naloga [25 točk]

Naj bo $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

(a) Skicirajte definicijsko območje funkcije f in nivojnice za vrednosti $z = -1, 0, 1, 2$.

(b) Ali ima f kak lokalni ekstrem? Če ga ima, določite v njem še vrednost funkcije.

(c) Poiščite Taylorjev polinom 1. reda v okolici točke $(2, 1)$.

(d) Zapišite enačbo tangentne ravnine na graf dane funkcije v točki $(2, 1)$.

(a) Edina omejitev, ki sledi iz predpisa, je, da $x + y \neq 0$. Torej je

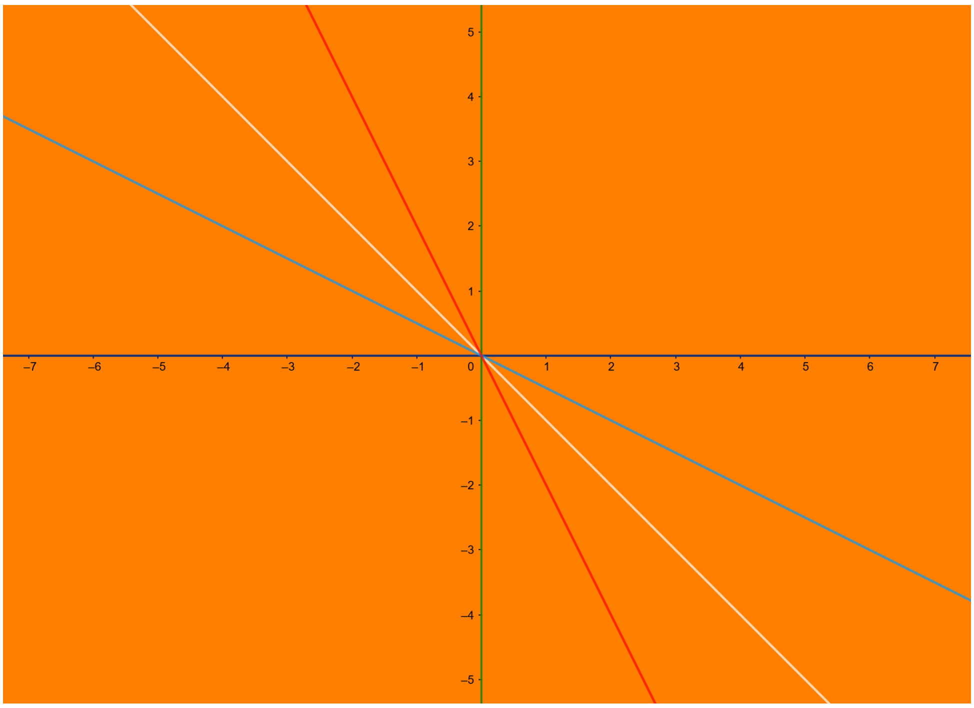
$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Nivojnice za posamezno vrednost nam da enačba $z = f(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

- $z = -1$: Dobimo $\frac{x}{x+y} = -1$. Torej gre za premico $y = -2x$.
- $z = 0$: Tukaj očitno dobimo ordinantno os $x = 0$.
- $z = 1$: Iz $\frac{x}{x+y} = 1$ sledi $y = 0$, torej za absicno os.
- $z = 2$: Spet dobimo premico, saj imamo $\frac{x}{x+y} = 2$ ali $y = -\frac{1}{2}x$.

(Pri vseh nivojnicah je treba izvzeti izhodišče, saj ni v definicijskem območju.)

Na sliki so nivojnice obarvane rdeče, zeleno, temno modro in svetlo modro, definicijsko območje pa oranžno (vse razen bele črte):



(b) V lokalnem ekstremu je gradient enak ničelnemu vektorju:

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \tfrac{1\cdot(x+y)-x\cdot 1}{(x+y)^2} = \tfrac{y}{(x+y)^2} \\ 0 &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cdot(-\tfrac{1}{(x+y)^2}) = -\tfrac{x}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi $y = 0$, iz druge pa $x = 0$. Vendar pa v izhodišču funkcija ni definirana. Torej f nima nobenega lokalnega ekstrema.

(c) Za Taylorjev polinom 1. reda potrebujemo vrednost funkcije in njenih parcialnih odvodov prvega reda v točki $(2,1)$:

$$\begin{aligned} f(2,1) &= \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) &= \tfrac{1}{9} \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) &= -\tfrac{2}{9} \end{aligned}$$

Tako je

$$(T^1_{(2,1)}f)(h,k) = f(2,1) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)h + \tfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)k = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{9}h - \tfrac{2}{9}k.$$

(d) Graf funkcije je ploskev, eksplicitno podana z enačbo $z = f(x,y) = \frac{x}{x+y}$. Normalo nanjo (oziroma na njeno tangentno ravnino) lahko dobimo po formuli $\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$. V točki $(2,1)$ je (ena) normala tako

$$\vec{n}_{(2,1)} = (\tfrac{1}{9}, -\tfrac{2}{9}, -1).$$

Enačba tangentne ravnine je torej

$$\tfrac{1}{9}x - \tfrac{2}{9}y - z = \tfrac{1}{9}\cdot 2 - \tfrac{2}{9}\cdot 1 - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

ali

$$x - 2y - 9z = -6.$$

2. naloga [25 točk]

Krivulji $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ sta dani s parametrizacijama

$$\mathcal{K} : \vec{p}(t) = (2t\cos t, 2t\sin t, \tfrac{1}{3}t^3),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{in} \quad \mathcal{L} : \vec{r}(t) = (t, t, t^3),\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Določite, pod katerim kotom se sekata.

(b) Izračunajte dolžino krivulje $\mathcal{K}$ med ravninama $z = \frac{1}{3}$ in $z = \frac{9}{8}$.

(a) Najprej moramo določiti vsa presečišča krivulj $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$. Za njune skupne točke velja

$$\vec{p}(t) = \vec{r}(u), \quad \text{torej} \quad (2t\cos t, 2t\sin t, \tfrac{1}{3}t^3) = (u, u, u^3).$$

Iz enakosti zadnjih koordinat sledi $u = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}t$. Veljati mora še

$$2t\cos t = \tfrac{1}{\sqrt[3]{3}}t \quad \text{in} \quad 2t\sin t = \tfrac{1}{\sqrt[3]{3}}t.$$

Ena rešitev je očitno $t = 0$. Če pa $t \neq 0$, pa mora veljati

$$\cos t = \tfrac{1}{2\sqrt[3]{3}} \quad \text{in} \quad \sin t = \tfrac{1}{2\sqrt[3]{3}}.$$

Tak t pa ne obstaja. Torej se krivulji sekata v točki $\vec{p}(0) = \vec{r}(0) = (0, 0, 0)$.

Kot med krivuljama je kot med njunima tangentama. Iz

$$\dot{\vec{p}}(t) = (2\cos t - 2t\sin t, 2\sin t + 2t\cos t, t^2) \quad \text{in} \quad \dot{\vec{r}}(u) = (1, 1, 3u^2)$$

dobimo tangentni smeri v presečišču:

$$\dot{\vec{p}}(0) = (2, 0, 0) \quad \text{in} \quad \dot{\vec{r}}(0) = (1, 1, 0).$$

Iz

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\vec{p}}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0)}{|\dot{\vec{p}}(0)| \cdot |\dot{\vec{r}}(0)|} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sledi, da je kot med krivuljama $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(b) Dolžina krivulje med točkama, ki ustrezata parametroma t_0 in t_1, je $\ell = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\vec{p}}(t)|\, dt$.

Koordinata z je bijektivna funkcija parametra t, torej $\mathcal{K}$ seka vsako ravnino $z =$ konst natanko enkrat. Konkretno:

$$\tfrac{1}{3}t_0^3 = \tfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; t_0 = 1 \quad \text{in} \quad \tfrac{1}{3}t_1^3 = \tfrac{9}{8} \;\Rightarrow\; t_1 = \tfrac{3}{2}.$$

Za izračun dolžine potrebujemo še

$$\begin{aligned}
|\dot{\vec{p}}(t)|^2 &= (2\cos t - 2t\sin t)^2 + (2\sin t + 2t\cos t)^2 + (t^2)^2 \\
&= 4\cos^2 t - 8t\cos t\sin t + 4t^2\sin^2 t + 4\sin^2 t + 8t\sin t\cos t + 4t^2\cos^2 t + t^4 \\
&= 4(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^4 \\
&= 4 + 4t^2 + t^4 \\
&= (2 + t^2)^2.
\end{aligned}$$

Iskana dolžina je torej

$$\ell = \int_1^{\frac{3}{2}} |\dot{\vec{p}}(t)|\, dt = \int_1^{\frac{3}{2}} (2 + t^2)\, dt = \Big[2t + \tfrac{t^3}{3}\Big]_1^{\frac{3}{2}} = \big(3 + \tfrac{9}{8}\big) - \big(2 + \tfrac{1}{3}\big) = \tfrac{43}{24}.$$

3. naloga [35 točk]

Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (y, 0, z+3)$ skozi rob telesa

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ y-2 \leq z \leq 0\},$$

orientiranega z zunanjimi normalami, direktno in z uporabo Gaussovega izreka.

Telo G je del neskončnega valja s polmerom 2, katerega simetrijska os je os z, med ravninama $z = y-2$ in $z = 0$. Njegov rob razdelimo na tri dele: $\mathcal{P}_1$ naj bo del na ravnini $z=0$, $\mathcal{P}_2$ del na ravnini $z = y-2$, $\mathcal{P}_3$ pa preostanek, ki leži na plašču valja.

Na $\mathcal{P}_1$ je enotska zunanja normala očitno $\vec{n} = (0,0,1)$. Zato je

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{P}_1} (y, 0, z+3) \cdot (0,0,1)\ dS = \iint_{\mathcal{P}_1} (z+3)\ dS = \iint_{\mathcal{P}_1} 3\ dS = 3 \cdot \pi \cdot 2^2 = 12\pi,$$

pri čemer smo upoštevali še, da na $\mathcal{P}_1$ velja $z=0$ in da je $\mathcal{P}_1$ krog s polmerom 2.

Ploskev $\mathcal{P}_2$ je podana eksplicitno:

$$z = y-2, \quad (x,y) \in K, \quad \text{kjer je } K \text{ krog } x^2+y^2 \leq 4.$$

Zato lahko uporabimo formulo

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_K (y, 0, (y-2)+3) \cdot (p, q, -1)\ dx\ dy.$$

Predznak zadnje koordinate ustreza orientaciji in $p = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, torej

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_K -(y+1)\ dx\ dy = -\iint_K y\ dx\ dy - \iint_K 1\ dx\ dy = 0 - \pi \cdot 2^2 = -4\pi.$$

Uporabili smo dejstvo, da je y-koordinata težišča kroga K enaka 0, njegov polmer pa 2. Ploskev $\mathcal{P}_3$ pa parametriziramo z

$$\vec{p}(\varphi, z) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad 0 \geq z \geq 2\sin\varphi - 2.$$

Parcialna odvoda sta

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0) \quad \text{in} \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} = (0,0,1).$$

Njun vektorski produkt

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)$$

ima pravo smer, tako da integriramo funkcijo

$$\vec{F}(\vec{p}(\varphi, z)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial z}\right) = (2\sin\varphi, 0, z+3) \cdot (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0) = 4\cos\varphi\sin\varphi.$$

Tako je

$$\iint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi - 2}^{0} 4\cos\varphi \sin\varphi \; dz = \int\limits_0^{2\pi} 4\cos\varphi \sin\varphi (2 - 2\sin\varphi) \; d\varphi = 0.$$

(To dobimo z uvedbo nove spremenljivke ali uporabo formul s funkcijo beta.)
Torej je

$$\iint\limits_{\overrightarrow{\partial G}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} + \iint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} + \iint\limits_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = 12\pi - 4\pi + 0 = 8\pi.$$

Isti integral lahko izračunamo tudi z Gaußovim izrekom, saj velja

$$\iint\limits_{\overrightarrow{\partial G}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \overrightarrow{F} \; dx \; dy \; dz.$$

Po definiciji je divergenca enaka

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = (\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}) \cdot (y, 0, z+3) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Torej moramo v bistvu izračunati prostornino telesa G. Podobno kot pri $\mathcal{P}_2$ lahko uporabimo, da poznamo ploščino in težišče kroga K in dobimo še na drug način

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div} \overrightarrow{F} \; dx \; dy \; dz = \iint\limits_{K} \; dx \; dy \int\limits_{y-2}^{0} dz = \iint\limits_{K} (2 - y) \; dx \; dy = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 0 = 8\pi.$$

4. naloga [15 točk]

Poiščite splošno rešitev diferencialnih enačb

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

in

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

V obeh primerih imamo opravka s homogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Za določitev splošne rešitve potrebujemo ničle karakterističnega polinoma.
Za prvo enačbo imamo

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Splošna rešitev je

$$y = Ae^{5x} + Be^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Za drugo enačbo pa dobimo

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Ker sta kompleksni, je splošna rešitev

$$y = Ae^{2x} \cos x + Be^{2x} \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3. izpit (31. 8. 2022)

1. naloga [25 točk]

Poiščite in klasificirajte stacionarne točke funkcije $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x + y^2$.

Stacionarne točke so točke, kjer je gradient enak 0. V njih torej velja

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2 + 2y = y(y+2) \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi, da mora biti $x \in \{-1, 1\}$, iz druge pa $y \in \{-2, 0\}$. Stacionarne točke so torej štiri:

$$(-1, -2), \quad (-1, 0), \quad (1, -2), \quad (1, 0).$$

Za klasifikacijo stacionarnih točk potrebujemo Hessejevo matriko. Drugi parcialni odvodi so

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2y + 2 \end{aligned}$$

V točki $(-1, -2)$ je

$$\mathcal{H}(f)(-1, -2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta je $(-2) \cdot (-2) - 0 = 4 > 0$, torej gre za lokalni ekstrem. Ker je $-2 < 0$, je v $(-1, -2)$ lokalni maksimum.

V točkah $(-1, 0)$ in $(1, -2)$ funkcija f nima lokalnega ekstrema, saj imata Hessejevi matriki

$$\mathcal{H}(f)(-1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathcal{H}(f)(1, -2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

determinanto enako $(-2) \cdot 2 - 0 = -4 < 0$.

V točki $(1, 0)$ je

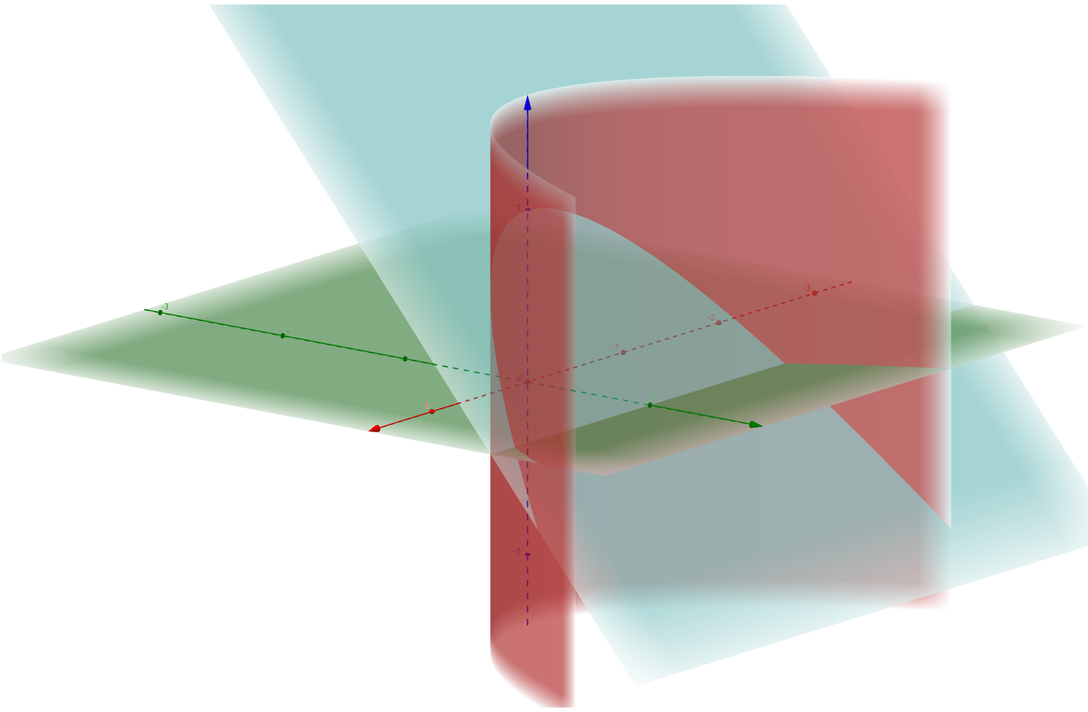
$$\mathcal{H}(f)(1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta $2 \cdot 2 - 0 = 4$ je pozitivna. Iz $2 > 0$ sledi, da je v $(1, 0)$ lokalni minimum. (Argumentiramo lahko tudi z lastnimi vrednostmi. Tu gre še posebej hitro, saj so vse štiri Hessejeve matrike diagonalne.)

2. naloga [25 točk]

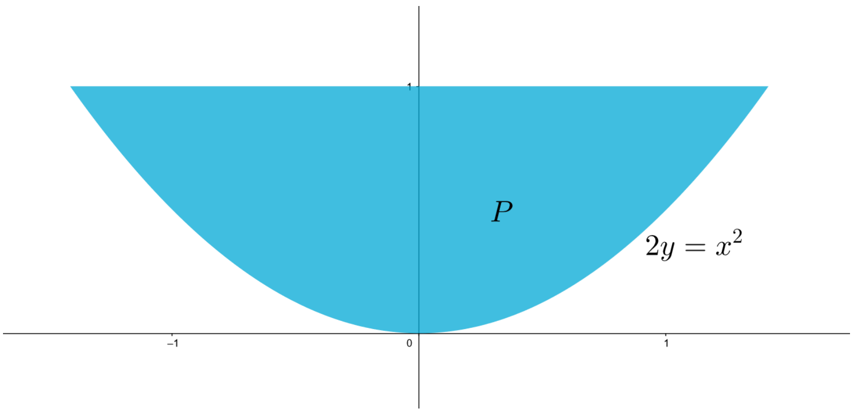
Izračunajte maso telesa G, ki ga omejujejo ploskve $x^2 = 2y$, $z = 0$ in $y + z = 1$, če je gostota enaka $\rho(x, y, z) = y$.

Ploskev $x^2 = 2y$ je pokončna parabolična ploskev, ostali dve sta pa ravnini (os x je rdeča):



V prvem koraku tako trojni integral zapišemo z dvojnim in enojnim, pri čemer je P projekcija telesa G na ravnino xy. Dobimo

$$m = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \iint\limits_P dx\ dy \int\limits_0^{1-y} y\ dz = \iint\limits_P y(1-y)\ dx\ dy.$$



Iz skice lika P razberemo integracijske meje za dvojni integral in dobimo

$$m = \iint_P y(1-y)\ dx\ dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} (y - y^2)\ dx = \int_0^1 2\sqrt{2y}(y-y^2)\ dy =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 (y^{3/2} - y^{5/2})\ dy = 2\sqrt{2}\left[\frac{y^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{y^{7/2}}{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

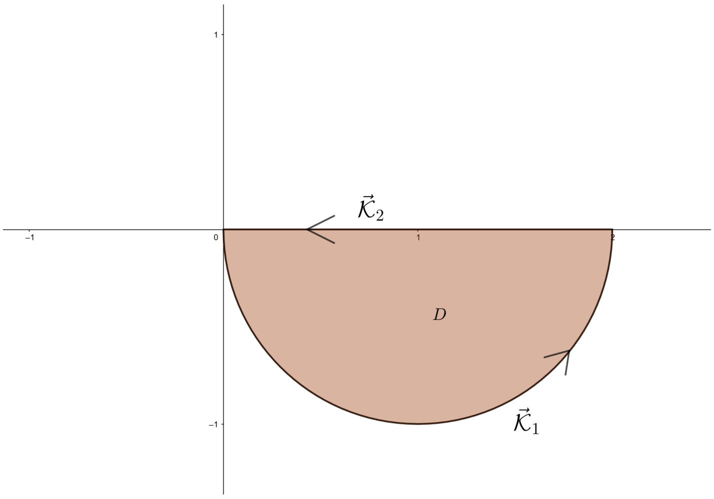
3. naloga [35 točk]

Podano je območje $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 2x + y^2 \leq 0, y \leq 0\}$. Direktno in z uporabo Greenovega izreka izračunajte

$$I = \oint_{\overrightarrow{\mathcal{K}}} (x+1)\,dx + xy\,dy,$$

kjer je $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ pozitivno orientiran rob območja D.

Funkcija, ki jo moramo integrirati, je $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+1, xy)$.



Iz

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 &\leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &\leq 1 \\ (x-1)^2 + y^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

sledi, da prvi pogoj določa krog s središčem $(1,0)$ in polmerom 1. Območje D je torej njegova spodnja polovica.

Njegov rob $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ razdelimo na krožni lok $\overrightarrow{\mathcal{K}}_1$, ki je orientiran v nasprotni smeri urinega kazalca, in na daljico $\overrightarrow{\mathcal{K}}_2$, ki je orientirana od desne proti levi.
Običajna parametrizacija krožnega loka je

$$\overrightarrow{p}_1(t) = (1+\cos t, \sin t),\ \ t \in [\pi, 2\pi].$$

Potem je

$$\dot{\overrightarrow{p}}_1(t) = (-\sin t, \cos t)$$

in

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{p}_1(t)) \cdot \dot{\overrightarrow{p}}_1(t) &= ((1+\cos t)+1, (1+\cos t)\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) \\ &= (2+\cos t, \sin t + \sin t\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \\ &= -2\sin t - \sin t\cos t + \sin t\cos t + \sin t\cos^2 t \\ &= -2\sin t + \sin t\cos^2 t. \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\int_{\overrightarrow{\mathcal{K}}_1} (x+1)\ dx + xy\ dy = \int_{\pi}^{2\pi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{p}_1(t)) \cdot \dot{\overrightarrow{p}}_1(t)\ dt = \int_{\pi}^{2\pi} (-2\sin t + \sin t\cos^2 t)\ dt =$$

$$= \left[2\cos t - \tfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi}^{2\pi} = (2\cdot 1 - \tfrac{1}{3}\cdot 1^3) - (2\cdot(-1) - \tfrac{1}{3}\cdot(-1)^3) = \tfrac{10}{3}.$$

(Drugi integral dobimo z novo spremeljivko $u = \cos t$.)
Za daljico $\overleftarrow{\mathcal{K}}_2$ vzamemo najbolj preprosto parametrizacijo

$$\vec{p}_2(t) = (t, 0),\ t \in [0, 2].$$

Ker je orientacija napačna, bomo dali pred integral predznak minus. Tu imamo

$$\dot{\vec{p}}_2(t) = (1, 0) \quad \text{in} \quad \vec{F}(\vec{p}_2(t)) \cdot \dot{\vec{p}}_2(t) = (t+1, 0) \cdot (1, 0) = t + 1.$$

Sledi

$$\int\limits_{\overleftarrow{\mathcal{K}}_2} (x+1)\ dx + xy\ dy = -\int\limits_0^2 (t+1)\ dt = -\left[\tfrac{1}{2}t^2 + t\right]_0^2 = -(2+2) + 0 = -4.$$

Posledično je

$$I = \int\limits_{\overleftarrow{\mathcal{K}}} (x+1)\ dx + xy\ dy = \tfrac{10}{3} - 4 = -\tfrac{2}{3}.$$

Izračunajmo I še z Greenovo formulo, ki pravi, da je

$$I = \iint\limits_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\ dy,$$

če označimo $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Ker je

$$\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \tfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = y - 0 = y,$$

je

$$I = \iint\limits_D y\ dx\ dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 y\ dy = \int\limits_0^2 dx \left[\tfrac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{y=0} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int\limits_0^2 (2x - x^2)\ dx = -\tfrac{1}{2}\left[x^2 - \tfrac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = -\tfrac{2}{3}.$$

4. naloga [15 točk]

Rešite začetni problem $y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$, $y(0) = 3$.

Gre za nehomogeno linearno enačbo prvega reda.

Zato najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo

$$y' + 2xy = 0.$$

Le-ta ima ločljive spremenljivke in jo rešimo po pripadajoči metodi:

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= 0 \\ y' &= -2xy \\ \tfrac{dy}{dx} &= -2xy \\ \int \tfrac{dy}{y} &= \int -2x\ dx \\ \ln y &= -x^2 + \ln C \\ y &= Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

Za nehomogeno enačbo nastavek z variacijo konstante

$$y = C(x)e^{-x^2}$$

vstavimo v enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= x^2 e^{-x^2} \\ C'(x)e^{-x^2} + \cancel{C(x)e^{-x^2}(-2x)} + \cancel{2xC(x)e^{-x^2}} &= x^2 e^{-x^2} \\ C'(x) &= x^2 \\ C(x) &= \tfrac{1}{3}x^3 + D \end{aligned}$$

Splošna rešitev je tako

$$y = (\tfrac{1}{3}x^3 + D)e^{-x^2}.$$

Upoštevamo še začetni pogoj:

$$\begin{aligned} y(0) &= (\tfrac{1}{3} \cdot 0^3 + D)e^{-0^2} \\ 3 &= D \end{aligned}$$

Iskana rešitev je torej

$$y = (\tfrac{1}{3}x^3 + 3)e^{-x^2}.$$

1. kolokvij (17. 4. 2023)

1. naloga [25 točk]

Dana je funkcija $f(x,y) = x \ln \frac{x^2}{y-1}$.

(a) Določite njeno naravno definicijsko območje in ga skicirajte.

(b) Poiščite in skicirajte množico ničel funkcije f.

(c) S pomočjo diferenciala ocenite vrednost $f(0.99, 2.03)$.

(a) V predpisu prepoznamo dve omejitvi:

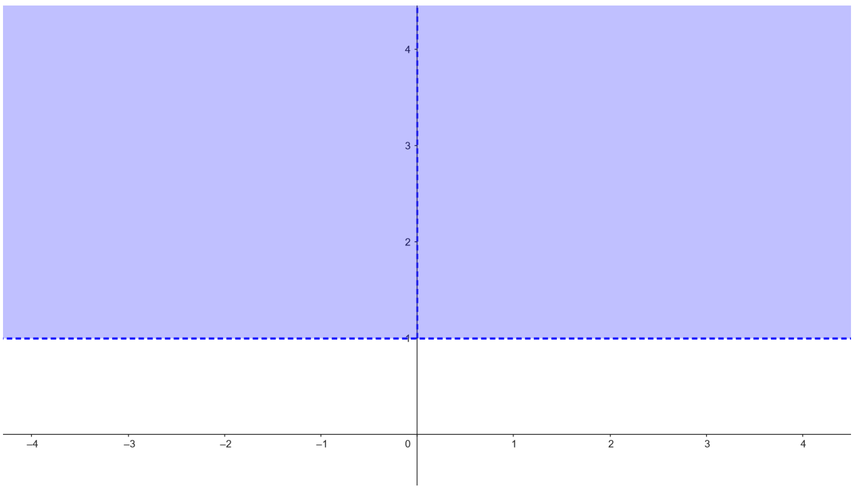
$$y - 1 \neq 0 \quad \text{in} \quad \frac{x^2}{y-1} > 0.$$

Če je $x = 0$, je ulomek enak 0. V nasprotnem pa je števec pozitiven, zato mora biti imenovalec tudi tak. Tako dobimo

$$x \neq 0 \quad \text{in} \quad y > 1$$

oziroma

$$D_f = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (1, \infty).$$



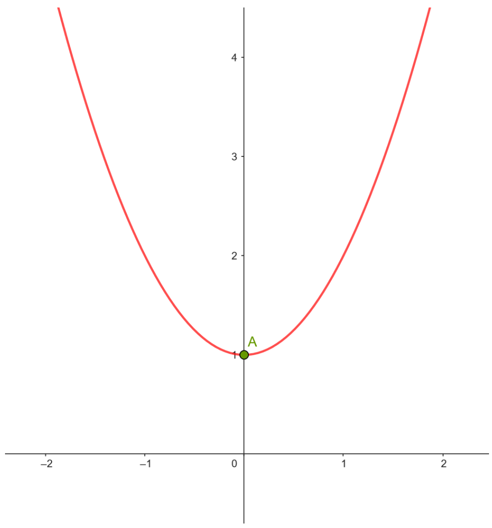
(b) Ničle rešijo enačbo

$$x \ln \frac{x^2}{y-1} = 0.$$

Ker x ne sme biti enak 0, mora biti drugi faktor enak 0, torej

$$\frac{x^2}{y-1} = 1, \quad \text{oziroma} \quad y = 1 + x^2.$$

Množica ničel torej leži na paraboli, vendar točka A ni ničla, saj ni v definicijskem območju.



(c) Za približno vrednost, ocenjeno s pomočjo diferenciala, velja

$$f(1+h,2+k) \approx f(1,2) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)\ h + \tfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)\ k.$$

Zato določimo najprej

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \ln \tfrac{x^2}{y-1} + x \cdot \tfrac{y-1}{x^2} \cdot \tfrac{2x}{y-1} = \ln \tfrac{x^2}{y-1} + 2 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \tfrac{y-1}{x^2} \cdot x^2 \cdot (-\tfrac{1}{(y-1)^2}) = -\tfrac{x}{y-1} \end{aligned}$$

in

$$f(1,2) = 0, \quad \tfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2, \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1.$$

Sledi

$$f(0.99, 2.03) = f(1-0.01, 2+0.03) = 0 + 2 \cdot (-0.01) - 1 \cdot 0.03 = -0.05.$$

2. naloga [25 točk]

Poiščite točke na elipsi

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 1,$$

ki so od izhodišča najbolj oz. najmanj oddaljene. Izračunajte še največjo in najmanjšo razdaljo.

Naloge se lotimo kot iskanje vezanega ekstrema. Funkcija, katere ekstreme iščemo, je razdalja do izhodišča. Ekvivalentno je, če obravnavamo njen kvadrat

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Vez pa določa funkcija

$$g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 1.$$

Langrangeeva funkcija je

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 1).$$

Kandidati za vezane ekstreme so njene stacionarne točke, torej rešitve sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(10x - 6y) \\ 0 &= \tfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(-6x + 10y) \\ 0 &= \tfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 1 \end{aligned}$$

Če seštejemo prvi dve enačbi, dobimo

$$0 = 2x + 4\lambda x + 4\lambda y + 2y = (2 + 4\lambda)(x + y).$$

Torej

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} \quad \text{ali} \quad y = -x.$$

- Če je $\lambda = -\frac{1}{2}$, se prva enačba glasi

  $$0 = 2x - \tfrac{1}{2}(10x - 6y) = -3x + 3y,$$

  torej $y = x$. Če to vstavimo v zadnjo enačbo, dobimo

  $$0 = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 1 = 10x^2 - 6x^2 - 1 = 4x^2 - 1.$$

  Torej je $x = y = \pm\frac{1}{2}$.

- Če je pa $y = -x$, pa nam zadnja enačba da

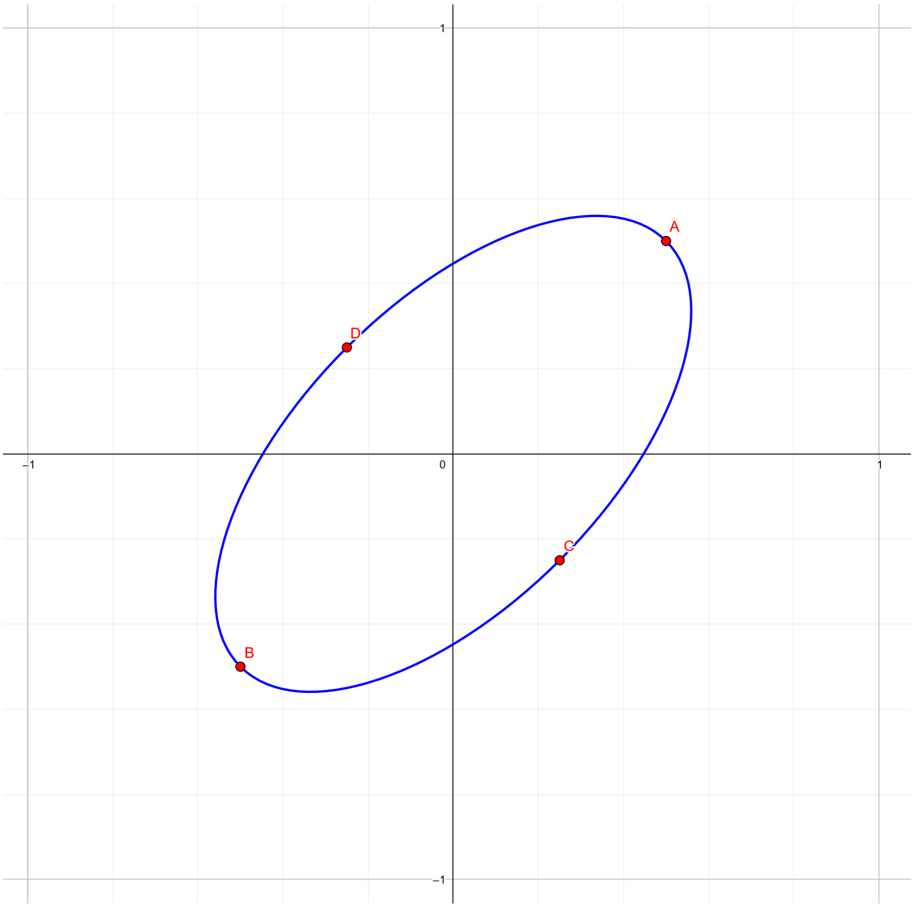
  $$0 = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 1 = 10x^2 + 6x^2 - 1 = 16x^2 - 1.$$

  Sledi $x = -y = \pm\frac{1}{4}$.

Dobili smo štiri možne točke za ekstremne vrednosti. Vrednosti kvadrata razdalje so vsi njih enake:

$$f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2},\quad f(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2},\quad f(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4})=\tfrac{1}{8},\quad f(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})=\tfrac{1}{8}.$$

Prvi dve točki (na sliki označeni z A in B) sta torej maksimalno oddaljeni od izhodišča, in sicer za $\frac{\sqrt{2}}{2}$, drugi dve (C in D) pa minimalno, to je za $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



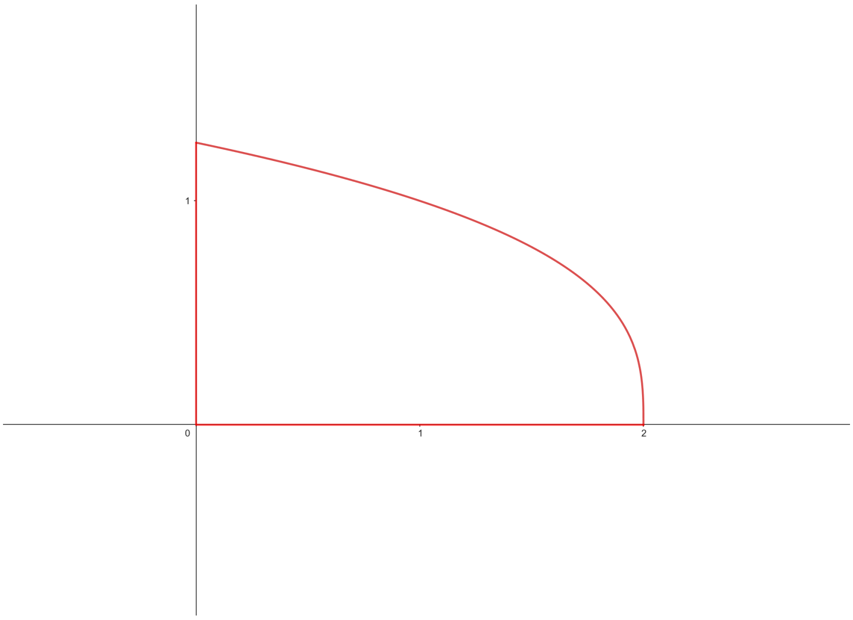
3. naloga [20 točk]

Naj bo

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt[3]{2-x}} \sqrt{8y - y^4}\ dy.$$

Skicirajte integracijsko območje, zamenjajte vrstni red integracije in izračunajte dvakratni integral.

Integracijsko območje omejujejo rdeče črte:



V njem so torej točke, katerih y-koordinata je med 0 in $\sqrt[3]{2}$. Iz

$$y = \sqrt[3]{2-x} \implies y^3 = 2 - x \implies x = 2 - y^3$$

sledi, da imamo po zamenjavi vrstnega reda integracije

$$I = \int_0^{\sqrt[3]{2}} dy \int_0^{2-y^3} \sqrt{8y - y^4}\ dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} (2 - y^3)\sqrt{8y - y^4}\ dy.$$

Uvedemo novo spremenljivko

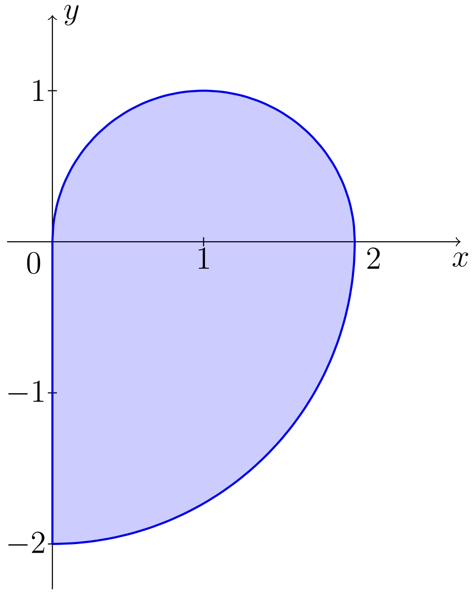
$$t = 8y - y^4, \quad dt = (8 - 4y^3)\ dy = 4(2 - y^3)\ dy$$

in dobimo

$$I = \int_0^{6\sqrt[3]{2}} \frac{1}{4}\sqrt{t}dt = \frac{1}{4}\left[2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{6\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{6}(6\sqrt[3]{2})^{3/2} = 2\sqrt{3}.$$

4. naloga [30 točk]

Izračunajte ploščino in položaj geometrijskega središča lika na sliki, ki je sestavljen iz polovice manjšega kroga in četrtine večjega kroga.



Manjši krog je omejen s krožnico $(x-1)^2+y^2=1$, večji pa s krožnico $x^2+y^2=4$. Ploščino lahko izračunamo kar iz formul za ploščino kroga in dobimo

$$S=\tfrac{1}{2}\pi\cdot 1^2+\tfrac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\tfrac{3}{2}\pi.$$

Za koordinati uporabimo integracijo v polarnih koordinatah. Tako je najprej

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{S(D)}\iint\limits_D x\,dx\,dy \\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r\,dr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r\,dr\right) \\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\varphi\,d\varphi\left[\tfrac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\left[\tfrac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2\cos\varphi}\right) \\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\tfrac{8}{3}\cos\varphi\,d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{8}{3}\cos^4\varphi\,d\varphi\right).
\end{aligned}$$

Za izračun drugega integrala uporabimo formulo za prehod od kvadrata k dvojnemu kotu in dobimo

$$\begin{aligned}
\cos^4\varphi &= (\cos^2\varphi)^2=(\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\varphi))^2=\tfrac{1}{4}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)= \\
&= \tfrac{1}{4}(1+2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{2}(1+\cos 4\varphi))=\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi+\tfrac{1}{8}\cos 4\varphi.
\end{aligned}$$

Tako je

$$\begin{aligned}
x_0 &= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \tfrac{8}{3}\cos\varphi\ d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\tfrac{4}{3}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 4\varphi\right) d\varphi\right)\\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\tfrac{8}{3}[\sin\varphi]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=0} + \left[\varphi + \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\sin 4\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\tfrac{8}{3}+\tfrac{\pi}{2}\right)\\
&= \tfrac{16}{9\pi}+\tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Podobno je

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{S(D)}\iint_D y\ dx\ dy\\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int_0^2 r\sin\varphi\cdot r\ dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\sin\varphi\cdot r\ dr\right)\\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\varphi\ d\varphi \left[\tfrac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\ d\varphi \left[\tfrac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2\cos\varphi}\right)\\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \tfrac{8}{3}\sin\varphi\ d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\ d\varphi\right).
\end{aligned}$$

V drugi integral vpeljemo novo spremenljivko

$$t=\cos\varphi, \quad dt = -\sin\varphi\ d\varphi,$$

in dobimo

$$\begin{aligned}
y_0 &= \tfrac{2}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \tfrac{8}{3}\sin\varphi\ d\varphi + \int_1^0 \left(-\tfrac{8}{3}t^3\right)\ dt\right)\\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(\tfrac{8}{3}[-\cos\varphi]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=0} + \tfrac{8}{3}\left[\tfrac{1}{4}t^4\right]_0^1\right)\\
&= \tfrac{2}{3\pi}\left(-\tfrac{8}{3}+\tfrac{2}{3}\right)\\
&= -\tfrac{4}{3\pi}.
\end{aligned}$$

2. kolokvij (5. 6. 2023)

1. naloga [25 točk]

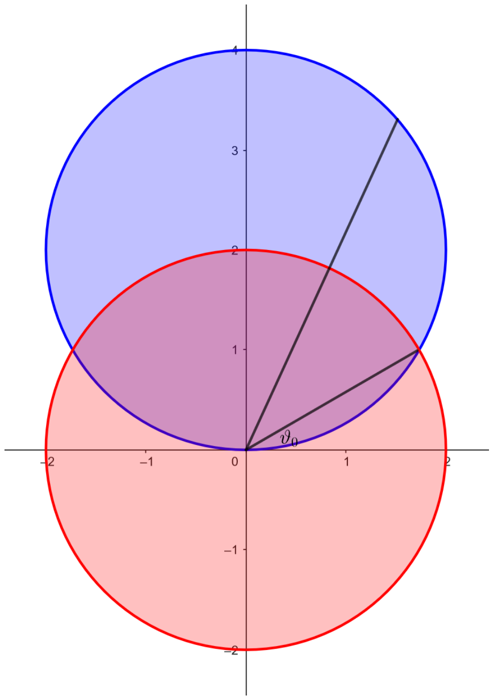
Izračunajte $I = \iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz$, kjer je $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4z\}$.

Desno neenačbo lahko prepišemo v obliki

$$x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4.$$

Telo G je torej del krogle s polmerom 2 in središčem v $(0,0,2)$, ki je od izhodišča oddaljen za vsaj 2.

Na skici je narisan prerez z xz-ravnino. Situacija je simetrična glede na os z, tako da je prerez enak za vsako ravnino, ki vsebuje os z. Telo G je tisti del modre krogle, ki leži zunaj rdeče.



Uporabimo sferne koordinate (r,φ,ϑ). Najmanjša ϑ je dosežena pri točkah na preseku robov obeh krogel, torej pri točkah, za katere velja

$$4 = x^2+y^2+z^2 = 4z.$$

Očitno imajo z-koordinato enako 1. Tako dobimo $\sin\vartheta_0 = \frac{1}{2}$, oziroma $\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$. Torej je $\vartheta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Za dano ϑ pa je $r \in [2, 4\sin\vartheta]$.
Sledi

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_G z\;dx\;dy\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_2^{4\sin\vartheta} r\sin\vartheta\cdot r^2\cos\vartheta\;dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=2}^{r=4\sin\vartheta} d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta(64\sin^4\vartheta-4)\;d\vartheta.
\end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $t=\sin\vartheta$, $dt=\cos\vartheta\;d\vartheta$ in dobimo

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}}^{1} (64t^5-4t)\;dt = \int_0^{2\pi}\left[64\cdot\frac{t^6}{6} - 4\cdot\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} d\varphi = 2\pi\cdot\left(\frac{21}{2}-\frac{3}{2}\right) = 18\pi.$$

2. naloga [25 točk]

Krivulji $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ sta dani s parametrizacijama

$$\mathcal{K} : \vec{p}(t) = (2t, \tfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \tfrac{1}{2}t^2),\ t > 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{L} : \vec{r}(t) = (t, \tfrac{1}{6}t^2, t),\ t > 0.$$

(a) Določite, pod kolikšnim kotom se sekata.

(b) Kolikokrat krivulja $\mathcal{K}$ seka ravnino $z = 5$? Odgovor utemljite.

(c) Izračunajte maso krivulje $\mathcal{K}$ med točkama $\vec{p}(1)$ in $\vec{p}(2)$, če je gostota v vsaki točki enaka $\rho(x, y, z) = \frac{z}{x}$.

(a) Najprej moramo določiti vsa sečišča. Iščemo torej taka $t, u > 0$, da velja $\vec{p}(t) = \vec{r}(u)$. Rešiti moramo sistem enačb

$$2t = u, \quad \tfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{6}u^2, \quad \tfrac{1}{2}t^2 = u.$$

Iz prve in tretje enačbe sledi

$$2t = \tfrac{1}{2}t^2.$$

Ker $t \neq 0$, iz tega sledi $t = 4$. Iz prve enačbe dobimo $u = 8$. Preveriti moramo še drugo enačbo, ki je sploh še nismo upoštevali. Res je izpolnjena, saj je

$$\tfrac{4}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \tfrac{32}{3} \quad \text{in} \quad \tfrac{1}{6} \cdot 8^2 = \tfrac{32}{3}.$$

Krivulji se torej sekata enkrat, in sicer v točki s krajevnim vektorjem

$$\vec{p}(4) = \vec{r}(8) = (8, \tfrac{32}{3}, 8).$$

Kot med krivuljama je kot med njunima tangentama v sečišču. Smerni vektor tangente nam podaja odvod parametrizacije. Velja

$$\dot{\vec{p}}(t) = (2, 2t^{\frac{1}{2}}, t) \quad \text{in} \quad \dot{\vec{p}}(4) = (2, 4, 4)$$

ter

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, \tfrac{1}{3}t, 1) \quad \text{in} \quad \dot{\vec{r}}(8) = (1, \tfrac{8}{3}, 1).$$

Kot izračunamo po formuli

$$\cos\varphi = \frac{\dot{\vec{p}}(4) \cdot \dot{\vec{r}}(8)}{|\dot{\vec{p}}(4)| \cdot |\dot{\vec{r}}(8)|} = \frac{(2, 4, 4) \cdot (1, \frac{8}{3}, 1)}{|(2, 4, 4)| \cdot |(1, \frac{8}{3}, 1)|} =$$
$$= \frac{2 + \frac{32}{3} + 4}{\sqrt{4 + 16 + 16} \cdot \sqrt{1 + \frac{64}{9} + 1}} = \frac{\frac{50}{3}}{6 \cdot \sqrt{\frac{82}{9}}}.$$

Torej je

$$\varphi = \arccos \frac{25}{3\sqrt{82}}.$$

(b) Ugotoviti moramo, kolikokrat je zadnja koordinata $\vec{p}(t)$ enaka 5, torej $\frac{1}{2}t^2 = 5$. Ker je $t > 0$, se to zgodi samo za $t = \sqrt{10}$. Krivulja $\mathcal{K}$ seka dano ravnino natanko enkrat.

(c) Maso krivulje dobimo, če integriramo gostoto. Ker je

$$\rho(\vec{p}(t)) = \rho(2t, \tfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \tfrac{1}{2}t^2) = \frac{\frac{1}{2}t^2}{2t} = \tfrac{1}{4}t$$

in

$$|\dot{\vec{p}}(t)| = |(2, 2t^{\frac{1}{2}}, t)| = \sqrt{4 + 4t + t^2} = 2 + t,$$

je masa enaka

$$m = \int\limits_{\mathcal{K}_{12}} \rho \; ds = \int\limits_1^2 \rho(\vec{p}(t))|\dot{\vec{p}}(t)| \; dt = \int\limits_1^2 \tfrac{1}{4}t \cdot (2 + t) \; dt =$$

$$= \tfrac{1}{4} \int\limits_1^2 (2t + t^2) \; dt = \tfrac{1}{4} \left[t^2 + \tfrac{t^3}{3}\right]_1^2 = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{20}{3} - \tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{4}{3}.$$

3. naloga [20 točk]

Izračunajte površino ploskve

$$\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = xy,\ x^2 + y^2 \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Naša ploskev je podana eksplicitno, namreč

$$z = xy, \quad (x,y) \in K,$$

kjer je

$$K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(K je tista četrtina kroga s središčem v izhodišču in polmerom $\sqrt{3}$, ki leži v prvem kvadrantu.) Za eksplicitno podane ploskve je

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dx\ dy,$$

pri čemer sta

$$p = \tfrac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{in} \quad q = \tfrac{\partial z}{\partial y} = x.$$

Torej je $dS = \sqrt{1 + y^2 + x^2}\ dx\ dy$. Površina ploskve $\mathcal{P}$ je

$$S(\mathcal{P}) = \iint\limits_{\mathcal{P}} 1\ dS = \iint\limits_{K} \sqrt{1 + y^2 + x^2}\ dx\ dy.$$

Za izračun tega dvojnega integrala preidemo k polarnim koordinatam in dobimo

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{P}) &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + r^2}\ r\ dr \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^4 \tfrac{\sqrt{R}}{2}\ dR \qquad (R = 1 + r^2,\ dR = 2r\ dr) \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{R^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{R=1}^{R=4} \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \tfrac{8-1}{3} \\
&= \tfrac{7\pi}{6}.
\end{aligned}$$

4. naloga [30 točk]

Dano je vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + yz, 1 - xy, 1 + xz).$$

(a) Izračunajte njegovo divergenco in rotor.

(b) Ali je polje $\vec{F}$ potencialno?

(c) Izračunajte pretok polja $\vec{F}$ skozi zgornjo stran polovice sfere

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}.$$

(Nasvet: uporabite Gaußov izrek.)

(a) Njegova divergence je

$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (x + yz, 1 - xy, 1 + xz) = 1 - x + x = 1,$

rotor pa

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + yz & 1 - xy & 1 + xz \end{vmatrix} = (0, y - z, -y - z).$$

(b) Ker $\operatorname{rot} \vec{F} \neq \vec{0}$, polje $\vec{F}$ ni potencialno.

(c) Divergenca polja $\vec{F}$ je zelo preprosta, tako da bi lahko uporabili Gaußov izrek. Vendar pa ploskev $\mathcal{P}$ ni sklenjena. Zato ji dodamo krog

$$\mathcal{O} = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Potem unija teh dveh ploskev določa zgornjo polkroglo

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}.$$

Po Gaußovem izreku velja

$$\iint\limits_{\vec{\mathcal{P}} \cup \vec{\mathcal{O}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\partial \vec{\mathcal{V}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F}\ dV.$$

Vzeti moramo zunanjo stran roba $\mathcal{V}$, torej zgornjo stran ploskve $\mathcal{P}$ in spodnjo stran kroga $\mathcal{O}$. Desna stran je enaka

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F}\ dV = \iiint\limits_{\mathcal{V}} 1\ dV = V(\mathcal{V}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4\pi \cdot 2^3}{3} = \tfrac{16\pi}{3}.$$

Enotska normala na $\vec{\mathcal{O}}$ je v vseh točkak enaka $-\vec{k}$. Tako je

$$\iint\limits_{\vec{\mathcal{O}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\mathcal{O}} \vec{F} \cdot (-\vec{k})\ dS = \iint\limits_{\mathcal{O}} (-1 - xz)\ dS = -\iint\limits_{\mathcal{O}} 1\ dS = -\pi \cdot 2^2 = -4\pi.$$

(Upoštevali smo, da na $\mathcal{O}$ velja $z = 0$.) Sledi

$$\iint\limits_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F}\ dV - \iint\limits_{\vec{\mathcal{O}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \tfrac{16\pi}{3} - (-4\pi) = \tfrac{28\pi}{3}.$$

1. izpit (21. 6. 2023)

1. naloga [25 točk]

Dan je funkcijski predpis

$$f(x,y) = (x^2 - x + 1)\sqrt{9 - y^2}.$$

(a) Poiščite naravno definicijsko območje in ga narišite.

(b) Poiščite globalne ekstreme dane funkcije na $P = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

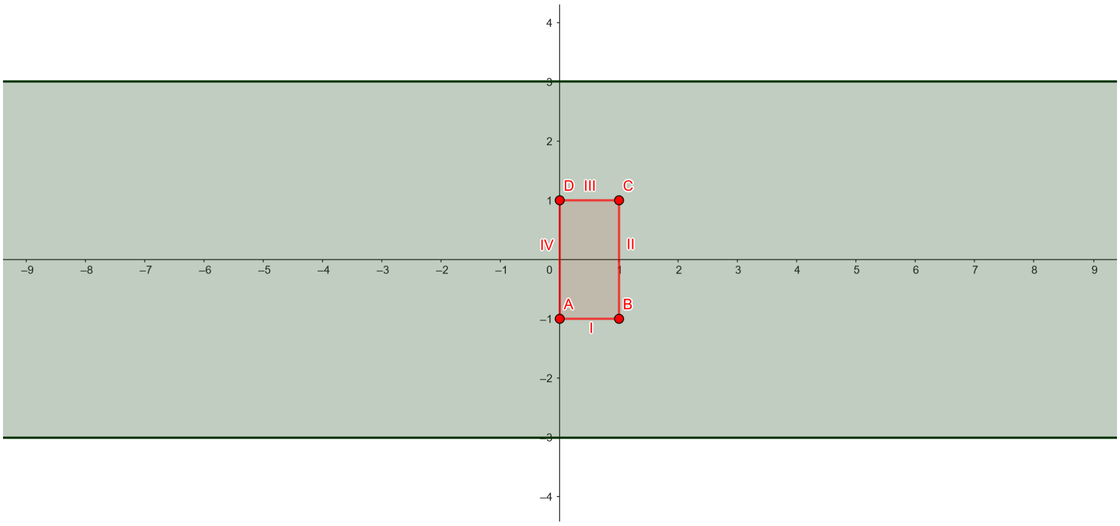
(a) Edina omejitev predpisa je, da mora biti izraz pod korenom nenegativen, torej

$$9 - y^2 \geq 0 \implies y^2 \leq 9 \implies y \in [-3, 3].$$

Naravno definicijsko območje je torej pas

$$D_f = \mathbb{R} \times [-3, 3].$$

Skicirano je na spodnji sliki, na kateri je v rdeči barvi narisan tudi pravokotnik P:



(b) Zvezna funkcija na zaprti in omejeni množici zagotovo zavzame svoj minimum in maksimum. Če je odvedljiva, se to lahko zgodi v stacionarnih točkah v notranjosti ali pa v robnih točkah. Zato najprej poiščimo stacionarne točke v notranjosti P, to je točke, kjer je gradient enak 0. Torej mora veljati

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 1)\sqrt{9 - y^2}$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 - x + 1)\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}$$

Koren v prvi enačbi nikjer v P ni enak 0, zato je edina rešitev $x = \frac{1}{2}$. Če to vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$0 = \frac{3}{4}\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}},$$

zato mora biti $y = 0$. Točka $(\frac{1}{2}, 0)$ res leži v notranjosti pravokotnika P in je zato prvi kandidat za globalni ekstrem:

$$\boxed{f(\tfrac{1}{2}, 0) = \tfrac{9}{4}}$$

Sedaj pa obravnavajmo še rob.

Najprej stranice:

- Stranica I:

  Za parameter lahko vzamemo kar x-koordinato. Torej opazujemo funkcijo
  $$g_{\mathrm{I}}(t) = f(t, -1) = (t^2 - t + 1)\sqrt{8}, \quad t \in (0, 1).$$
  Edina ničla odvoda $g_{\mathrm{I}}'(t) = (2t - 1)\sqrt{8}$ je $t = \frac{1}{2}$, ki leži znotraj intervala. Drugi kandidat je
  $$\boxed{f(\tfrac{1}{2}, -1) = g_{\mathrm{I}}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{4}\sqrt{8} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}}$$

- Stranica II:

  Za parameter lahko vzamemo y-koordinato. Imamo
  $$g_{\mathrm{II}}(t) = f(1, t) = \sqrt{9 - t^2}, \quad t \in (-1, 1).$$
  Odvod $g_{\mathrm{II}}'(t) = -\frac{t}{\sqrt{9-t^2}}$ je enak 0 pri $t = 0$, ki leži znotraj intervala. Tretji kandidat je
  $$\boxed{f(1, 0) = g_{\mathrm{II}}(0) = 3}$$

- Stranica III:

  Tu imamo enako situacijo kot pri stranici I, saj spet dobimo
  $$g_{\mathrm{III}}(t) = f(t, 1) = (t^2 - t + 1)\sqrt{8}, \quad t \in (0, 1).$$
  Četrti kandidat je
  $$\boxed{f(\tfrac{1}{2}, 1) = g_{\mathrm{III}}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}}$$

- Stranica IV:

  Tu lahko uporabimo izračun za stranico II, saj imamo
  $$g_{\mathrm{IV}}(t) = f(0, t) = \sqrt{9 - t^2}, \quad t \in (-1, 1).$$
  Peti kandidat je tako
  $$\boxed{f(0, 0) = g_{\mathrm{II}}(0) = 3}$$

Preostanejo še oglišča A, B, C in D: V vseh ima f isto vrednost

$$\boxed{f(0, -1) = f(1, -1) = f(1, 1) = f(0, 1) = 2\sqrt{2}}$$

Velja

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} < \frac{9}{4} < 2\sqrt{2} < 3.$$

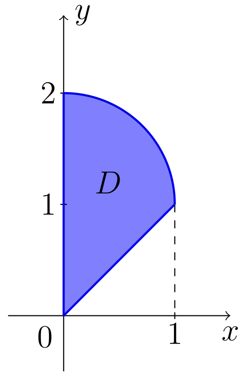
Torej je najmanjša vrednost funkcije f na pravokotniku P enaka $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ in je dosežena natanko v točkah $(\frac{1}{2}, \pm 1)$, njena največja vrednost pa je 3, zavzame pa jo v točkah $(0, 0)$ in $(1, 0)$.

2. naloga [25 točk]

Podan je integral

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

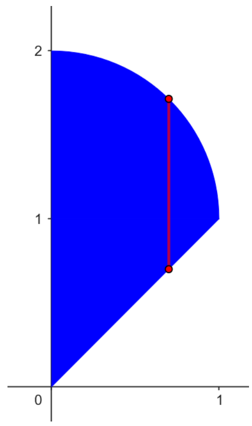
kjer je lik D sestavljen iz četrtine kroga s središčem v $(0,1)$ in trikotnika.



(a) Zapišite integral I kot dvakratni integral v kartezičnih koordinatah.

(b) Zapišite integral I kot dvakratni integral v polarnih koordinatah.

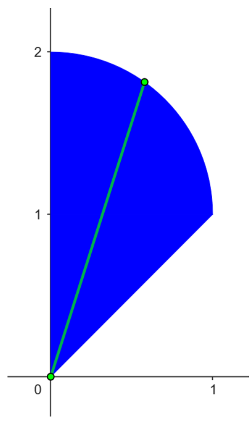
(c) Izračunajte I, če je $f(x,y) = xy$.



(a) Če je zunanji integral po spremenljivki x, potem nam lika D ni treba deliti na več delov. Točke lika D imajo koordinato x med 0 in 1, za vsak x pa moramo integrirati po spremenljivki y od premice $y = x$ do krožnice $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (rdeča črta na skici). Torej

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\; dy.$$

(b) Očitno za točke lika D velja $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Za vsakega od teh kotov pa imamo žarek iz izhodišča, ki se konča na krožnici (zelena črta na skici). Za točke na krožnici $x^2 + (y-1)^2 = 1$ v polarni koordinatah velja



$$\begin{aligned}
(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi - 1)^2 &= 1\\
r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi + 1 &= 1\\
r^2 - 2r\sin\varphi &= 0\\
r(r - 2\sin\varphi) &= 0
\end{aligned}$$

Zanima nas neničelna rešitev. Torej je

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\; r\; dr.$$

(c) Za konkretno funkcijo je

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ r\ dr = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\ dr =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\varphi \sin^5\varphi\ d\varphi = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} 4t^5\ dt = 4\left[\frac{t^6}{6}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{7}{12},$$

pri čemer smo uvedli novo spremenljivko $t = \sin\varphi$, $dt = \cos\varphi\ d\varphi$.

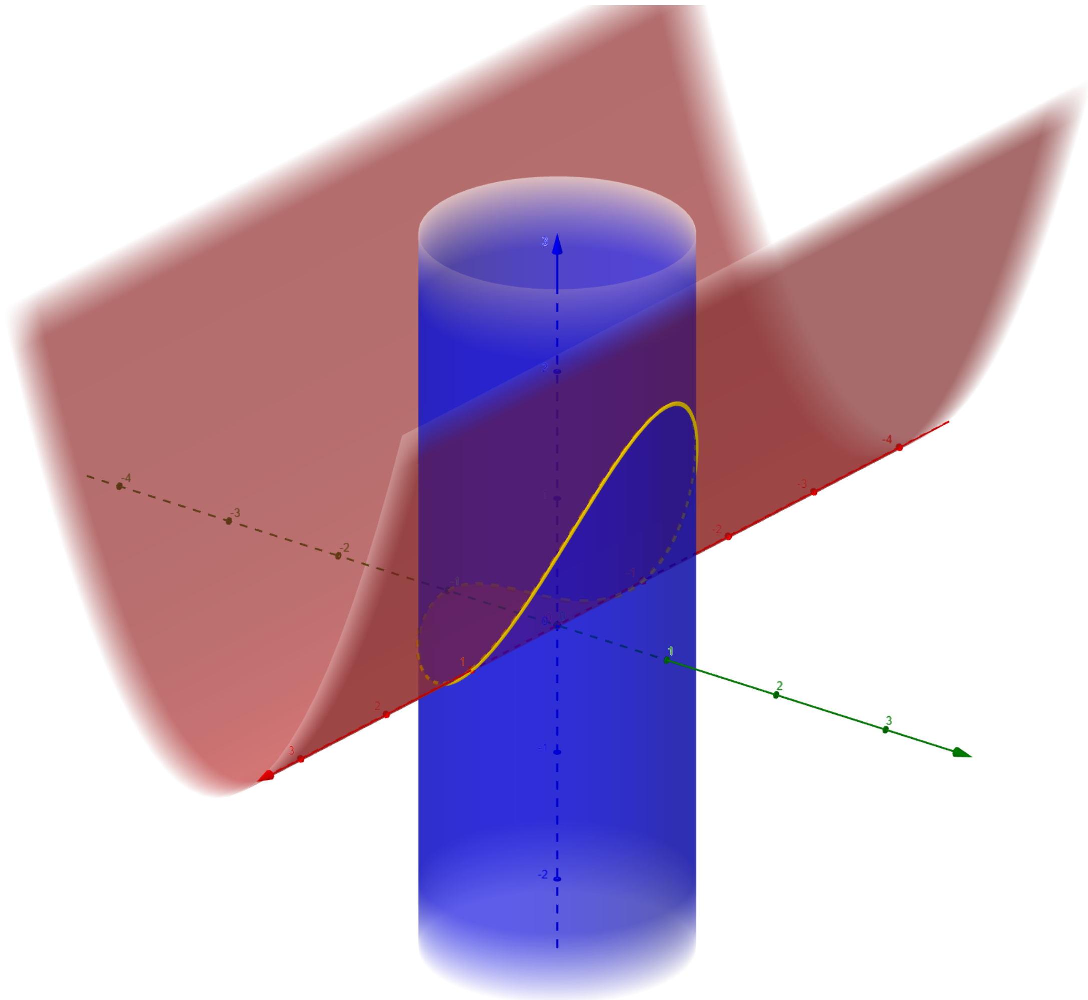
3. naloga [35 točk]

Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, 1)$ in krivulja $\vec{K}$ presek plašča valja $x^2 + y^2 = 1$ in ploskve $z = y^2 + y$, orientirana v smeri urinega kazalca, če jo gledamo iz točke $T(0, 0, 5)$. Izračunajte

$$\oint_{\vec{K}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

direktno in z uporabo Stokesovega izreka.

Na sliki sta prikazani ploskvi, katerih presek je krivulja K:



Za direkten izračun krivuljnega integrala moramo najprej parametrizirati krivuljo $\vec{K}$. Prvi predpis določa, da pari (x, y) ležijo na krožnici s polmerom 1 in središčem v $(0, 0)$. Nato vstavimo y v drugi predpis in dobimo še z. Torej

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin^2 t + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Je pa orientacija, ki jo porodi ta parametrizacija, ravno nasprotna, kar bomo upoštevali s predznakom minus pred integralom. Krivuljni integral 2. vrste je enak

$$\int_{\vec{K}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt.$$

Ker je

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\sin t, \sin^2 t + \sin t, 1)$$

in

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 2\sin t\cos t + \cos t),$$

moramo integrirati funkcijo

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = -\sin^2 t + \sin^2 t\cos t + 3\sin t\cos t + \cos t.$$

Integrali produktov naravnih potenc sinusa in kosinusa po intervalu $[0, 2\pi]$ so enaki 0, če je vsaj ena potenca liha. Torej je

$$\int\limits_{\vec{K}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\ dt = \tfrac{1}{2}\left[t - \tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi.$$

Če želimo uporabiti Stokesov izrek, moramo najprej izbrati tako orientirano ploskev $\vec{P}$, da bo $\vec{K}$ ravno njen rob. Ena možnost je, da vzamemo del ploskve $z = y^2 + y$ nad enotskim krogom, torej

$$z = y^2 + y, \quad (x, y) \in \Delta,$$

kjer je Δ krog $x^2 + y^2 \leq 1$. Po Stokesovem izreku je

$$\int\limits_{\vec{K}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\vec{P}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Po definiciji je rotor enak

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & 1 \end{vmatrix} = (0 - 1, 0 - 0, 0 - 1) = (-1, 0, -1).$$

Ker je ploskev podana eksplicitno, je normala $(p, q, -1)$. (Vzeli smo različico z negativno zadnjo koordinato, saj moramo integrirati po spodnji strani ploskve $\vec{P}$.) Iz

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{in} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 1$$

sledi

$$\iint\limits_{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\Delta} (-1, 0, -1) \cdot (0, 2y + 1, -1)\ dx\ dy = \iint\limits_{\Delta} 1\ dx\ dy = S(\Delta) = \pi.$$

4. naloga [15 točk]

Rešite začetni problem

$$y' + y\tan x = (\cos x)^2, \quad y(0) = 2.$$

Enačba je linearna, tako da najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo

$$y' + y\tan x = 0.$$

Le-ta ima ločljive spremenljivke:

$$\begin{aligned}
y' &= -y\tan x \\
\tfrac{dy}{dx} &= -y\tan x \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \\
\ln y &= \ln\cos x + \ln C \\
y &= C\cos x
\end{aligned}$$

Rešitev nehomogene enačbe dobimo z variacijo konstante, t. j. z nastavkom

$$y = C(x)\cos x.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
y' + y\tan x &= (\cos x)^2 \\
C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} &= (\cos x)^2 \\
C'(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

Torej lahko vzamemo $C(x) = \sin x$. Splošna rešitev je posledično

$$y = \sin x \cdot \cos x + C\cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ker mora veljati

$$2 = y(0) = 0 + C \cdot 1,$$

je $C = 2$. Torej

$$y(x) = (\sin x + 2)\cos x.$$

2. izpit (5. 7. 2023)

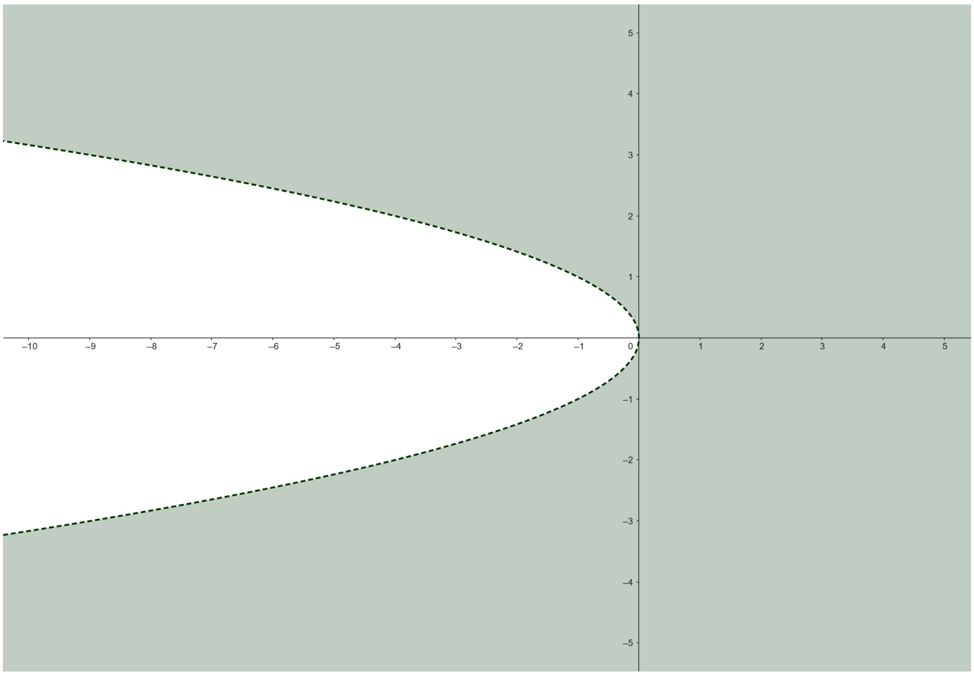
1. naloga [25 točk]

Dan je funkcijski predpis
$$f(x,y) = x\ \ln(x+y^2).$$

(a) Poiščite naravno definicijsko območje in ga narišite.

(b) Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme dane funkcije.

(a) Zaradi logaritma v predpisu mora biti $x + y^2 > 0$. Naravno definicijsko območje je tako
$$D_f = \{(x,y) : x > -y^2\}.$$



(b) Lokalni ekstremi lahko nastopijo le v stacionarnih točkah, v katerih je gradient enak 0:
$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot \ln(x+y^2) + x \cdot \frac{1}{x+y^2} = \ln(x+y^2) + \frac{x}{x+y^2}$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{x+y^2} \cdot 2y = \frac{2xy}{x+y^2}$$

Vidimo, da je $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, če je $x = 0$ ali $y = 0$.

- Za $x = 0$ dobimo iz prve enačbe
$$0 = \ln(y^2) \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1.$$

- Če pa je $y = 0$, pa mora veljati
$$0 = \ln x + 1 \implies \ln x = -1 \implies x = e^{-1}.$$

Funkcija f ima tri stacionarne točke: $(0,-1)$, $(0,1)$ in $(e^{-1},0)$.

Lokalne ekstreme določimo s pomočjo Hessejevem matrike drugih odvodov. Ker so le-ti enaki

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{x+y^2} + \frac{1\cdot(x+y^2)-x\cdot 1}{(x+y^2)^2} = \frac{x+2y^2}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{2y\cdot(x+y^2)-2xy\cdot 1}{(x+y^2)^2} = \frac{2y^3}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2x\cdot(x+y^2)-2xy\cdot 2y}{(x+y^2)^2} = \frac{2x^2-2xy^2}{(x+y^2)^2}
\end{aligned}$$

je

$$(\mathcal{H}f)(x,y) = \tfrac{1}{(x+y^2)^2}\begin{bmatrix} x+2y^2 & 2y^3 \\ 2y^3 & 2x^2-2xy^2 \end{bmatrix}.$$

Matriki

$$(\mathcal{H}f)(0,-1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad (\mathcal{H}f)(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

imata determinanto enako -4. Ker je negativna, v teh dveh točkah funkcija f nima lokalnih ekstremov.

Matrika

$$(\mathcal{H}f)(e^{-1},0) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ima determinanto $2e$. V točki $(e^{-1},0)$ imamo lokalni ekstrem, in sicer lokalni minimum, saj je element levo zgoraj pozitiven.

2. naloga [30 točk]

Ploskev $\mathcal{P}$ je podana s parametrizacijo

$$\vec{p}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2\cos v), \quad u \in [0,2],\ v \in [0, 2\pi).$$

(a) Preverite, da leži točka $T_0(-1,0,-1)$ na ploskvi $\mathcal{P}$.

(b) Določite enačbo tangentne ravnine na ploskev $\mathcal{P}$ v točki T_0.

(c) Izračunajte pretok polja $\vec{F}(x,y,z) = (0, z, x^2+y^2)$ skozi zgornjo stran ploskve $\mathcal{P}$.

(a) Poiskati moramo ustrezna u in v, da velja

$$(-1,0,-1) = \vec{p}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2\cos v).$$

Iz enakosti drugih koordinat sledi $u = 0$, toda v tem primeru na desni dobimo izhodišče, ali $\sin v = 0$. Na intervalu $[0, 2\pi)$ ima sinus dve ničli: 0 in π. Za $v = 0$ dobimo enačbo $(-1,0,-1) = (u,0,u^2)$, ki nima rešitve. Če vstavimo $v = \pi$, pa dobimo

$$(-1,0,-1) = (-u, 0, -u^2).$$

$u = 1$ reši to enačbo (in leži v intervalu [0,2]). Točka T_0 torej leži na ploskvi, saj je $\vec{p}(1,\pi) = (-1,0,-1)$.

(b) Za parametrično podano ploskev dobimo normalo na ploskev (in tako na njeno tangentno ravnino) kot

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}.$$

Parcialna odvoda po parametrih sta enaka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(u,v) &= (\cos v, \sin v, 2u\cos v) \\ \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(u,v) &= (-u\sin v, u\cos v, -u^2\sin v) \end{aligned}$$

Njun vektorski produkt pa je

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 2u\cos v \\ -u\sin v & u\cos v & -u^2\sin v \end{vmatrix} = \big(u^2(-\sin^2 v - 2\cos^2 v), -u^2\sin v\cos v, u\big).$$

V točki T_0, torej pri $u = 1$ in $v = \pi$, je normalni vektor enak

$$\vec{n}_{T_0} = (-2, 0, 1).$$

(Konkretna u in v bi lahko vstavili še pred računanjem vektorskega produkta, a bomo splošno formula potrebovali v točki (c).) Enačba tangentne ravnine je posledično

$$-2x + z = -2 \cdot (-1) + (-1) = 1.$$

(c) Pretok polja $\vec{F}$ skozi $\vec{\mathcal{P}}$ je

$$I = \iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Delta} \vec{F}(\vec{p}(u,v)) \cdot (\tfrac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \vec{p}}{\partial v}) \; du \; dv,$$

pri čemer je $\Delta = [0,2] \times [0,2\pi]$. Vektorski produkt ima pozitivno zadnjo koordinato, tako da gre res za normalo na zgornjo stran ploskve $\mathcal{P}$. Ker je

$$\vec{F}(\vec{p}(u,v)) = \vec{F}(u\cos v, u\sin v, u^2\cos v) = (0, u^2\cos v, u^2),$$

moramo integrirati funkcijo

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{p}(u,v)) \cdot (\tfrac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \vec{p}}{\partial v}) &= (0, u^2\cos v, u^2) \cdot \big(u^2(-\sin^2 v - 2\cos^2 v), -u^2 \sin v \cos v, u\big) \\ &= -u^4 \sin v \cos^2 v + u^3.\end{aligned}$$

Torej je

$$I = \int_0^2 du \int_0^{2\pi} (-u^4 \sin v \cos^2 v + u^3) \; dv = \int_0^2 (0 + u^3 \cdot 2\pi) \; du = 2\pi \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

(Integral produkta naravnih potenc sinusa in kosinusa po $[0, 2\pi]$ je enak 0, če je vsaj en eksponent lih.)

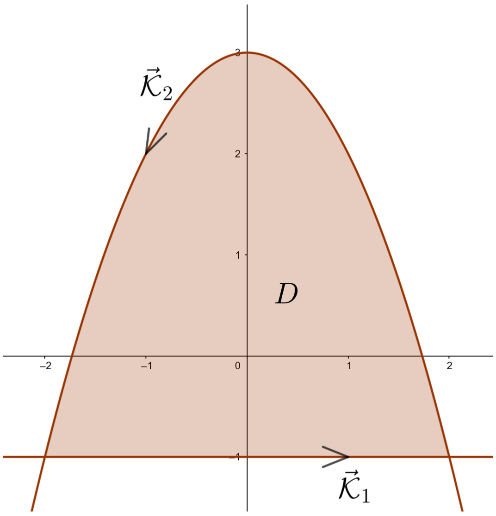
3. naloga [30 točk]

Dan je integral

$$I = \oint_{\overrightarrow{\mathcal{K}}} x^2y\ dx + (y-1)\ dy,$$

kjer je $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ pozitivno orientiran rob območja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ -1 \leq y \leq 3 - x^2\}$. Izračunajte integral I direktno in s pomočjo Greenovega izreka.

Funkcija, ki jo moramo integrirati, je $\vec{F}(x,y) = (x^2y, y-1)$.



Območje D leži med vodoravno premico $y = -1$ in parabolo $y = 3 - x^2$. Iz

$$3 - x^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

sledi, da se sekata v točkah $(-2,-1)$ in $(2,-1)$. Rob $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ območja D razdelimo na daljico $\overrightarrow{\mathcal{K}}_1$, ki je orientirana od leve proti desni, in na del parabole $\overrightarrow{\mathcal{K}}_2$, ki je orientiran od desne proti levi.

Za daljico $\overrightarrow{\mathcal{K}}_1$ vzamemo za parametrizacijo kar

$$\vec{p}_1(t) = (t, -1), \quad t \in [-2, 2].$$

Inducirana orientacija je pravilna. Iz

$$\dot{\vec{p}}_1(t) = (1,0) \quad \text{in} \quad \vec{F}(\vec{p}_1(t)) = \vec{F}(t,-1) = (t^2 \cdot (-1), -1-1) = (-t^2, -2)$$

sledi

$$\vec{F}(\vec{p}_1(t)) \cdot \dot{\vec{p}}_1(t) = (-t^2, -2) \cdot (1,0) = -t^2.$$

Dobimo

$$\int_{\overrightarrow{\mathcal{K}}_1} x^2y\ dx + (y-1)\ dy = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\vec{p}_1(t)) \cdot \dot{\vec{p}}_1(t)\ dt = \int_{-2}^{2} -t^2\ dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3\right]_{-2}^{2} = -\tfrac{8}{3} - \tfrac{8}{3} = -\tfrac{16}{3}.$$

Del parabole najlažje parametriziramo s spremenljivko x:

$$\vec{p}_2(t) = (t, 3 - t^2), \quad t \in [-2, 2].$$

Tu pa je orientacija napačna, kar bomo upoštevali s predznakom minus. Potem je

$$\dot{\vec{p}}_2(t) = (1, -2t) \quad \text{in} \quad \vec{F}(\vec{p}_2(t)) = \vec{F}(t, 3-t^2) = (t^2(3-t^2), 3-t^2-1) = (3t^2 - t^4, 2 - t^2)$$

ter

$$\vec{F}(\vec{p}_2(t)) \cdot \dot{\vec{p}}_2(t) = (1, -2t) \cdot (3t^2 - t^4, 2 - t^2) = -t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 4t.$$

Tako dobimo

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}_2} x^2 y \; dx + (y-1) \; dy = -\int_{-2}^{2} (-t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 4t) \; dt = -\left[-\tfrac{1}{5}t^5 + \tfrac{1}{2}t^4 + t^3 - 2t^2\right]_{-2}^{2} =$$

$$= -\left(-\tfrac{32}{5} + 8 + 8 - 8\right) + \left(\tfrac{32}{5} + 8 - 8 - 8\right) = \tfrac{64}{5} - 16 = -\tfrac{16}{5}.$$

Torej je

$$I = \int_{\vec{\mathcal{K}}} x^2 y \; dx + (y-1) \; dy = -\tfrac{16}{3} - \tfrac{16}{5} = -\tfrac{128}{15}.$$

Zdaj izračunajmo isti integral še s pomočjo Greenove formule

$$\oint_{\vec{\mathcal{K}}} P \; dx + Q \; dy = \iint_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right) \; dx \; dy.$$

V našem primeru sta $P(x,y) = x^2 y$ in $Q(x,y) = y-1$, tako da moramo integrirati funkcijo

$$\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y} = 0 - x^2 = -x^2.$$

Sledi

$$I = \iint_D -x^2 \; dx \; dy = -\int_{-2}^{2} x^2 \; dx \int_{-1}^{3-x^2} dy = -\int_{-2}^{2} x^2(4-x^2) \; dx = \quad \text{(upoštevamo sodost)}$$

$$= -2\int_0^2 (4x^2 - x^4) \; dx = -2\left[\tfrac{4x^3}{3} - \tfrac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=2} = -2\left(\tfrac{32}{3} - \tfrac{32}{5}\right) = -\tfrac{128}{15}.$$

4. naloga [15 točk]

Rešite začetni problem

$$y' = xy^2 + x, \quad y(0) = 1$$

in naredite preizkus.

Enačba ima ločljivi spremenljivki, saj lahko desno stran zapišemo v obliki produkta

$$y' = x(y^2 + 1).$$

Konstantne rešitve ni, saj izraz $y^2 + 1$ nima ničle. Vse rešitve tako dobimo po postopku

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dx} &= x(y^2+1) \\ \int \tfrac{1}{y^2+1}\, dy &= \int x\, dx \\ \arctan y &= \tfrac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Najprej lahko izračunamo konstanto C za dani začetni pogoj:

$$\arctan y(0) = \tfrac{0^2}{2} + C \implies \arctan 1 = C \implies C = \tfrac{\pi}{4}.$$

Torej je rešitev začetnega problema

$$y = \tan(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{\pi}{4}).$$

Naredimo še preizkus. Iz $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ sledi

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4})} \cdot x.$$

Po drugi strani pa velja

$$x(y^2+1) = x\left(\tan^2(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{\pi}{4}) + 1\right) = x \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4})}.$$

Pri tem smo uporabili trigonometrično enakost

$$\tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Torej y dejansko ustreza dani diferencialni enačbi. Velja pa tudi

$$y(0) = \tan(\tfrac{0^2}{2} + \tfrac{\pi}{4}) = \tan\tfrac{\pi}{4} = 1.$$

3. izpit (6. 9. 2023)

1. naloga [25 točk]

Gostota kovinske sfere $x^2+y^2+z^2=1$ je dana s funkcijo $\rho(x,y,z)=x^2-2x-y^2+z^2+3$. Poiščite točke na sferi, v katerih je gostota največja oz. najmanjša.

Gre za iskanje vezanega ekstrema, saj iščemo ekstreme funkcije

$$\rho(x,y,z)=x^2-2x-y^2+z^2+3$$

na množici ničel vezi

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1.$$

Langrangeeva funkcija je

$$F(x,y,z,\lambda)=\rho(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=x^2-2x-y^2+z^2+3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

Kandidati za vezane ekstreme so njene stacionarne točke, torej rešitve sistema

$$\begin{aligned}
0&=\tfrac{\partial F}{\partial x}=2x-2+\lambda\cdot 2x=2(x+\lambda x-1)\\
0&=\tfrac{\partial F}{\partial y}=-2y+\lambda\cdot 2y=2(-1+\lambda)y\\
0&=\tfrac{\partial F}{\partial z}=2z+\lambda\cdot 2z=2(1+\lambda)z\\
0&=\tfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1
\end{aligned}$$

Vidimo, da je druga enačba izpolnjena, če je $\lambda=1$ ali $y=0$.

- Če je $\lambda=1$, se prva enačba glasi

  $$0=2(2x-1),\quad \text{torej je}\quad x=\tfrac{1}{2},$$

  tretja pa

  $$0=4z,\quad \text{oziroma}\quad z=0.$$

  Upoštevamo še zadnjo enačbo

  $$0=(\tfrac{1}{2})^2+y^2+0^2-1$$

  in dobimo $y^2=\frac{3}{4}$. Ta možnost nam je torej dala kandidata $(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

- Naj bo $y=0$. Iz tretje enačbe sledi, da je $\lambda=-1$ ali $z=0$. Prva možnost ne vodi do rešitve. Če namreč $\lambda=-1$ vstavimo v prvo enačbo, dobimo $0=-2$. Torej mora biti $z=0$. Iz zadnje enačbe potem sledi $x^2=1$. Sedaj smo spet dobili dva kandidata, in sicer $(\pm 1,0,0)$.

Izračunajmo vrednosti gostote ρ v vseh kandidatih:

- $\rho(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)=(\frac{1}{2})^2-2\cdot\frac{1}{2}-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+0^2+3=\frac{3}{2}$,
- $\rho(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)=(\frac{1}{2})^2-2\cdot\frac{1}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+0^2+3=\frac{3}{2}$,
- $\rho(1,0,0)=1^2-2\cdot 1-0^2+0^2+3=2$,
- $\rho(-1,0,0)=(-1)^2-2\cdot(-1)-0^2+0^2+3=6$.

Torej je minimalna vrednost gostote ρ na sferi $x^2+y^2+z^2=1$ enaka $\frac{3}{2}$ in je dosežena v točkah $(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, njena maksimalna vrednost pa je 6, in sicer v točki $(-1,0,0)$.

2. naloga [30 točk]

Podani sta vektorsko polje

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1, x^2+z, y)$$

in orientirana krivulja

$$\vec{\mathcal{K}}: \ \vec{p}(t) = (3\cos t, 3\sin t, (t^2+2)^{\frac{3}{2}}), \quad t \in [0,\pi].$$

(a) Ali je polje $\vec{F}$ potencialno? Če je, določite njegov potencial.

(b) Izračunajte $\displaystyle\int_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F}\cdot d\vec{s}$.

(c) Izračunajte dolžino krivulje $\vec{\mathcal{K}}$.

(a) Najprej izračunamo rotor polja $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\times\vec{F}(x,y,z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+1 & x^2+z & y \end{vmatrix} = (1-1, -(0-0), 2x-2x) = (0,0,0).$$

Definicijsko območje polja $\vec{F}$ je cel $\mathbb{R}^3$, ki je enostavno povezana množica. Zato iz $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ sledi, da je polje $\vec{F}$ potencialno. Poiskati moramo skalarno funkcijo u, za katero je

$$\operatorname{grad} u = \vec{F}.$$

Iz enakosti prvih koordinat dobimo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy+1 \ \Rightarrow \ u(x,y,z) = \int (2xy+1)\ dx + f(y,z) = x^2y + x + f(y,z).$$

Če ta nastavek vstavimo v drugo enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2+z,$$

dobimo

$$x^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(y,z) = x^2+z \ \Rightarrow \ f(y,z) = \int z\ dy = yz + g(z).$$

Na koncu vstavimo $u(x,y,z) = x^2y + x + yz + g(z)$ še v tretjo enačbo:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y \ \Rightarrow \ y + g'(z) = y \ \Rightarrow \ g'(z) = 0 \ \Rightarrow \ g(z) = \text{konst.}$$

En potencial je torej

$$u(x,y,z) = x^2y + x + yz.$$

(b) Ker je polje potencialno, je njegov krivuljni integral razlika vrednosti njegovega potenciala v krajiščih krivulje $\vec{p}(0) = (3, 0, 2^{\frac{3}{2}})$ in $\vec{p}(\pi) = (-3, 0, (\pi^2 + 2)^{\frac{3}{2}})$:

$$\int\limits_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = u(\vec{p}(\pi)) - u(\vec{p}(0)) = (0 - 3 + 0) - (0 + 3 + 0) = -6.$$

(c) Za izračun dolžine potrebujemo

$$\dot{\vec{p}}(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, \tfrac{3}{2}(t^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t)$$

in

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{p}}(t)|^2 &= (-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + (3t(t^2 + 2)^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 9t^2(t^2 + 2) \\ &= 9(1 + 2t^2 + t^4) \\ &= 9(1 + t^2)^2. \end{aligned}$$

Dolžina krivulje $\vec{\mathcal{K}}$ je

$$\ell = \int\limits_0^\pi |\dot{\vec{p}}(t)| \; dt = \int\limits_0^\pi 3(1 + t^2) \; dt = \left[3t + t^3\right]_0^\pi = 3\pi + \pi^3.$$

3. naloga [30 točk]

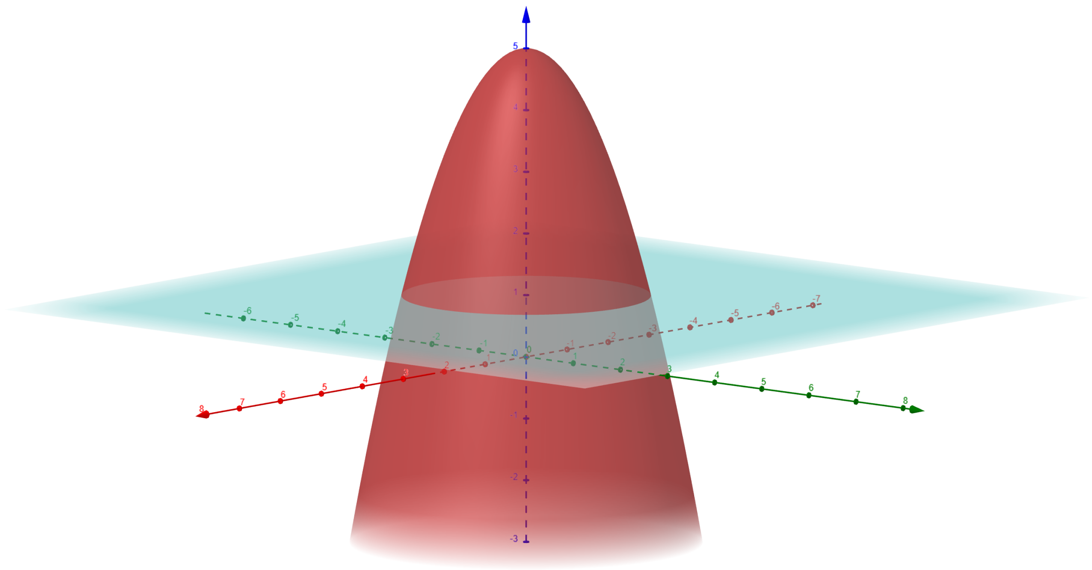
Dana je ploskev $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5 - x^2 - y^2, z \geq 1\}$.

(a) Izračunajte površino ploskve $\mathcal{P}$.

(b) Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (-ye^{1+z}, x + z^2, z)$ skozi zgornjo stran ploskve $\mathcal{P}$.

Namig: Lahko si pomagate z ustreznim integralskim izrekom.

Ploskev $\mathcal{P}$ je tisti del parabolične ploskve $z = 5 - x^2 - y^2$ (na sliki obarvana rdeče), ki leži nad ravnino $z = 1$:



(a) Ploskev je podana eksplicitno z

$$z = z(x, y) = 5 - x^2 - y^2, \quad (x, y) \in D,$$

pri čemer množico D dobimo iz pogoja $z \geq 1$:

$$5 - x^2 - y^2 \geq 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \leq 4.$$

Množica D je torej krog s središčem v $(0, 0)$ in polmerom 2.

Za eksplicitno podane ploskve je

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\; dx\; dy,$$

pri čemer sta

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad \text{in} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Površina ploskve $\mathcal{P}$ je

$$S(\mathcal{P}) = \iint_{\mathcal{P}} 1\; dS = \iint_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\; dx\; dy.$$

Uporabimo polarne koordinate in dobimo

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{P}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\; r\; dr \\
&= 2\pi \cdot \int_1^{17} \frac{\sqrt{R}}{8}\; dR \qquad (R = 1+4r^2,\; dR = 8r\; dr) \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \left[\frac{R^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{R=1}^{R=17} \\
&= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1).
\end{aligned}
$$

(b) Divergenca polja $\vec{F}$ je zelo preprosta, namreč:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x,y,z) = (\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}) \cdot (-ye^{1+z}, x+z^2, z) = 0+0+1 = 1.$$

To nas prevede na idejo, da bi uporabili Gaußov izrek. Vendar pa ploskev $\mathcal{P}$ ni sklenjena. Zato ji dodamo krog

$$\mathcal{O} = \{(x,y,1) : x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Unija teh dveh ploskev je sklenjena in omejuje telo

$$\mathcal{V} = \{(x,y,z) : z \leq 5 - x^2 - y^2, z \geq 1\}.$$

Po Gaußovem izreku velja

$$\iint\limits_{\vec{\mathcal{P}} \cup \vec{\mathcal{O}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F}\; dV.$$

Na robu $\mathcal{V}$ moramo vzeti zunanjo normalo, torej vzamemo na $\mathcal{P}$ res zgornjo stran, na $\vec{\mathcal{O}}$ pa spodnjo. Desna stran je enaka

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F}\; dV = \iiint\limits_{\mathcal{V}} 1\; dV = \iint\limits_{D} dx\; dy \int\limits_{1}^{5-x^2-y^2} dz = \iint\limits_{D} (4-x^2-y^2)\; dx\; dy = \\
= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4-r^2)\; r\; dr = 2\pi \cdot \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 8\pi.
\end{aligned}
$$

Enotska normala na $\mathcal{O}$ je v vseh točkam enaka $-\vec{k}$. Tako je

$$\iint\limits_{\vec{\mathcal{O}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\mathcal{O}} \vec{F} \cdot (-\vec{k})\; dS = \iint\limits_{\mathcal{O}} (-z)\; dS = -\iint\limits_{\mathcal{O}} 1\; dS = -\pi \cdot 2^2 = -4\pi.$$

(Upoštevali smo, da na $\mathcal{O}$ velja $z = 1$.) Sledi

$$\iint\limits_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F}\; dV - \iint\limits_{\vec{\mathcal{O}}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 8\pi - (-4\pi) = 12\pi.$$

4. naloga [15 točk]

Rešite začetni problem

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 5.$$

Gre za homogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Za določitev splošne rešitve potrebujemo ničle karakterističnega polinoma:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Sledi, da je splošna rešitev enaka

$$y = Ae^{2x} \cos 3x + Be^{2x} \sin 3x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Upoštevamo še začetna pogoja. Najprej dobimo

$$y(0) = -2 \;\Rightarrow\; -2 = 1 \cdot A + B \cdot 0 \;\Rightarrow\; A = -2.$$

Iz

$$y' = A \cdot 2e^{2x} \cdot \cos 3x + A \cdot e^{2x} \cdot (-3 \sin 3x) + B \cdot 2e^{2x} \cdot \sin 3x + B \cdot e^{2x} \cdot 3 \cos 3x$$

sledi še

$$y'(0) = 5 \;\Rightarrow\; 5 = A \cdot 2 + A \cdot 0 + B \cdot 0 + B \cdot 3 \;\Rightarrow\; B = \tfrac{1}{3}(5 - 2 \cdot (-2)) = 3.$$

Torej je iskana rešitev enaka

$$y = -2e^{2x} \cos 3x + 3e^{2x} \sin 3x.$$

Zbirka rešenih kolokvijev in izpitov iz Matematike II za študente univerzitetnih študijev Geodezije in geoinformatike, Gradbeništva ter Vodarstva in okoljskega inženirstva

Avtorji: Martin Jesenko, Mojca Premuš, Marjeta Škapin Rugelj

Založila: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdala: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

Ljubljana, 2023
Prva e-izdaja
Publikacija je brezplačna.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na https://ebooks.uni-lj.si
DOI: 10.15292/9789612973056

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 191225603
ISBN 978-961-297-305-6 (PDF)