

Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*



Gradiva iz Matematike 3 za študente Geodezije in
geoinformatike (MA)

Martin Jesenko

Ljubljana, 2023

Kazalo

| | |
|--|-----------|
| Predgovor | 5 |
| I Zapiski vaj | 7 |
| 1 Linearni (vektorski) prostori in podprostori | 9 |
| 2 Linearne preslikave | 33 |
| 3 Evklidski prostori | 45 |
| 4 Linearne diferencialne enačbe | 59 |
| 5 Sistemi linearnih diferencialnih enačb | 69 |
| 6 Fourierove vrste in robni problemi | 75 |
| 7 Parcialne diferencialne enačbe | 85 |
| II Primeri kolokvijev in izpitov | 89 |
| 1. kolokvij (6. 12. 2021) | 91 |
| 2. kolokvij (17. 1. 2022) | 97 |
| 2. izpit (1. 2. 2022) | 103 |
| 1. kolokvij (5. 12. 2022) | 109 |
| 2. kolokvij (16. 1. 2023) | 115 |
| 1. izpit (1. 2. 2023) | 123 |

Predgovor

V tej zbirki je zbrano nekaj gradiv iz predmeta Matematika 3, ki ga poslušajo študentje magistrskega študijskega programa Geodezija in geoinformatika na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Temelji na izvedbah tega predmeta v akademskih letih 2021/22 in 2022/23. Razdeljena je na dva dela.

V prvem delu so zbrane računske naloge. Tiste, ki so bile rešene v okviru vaj, praviloma vsebujejo tudi rešitve, preostale, ki so namenjene samostojnemu delu, pa imajo odgovore. Svoja gradiva so mi prijazno odstopili kolegi, ki so izvajali vaje v preteklih izvedbah: Ganna Kudryavtseva, Marjeta Škapin Rugelj in ostali.

Drugi del sestavljajo primeri rešenih kolokvijev in izpitov.

Martin Jesenko

Del I
Zapiski vaj

Poglavje 1

Linearni (vektorski) prostori in podprostori

Prostor \mathbb{R}^n

Osnovni primer linearnih prostorov že poznamo. Gre za prostor n -teric realnih števil \mathbb{R}^n , pri čemer sta operaciji seštevanja in množenja s skalarjem definirani po koordinatah.

1. Naj bodo $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 3, 4)$ in $a_3 = (-1, 0, 1)$. Izračunajte linearni kombinaciji $5a_1 - \frac{1}{2}a_2$ in $a_1 - a_2 + a_3$.

Rešitev:

V prostoru \mathbb{R}^3 je seštevanje in množenje s skalarjem definirano po koordinatah. Tako je

$$\begin{aligned}5a_1 - \frac{1}{2}a_2 &= 5(1, 2, 3) - \frac{1}{2}(2, 3, 4) \\ &= (5, 10, 15) - (1, \frac{3}{2}, 2) \\ &= (4, \frac{17}{2}, 13)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}a_1 - a_2 + a_3 &= (1, 2, 3) - (2, 3, 4) + (-1, 0, 1) \\ &= (-2, -1, 0).\end{aligned}$$

2. Za vsako od naslednjih podmnožic \mathbb{R}^3 preverite, ali je linearen prostor:

- (a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$.
- (b) $B = \{(1, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.
- (c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 3 - 2t, x_2 = t, x_3 = 4t, t \in \mathbb{R}\}$.
- (d) $D = \{(-2t, t, 4t) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (e) $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Rešitev:

Podmnožica v poljubnem linearnem prostoru je linearen prostor, če je linearen podprostor.

- (a) A ni linearen prostor, saj ni zaprta za množenje s skalarjem. Tako je $(1, 1, 1) \in A$, vendar $(-2) \cdot (1, 1, 1) = (-2, -2, -2) \notin A$.
- (b) B ni linearen prostor, saj ne vsebuje ničelnega vektorja $(0, 0, 0)$.
- (c) C ni linearen prostor, saj ne vsebuje ničelnega vektorja. Ne obstaja namreč tak $t \in \mathbb{R}$, da je $(3 - 2t, t, 4t) = (0, 0, 0)$. Za zadnji dve koordinati bi moral biti $t = 0$, toda potem $3 \neq 0$.
- (d) D je linearen prostor. Gre za premico skozi izhodišče s smernim vektorjem $(-2, 1, 4)$. Vzemimo poljubna elementa $t_1(-2, 1, 4), t_2(-2, 1, 4) \in D$ in poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potem je tudi

$$\alpha t_1(-2, 1, 4) + \beta t_2(-2, 1, 4) = (\alpha t_1 + \beta t_2)(-2, 1, 4) \in D.$$

- (e) E ni linearen prostor, saj ni zaprta za seštevanje. $(1, 1, 0)$ in $(1, 0, 1)$ sta elementa B , njuna vsota $(2, 1, 1)$ pa ne.

3. Pokažite, da množica vektorjev v \mathbb{R}^n , ki so rešitve sistema linearnih enačb, tvori podprostor v \mathbb{R}^n natanko takrat, ko je sistem enačb homogen.

Rešitev:

Označimo z \mathcal{R} množico rešitev $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Najprej predpostavimo, da je \mathcal{R} podprostor:

Ker vsak podprostor vsebuje ničelni vektor, je $(0, \dots, 0) \in \mathcal{R}$. Če vstavimo ta vektor v sistem, iz tega sledi $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Obratno, predpostavimo sedaj $b_1 = \dots = b_m = 0$:

Vzemimo poljubni rešitvi $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}$ in poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pokazati moramo, da je potem tudi $\alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}$. Ker je za vsak $i = 1, \dots, m$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0 \quad \text{in} \quad a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n = 0,$$

velja tudi

$$\begin{aligned} &a_{i1}(\alpha x_1 + \beta y_1) + \dots + a_{in}(\alpha x_n + \beta y_n) \\ &= a_{i1}\alpha x_1 + a_{i1}\beta y_1 + \dots + a_{in}\alpha x_n + a_{in}\beta y_n \\ &= \alpha(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) + \beta(a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

torej dejansko $\alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}$.

4. Določite parameter a tako, da bo vektor $(-1, a + 2, -2, a^2 + a + 1)$ linearna kombinacija $(1, 0, 2, 4)$, $(3, 1, 1, 2)$ in $(5, 1, 5, 3)$.

Odgovor: $a = -2$

5. Določite parameter a tako, da bo vektor $(7, -2, a)$ linearna kombinacija vektorjev $(2, 3, 5)$, $(3, 7, 8)$ in $(1, -6, 1)$.

Odgovor: $a = 15$

6. Določite (z utemeljitvijo), ali so naslednje podmnožice linearni podprostori v danih prostorih:

(a) $\mathcal{A} = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^3 + z^4 + u = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

(b) $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(c) $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, yz = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(d) $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, 3x - 5y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Odgovor: ne, da, ne, da

7. Katere od naslednjih podmnožic prostora \mathbb{R}^5 so linearni podprostori v \mathbb{R}^5 ?

(a) $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 \in \mathbb{Z}\}$,

(b) $\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 = 0\}$,

(c) $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$,

(d) $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 1\}$,

(e) $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_3 = x_5 \text{ in } x_2 = x_4\}$.

Odgovor: ne, da, da, ne, da

8. Ugotovite, ali so naslednje podmnožice linearni podprostori danih prostorov:

(a) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(b) $\mathcal{B} = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : x = z, y = u\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

(c) $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0, 2x - 3y = 0, 2x + y + 4z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(d) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

(e) $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Odgovor: ne, da, da, ne, da

Prostori matrik

Vse matrike določenih dimenzij tudi tvorijo linearen prostor. Za dana $m, n \in \mathbb{N}$ bomo množico vseh realnih matrik z m vrsticami in n stolpci označevali z

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Operaciji seštevanja in množenja s skalarjem sta definirani po elementih. Gre torej za zelo podoben primer kot je \mathbb{R}^n , le da imajo koordinate dva indeksa. V prvi nalogi bomo najprej preverili vse aksiome.

9. Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}$. Pokažite, da je množica vseh realnih matrik z m vrsticami in n stolpci $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ s seštevanjem in množenjem s skalarjem po koordinatah linearen prostor.

Rešitev:

Pri seštevanju dveh $m \times n$ -matrik in množenju takih matrik s skalarjem je rezultat spet $m \times n$ -matrika, torej sta operaciji dobro definirani.

Sedaj moramo preveriti, da operaciji izpolnjujeta zahtevane aksiome. Za vsoto mora veljati:

- (a) $A + B = B + A$ za vse $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (komutativnost).
- (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ za vse $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (asociativnost).
- (c) Obstaja $0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (nevtralni element), tako da je $A + 0 = A$ za vse $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.
- (d) Za vsak $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ obstaja $-A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (nasprotni element), tako da je $A + (-A) = 0$.

Nadalje mora za vse $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ in vse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ veljati še

- (e) $1A = A$,
- (f) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
- (g) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- (h) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Označimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Seštevanje matrik je komutativno, saj sta matriki

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} B + A &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

enaki.

Podobno dokažemo asociativnost seštevanja.

Nevtralni element za seštevanje je ničelna matrika

$$0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

saj očitno velja $A + 0 = A$.

Nasprotni element poljubne matrike je

$$-A = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Očitno je

$$1 \cdot A = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} & \cdots & 1 \cdot a_{1n} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} & \cdots & 1 \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} & 1 \cdot a_{m2} & \cdots & 1 \cdot a_{mn} \end{bmatrix} = A.$$

Veljata tudi obe obliki distributivnosti, saj sta enaki tako matriki

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(a_{11} + b_{11}) & \lambda(a_{12} + b_{12}) & \cdots & \lambda(a_{1n} + b_{1n}) \\ \lambda(a_{21} + b_{21}) & \lambda(a_{22} + b_{22}) & \cdots & \lambda(a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda(a_{m1} + b_{m1}) & \lambda(a_{m2} + b_{m2}) & \cdots & \lambda(a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \lambda b_{11} & \lambda a_{12} + \lambda b_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ \lambda a_{21} + \lambda b_{21} & \lambda a_{22} + \lambda b_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} + \lambda b_{m1} & \lambda a_{m2} + \lambda b_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} + \lambda b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
 \lambda A + \lambda B &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{m1} & \lambda b_{m2} & \cdots & \lambda b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \lambda b_{11} & \lambda a_{12} + \lambda b_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ \lambda a_{21} + \lambda b_{21} & \lambda a_{22} + \lambda b_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} + \lambda b_{m1} & \lambda a_{m2} + \lambda b_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} + \lambda b_{mn} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

kot tudi matriki

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu)A &= (\lambda + \mu) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\lambda + \mu)a_{11} & (\lambda + \mu)a_{12} & \cdots & (\lambda + \mu)a_{1n} \\ (\lambda + \mu)a_{21} & (\lambda + \mu)a_{22} & \cdots & (\lambda + \mu)a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\lambda + \mu)a_{m1} & (\lambda + \mu)a_{m2} & \cdots & (\lambda + \mu)a_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{11} & \lambda a_{12} + \mu a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} + \mu a_{1n} \\ \lambda a_{21} + \mu a_{21} & \lambda a_{22} + \mu a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} + \mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} + \mu a_{m1} & \lambda a_{m2} + \mu a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} + \mu a_{mn} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
 \lambda A + \mu A &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & \mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \cdots & \mu a_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{11} & \lambda a_{12} + \mu a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} + \mu a_{1n} \\ \lambda a_{21} + \mu a_{21} & \lambda a_{22} + \mu a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} + \mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} + \mu a_{m1} & \lambda a_{m2} + \mu a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} + \mu a_{mn} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Velja še $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, kar sledi iz

$$\begin{aligned}\lambda(\mu A) &= \lambda \left(\mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & \mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \cdots & \mu a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu a_{11} & \lambda\mu a_{12} & \cdots & \lambda\mu a_{1n} \\ \lambda\mu a_{21} & \lambda\mu a_{22} & \cdots & \lambda\mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\mu a_{m1} & \lambda\mu a_{m2} & \cdots & \lambda\mu a_{mn} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

in

$$(\lambda\mu)A = (\lambda\mu) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda\mu)a_{11} & (\lambda\mu)a_{12} & \cdots & (\lambda\mu)a_{1n} \\ (\lambda\mu)a_{21} & (\lambda\mu)a_{22} & \cdots & (\lambda\mu)a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\lambda\mu)a_{m1} & (\lambda\mu)a_{m2} & \cdots & (\lambda\mu)a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tako smo preverili vse aksiome, kar pomeni, da je $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ dejansko linearen prostor.

10. Pokažite, da je množica vseh zgornjetrikotnih 2×2 matrik

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

s seštevanjem in množenjem s skalarjem po koordinatah linearen prostor.

Rešitev:

Ker je ta množica vsebovana v $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, zadostuje, da preverimo, da je zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem. Dejansko velja, da je vsota dveh zgornjetrikotnih spet taka, saj je

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix},$$

prav tako pa zmožek s skalarjem, saj velja

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda c \end{bmatrix}.$$

11. Katere od naslednjih množic matrik tvorijo podprostor v prostoru $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$?

- Množica vseh simetričnih matrik.
- Množica vseh poševno simetričnih matrik. (Matrika A je poševno simetrična, če je $A^T = -A$.)
- Množica vseh obrnljivih matrik.
- Množica vseh neobrnjivih matrik.
- Množica vseh matrik s sledjo 0. (Sled matrike je vsota njenih diagonalnih elementov).

Rešitev:

(a) Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

poljubni simetrični matrik. Potem je simetrična tudi njuna vsota

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{13} + b_{13} & a_{23} + b_{23} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

in za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ tudi

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{13} & \lambda a_{23} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}.$$

Simetrične matrice torej sestavljajo podprostor.

(b) Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

poljubni poševno simetrični matrik. Potem je taka tudi njuna vsota

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ -(a_{12} + b_{12}) & 0 & a_{23} + b_{23} \\ -(a_{13} + b_{13}) & -(a_{23} + b_{23}) & 0 \end{bmatrix}$$

in za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ tudi

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ -\lambda a_{12} & 0 & \lambda a_{23} \\ -\lambda a_{13} & -\lambda a_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Poševno simetrične matrice torej tudi sestavljajo podprostor.

(c) Ničelna matrika ni obrnljiva, tako da ne gre za podprostor.

(d) Matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nista obrnljivi, njuna vsota

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je. Množica neobrnjljivi matriki tako ni podprostor.

(e) Poljubna matrika s sledjo 0 ima obliko

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Hitro vidimo, da ima tako obliko tudi vsota takih matrik ter produkt s skalarjem. Zato matrike s sledjo 0 tvorijo podprostor.

Prostori funkcij

Tretji standarden primer linearnih prostorov so prostori funkcij na dani množici.

Naj bo M poljubna množica in $\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ množica vseh funkcij iz M v \mathbb{R} . Na $\mathcal{F}(M)$ definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po točkah. To pomeni, da je za poljubni $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ in poljuben $\lambda \in \mathbb{R}$ vsota $f + g : M \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

produkt $\lambda f : M \rightarrow \mathbb{R}$ pa z

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Množico vseh polinomov z realnimi koeficienti stopnje kvečjemu n bomo označevali z $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

12. Pokažite, da je $\mathcal{F}(M)$ linearen prostor.

Rešitev:

Ker za vsak $x \in M$ velja

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

in

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + (g + h))(x)$$

je seštevanje funkcij komutativno in asociativno.

Nevtralni element za seštevanje je ničelna funkcija 0, saj je za vsak $x \in M$

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Nasprotni element je funkcija $-f$, definirana kot $(-f)(x) = -f(x)$. Dejansko je potem za vsak $x \in M$

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 0,$$

in sledi $f + (-f) = 0$.

Očitno je $1 \cdot f = f$, saj je za vsak $x \in M$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x).$$

Za poljubni funkciji $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ in skalarja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja še

- $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$, saj je za vsak $x \in M$

$$(\lambda(f + g))(x) = \lambda(f + g)(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

in

$$(\lambda f + \lambda g)(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x),$$

- $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$, saj velja za vsak $x \in M$

$$((\lambda + \mu)f)(x) = (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$

in

$$(\lambda f + \mu f)(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$

- in $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$, kar sledi iz

$$(\lambda(\mu f))(x) = \lambda(\mu f)(x) = \lambda\mu f(x)$$

in

$$((\lambda\mu)f)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda\mu f(x).$$

13. Ali so naslednje podmnožice v $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ podprostor?

- Množica vseh sodih funkcij.
- Množica vseh funkcij, ki niso niti sode niti lihe.
- Množica vseh funkcij, ki imajo natanko eno ničlo.
- Množica vseh funkcij, ki imajo vsaj eno ničlo.
- Množica vseh polinomov $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, za katere velja $p(1) = 0$.
- Množica vseh polinomov $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, za katere velja $p'(1) = 3$.

Rešitev:

- Funkcija f je soda, če velja $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če sta f in g sodi funkciji in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potem je $\alpha f + \beta g$ tudi soda, saj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x).$$

Torej gre za podprostor.

- Množica vseh funkcij, ki niso niti sode niti lihe, ni podprostor, ker ne vsebuje ničelne funkcije. Le-ta je namreč soda in liha.
- Tudi ta množica ne vsebuje ničelne funkcije, ki ima neskončno ničel.
- Funkciji $f(x) = (x - 1)^2$ in $g(x) = (x + 1)^2$ imata natanko eno ničlo. Njuna vsota

$$(f + g)(x) = (x - 1)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 2$$

pa je povsod pozitivna, torej nima nobene ničle. Ta množica torej ni podprostor.

- (e) Naj za $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ velja $p(1) = q(1) = 0$ in naj bosta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubna. Potem je tudi $\alpha p + \beta q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ in

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = 0.$$

Taki polinomi torej tvorijo podprostor.

- (f) Ta množica ne vsebuje ničelne funkcije, torej ni podprostor.

14. Ali so naslednje podmnožice v $\mathcal{V} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ podprostori?

- (a) Množica vseh lihih funkcij.
- (b) Množica vseh funkcij, ki nimajo nobene ničle.
- (c) Množica vseh polinomov stopnje natanko 3.
- (d) Množica vseh polinomov $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, za katere velja $p'(1) = p'(2) = 0$.

Odgovor: da, ne, ne, da

Linearna neodvisnost, baza, podprostori

Množica vektorjev $\{v_1, \dots, v_n\}$ je linearno neodvisna (ali drugače v_1, \dots, v_n so linearno neodvisni), če iz

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad \text{sledi} \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

V nasprotnem primeru je linearno odvisna.

Množica vektorjev je zagotovo linearno odvisna, če je eden od njih ničelni vektor.

Dva neničelna vektorja u in v sta linearno odvisna natanko tedaj, ko sta vzporedna, torej ko obstaja tak $\lambda \neq 0$, da velja $v = \lambda u$.

15. Ali so naslednji vektorji v prostoru \mathbb{R}^3 linearno neodvisni?

- (a) $(1, 2, 3)$ in $(1, 2, 4)$.
- (b) $(1, 2, 3)$ in $(2, 4, 6)$.
- (c) $(2, -3, 1)$, $(3, -1, 5)$ in $(1, -4, 3)$.
- (d) $(2, -3, 1)$, $(3, -1, 5)$, $(1, -4, 3)$ in $(2, 3, -7)$.
- (e) $(5, 4, 3)$, $(3, 3, 2)$ in $(8, 1, 3)$.

Rešitev:

- (a) Vektorja nista vzporedna, saj ne obstaja tak $\lambda \neq 0$, da je $(1, 2, 4) = \lambda(1, 2, 3)$. (Enakost prvih koordinat dá $\lambda = 1$, a potem ne velja enakost v tretji koordinati.) Torej sta dana vektorja linearno neodvisna.
- (b) $(1, 2, 3)$ in $(2, 4, 6)$ sta linearno odvisna, saj je $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$.

(c) Nastavimo $\alpha(2, -3, 1) + \beta(3, -1, 5) + \gamma(1, -4, 3) = (0, 0, 0)$, kar nam dá sistem

$$\begin{aligned} \textcircled{1} : & \quad 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \textcircled{2} : & \quad -3\alpha - \beta - 4\gamma = 0 \\ \textcircled{3} : & \quad \alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - 2 \cdot \textcircled{3} : & \quad -7\beta - 5\gamma = 0 \\ \textcircled{2} + 3 \cdot \textcircled{3} : & \quad 14\beta + 5\gamma = 0 \end{aligned}$$

Iz vsote teh dveh enačb sledi $\beta = 0$ in nato tudi $\gamma = \alpha = 0$. Torej so dani vektorji linearno neodvisni.

(d) Vemo, da je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Zato nobena množica, ki ima več kot tri elemente, ne more biti linearno neodvisna.

(e) Iz $\alpha(5, 4, 3) + \beta(3, 3, 2) + \gamma(8, 1, 3) = (0, 0, 0)$ dobimo sistem

$$\begin{aligned} 5\alpha + 3\beta + 8\gamma &= 0 \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Rešimo ta sistem z Gaußovo metodo eliminacije. Najprej odštejemo drugo vrstico od prve, v drugem koraku pa odštejemo od druge vrstice štirikratnik prve, od tretje pa trikratnik prve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -27 & 0 \\ 0 & 2 & -18 & 0 \end{array} \right].$$

Nato delimo zadnji dve vrstici s 3 oz. 2 in na koncu odštejemo drugo vrstico od tretje:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Kot vidimo, obstaja neničelna rešitev. Izberemo lahko npr. $\gamma = 1$, $\beta = 9$ in $\alpha = -7$. Dejansko je

$$-7(5, 4, 3) + 9(3, 3, 2) + 1(8, 1, 3) = (0, 0, 0).$$

Ti trije vektorji so linearno odvisni.

16. Naj bodo a , b , c in d linearno neodvisni vektorji. Kaj lahko poveste o linearni (ne)odvisnosti vektorjev:

- (a) $a_1 = a + 2c + d$, $b_1 = 2a - b + c$, $c_1 = a + c + d$;
 (b) $a_2 = a + 2c + d$, $b_2 = 2a - b + c$, $c_2 = -a + b + c + d$.

Odgovor: linearno neodvisni, linearno odvisni

17. Katere od spodnjih urejenih množic vektorjev so urejene baze prostora \mathbb{R}^4 ?

- (a) $\mathcal{A} = ((0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$,
- (b) $\mathcal{B} = ((1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (2, 2, 2, 2))$,
- (c) $\mathcal{C} = ((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$,
- (d) $\mathcal{D} = ((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1))$,
- (e) $\mathcal{E} = ((1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (2, 2, 1, 2), (0, 1, 0, 0))$.

Pri pritrdilnem odgovoru zapišite še vektor $u = (1, 2, 3, 4)$ v teh bazah.

Rešitev:

- (a) Če množica vsebuje ničelni element, ne more biti linearno neodvisna. Torej je \mathcal{A} linearno odvisna in zagotovo ni baza.
- (b) Opazimo, da je $(2, 2, 2, 2) = 2(1, 1, 1, 1)$. Že ta dva vektorja sta torej linearno odvisna, torej je tudi \mathcal{B} linearno odvisna in ni baza.
- (c) Vse baze linearnega prostora imajo toliko elementov, kolikor je njegova dimenzija. Ker je $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, tudi množica \mathcal{C} ni baza. Je pa sicer linearno neodvisna. Kar ji manjka do baze je torej, da ne razpenja celega prostora.
- (d) Najprej preverimo, če je \mathcal{D} linearno neodvisna. Iz

$$\alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 1) + \delta(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

sledi

$$\begin{aligned} \textcircled{1} : & \quad \alpha + \delta = 0 \\ \textcircled{2} : & \quad \beta + \delta = 0 \\ \textcircled{3} : & \quad \gamma + \delta = 0 \\ \textcircled{4} : & \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \end{aligned}$$

Iz $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ in $\textcircled{3}$ sledi $\alpha = \beta = \gamma = -\delta$. Če to vstavimo v $\textcircled{4}$, dobimo $\delta = 0$ in posledično $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Množica \mathcal{D} je torej linearno neodvisna. Ker ima njena linearna ogrinjača dimenzijo 4 in leži v štirirazsežnem prostoru, je kar cel prostor. Množica \mathcal{D} je zato baza.

Želimo še izraziti u z elementi \mathcal{D} . Iščemo take $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, da bo

$$u = (1, 2, 3, 4) = \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 1) + \delta(1, 1, 1, 1)$$

ali po koordinatah

$$\begin{aligned} \textcircled{1} : & \quad \alpha + \delta = 1 \\ \textcircled{2} : & \quad \beta + \delta = 2 \\ \textcircled{3} : & \quad \gamma + \delta = 3 \\ \textcircled{4} : & \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4 \end{aligned}$$

Podobno kot zgoraj lahko izrazimo iz $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ in $\textcircled{3}$

$$\alpha = 1 - \delta, \quad \beta = 2 - \delta, \quad \gamma = 3 - \delta$$

in vstavimo v $\textcircled{4}$, ter tako dobimo $6 - 2\delta = 4$. Sledi $\delta = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ in $\gamma = 2$. Dejansko je

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 1, 0, 1) + 2(0, 0, 1, 1) + (1, 1, 1, 1).$$

(e) Spet preverimo, ali je \mathcal{E} linearno neodvisna. Iz

$$\alpha(1, 1, 0, 1) + \beta(1, -1, 1, 1) + \gamma(2, 2, 1, 2) + \delta(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

sledi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma + \delta &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Spet izvedemo Gaußovo metodo. Najprej prvo vrstico odštejemo od druge in četrte:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Že zdaj je jasno, da rešitev ni enolična, saj imamo le še tri neničelne vrstice za štiri neznanke. Zamenjamo še srednji vrstici in potem tretji prištejemo dvakratnik druge:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Obstajajo neničelne rešitve, kar pomeni, da so vektorji linearno odvisni in \mathcal{E} ni baza. Vzamemo npr. lahko $\delta = -2$, $\gamma = 1$, $\beta = -1$ in $\alpha = -1$. Res je

$$-(1, 1, 0, 1) - (1, -1, 1, 1) + (2, 2, 1, 2) - 2(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

18. V prostoru \mathbb{R}^4 so podani vektorji

$$a_1 = (1, 0, 0, -1), \quad a_2 = (2, 1, 1, 0), \quad a_3 = (1, 1, 1, 1), \quad a_4 = (1, 2, 3, 4), \quad a_5 = (0, 1, 2, 3).$$

Poiščite bazo in dimenzijo prostora $\mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

Rešitev:

Imamo pet vektorjev v štirirazsežnem prostoru. Prav zagotovo so torej linearno odvisni.

Ena možnost je, da dodajamo vektorje po vrsti in vsakič ugotavljamo, ali je večja množica še linearno neodvisna:

- En sam neničelen vektor je vedno linearno neodvisen, tako da je prva ogrnjača $\mathcal{L}\{a_1\}$.
- Dva neničelna vektorja sta linearno neodvisna, če nista vzporedna. Zato je $\mathcal{L}\{a_1, a_2\} \supsetneq \mathcal{L}\{a_1\}$.
- Ker je $a_3 = a_2 - a_1 \in \mathcal{L}\{a_1, a_2\}$, je $\mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2\}$.
- Vektorji a_1, a_2, a_4 so linearno neodvisni. To se najhitreje vidi iz enačb za drugo in tretjo koordinato. Zato je $\mathcal{L}\{a_1, a_2, a_4\} \supsetneq \mathcal{L}\{a_1, a_2\}$.

- Zaradi $a_5 = a_4 - a_3 \in \mathcal{L}\{a_1, a_2, a_4\}$ je $\mathcal{L}\{a_1, a_2, a_4, a_5\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2, a_4\}$.

Torej je $\mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2, a_4\}$. Ker so a_1, a_2, a_4 linearno neodvisni, sestavljajo bazo za svojo ogrinjačo in $\dim \mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = 3$.

Druga možnost je, da zapišemo vektorje kot vrstice v matriko. Če v tej matriki menjamo vrstice, jih množimo z neničelnim skalarjem ali jim prištevamo poljubne večkratnike drugih vrstic, vrstice nove matrike razpenjajo isti podprostor kot vrstice prvotne.

Če izvedemo kar Gaußovo metodo eliminacije, so neničelne vrstice zagotovo linearno neodvisne, tako da dobimo eno možno bazo.

V prvem koraku odštejemo primerne večkratnike prve vrstice od ostalih, tako da dobimo v prvem stolpcu ničle pod diagonalo. V drugem koraku to storimo še z drugo vrstico:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nato zamenjamo tretjo in peto vrstico in na koncu še odštejemo tretjo vrstico od četrte:

$$\dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobili smo tri neničelne vrstice. Dimenzija $\mathcal{L}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ je torej enaka tri, ena možna baza pa je

$$((1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 2), (0, 0, 1, 1)).$$

19. Pokažite, da je

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 = 0\}$$

podprostor v \mathbb{R}^5 ter določite njegovo dimenzijo in eno bazo.

Rešitev:

\mathcal{U} je množica rešitev homogene linearne enačbe $x_2 = 0$. Iz naloge 1.3 sledi, da je podprostor. Vsak element \mathcal{U} lahko zapišemo kot

$$(x_1, 0, x_3, x_4, x_5) = x_1(1, 0, 0, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 0, 1, 0) + x_5(0, 0, 0, 0, 1).$$

Množica $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ je očitno linearno neodvisna in razpenja \mathcal{U} . Zato je (ena) baza podprostora \mathcal{U} in $\dim \mathcal{U} = 4$.

20. Pokažite, da je

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3x_1 - 2x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0, x_3 - 2x_5 = 0\}$$

podprostor v \mathbb{R}^5 ter določite njegovo dimenzijo in eno bazo.

Odgovor: $\dim \mathcal{V} = 2$, baza $((2, 3, 0, 0, 0), (0, 0, 2, -2, 1))$

21. Ugotovite, pri katerih vrednostih parametrov $a, b \in \mathbb{R}$ je množica

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - ay = b, x - az = b\}$$

linearen podprostor v \mathbb{R}^3 . V teh primerih poiščite še bazo za \mathcal{U} in določite njegovo dimenzijo. Ali je dimenzija prostora \mathcal{U} odvisna od parametrov a in b ?

Rešitev:

V nalogi 1.3 smo dokazali, da rešitve sistema linearnih enačb sestavljajo linearen podprostor natanko tedaj, ko je le-ta homogen. Torej je \mathcal{U} podprostor v \mathbb{R}^3 natanko tedaj, ko je $b = 0$. Tedaj je

$$x - ay = 0 = x - az$$

oziroma

$$x = ay = az.$$

Če je $a = 0$, dobimo zgolj pogoj $x = 0$. Zato je $\dim \mathcal{U} = 2$ in ena baza je $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Če je $a \neq 0$, so rešitve natanko vektorji (at, t, t) za vsak $t \in \mathbb{R}$. Torej $\dim \mathcal{U} = 1$ in ena baza je $((a, 1, 1))$.

22. Pokažite, da vektorja $v_1 = (1, 1, 2, 3)$ in $v_2 = (2, 1, 0, 1)$ ne razpenjata istega podprostora v \mathbb{R}^4 kot vektorji $u_1 = (5, 3, 2, 5)$, $u_2 = (-1, 0, 2, 3)$ in $u_3 = (-4, 3, 4, 8)$. Ali je kateri od teh dveh podprostorov vsebovan v drugem?

Rešitev:

Če imamo v nekem linearnem prostoru vektorje v_1, \dots, v_n in u_1, \dots, u_m , potem velja

$$\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathcal{L}\{u_1, \dots, u_m\} \iff v_1, \dots, v_n \in \mathcal{L}\{u_1, \dots, u_m\}.$$

Označimo $\mathcal{V} = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$ in $\mathcal{U} = \mathcal{L}\{u_1, u_2, u_3\}$. Ker vektorja v_1 in v_2 nista vzporedna, je $\dim \mathcal{V} = 2$. Poiščimo tudi za \mathcal{U} dimenzijo in (preprosto) bazo.

Najprej zamenjamo prvi dve vrstici. Nato od druge in tretje odštejemo primerne večkratnike prve. Nazadnje odštejemo še drugo vrstico od tretje:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & -16 & -24 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo tri linearno neodvisne vrstice, kar pomeni, da je $\dim \mathcal{U} = 3$ (in da so u_1, u_2, u_3 linearno neodvisni). Ker dimenziji nista enaki, ogrinjači zagotovo ne

moreta biti enaki. Lahko je kvečjemu $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Za lažje računanje poiščimo še preprostejšo bazo za \mathcal{U} .

Tretjo vrstico delimo z -8 , nato pa jo odštejemo od prve, njen šestkratnik pa od druge vrstice. Za konec spremenimo predznak prve vrstice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & -16 & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Torej sestavljajo vektorji

$$w_1 = (1, 0, 0, 0), \quad w_2 = (0, 3, 0, 2), \quad w_3 = (0, 0, 2, 3)$$

bazo \mathcal{U} .

Ali je torej $\mathcal{V} = \mathcal{L}\{v_1, v_2\} \subset \mathcal{L}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathcal{L}\{w_1, w_2, w_3\} = \mathcal{U}$? Po zgornjem je to natanko tedaj, ko $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$.

Leži $v_1 \in \mathcal{U}$? Potem obstajajo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tako da je $v_1 = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$, oziroma

$$(1, 1, 2, 3) = \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 3, 0, 2) + \gamma(0, 0, 2, 3).$$

Iz primerjave koordinat dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ 1 &= 3\beta \\ 2 &= 2\gamma \\ 3 &= 2\beta + 3\gamma \end{aligned}$$

Iz druge in tretje enačbe sledi $\beta = \frac{1}{3}$ in $\gamma = 1$, toda potem ni izpolnjena zadnja enačba. Taki α, β, γ ne obstajajo, torej $v_1 \notin \mathcal{U}$. Sledi $\mathcal{L}\{v_1, v_2\} \not\subset \mathcal{L}\{u_1, u_2, u_3\}$.

- 23.** Ali vektorja $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ in $u_2 = (1, 0, 1, 1)$ razpenjata isti podprostor v \mathbb{R}^4 kot vektorja $v_1 = (2, -1, 3, 3)$ in $v_2 = (0, 1, -1, -1)$?

Odgovor: da

- 24.** Pokažite, da so funkcije $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (kot elementi prostora $\mathcal{F}(\mathbb{R})$) linearno neodvisne, pri čemer so

- (a) $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = t^2$ in $h(t) = t$,
 (b) $f(t) = 1$, $g(t) = \sin t$ in $h(t) = \cos t$,
 (c) $f(t) = 1$, $g(t) = \sin t$ in $h(t) = \sin^2 t$.

Rešitev:

Raziščimo, kdaj je linearna kombinacija treh funkcij enaka 0 (torej ničelni funkciji):

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0.$$

Funkciji sta enaki, če je njuna vrednost v vsaki točki enaka, torej mora za vsak $t \in \mathbb{R}$ veljati

$$\alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t) = 0.$$

(a) V tem primeru torej za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha e^{2t} + \beta t^2 + \gamma t = 0.$$

To je pa očitno možno le za $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Konkretno lahko to vidimo, če najprej vstavimo $t = 0$. Potem iz

$$\alpha \cdot e^{2 \cdot 0} + \beta \cdot 0^2 + \gamma \cdot 0 = 0$$

sledi $\alpha = 0$. Če vstavimo še $t = 1$ in $t = -1$, dobimo

$$\beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 = 0 = \beta \cdot (-1)^2 + \gamma \cdot (-1),$$

iz česar sledi še $\beta = \gamma = 0$. Te tri funkcije so torej linearno neodvisne.

(b) Sedaj za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin t + \gamma \cos t = 0.$$

Če vstavimo $t = 0$, dobimo $\alpha + \gamma = 0$, za $t = \pm \frac{\pi}{2}$ pa $\alpha \pm \beta = 0$. Spet je to možno le za $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(c) Nazadnje še

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin t + \gamma \sin^2 t = 0.$$

Pri $t = 0$ dobimo $\alpha = 0$. Spet lahko nato vstavimo $t = \pm \frac{\pi}{2}$ in dobimo še $\beta = \gamma = 0$.

25. Zapišite polinom $p(t) = t^2 + 4t - 3$ kot linearno kombinacijo polinomov $q(t) = t^2 - 2t + 5$, $r(t) = 2t^2 - 3t$ in $s(t) = t + 3$.

Rešitev:

Poiskati moramo realna števila α, β, γ , tako da velja

$$p(t) = \alpha q(t) + \beta r(t) + \gamma s(t)$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. Torej mora veljati

$$t^2 + 4t - 3 = \alpha(t^2 - 2t + 5) + \beta(2t^2 - 3t) + \gamma(t + 3)$$

oziroma

$$t^2 + 4t - 3 = (\alpha + 2\beta)t^2 + (-2\alpha - 3\beta + \gamma)t + (5\alpha + 3\gamma).$$

Ujemati se morajo vsi koeficienti polinomov na levi in desni. Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \textcircled{1} : \quad 1 &= \alpha + 2\beta \\ \textcircled{2} : \quad 4 &= -2\alpha - 3\beta + \gamma \\ \textcircled{3} : \quad -3 &= 5\alpha + 3\gamma \end{aligned}$$

Iz $\textcircled{1}$ lahko izrazimo $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$, iz $\textcircled{3}$ pa $\gamma = \frac{-3-5\alpha}{3}$. Potem sledi iz $\textcircled{2}$ $\alpha = -3$ in zato $\beta = 2$ in $\gamma = 4$. Torej je

$$p = -3q + 2r + 4s.$$

26. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ polinomov največ tretje stopnje sta podani množici

$$S_1 = \{t^3, t^3 - t^2, t^3 + t^2, t^3 - 1\}, \quad S_2 = \{t^2 - 1, t + 1, t^3 - 1\}.$$

Če je množica linearno neodvisna, ji dodajte tak polinom, da postane linearno odvisna. Če pa je množica linearno odvisna, ji odzemanite tak polinom, da postane linearno neodvisna.

Rešitev:

Hitro se vidi, da je S_1 linearno odvisna, saj je vsota njenega drugega in tretjega elementa dvakratnik prvega, ali drugače

$$-2t^3 + (t^3 - t^2) + (t^3 + t^2) = 0.$$

Množica $S_1 \setminus \{t^3 + t^2\}$ pa je linearno neodvisna. Če v

$$\alpha t^3 + \beta(t^3 - t^2) + \gamma(t^3 - 1) = 0$$

primerjamo koeficienta pri t^2 , dobimo $\beta = 0$, če pa konstantna, pa $\gamma = 0$. Potem mora biti tudi $\alpha = 0$.

Množica S_2 je linearno neodvisna, saj primerjava koeficientov pri t, t^2, t^3 pokaže, da iz

$$\alpha(t^2 - 1) + \beta(t + 1) + \gamma(t^3 - 1) = 0$$

sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dodamo lahko npr. vsoto prvih dveh $t^2 + t$.

27. Katere od naslednjih množic polinomov iz prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ so linearno neodvisne?

- (a) $\{1, t, t^2 - 1\}$,
- (b) $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$,
- (c) $\{2t^2 + t, t^2 + 3, t\}$,
- (d) $\{2t^2 + t + 1, 3t^2 + t - 5, t + 13\}$.

Če je množica linearno odvisna, izrazite en njen element kot linearno kombinacijo ostalih.

Odgovor: (a, b, c) linearno neodvisne, (d) linearno odvisna in $p_3 = 3p_1 - 2p_2$

28. V prostoru $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ je podana množica

$$\mathcal{V} = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p'(1) = p'(2) = 0\}.$$

Pokažite, da je \mathcal{V} podprostor ter poiščite njegovo bazo in dimenzijo.

Rešitev:

Naj bodo $p, q \in \mathcal{V}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ poljubni. Potem velja

$$(\lambda p + \mu q)'(1) = \lambda p'(1) + \mu q'(1) = 0 \quad \text{in} \quad (\lambda p + \mu q)'(2) = \lambda p'(2) + \mu q'(2) = 0,$$

torej je tudi $\lambda p + \mu q \in \mathcal{V}$. Sledi, da je \mathcal{V} podprostor.

Določimo sedaj, kako za poljuben polinom

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4$$

iz koeficientov prepoznamo, ali je element \mathcal{V} .

Odvod je enak

$$p'(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3,$$

tako da sta pogoja

$$0 = p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \quad \text{in} \quad 0 = p'(2) = a_1 + 4a_2 + 12a_3 + 32a_4.$$

Torej morajo koeficienti a_0, \dots, a_4 rešiti

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 28 & 0 \end{array} \right].$$

Sledi, da sta $a_4 = \alpha$ in $a_3 = \beta$ poljubna. Potem dobimo

$$a_2 = \frac{1}{2}(-9a_3 - 28a_4) = -\frac{9}{2}\beta - 14\alpha$$

in

$$a_1 = -2a_2 - 3a_3 - 4a_4 = 6\beta + 24\alpha.$$

Koeficient $a_0 = \gamma$ je tudi poljuben. Poljuben $p \in \mathcal{V}$ je torej oblike

$$\begin{aligned} p(t) &= \gamma + (6\beta + 24\alpha)t + \left(-\frac{9}{2}\beta - 14\alpha\right)t^2 + \beta t^3 + \alpha t^4 \\ &= \alpha(t^4 - 14t^2 + 24t) + \beta\left(t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t\right) + \gamma. \end{aligned}$$

Polinomi

$$g_1(t) = t^4 - 14t^2 + 24t, \quad g_2(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t, \quad g_3(t) = 1$$

so linearno neodvisni in razpenjajo \mathcal{V} , torej sestavljajo bazo. Posledično je $\dim \mathcal{V} = 3$.

29. V prostoru $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ je podana množica

$$\mathcal{V} = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p(x-1) = p(x) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}\}.$$

Pokažite, da je \mathcal{V} podprostor ter poiščite njegovo bazo in dimenzijo.

Odgovor: $\dim \mathcal{V} = 1$, baza (1)

Presek in vsota podprostorov

Če sta \mathcal{U} in \mathcal{V} podprostora linearnega prostora \mathcal{X} , potem sta linearna podprostora tudi njun presek $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in njuna vsota $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, pri čemer je slednja definirana kot

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{u + v : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}.$$

Velja dimenzijska formula

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}).$$

30. V prostoru \mathbb{R}^3 sta dana podprostora

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{T} &= \mathcal{L} \{(1, 2, 0), (3, 1, 2)\}.\end{aligned}$$

Poiščite baze in dimenzije podprostorov \mathcal{S} , \mathcal{T} , $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} + \mathcal{T}$.

Rešitev:

Vektorja $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 1)$ nista vzporedna, torej sta linearno neodvisna, in razpenjata \mathcal{S} . Torej je (ena) baza \mathcal{S} množica $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ in $\dim \mathcal{S} = 2$. Podobno je dimenzija \mathcal{T} enaka 2, ena baza pa $((1, 2, 0), (3, 1, 2))$.

Vektorji iz $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ so natanko tiste linearne kombinacije $\alpha(1, 2, 0) + \beta(3, 1, 2)$, ki imajo v prvi koordinati 0, torej mora veljati $\alpha + 3\beta = 0$. Poljuben element $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ je posledično oblike $-3\beta(1, 2, 0) + \beta(3, 1, 2) = \beta(0, -5, 2)$, kar pomeni, da je $((0, -5, 2))$ baza za enodimenzionalen podprostor $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

Ker velja $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = \dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{T} - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 3$, je $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \mathbb{R}^3$ in lahko za bazo vzamemo kar standardno bazo \mathbb{R}^3 , torej $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

31. V prostoru \mathbb{R}^4 sta dana podprostora:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathcal{L} \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}, \\ \mathcal{T} &= \mathcal{L} \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}.\end{aligned}$$

Poiščite baze in dimenzije podprostorov \mathcal{S} , \mathcal{T} , $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} + \mathcal{T}$.

Odgovor:

- $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{T} = 2$, za bazi lahko vzamemo kar vektorja, ki ju razpenjata,
- $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 1$, ena baza je $((2, 3, 1, 1))$,
- $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 3$, baza je npr. $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$

32. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sta dana podprostora:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathcal{L} \{1 + x + x^2 + x^3, 2 + 3x + x^2, 1 - x + x^2 - x^3\}, \\ \mathcal{T} &= \mathcal{L} \{1 - x - x^2 + x^3, 1 - x, 3 - x + x^2 + x^3\}.\end{aligned}$$

Poiščite baze in dimenzije podprostorov \mathcal{S} , \mathcal{T} , $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} + \mathcal{T}$.

Rešitev:

Najprej si oglejmo prvo množico. Naj bo

$$\alpha(1 + x + x^2 + x^3) + \beta(2 + 3x + x^2) + \gamma(1 - x + x^2 - x^3) = 0$$

oziroma

$$(\alpha - \gamma)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + 3\beta - \gamma)x + (\alpha + 2\beta + \gamma) = 0.$$

Primerjava koeficientov polinomov na levi in desni nam da sistem enačb

$$\begin{aligned} \textcircled{1}: \quad & \alpha - \gamma = 0 \\ \textcircled{2}: \quad & \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \textcircled{3}: \quad & \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ \textcircled{4}: \quad & \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{aligned}$$

Iz $\textcircled{1}$ sledi $\alpha = \gamma$. Če to vstavimo v $\textcircled{3}$, dobimo $\beta = 0$. Posledično iz $\textcircled{2}$ sledi še $\alpha = \gamma = 0$. Polinomi $1 + x + x^2 + x^3$, $2 + 3x + x^2$ in $1 - x + x^2 - x^3$ so tako linearno neodvisni in tvorijo bazo za \mathcal{S} , ki ima torej dimenzijo 3.

Na podoben način vidimo, da so $1 - x - x^2 + x^3$, $1 - x$ in $3 - x + x^2 + x^3$ linearno neodvisni in tako baza za \mathcal{T} .

Vzemimo poljuben polinom $p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Ker leži v obeh podprostorih, ga je mogoče zapisati kot linearno kombinacijo obeh baz. Torej obstajajo $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C \in \mathbb{R}$, tako da

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha(1 + x + x^2 + x^3) + \beta(2 + 3x + x^2) + \gamma(1 - x + x^2 - x^3) \\ &= A(1 - x - x^2 + x^3) + B(1 - x) + C(3 - x + x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Torej mora veljati

$$\begin{aligned} (\alpha + 2\beta + \gamma - A - B - 3C) + (\alpha + 3\beta - \gamma + A + B + C)x + \\ + (\alpha + \beta + \gamma + A - C)x^2 + (\alpha - \gamma - A - C)x^3 = 0. \end{aligned}$$

Če primerjamo koeficiente, dobimo sistem

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma - A - B - 3C &= 0 \\ \alpha + 3\beta - \gamma + A + B + C &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + A - C &= 0 \\ \alpha - \gamma - A - C &= 0 \end{aligned}$$

oziroma v matrični obliki

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Če zadnjo vrstico prestavimo na prvo mesto in jo odštejemo od vseh ostalih, dobimo

$$\dots \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Zdaj zamenjamo drugo in četrto vrstico in nato odštejemo ustrezne večkratnike druge od tretje in četrte vrstice

$$\dots \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right].$$

Na koncu še zamenjamo zadnji dve vrstici in odštejemo trikratnik tretje od četrte

$$\dots \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 8 & 0 \end{array} \right].$$

Torej sta B in C poljubna, za A pa mora veljati $8A + 4B + 8C = 0$, oziroma $A = -\frac{1}{2}B - C$. Zato je poljuben vektor iz preseka oblike

$$\begin{aligned} p(x) &= A(1 - x - x^2 + x^3) + B(1 - x) + C(3 - x + x^2 + x^3) \\ &= \left(-\frac{1}{2}B - C\right)(1 - x - x^2 + x^3) + B(1 - x) + C(3 - x + x^2 + x^3) \\ &= B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) + C(2 + 2x^2). \end{aligned}$$

Ker sta B in C poljubna, je

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{L}\{1 - x + x^2 - x^3, 1 + x^2\}.$$

Ta dva polinoma nista vzporedna, torej tvorita bazo za $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

Po dimenzijski formuli je

$$\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = \dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{T} - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Ker je $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, je $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Za bazo lahko vzamemo standardno bazo $(1, x, x^2, x^3)$.

33. V prostoru \mathbb{R}^4 sta dana podprostora:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{L}\{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 1)\}, \\ \mathcal{T} &= \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1), (0, 3, -1, 1)\}. \end{aligned}$$

Poiščite baze in dimenzije prostorov \mathcal{S} , \mathcal{T} , $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} + \mathcal{T}$.

Odgovor:

- $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{T} = 2$, za bazo lahko v obeh primerih vzamemo dva izmed navedenih vektorjev.
- $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ je enodimenzionalen podprostor, ki ga razpenja $(2, 3, 1, 1)$.
- Ena baza za $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ je $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$.

34. V prostoru \mathbb{R}^4 sta dana podprostora:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(a, b, c, d) : b + c + d = 0\}, \\ \mathcal{V} &= \{(a, b, c, d) : a + b = 0 \text{ in } c = 2d\}. \end{aligned}$$

Poiščite baze in dimenzije prostorov \mathcal{U} , \mathcal{V} , $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Odgovor:

- $\dim \mathcal{U} = 3$, za bazo lahko vzamemo $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$.

- $\dim \mathcal{V} = 2$, ena baza je $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1))$.
- $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 1$, razpenja ga vektor $(3, -3, 2, 1)$.
- $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 4$, torej lahko vzamemo standardno bazo.

35. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sta dana podprostora

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\} \quad \text{in} \quad \mathcal{V} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 0\}.$$

Določite baze in dimenzije podprostorov \mathcal{U} , \mathcal{V} , $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Odgovor:

- $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V} = 3$, možni bazi sta $(t-1, t^2-t, t^3-t^2)$ in $(t-2, t^2-2t, t^3-2t^2)$.
- $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$, baza je na primer $(t^3 - 3t^2 + 2t, t^2 - 3t + 2)$.
- $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, torej lahko vzamemo standardno bazo.

Poglavje 2

Linearne preslikave

Preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ med linearnima prostoroma \mathcal{X} in \mathcal{Y} je linearna, če velja

$$\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v \quad \text{in} \quad \mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}u$$

za vse $u, v \in \mathcal{X}$ in vse $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ničelni prostor (jedro) preslikave \mathcal{A} je

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \ker \mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{A}x = 0\} \subseteq \mathcal{X}.$$

Slika (zaloga vrednosti) preslikave \mathcal{A} je

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \text{im } \mathcal{A} = \{\mathcal{A}x : x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{Y}.$$

Obe množici sta podprostoroma v ustreznem prostoru. Velja dimenzijska formula

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{X}.$$

1. Ugotovite, katere izmed spodnjih preslikav so linearne.

(a) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x, y, z) = (x, y, x + z)$.

(b) $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}(x, y) = (x + 1, y + 1)$.

Rešitev:

(a) Vzemimo poljubna vektorja $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ iz \mathbb{R}^3 in poljubna skalarja $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \mathcal{A}(\lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2)) \\ &= \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathcal{A}v_1 + \lambda_2 \mathcal{A}v_2 &= \lambda_1 \mathcal{A}(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(x_2, y_2, z_2) \\ &= \lambda_1(x_1, y_1, x_1 + z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, x_2 + z_2) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2), \end{aligned}$$

torej

$$\mathcal{A}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \mathcal{A}v_1 + \lambda_2 \mathcal{A}v_2.$$

Preslikava \mathcal{A} je torej linearna.

- (b) Preslikava \mathcal{B} ni linearna, saj vsaka linearna preslikava preslika ničelni element v ničelnega, tu pa je $\mathcal{B}(0, 0) = (1, 1)$.

2. Naj bo $\mathcal{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikava, definirana s predpisom

$$\mathcal{F}(x, y, z, w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w).$$

- (a) Pokažite, da je preslikava \mathcal{F} linearna.
 (b) Zapišite matriko preslikave \mathcal{F} v standardnih bazah.
 (c) Poiščite bazi in dimenziji ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave \mathcal{F} .
 (d) Ali je preslikava \mathcal{F} bijektivna?

Rešitev:

- (a) To spet preverimo kot v nalogi 2.1.
 (b) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1, 0, 0, 0) &= (1, 1, 1), \\ \mathcal{F}(0, 1, 0, 0) &= (-1, 0, 1), \\ \mathcal{F}(0, 0, 1, 0) &= (1, 2, 3), \\ \mathcal{F}(0, 0, 0, 1) &= (1, -1, -3), \end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{F}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- (c) Zalogo vrednosti razpenjajo slike baznih elementov, torej je

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, 2, 3), (1, -1, -3)\}.$$

Prva dva vektorja nista vzporedna, torej sta linearno neodvisna. Ker je

$$(1, 2, 3) = 2(1, 1, 1) + (-1, 0, 1) \quad \text{in} \quad (1, -1, -3) = -(1, 1, 1) - 2(-1, 0, 1),$$

ima zaloga vrednosti dimenzijo 2 in $((1, 1, 1), (-1, 0, 1))$ je njena baza.

Tako smo tudi že ugotovili, da preslikava \mathcal{F} ni surjektivna, saj je $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

Iz $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{F})$ sledi, da ima ničelni prostor dimenzijo 2. Iz tega sledi, da \mathcal{F} tudi ni injektivna, saj $\{(0, 0, 0)\} \neq \mathcal{N}(\mathcal{F})$. Najti moramo bazo prostora rešitev

$$\mathcal{F}(x, y, z, w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w) = (0, 0, 0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ker sta z in w poljubna, lahko izberemo za bazo npr. $((1, 2, 0, 1), (-2, -1, 1, 0))$.

- (d) Linearna preslikava med prostoroma različnih dimenzij v splošnem ne more biti bijektivna. Videli smo, da \mathcal{F} ni ne injektivna ne surjektivna.

3. Linearna preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dana s predpisom $\mathcal{F}(x, y, z) = (x + y, y, x - z)$. Pokažite, da je bijektivna, in poiščite njen inverz. Poiščite tudi kak vektor v , za kateri velja $\mathcal{F}(v) = (1, 2, -1)$.

Rešitev:

Ker sta dimenziji štartnega in ciljnega prostora enaki, je za bijektivnost dovolj, če pokažemo injektivnost. Določimo torej ničelni prostor.

Če je $\mathcal{F}(x, y, z) = (x + y, y, x - z) = (0, 0, 0)$, sledi iz druge koordinate $y = 0$, nato iz prve $x = 0$ in na koncu iz tretje še $z = 0$. Torej je $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{(0, 0, 0)\}$, kar pomeni, da je \mathcal{F} res injektivna.

Za inverz nastavimo

$$\mathcal{F}(x, y, z) = (x + y, y, x - z) = (a, b, c)$$

in izrazimo x, y, z z a, b, c . Spet najprej iz druge koordinate dobimo $y = b$, iz prve $x = a - b$ in nazadnje še $z = a - b - c$. Torej je

$$\mathcal{F}^{-1}(a, b, c) = (a - b, b, a - b - c).$$

Vektor v je enolično določen, in sicer je

$$v = \mathcal{F}^{-1}(1, 2, -1) = (-1, 2, 0).$$

4. Linearna preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{F}(x, y, z) = (2x + z, x - 4y, 3x).$$

Pokažite, da je bijektivna, in poiščite njen inverz. Poiščite tudi tak vektor v , za katerega velja $\mathcal{F}(v) = (1, 2, 3)$.

Odgovor: $\mathcal{F}^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{z}{3}, \frac{-3y+z}{12}, \frac{3x-2z}{3}\right)$, $\mathcal{F}(1, -\frac{1}{4}, -1) = (1, 2, 3)$.

5. Naj bo $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ dan neničelen vektor. Preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiramo s predpisoma:

$$\mathcal{A}x = (x \cdot a)a \quad \text{in} \quad \mathcal{B}x = x \times a.$$

- (a) Preverite, da sta dani preslikavi linearni. Ali sta bijektivni?
 (b) Zapišite matriki preslikav \mathcal{A} in \mathcal{B} v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

(c) Za $a = (1, 0, 2)$ določite ničelni prostor in zalogo vrednosti preslikav \mathcal{A} in \mathcal{B} .

Rešitev:

- (a) Linearnost sledi iz lastnosti skalarnega in vektorskega produkta. Preslikavi nista bijektivni. Vse slike preslikave \mathcal{A} imajo smer vektorja a , torej je $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{a\}$ enodimenzionalen. Po drugi strani je pa $\mathcal{B}(a) = a \times a = 0$, torej je $\mathcal{L}\{a\} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{B})$.
- (b) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 0, 0) &= a_1(a_1, a_2, a_3), \\ \mathcal{A}(0, 1, 0) &= a_2(a_1, a_2, a_3), \\ \mathcal{A}(0, 0, 1) &= a_3(a_1, a_2, a_3),\end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(1, 0, 0) &= (0, -a_3, a_2), \\ \mathcal{B}(0, 1, 0) &= (a_3, 0, -a_1), \\ \mathcal{B}(0, 0, 1) &= (-a_2, a_1, 0)\end{aligned}$$

sledi

$$[\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Za $a = (1, 0, 2)$ imamo

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako so

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{(1, 0, 2)\},$$

ter

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}\{(1, 0, 2)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}.$$

6. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}x = (x \cdot a)a + x \times a - 2x,$$

pri čemer je $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ dan neničelen vektor.

- (a) Preverite, da je \mathcal{A} linearna preslikava in zapišite njeno matriko v standardni bazi \mathbb{R}^3 .

(b) Za $a = (1, 0, 1)$ določite ničelni prostor in zalogo vrednosti preslikave \mathcal{A} .

Odgovor: Matrika v standardni bazi je $[\mathcal{A}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} a_1^2-2 & a_1a_2+a_3 & a_1a_3-a_2 \\ a_1a_2-a_3 & a_2^2-2 & a_2a_3+a_1 \\ a_1a_3+a_2 & a_2a_3-a_1 & a_3^2-2 \end{bmatrix}$, podpro-
stora pa $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$, $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{(-1, -1, 1), (1, -2, -1)\}$

7. Linearni preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sta podani s predpisoma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3, 0, 0), \\ \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) &= (x_2, x_3, x_1). \end{aligned}$$

- Zapišite matriki preslikav \mathcal{A} in \mathcal{B} v standardni bazi.
- Poiščite ničelni prostor in zalogo vrednosti preslikav \mathcal{A} in \mathcal{B} in ugotovite, ali sta injektivni, surjektivni, bijektivni.
- Določite matrike (v standardni bazi) in predpise preslikav $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.
- Naj bo $\mathcal{C} = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{A}$. Določite matriko preslikave \mathcal{C} ter $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ in $\mathcal{N}(\mathcal{C})$.
- Obstajata taka vektorja $x, y \in \mathbb{R}^3$, da je $\mathcal{C}x = (2, 0, 2)$ in $\mathcal{C}y = (-1, 0, 1)$?

Rešitev:

(a) Stolpce matrike dobimo kot slike baznih vektorjev. Tako je

$$[\mathcal{A}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{B}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Iz matrik razberemo

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$$

ter

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \{(0, 0, 0)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^3.$$

\mathcal{A} ni ne surjektivna ne injektivna, \mathcal{B} pa je bijektivna.

(c) Po definiciji je

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x_1, x_2, x_3) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3)) \\ &= \mathcal{A}(x_2, x_3, x_1) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, 0, 0) \\ (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x_1, x_2, x_3) &= \mathcal{B}(\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3)) \\ &= \mathcal{B}(x_1 + x_2 + x_3, 0, 0) \\ &= (0, 0, x_1 + x_2 + x_3) \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_1, x_2, x_3) &= \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, 0, 0) + (x_2, x_3, x_1) \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, x_1) \end{aligned}$$

Torej je

$$[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{A} + \mathcal{B}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Druga pot do teh rezultatov je, da upoštevamo

$$[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}] = [\mathcal{A}][\mathcal{B}], \quad [\mathcal{B} \circ \mathcal{A}] = [\mathcal{B}][\mathcal{A}] \quad \text{in} \quad [\mathcal{A} + \mathcal{B}] = [\mathcal{A}] + [\mathcal{B}].$$

(d) Dobimo

$$[\mathcal{C}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}, \quad \mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}.$$

(e) Naloga nas sprašuje, ali sta $(2, 0, 2)$ in $(-1, 0, 1)$ v sliki preslikave \mathcal{C} . Zgoraj smo ugotovili, da so v sliki natanko večkratniki vektorja $(1, 0, 1)$. Torej tak x obstaja (npr. $\mathcal{C}(2, 0, 0) = (2, 0, 2)$), tak y pa ne.

8. Naj bo

$$\mathcal{A} : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{A}(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} X.$$

- (a) Preverite, da je preslikava \mathcal{A} linearna ter določite njeno matriko v standardni bazi prostora $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (b) Določite dimenziji in bazi ničelnega prostora ter zaloge vrednosti preslikave \mathcal{A} .

Odgovor: $[\mathcal{A}]_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

9. Preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sta podani s predpisoma

$$\mathcal{A}(X) = \text{sled}(X) \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(X) = \det X,$$

kjer je $\text{sled}(X)$ sled matrike X in $\det X$ determinanta matrike X .

- (a) Za vsako od preslikav \mathcal{A} in \mathcal{B} določite, ali je injektivna, surjektivna, bijektivna.
- (b) Za vsako od preslikav \mathcal{A} in \mathcal{B} ugotovite, ali je linearna. V primeru, ko je preslikava linearna, poiščite bazo in dimenzijo njenega ničelnega prostora in zapišite njeno matriko v standardnih bazah.

Rešitev:

(a) Preslikava \mathcal{A} ni injektivna, saj je

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

je pa surjektivna, saj za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ obstaja neka matrika, katere slike je α , na primer

$$\mathcal{A} \left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \alpha.$$

Podobno \mathcal{B} ni injektivna, velja denimo

$$\mathcal{B} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{B} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

in je surjektivna, saj je za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{B} \left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \alpha.$$

- (b) Preslikava \mathcal{A} je linearna, česar ni težko preveriti po definiciji. Preslikava \mathcal{B} pa ni linearna, saj je na primer

$$\mathcal{B} \left(2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{B} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 4 \neq 2 = 2\mathcal{B} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Določimo torej $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Vemo, da je ničelni prostor trirazsežen, saj je dimenzija zaloge vrednosti 1, začetni prostor $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ pa je štirirazsežen. Potrebujemo torej tri linearno neodvisne matrike iz ničelnega prostora. Ker velja

$$\mathcal{A} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 0 \iff a + d = 0,$$

je ena možna baza

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Matrika preslikave pa je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. V prostoru \mathbb{R}^2 imejmo bazo $\mathbf{B} = ((1, 1), (-1, 1))$ in standardno bazo \mathbf{S} .

- (a) Zapišite prehodno matriko $P_{\mathbf{BS}}$ iz baze \mathbf{B} v standardno bazo in prehodno matriko $P_{\mathbf{SB}}$.
- (b) Določite koordinate vektorja $a = (4, 3)$ v bazi \mathbf{B} .

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linearna preslikava, za katero vemo, da je $\mathcal{A}(1, 1) = (1, -2)$ in $\mathcal{A}(-1, 1) = (2, 3)$.

- (c) Zapišite matriko $[\mathcal{A}]_{\mathbf{BS}}$ preslikave \mathcal{A} glede na bazo \mathbf{B} in standardno bazo \mathbf{S} .
- (d) Določite matriko $[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}$ preslikave \mathcal{A} v standardni bazi.
- (e) Koliko je $\mathcal{A}(-1, 5)$? Določite splošen predpis $\mathcal{A}(x, y)$.

Rešitev:

Prehodna matrika med dvema bazama, na primer \mathbf{E} in \mathbf{E}' , je matrika identične preslikave v teh dveh bazah, torej

$$P_{\mathbf{E}\mathbf{E}'} = [\text{id}]_{\mathbf{E}\mathbf{E}'}$$

To pomeni, da so v i -tem stolpcu te matrike koeficienti i -tega baznega vektorja iz \mathbf{E} pri razvoju v bazi \mathbf{E}' . Zapisi vektorjev in matrik v različnih bazah so zato povezani takole:

$$[v]_{\mathbf{E}'} = P_{\mathbf{E}\mathbf{E}'}[v]_{\mathbf{E}} \quad \text{in} \quad [\mathcal{A}]_{\mathbf{E}'\mathbf{F}'} = P_{\mathbf{F}\mathbf{F}'}[\mathcal{A}]_{\mathbf{E}\mathbf{F}}P_{\mathbf{E}'\mathbf{E}}$$

- (a) V prehodni matriki med \mathbf{B} in standardno bazo \mathbf{S} so stolpci elementi baze \mathbf{B} , razviti v standardni bazi:

$$P_{\mathbf{B}\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje velja

$$P_{\mathbf{S}\mathbf{B}} = (P_{\mathbf{B}\mathbf{S}})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Po zgornji formuli je

$$[a]_{\mathbf{B}} = P_{\mathbf{S}\mathbf{B}}[a]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- (c) Glede na to, da sta podani ravno sliki elementov baze \mathbf{B} v standardni bazi, je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{B}\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (d) Ker že poznamo $[\mathcal{A}]_{\mathbf{B}\mathbf{S}}$, lahko uporabimo formulo za spremembo baz ter dobimo

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{S}\mathbf{S}} = [\mathcal{A}]_{\mathbf{B}\mathbf{S}}P_{\mathbf{S}\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- (e) Splošen predpis takoj dobimo iz $[\mathcal{A}]_{\mathbf{S}\mathbf{S}}$, saj je

$$[\mathcal{A}(x, y)]_{\mathbf{S}} = [\mathcal{A}]_{\mathbf{S}\mathbf{S}}[(x, y)]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \\ -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}.$$

Torej je $\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{2}(3y - x, y - 5x)$ in $\mathcal{A}(-1, 5) = (8, 5)$.

11. Preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ je podana s predpisom $(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$.

- (a) Pokažite, da je preslikava \mathcal{A} linearna.
 (b) Poiščite bazo ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave \mathcal{A} . Ali je preslikava \mathcal{A} injektivna ali surjektivna?
 (c) Poiščite matriko preslikave \mathcal{A} v standardni bazi $\mathbf{S} = (1, x, x^2, x^3)$ prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

- (d) Poiščite prehodno matriko $P_{\mathbf{BS}}$ iz baze $\mathbf{B} = (x^2, x^3 - x, x, x + 1)$ v standardno bazo prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
- (e) Polinom $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ zapišite kot linearno kombinacijo polinomov iz baze \mathbf{B} . Nalogo rešite na dva načina: z uporabo prehodne matrike in direktno.
- (f) Poiščite matriko $[\mathcal{A}]_{\mathbf{BB}}$ preslikave \mathcal{A} v bazi \mathbf{B} .

Rešitev:

Linearnost sledi iz definicije operacij v prostoru polinomov. Za poljubna $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda p + \mu q)(x) &= (\lambda p + \mu q)(x + 1) - (\lambda p + \mu q)(x) \\ &= (\lambda p(x + 1) + \mu q(x + 1)) - (\lambda p(x) + \mu q(x)) \\ &= \lambda(p(x + 1) - p(x)) + \mu(q(x + 1) - q(x)) \\ &= \lambda \mathcal{A}(p)(x) + \mu \mathcal{A}(q)(x). \end{aligned}$$

Zaradi jasnosti pišimo bazne elemente kot $p_j(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2, 3$. Naprej poiščimo matriko preslikave v standardni bazi. Iz

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p_0)(x) &= p_0(x + 1) - p_0(x) = 1 - 1 = 0, \\ \mathcal{A}(p_1)(x) &= p_1(x + 1) - p_1(x) = (x + 1) - x = 1, \\ \mathcal{A}(p_2)(x) &= p_2(x + 1) - p_2(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1 \\ \mathcal{A}(p_3)(x) &= p_3(x + 1) - p_3(x) = (x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

sledi

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za določitev ničelnega prostora uporabimo to matriko, saj velja

$$\mathcal{A}p = 0 \iff [\mathcal{A}p]_{\mathbf{S}} = [\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}[p]_{\mathbf{S}} = [0]_{\mathbf{S}}.$$

Matrika je že v stopničasti obliki, tako da razberemo

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}[p]_{\mathbf{S}} = [0]_{\mathbf{S}} \iff [p]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{za neki } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Torej je $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{1\}$ (in konstanta 1 je baza tega enorazsežnega podprostora). Med drugim to pomeni, da preslikava ni injektivna in, ker slika med enako razsežnima prostoroma, tudi ne surjektivna.

Podobno lahko iz matrike razberemo tudi zalogo vrednosti. Zalogo vrednosti razpenjajo stolpci in zato je

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Baza je na primer $(1, x, x^2)$.

Za prehodno matriko iz baze \mathbf{B} v standardno bazo moramo zapisati ustrezne koeficiente v stolpce, torej

$$P_{\mathbf{BS}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo te matrike dobimo

$$[p]_{\mathbf{B}} = P_{\mathbf{SB}}[p]_{\mathbf{S}} = (P_{\mathbf{BS}})^{-1}[p]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$p(x) = (-2) \cdot x^2 + 1 \cdot (x^3 - x) + 3 \cdot x + (-1) \cdot (x + 1).$$

(Če odpravimo oklepaje, vidimo, da smo dobili prave koeficiente. Direktno bi te koeficiente dobili, če bi zapisali p kot poljubno linearno kombinacijo elementov baze \mathbf{B} in bi primerjali koeficiente.)

Nazadnje je še

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}]_{\mathbf{BB}} &= P_{\mathbf{SB}}[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}P_{\mathbf{BS}} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

12. Linearna preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{F}(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + y + z, 5x - y + z).$$

Podana je tudi baza $\mathbf{B} = ((1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, -1, 1))$ prostora \mathbb{R}^3 .

- Poiščite matriko preslikave \mathcal{F} v standardni bazi \mathbb{R}^3 .
- Poiščite prehodni matriki $P_{\mathbf{SB}}$ in $P_{\mathbf{BS}}$.
- Izračunajte koordinate vektorja $(3, 4, 5)$ v bazi \mathbf{B} .
- Poiščite matriko preslikave \mathcal{F} v bazi \mathbf{B} .

Odgovor: $[\mathcal{F}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{\mathbf{SB}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{\mathbf{BS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[(3, 4, 5)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$,
 $[\mathcal{F}]_{\mathbf{BB}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 9 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

13. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je podana s predpisom $\mathcal{A}(x, y) = (2x - y, 2x - y)$.

- Zapišite matriko A preslikave \mathcal{A} v standardni bazi.
- Diagonalizirajte matriko A .
- Izračunajte $f(A)$, kjer je $f(x) = x^9 + x^5 - 3x^4 + x^3 + 1$, in e^A .

Odgovor: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e^A = \begin{bmatrix} 2e^{-1} & 1-e \\ 2e^{-2} & 2-e \end{bmatrix}$

14. Linearna preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{F}(x, y, z) = (-x + 3y - z, -3x + 5y - z, -3x + 3y + z).$$

- Zapišite matriko $F = [\mathcal{F}]_{\mathbf{SS}}$ preslikave \mathcal{F} v standardni bazi \mathbf{S} prostora \mathbb{R}^3 .
- Diagonalizirajte matriko F .
- Izračunajte $f(F)$, kjer je $f(x) = -x^5 + x^3 - x$, in e^F .

Rešitev:

- Za matriko preslikave kot v prejšnjih nalogah izračunamo slike baznih elementov in dobimo

$$[\mathcal{F}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Najprej potrebujemo lastne vrednosti, ki so ničle karakterističnega polinoma

$$\chi_F(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5 - \lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 4 - 8\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2.$$

Za lastno vrednost $\lambda = 1$ izberemo na primer lastni vektor $(1, 1, 1)$, za $\lambda = 2$ pa (ker je dvojna ničla) $(1, 1, 0)$ in $(1, 0, -3)$. Tako je baza iz lastnih vektorjev $\mathbf{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -3))$ in velja

$$F = [\mathcal{F}]_{\mathbf{SS}} = P_{\mathbf{BS}}[\mathcal{F}]_{\mathbf{BB}}P_{\mathbf{SB}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako smo diagonalizirali matriko F , t. j. zapisali smo jo kot $F = PDP^{-1}$, kjer je D diagonalna in P obrnljiva matrika.

- Če je $F = PDP^{-1}$, za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $F^n = PD^nP^{-1}$. Tako je

$$f(F) = -F^5 + F^3 - F = P(-D^5 + D^3 - D)P^{-1}.$$

Potence diagonalne matrike dobimo tako, da ustrezno potenciramo diagonalne elemente. Zato je

$$\begin{aligned} -D^5 + D^3 - D &= - \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in

$$f(F) = \begin{bmatrix} 49 & -75 & 25 \\ 75 & -101 & 25 \\ 75 & -75 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje je

$$e^D = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$$

in

$$e^F = Pe^DP^{-1} \begin{bmatrix} 3e - 2e^2 & -3e + 3e^2 & e - e^2 \\ 3e - 3e^2 & -3e + 4e^2 & e - e^2 \\ 3e - 3e^2 & -3e + 3e^2 & e \end{bmatrix}.$$

15. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Izračunajte matriko e^A .

Odgovor: $e^A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2+e^6 & -2+2e^6 \\ -1+e^6 & 1+2e^6 \end{bmatrix}$

16. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = p(2x - 1).$$

Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave \mathcal{A} .

Odgovor: Lastne vrednosti so 1, 2, 4, 8, pripadajoči lastni vektorji pa npr. $1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3$.

Poglavje 3

Evklidski prostori

Evklidski prostori so linearni prostori, na katerih je definiran še skalarni produkt. Potem lahko govorimo o pravokotnosti, kotih, normi (dolžini), pravokotni projekciji...

Če je A poljubna podmnožica evklidskega prostora \mathcal{X} , je njen ortogonalni komplement definiran kot

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{X} : x \perp a \text{ za vsak } a \in A\}.$$

Ortogonalni komplement poljubne množice je podprostor.

Če je \mathcal{V} podprostor \mathcal{X} , potem je

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}^\perp = \mathcal{X} \quad \text{in} \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\perp = \{0\}.$$

Iz dimenzijske formule sledi

$$\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{V}^\perp = \dim \mathcal{X}.$$

Če je $\{g_1, \dots, g_m\}$ ortonormirana baza podprostora \mathcal{V} , potem za poljuben vektor $x \in \mathcal{X}$ dobimo njegovo pravokotno projekcijo na \mathcal{V} po formuli

$$\text{proj}_{\mathcal{V}} x = \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i,$$

njegovo oddaljenost od \mathcal{V} pa kot

$$d(x, \mathcal{V}) = \|x - \text{proj}_{\mathcal{V}} x\|.$$

1. V prostoru \mathbb{R}^4 je dan podprostor $\mathcal{W} = \mathcal{L}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 4, 5)\}$. Določite ortogonalni komplement \mathcal{W}^\perp podprostora \mathcal{W} .

Rešitev:

V splošnem velja

$$v \perp \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_m\} \iff v \perp v_i \text{ za vsak } i = 1, \dots, m.$$

Poljuben vektor $v = (x, y, z, w)$ je torej pravokoten na \mathcal{W} natanko tedaj, ko je pravokoten na $(1, 1, 1, 1)$ in $(1, 2, 4, 5)$, ali drugače, ko izpolnjuje

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y + 4z + 5w &= 0 \end{aligned}$$

Gaußova metoda eliminacije se konča že po enem koraku:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right].$$

z in w sta poljubna, medtem ko sta

$$y = -3z - 4w \quad \text{in} \quad x = -y - z - w = 2z + 3w.$$

Elementi \mathcal{W}^\perp so torej oblike

$$(2z + 3w, -3z - 4w, z, w) = z(2, -3, 1, 0) + w(3, -4, 0, 1).$$

Posledično eno bazo za \mathcal{W}^\perp sestavljata $(2, -3, 1, 0)$ in $(3, -4, 0, 1)$. Dimenzija \mathcal{W}^\perp je enaka 2, kar sledi tudi iz dimenzijske formule

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = 2 + \dim \mathcal{W}^\perp.$$

2. V prostoru \mathbb{R}^4 sta dana vektorja $a_1 = (1, -2, 2, -3)$ in $a_2 = (2, -3, 2, 4)$. Poiščite vektorja a_3 in a_4 , tako da vektorji a_1, a_2, a_3, a_4 tvorijo ortogonalno bazo prostora \mathbb{R}^4 .

Rešitev:

Najprej opazimo, da je res $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$. Poljuben vektor $v = (x, y, z, w)$, ki je pravokoten na a_1 in a_2 , zadošča enačbama

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - 3w &= 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

S pomočjo Gaußove metode eliminacije dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \end{array} \right].$$

Ker sta z in w poljubna, izberemo na primer $z = 1$ in $w = 0$. Potem sledi $x = y = 2$. Torej $a_3 = (2, 2, 1, 0)$. Zadnji vektor mora biti pa pravokoten še na a_3 , torej mora dodatno veljati še

$$2x + 2y + z = 0.$$

Poiskati moramo eno neničelno rešitev sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - 3w &= 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4w &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Tokrat dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -54 & 0 \end{array} \right].$$

Izberemo $w = 1$. Potem sledi $z = 6$, $y = 2$ in nazadnje $x = -5$. Tako smo dobili še $a_4 = (-5, 2, 6, 1)$.

3. Določite ortonormirano bazo ravnine $x + 2y - z = 0$ v prostoru \mathbb{R}^3 .

Odgovor: $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1))$

4. Določite ortonormirano bazo podprostora v \mathbb{R}^4 , napetega na vektorje $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 4, 5)$ in $v_3 = (-2, 1, 3, 2)$.

Rešitev:

Uporabimo Gram-Schmidtov postopek. Ker je

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1 \rangle = \langle (1, 2, 4, 5), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \rangle = 6$$

dobimo

$$\tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1 \rangle g_1 = (1, 2, 4, 5) - 6 \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) = (-2, -1, 1, 2).$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = 4 + 1 + 1 + 4 = 10 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, 1, 2).$$

Nazadnje izračunamo še

$$\begin{aligned} \langle v_3, g_1 \rangle &= \langle (-2, 1, 3, 2), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \rangle = 2 \\ \langle v_3, g_2 \rangle &= \langle (-2, 1, 3, 2), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, 1, 2) \rangle = \sqrt{10} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \tilde{g}_3 &= v_3 - \langle v_3, g_1 \rangle g_1 - \langle v_3, g_2 \rangle g_2 \\ &= (-2, 1, 3, 2) - 2 \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) - \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, 1, 2) \\ &= (-1, 1, 1, -1) \end{aligned}$$

in dobimo zadnji bazni vektor

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1).$$

Ortonormirana baza je torej $(\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, 1, 2), \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1))$.

5. Poiščite ortonormirani bazi prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ glede na skalarna produkta

$$(a) \quad \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx,$$

$$(b) \quad \langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^4 p(k)q(k)$$

in izrazite v njiju polinom $p(x) = x^2$.

Rešitev:

Baza prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ je na primer standardna baza (p_0, p_1, p_2) , pri čemer je $p_j(x) = x^j$.

Po Gram-Schmidtovem postopku je najprej

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0 \rangle = \int_0^1 1 \, dx = 1,$$

in

$$g_0 = \frac{p_0}{\|p_0\|} = p_0, \quad \text{ozioroma} \quad g_0(x) = 1.$$

V naslednjem koraku imamo

$$\langle p_1, g_0 \rangle = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad \tilde{g}_1 = p_1 - \langle p_1, g_0 \rangle g_0 = p_1 - \frac{1}{2} \cdot g_0.$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_1\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \, dx = \frac{1}{12}$$

in

$$g_1 = \frac{\tilde{g}_1}{\|\tilde{g}_1\|} = \sqrt{12} \left(p_1 - \frac{1}{2} \cdot g_0\right) \quad \text{ali} \quad g_1(x) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Za zadnji bazni element potrebujemo

$$\langle p_2, g_0 \rangle = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \langle p_2, g_1 \rangle = \int_0^1 2\sqrt{3}x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Potem je

$$\tilde{g}_2 = p_2 - \langle p_2, g_0 \rangle g_0 - \langle p_2, g_1 \rangle g_1 = p_2 - \frac{1}{3}p_0 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{3} \left(p_1 - \frac{1}{2} \cdot g_0\right) = p_2 - p_1 + \frac{1}{6}p_0$$

in

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 \, dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) \, dx = \frac{1}{180}.$$

Tako dobimo še

$$g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \sqrt{180} \left(p_2 - p_1 + \frac{1}{6}p_0\right) \quad \text{ali} \quad g_2(x) = 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

Ortonormirana baza je torej $\left(1, 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right)$.

Želimo še izraziti polinom $p(x) = x^2$ v tej bazi. Koeficienti pri razvoju po ortonormirani bazi so kar skalarni produkti z baznimi elementi, torej konkretno

$$p = \langle p, g_0 \rangle g_0 + \langle p, g_1 \rangle g_1 + \langle p, g_2 \rangle g_2.$$

Ker je $p = p_2$, opazimo, da smo

$$\langle p_2, g_0 \rangle = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \langle p_2, g_1 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

izračunali že zgoraj. Zadnji koeficient je

$$\langle p_2, g_2 \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 6\sqrt{5}(x^2 - x + \frac{1}{6}) dx = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Druga možnost je, da direktno nastavimo

$$x^2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) + \gamma \cdot 6\sqrt{5}(x^2 - x + \frac{1}{6})$$

in določimo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ker samo zadnji bazni element vsebuje x^2 , mora biti $\gamma = \frac{1}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{30}$. Potem sledi še $\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ in $\alpha = \frac{1}{3}$.

Podobno dobimo pri drugem skalarnem produktu ortonormirano bazo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}(x - 2), \frac{1}{\sqrt{14}}(x^2 - 4x + 2) \right).$$

6. V prostoru \mathbb{R}^4 poiščite pravokotno projekcijo točke $A(4, -1, -3, 4)$ na podprostor $\mathcal{L}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}$ in razdaljo od točke A do tega podprostora.

Rešitev:

Najprej uporabimo Gram-Schmidtov postopek, da dobimo ortonormirano bazo podprostora $\mathcal{V} = \mathcal{L}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}$. Kot v nalogi 4 je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

Nadaljujemo z

$$\langle v_2, g_1 \rangle = \langle (1, 2, 2, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \rangle = 2$$

in

$$\tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1 \rangle g_1 = (1, 2, 2, -1) - 2 \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) = (0, 1, 1, -2).$$

Tako dobimo

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = 0 + 1 + 1 + 4 = 6 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2).$$

Nazadnje izračunamo še

$$\begin{aligned} \langle v_3, g_1 \rangle &= \langle (1, 0, 0, 3), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \rangle = 2 \\ \langle v_3, g_2 \rangle &= \langle (1, 0, 0, 3), \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2) \rangle = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \tilde{g}_3 &= v_3 - \langle v_3, g_1 \rangle g_1 - \langle v_3, g_2 \rangle g_2 \\ &= (1, 0, 0, 3) - 2 \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) - (-\sqrt{6}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2) \\ &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Če dobimo ničelni vektor, to pomeni, da prvotna množica vektorjev ni bila linearno neodvisna, konkretno $v_3 \in \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$.

Ortonormirana baza \mathcal{V} je torej $(\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2))$.

Sedaj lahko projiciramo krajevni vektor $r = (4, -1, -3, 4)$ točke A na podprostor \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathcal{V}} r &= \langle r, g_1 \rangle g_1 + \langle r, g_2 \rangle g_2 \\ &= \langle (4, -1, -3, 4), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \rangle \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) + \\ &\quad + \langle (4, -1, -3, 4), \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2) \rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) + \frac{-12}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2) \\ &= (1, 1, 1, 1) - 2(0, 1, 1, -2) \\ &= (1, -1, -1, 5). \end{aligned}$$

Razdalja do tega podprostora pa je dolžina

$$\begin{aligned} d(r, \mathcal{V}) &= \|r - \text{proj}_{\mathcal{V}} r\| = \|(4, -1, -3, 4) - (1, -1, -1, 5)\| = \\ &= \|(3, 0, -2, -1)\| = \sqrt{9 + 0 + 4 + 1} = \sqrt{14}. \end{aligned}$$

7. V prostoru \mathbb{R}^4 sta dani točka $A(2, 1, -3, 4)$ in ravnina

$$\Sigma: \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Poiščite pravokotno projekcijo krajevnega vektorja točke A na ravnino Σ in razdaljo od točke A do ravnine Σ .

Odgovor: $\frac{1}{2}(-1, 5, -1, 5)$, $d = \sqrt{17}$

8. V prostoru $\mathcal{F}([-\pi, \pi])$ je dan skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Poiščite funkcijo $v \in \mathcal{V} = \mathcal{L}\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$, ki na intervalu $[-\pi, \pi]$ najboljše aproksimira funkcijo f ter določite razdaljo od f do \mathcal{V} , če je

(a) $f(x) = x$.

(b) $f(x) = \sin^3 x$.

Rešitev:

Z Gram-Schmidtovim postopkom dobimo iz $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$ ortonormirano bazo $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$. Funkcijo f najboljše aproksimira njena pravokotna projekcija na \mathcal{V} .

(a) Z upoštevanjem lihosti dobimo brez računanja za $k = 0, 1, 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(kx) dx = 0.$$

Velja tudi

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin x \, dx = [-x \cos x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 2\pi$$

in podobno

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2}x \cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \, dx = -\pi.$$

Torej je $(\text{proj}_{\mathcal{V}} f)(x) = \langle f, \sin x \rangle \sin x + \langle f, \sin 2x \rangle \sin 2x = 2 \sin x - \sin 2x$. Razdalja med f in \mathcal{V} pa je določena z

$$\|f - \text{proj}_{\mathcal{V}} f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x - 2 \sin x + \sin 2x)^2 \, dx = \frac{2}{3}\pi^2 - 5.$$

Tako je $d(f, \mathcal{V}) = \sqrt{\frac{2}{3}\pi^2 - 5}$.

(b) V tem primeru je edini neničelni skalarni produkt tisti s \sin , in sicer velja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cdot \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Torej $(\text{proj}_{\mathcal{V}} f)(x) = \langle f, \sin x \rangle \sin x = \frac{3}{4} \sin x$. Posledično je

$$d(f, \mathcal{V}) = \|f - \text{proj}_{\mathcal{V}} f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x - \frac{3}{4} \sin x)^2 \, dx \right)^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

9. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \, dx.$$

Poiščite polinom druge stopnje, ki na intervalu $[0, 1]$ najboljše aproksimira polinom $r(x) = x^3 - 1$.

Rešitev:

V nalogi 3.5 (a) smo ugotovili, da je eno ortonormirano bazo $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sestavljajo funkcije

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad g_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

Z upoštevanjem

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 - 1) \cdot 1 \, dx &= -\frac{3}{4} \\ \int_0^1 (x^3 - 1) \cdot 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \, dx &= \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \int_0^1 (x^3 - 1) \cdot 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \, dx &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \end{aligned}$$

dobimo

$$\text{proj}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} f = \sum_{i=0}^2 \langle f, g_i \rangle g_i = -\frac{3}{4}g_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20}g_1 + \frac{1}{4\sqrt{5}}g_2$$

oziroma

$$(\text{proj}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} f)(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{19}{20}.$$

10. Podprostor \mathcal{V} prostora \mathbb{R}^4 je določen s sistemom enačb:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Poiščite sistem enačb, ki določa ortogonalni komplement \mathcal{V}^\perp .

Rešitev:

Najprej določimo podprostor \mathcal{V} , in sicer z Gaußovo metodo. Na začetku odštejemo prvo vrstico od tretje in ju zatem zamenjamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots$$

Nadaljujemo z odštevanjem večkratnikov prve vrstice od druge in tretje, zamenjavo slednjih dveh in ustreznim odštevanjem:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sledi $x_2 = x_4$ in $x_1 = x_3 = 0$. Torej je $\mathcal{V} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 1)\}$, zato je \mathcal{V}^\perp podprostor vseh vektorjev, ki ustrezajo $x_2 + x_4 = 0$.

Matrični prostori

11. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Poiščite baze in dimenzije osnovnih prostorov matrike A , torej prostorov $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^\top)$, $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(A^\top)$.

Rešitev:

Vsako matriko lahko razumemo tudi kot linearno preslikavo. Dani matriki A tako ustreza linearna preslikava $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$. Velja naslednje

$$\mathcal{C}(A^\top) = \mathcal{N}(A)^\perp, \quad \mathcal{N}(A^\top) = \mathcal{C}(A)^\perp \quad \text{in} \quad \dim \mathcal{C}(A^\top) = \dim \mathcal{C}(A).$$

Za ničelni prostor A dobimo

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Torej so $x_5 = \alpha$, $x_4 = \beta$ in $x_3 = \gamma$ poljubni. Potem je $x_2 = -\frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma$ in $x_1 = -\alpha - \frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}\gamma$. Tako je $\dim \mathcal{N}(A) = 3$ in ena baza je

$$\left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right).$$

Iz tega sledi, da je $\dim \mathcal{C}(A^\top) = 2$. Za bazo lahko vzamemo

$$\left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right) \text{ ali pa } \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right).$$

Iz dimenzijske formule

$$5 = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A)$$

sledi $\dim \mathcal{C}(A) = 2$. Ker sta že prva dva stolpca A linearno neodvisna, lahko za bazo $\mathcal{C}(A)$ vzamemo kar njiju (ali pa poljuben drug par stolpcev razen prvega in zadnjega).

Iz $\mathcal{N}(A^\top) = \mathcal{C}(A)^\perp$ sledi $\dim \mathcal{N}(A^\top) = 1$. Potrebujemo torej en vektor, ki je pravokoten na $[1, 1, 3]^\top$ in $[2, -1, 0]^\top$, npr. $[1, 2, -1]^\top$.

12. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 13 \\ 7 & 3 & 14 \end{bmatrix}.$$

Poiščite baze in dimenzije prostorov $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^\top)$, $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(A^\top)$.

Odgovor:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} & \mathcal{C}(A) &= \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{N}(A^\top) &= \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \mathcal{C}(A^\top) &= \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Metoda najmanjših kvadratov

Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, polnega ranga ($\text{rang } A = n$) in vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Če je $m > n$, skoraj zagotovo ne obstaja rešitev sistema

$$Ax = b.$$

Zato iščemo vektor x , ki minimizira

$$\|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^m \left((Ax)_i - b_i \right)^2.$$

Tak vektor je rešitev normalnega sistema

$$A^\top Ax = A^\top b,$$

ki pa je enolično rešljiv.

13. Dana je tabela vrednosti meritev funkcije f :

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & \frac{11}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \end{array}$$

Poiščite parabolo $y = a + bx + cx^2$, ki se najboljše prilega tem točkam.

Rešitev:

Če bi obstajala parabola, ki bi res šla skozi te točke, bi njeni koeficienti rešili sistem

$$\begin{aligned} \frac{11}{4} &= a + b \cdot (-1) + c \cdot (-1)^2 \\ \frac{7}{4} &= a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 \\ \frac{1}{4} &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 \\ \frac{13}{4} &= a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 \end{aligned}$$

ali drugače

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

Pripadajoč normalni sistem je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}.$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema je $a = 1$, $b = -1$ in $c = 1$, torej se parabola

$$p(x) = x^2 - x + 1$$

najbolj prilega danim točkam.

14. Poiščite linearno funkcijo $y = kx + n$, ki najboljše aproksimira tabelo

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 2 & 4 & 3 & 6 & 8 \end{array}$$

Odgovor: $y = \frac{7}{5}x + \frac{9}{5}$

QR-razcep

Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, poln rang, potem obstaja QR-razcep:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = QR = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix},$$

pri čemer je $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ortonormirana, t. j. $Q^T Q = I$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa zgornjetrikotna in obrnljiva.

Reševanje normalnega sistema

$$A^T A x = A^T b$$

preko QR-razcepa je numerično stabilnejše. Če je $A = QR$, je $A^T A = R^T R$ in $A^T b = R^T Q^T b$. Tako je

$$A^T A x = A^T b \iff R^T R x = R^T Q^T b \iff R x = Q^T b.$$

15. Zapišite QR-razcep za matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

Najprej A : Uporabimo Gram-Schmidtov postopek na njenih stolpcih. Ker je

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 2^2 + 1^2 + 1 + (-2)^2 = 9,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & * & * \\ \frac{1}{3} & * & * \\ -\frac{2}{3} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{dobimo} \quad \tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1 \rangle g_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj poznamo že

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & * \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & * \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Nazadnje izračunamo še

$$\langle v_3, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \langle v_3, g_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3}$$

in

$$\tilde{g}_3 = v_3 - \langle v_3, g_1 \rangle g_1 - \langle v_3, g_2 \rangle g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\|\tilde{g}_3\|^2 = \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_3 \rangle = \frac{1}{81}(5^2 + 10^2 + 10^2) = \frac{225}{81} = \frac{25}{9},$$

dobimo zadnji za bazni vektor

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \frac{1}{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Na podoben način dobimo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

16. Zapišite QR-razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Uporabimo Gram-Schmidtov postopek na stolpcih matrike A . Ker je

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 2,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Torej} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{dobimo} \quad \tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1 \rangle g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = 0^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 2 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tako smo določili tudi druga stolpca

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & * \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & * \\ 0 & \sqrt{2} & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Nazadnje izračunamo še

$$\langle v_3, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{4}{\sqrt{2}} \quad \text{in} \quad \langle v_3, g_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

in

$$\tilde{g}_3 = v_3 - \langle v_3, g_1 \rangle g_1 - \langle v_3, g_2 \rangle g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadnji bazni vektor je

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tako je

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

17. Poiščite vektor $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše ustreza danemu sistemu

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 &= 4 \\x_1 - 3x_3 &= 6 \\x_2 + x_3 &= -1 \\-x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

Normalni sistem rešite preko QR-razcepa.

Rešitev:

Iščemo torej x , ki bo dal najboljši približek za $Ax = b$, pri čemer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

QR-razcep matrike A smo določili v nalogi 3.16, namreč

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

x je torej rešitev sistema $Rx = Q^T b$. Ker je

$$Q^T b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

moramo rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Torej

$$\begin{aligned}2x_3 = -\frac{1}{2} &\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{4} \\ \sqrt{2}x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} &\Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2} \\ \sqrt{2}x_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}x_3 = \frac{10}{\sqrt{2}} &\Rightarrow x_1 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Poglavje 4

Linearne diferencialne enačbe

Homogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Rešitve homogene linearne enačbe s konstantnimi koeficienti

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

sestavljajo n -razsežen linearen prostor. Njegovo bazo dobimo tako, da poiščemo ničle pripadajočega karakterističnega polinoma

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Če je $\lambda \in \mathbb{R}$ r -kratna ničla karakterističnega polinoma, imamo linearno neodvisne rešitve

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda x}.$$

Če je $\lambda = \alpha \pm \beta i \notin \mathbb{R}$ konjugiran par r -kratnih ničel karakterističnega polinoma, imamo linearno neodvisne rešitve

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{r-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Na tak način dobimo n linearno neodvisnih rešitev dane enačbe.

1. Rešite začetni problem

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Rešitev:

Karakteristični polinom je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Rešitve homogene linearne diferencialne enačbe 2. reda sestavljajo dvorazsežen vektorski prostor. Baza je (e^{2x}, xe^{2x}) . Poljubna rešitev je tako oblike

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Da bosta izpolnjena začetna pogoja, mora veljati najprej

$$1 = y(0) = Ae^{2 \cdot 0} + B \cdot 0 = A.$$

Ker je

$$y'(x) = 2Ae^{2x} + B(e^{2x} + 2xe^{2x}),$$

drugi pogoj pomeni

$$4 = y'(0) = 2Ae^{2 \cdot 0} + B(e^{2 \cdot 0} + 0) = 2A + B.$$

Torej je $A = 1$ in $B = 2$ ter

$$y(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}.$$

2. Rešite homogeni linearni diferencialni enačbi 2. reda s konstantnimi koeficienti:

(a) $y'' + y' - 6y = 0;$

(b) $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8.$

Odgovor:

(a) $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = 2e^{3x} \cos 2x + e^{3x} \sin 2x$

3. Poiščite splošni rešitvi diferencialnih enačb:

(a) $y''' - 7y'' + 11y' - 5y = 0;$

(b) $y^{(5)} + 18y''' + 81y' = 0.$

Rešitev:

(a) Karakteristični polinom je

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5.$$

Ena ničla je 1. Tako dobimo

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5).$$

Torej je splošna rešitev

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{5x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

(b) Karakteristični polinom je

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^5 + 18\lambda^3 + 81\lambda \\ &= \lambda(\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81) \\ &= \lambda(\lambda^2 + 9)^2 \\ &= \lambda(\lambda + 3i)^2(\lambda - 3i)^2. \end{aligned}$$

Torej

$$y(x) = A + B \cos 3x + Cx \cos 3x + D \sin 3x + Cx \sin 3x, \quad A, B, C, D, E \in \mathbb{R}.$$

4. Rešite naslednje diferencialne enačbe:

(a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$

(b) $y^{(4)} - y''' + 2y' = 0.$

(c) $y^{(4)} - y = 0.$

Odgovor:

(a) $y(x) = Ae^{-2x} + Be^x + Ce^{-x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = A + Be^{-x} + e^x(C \cos x + D \sin x), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + C \cos x + D \sin x, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Nehomogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Splošna rešitev nehomogene linearne enačbe s konstantnimi koeficienti

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

je oblike $y = y_H + y_P$, pri čemer je y_H splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe (ko je $f(x) = 0$), y_P pa je neka (partikularna) rešitev dane enačbe. Če ima f posebno obliko, imamo za partikularno rešitev nastavek.

- Če je

$$f(x) = e^{ax}P(x),$$

kjer je P polinom stopnje ν in a poljubno realno število (lahko tudi 0), je nastavek

$$y_P(x) = x^\rho e^{ax}Q(x),$$

kjer je Q polinom stopnje ν z neznanimi koeficienti in je ρ stopnja ničle a karakterističnega polinoma. (Če a ni ničla, je torej $\rho = 0$.)

- Če je

$$f(x) = e^{ax}(P_1(x) \cos(bx) + P_2(x) \sin(bx)),$$

kjer sta P_1 in P_2 polinoma stopnje ν_1 oz. ν_2 , je nastavek

$$y_P(x) = x^\rho e^{ax}(Q_1(x) \cos(bx) + Q_2(x) \sin(bx)),$$

kjer sta Q_1 in Q_2 polinoma stopnje $\max\{n_1, n_2\}$ z neznanimi koeficienti in je ρ stopnja ničle $a + ib$ karakterističnega polinoma.

- Če y_{P1} reši enačbo z desno stranjo f_1 in y_{P2} tako, ki ima na desni f_2 , potem $\alpha_1 y_{P1} + \alpha_2 y_{P2}$ reši enačbo z desno stranjo $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$.

5. Rešite naslednje diferencialne enačbe:

(a) $y'' - 2y' + y = (3 + x)e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

(b) $y'' + 9y = \cos 2x$.

(c) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$.

Rešitev:

(a) Najprej poiščemo ničle karakterističnega polinoma

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Ker je 1 dvojnica ničla, ima homogena enačba splošno rešitev

$$y_H(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

Za partikularno rešitev uporabimo nastavek

$$y_P(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

Izračunamo oba odvoda

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= ae^{2x} + (ax + b) \cdot 2e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x} \\ y''_P(x) &= 2ae^{2x} + (2ax + a + 2b) \cdot 2e^{2x} = 4(ax + a + b)e^{2x} \end{aligned}$$

in ju vstavimo v enačbo:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= (3 + x)e^{2x} \\ 4(ax + a + b)e^{2x} - 2(2ax + a + 2b)e^{2x} + (ax + b)e^{2x} &= (3 + x)e^{2x} \\ (ax + 2a + b)e^{2x} &= (3 + x)e^{2x} \end{aligned}$$

Torej mora biti $a = 1$ in $2a + b = 3$, oziroma $b = 1$. Posledično je splošna rešitev enaka

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = (x + 1)e^{2x} + Ae^x + Bxe^x.$$

Za upoštevanje začetnega pogoja potrebujemo še odvod:

$$y'(x) = (2x + 3)e^{2x} + Ae^x + B(x + 1)e^x.$$

Veljati mora

$$2 = y(0) = 1 + A$$

in

$$4 = y'(0) = 3 + A + B.$$

Torej je $A = 1$ in $B = 0$. Iskana rešitev je

$$y(x) = (x + 1)e^{2x} + e^x.$$

(b) V tem primeru dobimo za karakteristični polinom

$$0 = \lambda^2 + 9.$$

Ničli sta $0 \pm 3i$, zato ima homogena enačba splošno rešitev

$$y_H(x) = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Za partikularno rešitev uporabimo nastavek

$$y_P(x) = a \cos 2x + b \sin 2x.$$

Potrebujemo drugi odvod

$$y_P''(x) = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x.$$

Iz

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= \cos 2x \\ -4a \cos 2x - 4b \sin 2x + 9(a \cos 2x + b \sin 2x) &= \cos 2x \\ 5a \cos 2x + 5b \sin 2x &= \cos 2x \end{aligned}$$

sledi $a = \frac{1}{5}$ in $b = 0$. Torej je splošna rešitev

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = \frac{1}{5} \cos 2x + A \cos 3x + B \sin 3x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(c) Iz

$$0 = \lambda^2 + 1$$

sledi $\lambda = 0 \pm i$. Homogena enačba ima splošno rešitev

$$y_H(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Ker je enačba linearna, lahko vzamemo nastavek za vsak člen posebej. Partikularna rešitev bo potem linearna kombinacija obeh. Najprej za $\sin x$:

$$y_{P1}(x) = x(a \cos x + b \sin x).$$

Odvoda sta

$$y_{P1}'(x) = (a \cos x + b \sin x) + x(-a \sin x + b \cos x).$$

in

$$y_{P1}''(x) = (-a \sin x + b \cos x) + (-a \sin x + b \cos x) + x(-a \cos x - b \sin x).$$

Iz

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin x \\ 2(-a \sin x + b \cos x) + x(-a \cos x - b \sin x) + x(a \cos x + b \sin x) &= \sin x \\ 2(-a \sin x + b \cos x) &= \sin x \end{aligned}$$

dobimo $a = -\frac{1}{2}$ in $b = 0$. Torej je

$$y_{P1}(x) = -\frac{1}{2}x \cos x.$$

Nastavek za e^{-x} je

$$y_{P2}(x) = ae^{-x}.$$

in

$$y''_{P2}(x) = ae^{-x}.$$

Iz

$$\begin{aligned} y'' + y &= e^{-x} \\ ae^{-x} + ae^{-x} &= e^{-x} \end{aligned}$$

sledi $a = \frac{1}{2}$. Partikularna rešitev je

$$y_P(x) = y_{P1}(x) - 2y_{P2}(x) = -\frac{1}{2}x \cos x - e^{-x},$$

tako da je splošna rešitev

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = -\frac{1}{2}x \cos x - e^{-x} + A \cos x + B \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

6. Rešite sledeče začetne probleme:

- (a) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
- (b) $y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
- (c) $y'' + y' = 2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
- (d) $y'' + y = x^2 - x + 1$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.
- (e) $y'' + y = 2 \sin x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

Odgovor:

- (a) $y(x) = (1 + 2x + \frac{x^3}{6})e^{2x}$
- (b) $y(x) = 2e^x - e^{-x} + 2 \cos x - \sin x$
- (c) $y(x) = 1 + e^{-x} + 2x$
- (d) $y(x) = 3 \sin x + x^2 - x - 1$
- (e) $y(x) = 3 \cos x + 2 \sin x - x \cos x$

7. Poiščite vse rešitve diferencialnih enačb

- (a) $y''' - y' = \sin 3x$.
- (b) $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = e^{2x} - e^{-x}$.
- (c) $y^{(4)} + 2y'' + y = e^x \cos x$.

Odgovor:

- (a) $y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} + \frac{1}{30} \cos 3x$, $A, B, C \in \mathbb{R}$

- (b) $y(x) = (A + Bx + Cx^2 + \frac{x^3}{18})e^{-x} + (D + \frac{x}{27})e^{2x}$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$
 (c) $y(x) = (-\frac{3e^x}{25} + A + Bx) \cos x + (\frac{4e^x}{25} + C + Dx) \sin x$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

8. Poiščite nastavke za partikularne rešitve naslednjih linearnih diferencialnih enačb:

- (a) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$
 (b) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2e^x \sin 2x$
 (c) $y'' - 3y' = x + \cos x$

Rešitev:

- (a) Karakteristični polinom enačbe $y'' - 5y' + 6y = 0$ je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Ker 1 ni ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za prvi člen

$$y_{P1}(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

2 je enostavna ničla karakterističnega polinoma, torej

$$y_{P2}(x) = x(\alpha x + \beta)e^{2x}.$$

Torej

$$y_P(x) = (ax^2 + bx + c)e^x + x(\alpha x + \beta)e^{2x}.$$

- (b) Karakteristični polinom enačbe $y'' - 2y' + 5y = 0$ je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i.$$

Koeficient pri eksponentni funkciji na desni je v obeh členih ravno tako $1 \pm 2i$. Ker gre za enostavni ničli in je večja stopnja polinomov na desni enaka 2, iščemo partikularno rešitev z nastavkom

$$y_P(x) = xe^x [(ax^2 + bx + c) \cos 2x + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \sin 2x].$$

- (c) Tukaj dobimo nastavek

$$y_P(x) = x(ax + b) + c \cos x + d \sin x.$$

Enačbe prvega reda z nekonstantnimi koeficienti

Od linearnih enačb z nekonstantnimi koeficienti se bomo spomnili le metode za enačbe prvega reda

$$a(x)y' + b(x)y = f(x).$$

Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo

$$a(x)y' + b(x)y = 0,$$

ki ima ločljivi spermenljivki. Njena splošna rešitev ima obliko

$$y_H(x) = Cu(x),$$

kjer je C poljubna konstanta. Partikularno rešitev dobimo z *variacijo konstante*, to je, z nastavkom

$$y_P(x) = C(x)u(x).$$

Splošna rešitev je $y = y_H + y_P$.

9. Rešite linearne diferencialne enačbe

- (a) $x^2y' = 2xy - 3$, $y(-1) = 1$.
- (b) $x(1 + x^2)y' = (1 + x^2)y + x^2$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$,
- (c) $y' = 3x^2y + x^5 + x^2$, $y(0) = 1$.

Rešitev:

(a) Pripadajoča homogena enačba je

$$x^2y' = 2xy,$$

ki ima ločljivi spremenljivki. Njena splošna rešitev je

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2y}{x} \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{2}{x} dx \\ \ln y &= \ln C + 2 \ln x \\ y_H(x) &= Cx^2 \end{aligned}$$

Rešitev nehomogene enačbe dobimo z variacijo konstante. Pišemo

$$y_P(x) = C(x)x^2 \quad \text{in tako} \quad y'_P(x) = C'(x)x^2 + 2C(x)x$$

in vstavimo v enačbo. Tako dobimo

$$x^2(C'(x)x^2 + 2C(x)x) = 2xC(x)x^2 - 3.$$

Sledi $C'(x) = -\frac{3}{x^4}$. Ena možnost je $C(x) = \frac{1}{x^3}$. Tako smo dobili

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Cx^2 + \frac{1}{x^3} \cdot x^2 = Cx^2 + \frac{1}{x}.$$

Veljati mora

$$1 = y(-1) = C - 1.$$

Zato je

$$y(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}.$$

(b) Pripadajoča homogena enačba

$$x(1+x^2)y' = (1+x^2)y$$

ima rešitev

$$y_H(x) = Cx.$$

Z nastavkom $y_P(x) = C(x)x$ dobimo $C'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oziroma $C(x) = \arctan x$. Tako je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Cx + x \arctan x.$$

Upoštevamo še začetni pogoj

$$\frac{\pi}{4} = y(1) = C + \arctan 1$$

in dobimo $C = 0$ ter

$$y(x) = x \arctan x.$$

(c) Spet najprej rešimo homogeno enačbo

$$y' = 3x^2y \quad \text{in dobimo} \quad y_H(x) = Ce^{x^3}.$$

Nastavek $y_P(x) = C(x)e^{x^3}$ nam dá $C'(x) = (x^5 + x^2)e^{-x^3}$. Z uvedbo nove spremenljivke in per partesom dobimo

$$C(x) = -\frac{1}{3}(x^3 + 2)e^{-x^3}.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{x^3} - \frac{1}{3}(x^3 + 2).$$

Iz

$$1 = y(0) = Ce^0 - \frac{1}{3}(0 + 2)$$

določimo še

$$C = \frac{5}{3} \quad \text{in} \quad y(x) = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}(2 + x^3).$$

10. Poiščite splošne rešitve naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $xy' + y = \ln x + 1,$

(b) $y' - y \tan x = \cos x.$

Odgovor:

(a) $y(x) = \ln x + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = \frac{C+2x+\sin 2x}{4 \cos x}, C \in \mathbb{R}$

Poglavje 5

Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Homogen sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti ima obliko

$$v'(t) = Av(t),$$

kjer je $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ iskana vektorska funkcija, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ pa dana matrika koeficientov. Rešitve sestavljajo n -razsežen linearni prostor. Na voljo imamo tri metode za reševanje:

- Sistem lahko pretvorimo v diferencialno enačbo n -tega reda za eno skalarno funkcijo.
- Če je matrika A diagonalizabilna, moremo bazo tvoriti z uporabo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Za vsako realno lastno vrednost λ in pripadajoči lastni vektor u imamo rešitev

$$t \mapsto e^{\lambda t} u.$$

Če imamo konjugiran par lastnih vrednosti $\alpha \pm \beta i$ in je u lastni vektor za eno izmed njih, sta

$$t \mapsto e^{\alpha t} ((\cos \beta t) \operatorname{Re} u - (\sin \beta t) \operatorname{Im} u) \quad \text{in} \quad t \mapsto e^{\alpha t} ((\sin \beta t) \operatorname{Re} u + (\cos \beta t) \operatorname{Im} u)$$

rešitvi.

- Bazo za prostor rešitev sestavljajo stolpci matrične funkcije

$$\Phi(t) = e^{tA}.$$

Če imamo podan začetni pogoj, je rešitev enaka $v(t) = \Phi(t)v(0)$.

1. Rešitvi začetnih problemov

$$\begin{array}{l} x' = -x + y, \quad x(0) = 10, \\ y' = 4x - 4y, \quad y(0) = 0 \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{l} x' = 4x + 2y, \quad x(0) = 2, \\ y' = -3x - y, \quad y(0) = -3. \end{array}$$

poiščite na vse tri načine. Za vsako rešitev narišite še časovni diagram in določite orbito ter jo skicirajte. Kaj lahko poveste o $x(t)$ in $y(t)$, ko preteče veliko časa?

Rešitev:

Najprej prvi sistem. Če iz prve enačbe izrazimo

$$y = x' + x$$

in vstavimo v drugo, dobimo

$$y' = x'' + x' = 4x - 4(x' + x) = -4x',$$

torej

$$x'' + 5x' = 0.$$

Ničli karakterističnega polinoma sta 0 in -5 , zato je splošna rešitev

$$x(t) = A + Be^{-5t}.$$

Začetna pogoja sta

$$x(0) = 10 \quad \text{in} \quad x'(0) = -x(0) + y(0) = -10,$$

iz česar sledi $10 = A + B$ in $-10 = -5B$. Torej je $B = 2$ in $A = 8$. Rešitev je torej

$$x(t) = 8 + 2e^{-5t}.$$

Iz tega sledi še

$$y(t) = x'(t) + x(t) = -10e^{-5t} + 8 + 2e^{-5t} = 8 - 8e^{-5t}.$$

Sedaj rešimo nalogo s pomočjo lastnih vektorjev: Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda + 5).$$

Poiščimo pripadajoče lastne vektorje.

- $\lambda = 0$: Rešitev sistema $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je npr. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $\lambda = -5$: Ena rešitev $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Splošna rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + be^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + be^{-5 \cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

dobimo $a + b = 10$ in $0 = a - 4b$. Tako je $b = 2$ in $a = 8$.

Tretja možnost je z eksponentno funkcijo matrike. Tedaj velja

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}.$$

Zgoraj smo že izračunali lastne vrednosti in vektorje, tako da je

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2e^{-5t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 + 2e^{-5t} \\ 8 - 8e^{-5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opazimo, da za vsak t velja $\frac{x-8}{2} = \frac{y-8}{-8}$. Orbita leži na premici $y = -4x + 40$. Velja

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty \\ -\infty \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Gibanje je ves čas v isti smeri, saj je

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e^{-5t} \\ 40e^{-5t} \end{bmatrix} = e^{-5t} \begin{bmatrix} -10 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Za drugi sistem dobimo

$$x(t) = 2e^t \quad \text{in} \quad y(t) = -3e^t.$$

2. Poiščite splošno rešitev sistemov

$$\begin{aligned} x' &= x + y, & \text{in} & & x' &= 2x + y, \\ y' &= -2x + 3y, & & & y' &= x + 2y. \end{aligned}$$

Rešitev:

Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1.$$

Lastni vrednosti sta torej $2 \pm i$. Ena rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} -1 \mp i & 1 \\ -2 & 1 \mp i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \pm i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Ae^{2t} \left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + Be^{2t} \left(\sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

oziroma

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{2t} \cos t + Be^{2t} \sin t, \\ y(t) &= Ae^{2t}(\cos t - \sin t) + Be^{2t}(\sin t + \cos t). \end{aligned}$$

Podobno dobimo za drugi sistem

$$x(t) = -Ae^t + Be^{3t}, \quad y(t) = Ae^t + Be^{3t}.$$

3. Začetni problem

$$u' = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} u, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}$$

rešite na dva načina:

- s prevedbo na linearno diferencialno enačbo drugega reda,
- z uporabo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike sistema.

Poiščite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)}$.

Odgovor: $x(t) = 21e^{3t} - 7e^{11t}$, $y(t) = 3e^{3t} + 7e^{11t}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)} = -1$

4. Poiščite splošno rešitev sistema $v' = Av$, če je

$$(a) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

(a) Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -4 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \left((3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 \right) = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

Lastni vrednosti sta tako -1 in $2_{(2)}$. Pripadajoči lastni vektorji:

- v ničelnem prostoru $A + I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ leži npr. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$,
- v ničelnem prostoru $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ lahko najdemo dva linearno neodvisna lastna vektorja, npr. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Splošna rešitev je torej

$$v(t) = Ae^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + Be^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + Ce^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Podobno dobimo

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t}, \quad y(t) = -Ae^{-t} + Ce^{2t}, \quad z(t) = -Ce^{2t}.$$

5. Poiščite rešitve naslednjih začetnih problemov in obravnavajte njihova obnašanja za $t \rightarrow \infty$:

(a) $u' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} u, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},$

(b) $v' = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$

(c) $w' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} w, \quad w(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

Rešitev:

(a) Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -9 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2.$$

-2 je torej dvojna ničla karakterističnega polinoma. Toda ničelni prostor matrike

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

je enodimenzionalen, napenja ga vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Z doslej uporabljeno metodo dobimo le eno rešitev.

Če imamo dvorazsežen problem kot v tej nalogi, eno dvojno lastno vrednost, a le enodimenzionalen prostor lastnih vektorjev, potem storimo sledeče: Za w_2 vzamemo poljuben neničelen vektor ki ni lastni, npr. $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Potem je $w_1 = (A + 2I)w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ lastni vektor. Splošna rešitev je

$$u(t) = Ae^{-2t}w_1 + Be^{-2t}(w_2 + tw_1) = Ae^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} + Be^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} \right).$$

Iz začetnega pogoja sledi

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = u(0) = A \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je $A = \frac{4}{9}$. Potem je $B = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$. Tako je

$$u(t) = \frac{4}{9}e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} \right) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1-t \\ 3t-4 \end{bmatrix}.$$

Velja še

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

(b) Rešitev je

$$v(t) = e^{-6t} \begin{bmatrix} 3 \cos t + 2 \sin t \\ 5 \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

Zanjo velja $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Tukaj je rešitev

$$w(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 4t + 1 \\ -4t + 3 \end{bmatrix}.$$

Opazimo še $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_1(t)}{w_2(t)} = -1$.

Poglavje 6

Fourierove vrste in robni problemi

Fourierove vrste

Denimo, da imamo „dovolj lepo“ funkcijo $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Zadoščča, da je odsekoma zvezna in da je $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Potem jo lahko razvijemo v Fourierovo vrsto

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

pri čemer so koeficienti enaki

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

ter za $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \text{in} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Vrsta konvergira v prostoru $L^2(-\pi, \pi)$ in določa funkcijo F , ki je dobro definirana na celem \mathbb{R} in je periodična s periodo 2π .

Podobno lahko razvijemo funkcije s poljubno periodo. Če ima $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodo P , potem je njena Fourierova vrsta

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{2\pi k}{P} x + b_k \sin \frac{2\pi k}{P} x)$$

s koeficienti

$$a_0 = \frac{2}{P} \int_I f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{P} \int_I f(x) \cos \frac{2\pi k}{P} x dx \quad \text{in} \quad b_k = \frac{2}{P} \int_I f(x) \sin \frac{2\pi k}{P} x dx.$$

Pri tem I je poljuben interval dolžine P , na primer $[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}]$.

Ker gre za konvergenco v evklidskih prostoru, dodajmo še pojasnilo o obnašanju te vrste po točkah.

Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodična s periodo $P > 0$ in odsekoma zvezna. Če v neki točki $x_0 \in \mathbb{R}$ obstajata vsaj oba enostranska odvoda, potem je

$$F(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \nearrow x_0} f(x) + \lim_{x \searrow x_0} f(x) \right).$$

1. Določite Fourierovo vrsto funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Rešitev:

Koeficienti so

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

ter za $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} = 0$$

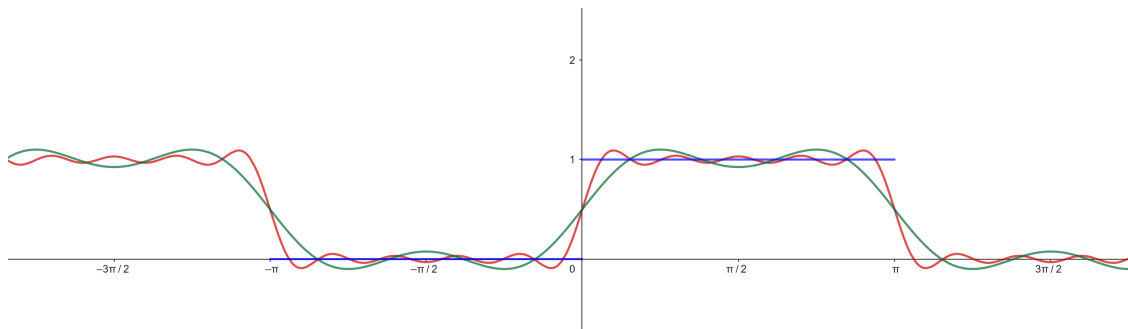
in

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{-(-1)^k + 1}{k\pi}.$$

Torej je

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \dots \right).$$

Na spodnji sliki je z modro barvo narisan graf funkcije f , z zeleno delna vsota do člena $\frac{\sin 3x}{3}$, z rdečo pa delna vsota do člena $\frac{\sin 9x}{9}$:



2. Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

razvijte v Fourierovo vrsto. Z dobljenim rezultatom izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Odgovor: $F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

3. Določite Fourierovo vrsto funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ in izračunajte vsoto vrste

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Rešitev:

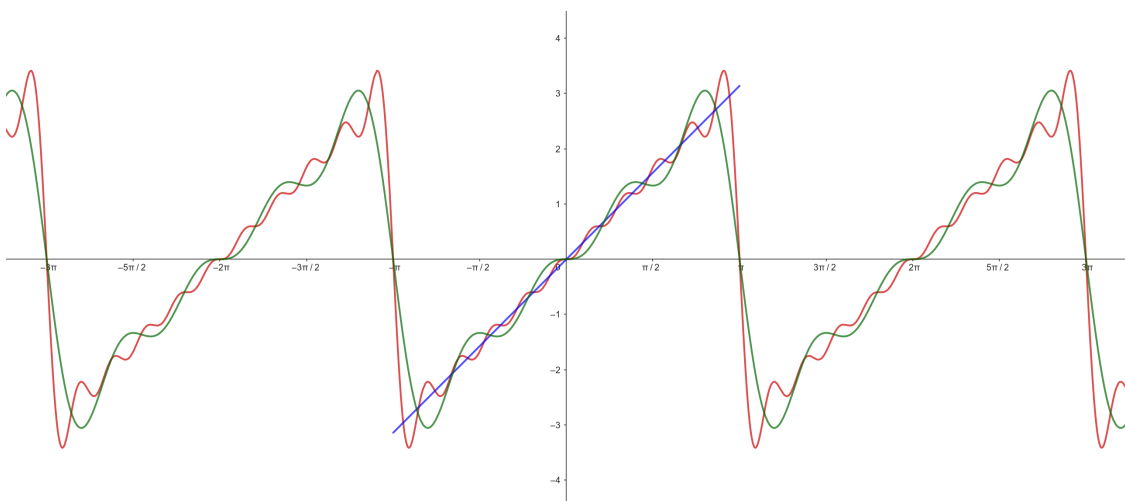
Ker je funkcija liha, so vsi $a_k = 0$. Nadalje je

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{-(-1)^k}{k} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Fourierova vrsta je torej

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

Na spodnji sliki je z modro barvo narisan graf funkcije f , z zeleno delna vsota do člena $\frac{\sin 4x}{4}$, z rdečo pa delna vsota do člena $\frac{\sin 10x}{10}$.



V $x = \frac{\pi}{3}$ je f odvedljiva, zato Fourierova vrsta v tej točki konvergira proti funkcijski vrednosti. Če označimo z s iskano vsoto, je

$$\frac{\pi}{3} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} s, \quad \text{in tako} \quad s = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. Funkcijo $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, razvijte v Fourierovo vrsto. Z dobljenim rezultatom izračunajte vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Odgovor: $F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

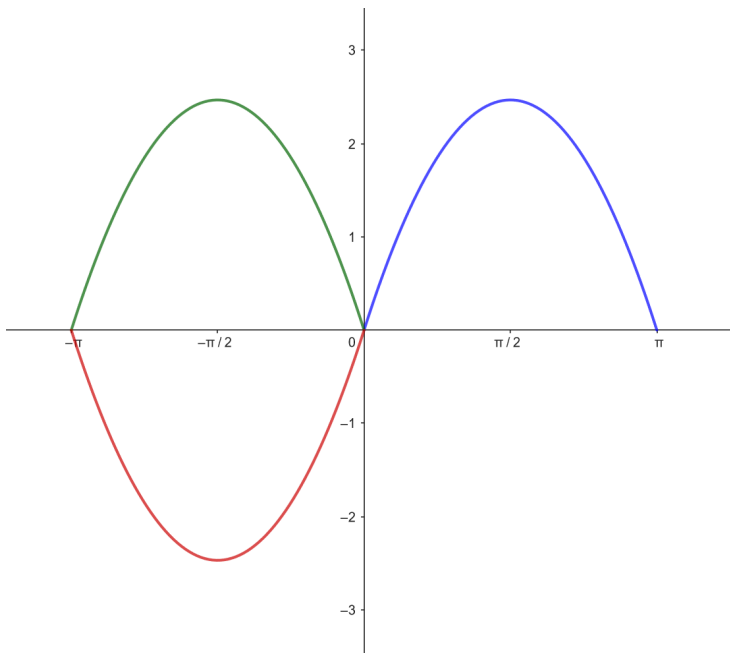
5. Funkcijo $f(x) = x(\pi - x)$ razvijte na $[0, \pi]$ v Fourierovo vrsto:

- (a) po samih sinusih,
- (b) po samih kosinusih.

Z dobljenim rezultatom izračunajte vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rešitev:

Funkcija f nas zanima samo na intervalu $[0, \pi]$. To je modra črta na sliki. Če želimo dobiti razvoj po samih kosinusih, jo moramo razširiti do sode funkcije na $[-\pi, \pi]$ (zelená črta), če pa po samih sinusih, pa do lihe funkcije na $[-\pi, \pi]$ (rdeča črta):



Najprej izračunajmo integrale, ki jih bomo potrebovali:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx &= \left[x \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos kx}{k} \, dx \\ &= -\pi \frac{\cos k\pi}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi} = \pi \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \end{aligned}$$

ter

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx &= \left[x \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k} \, dx = 0 + \left[\frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \\ \int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx &= \left[x^2 \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{-\cos kx}{k} \, dx = -\pi^2 \frac{\cos k\pi}{k} + \frac{2}{k} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \\ \int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx &= \left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} \, dx = -\frac{2}{k} \pi \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

Koeficienti v razvoju po sinusih so

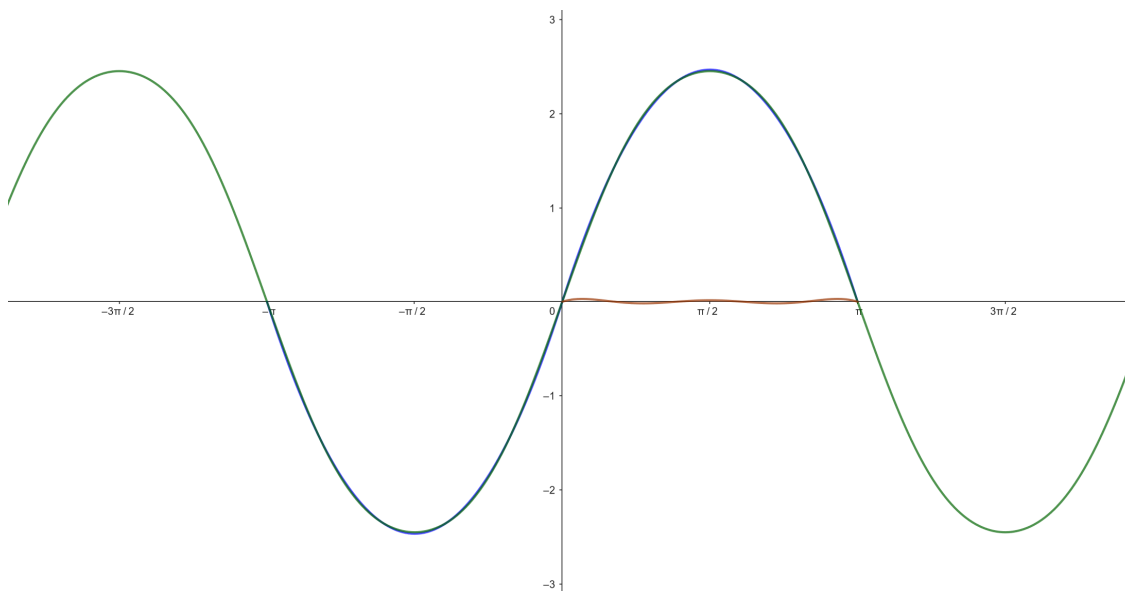
$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin kx \, dx \\
 &= 2 \int_0^\pi x \sin kx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin kx \, dx \\
 &= 2\pi \frac{(-1)^{k+1}}{k} + 2\pi \frac{(-1)^k}{k} - \frac{2}{\pi} \frac{2(-1)^k - 1}{k^2} \\
 &= \frac{4}{k^3 \pi} (1 + (-1)^{k+1}).
 \end{aligned}$$

(Ker integriramo sodo funkcijo po intervalu $[-\pi, \pi]$, je interval enak dvakratniku integrala po $[0, \pi]$.) Torej je za $x \in [0, \pi]$

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right).$$

Dejansko smemo pisati enačaj, saj razvijamo periodično zvezno funkcijo, ki ima povsod vsaj enostranske odvode.

Na spodnji sliki je z modro barvo narisana graf lihe razširitve f . Že vsota prvih dveh členov (zelena črta) zelo dobro aproksimira f . Razlika je obarvana rjavo.



V razvoju po samih kosinusih pa so koeficienti

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

ter za $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \cos kx \, dx \\
 &= 2 \int_0^\pi x \cos kx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos kx \, dx \\
 &= 2 \frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \frac{2}{\pi} \frac{2}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
 &= 2 \frac{(-1)^k - 1}{k^2} + 4 \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \\
 &= 2 \frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^2}.
 \end{aligned}$$

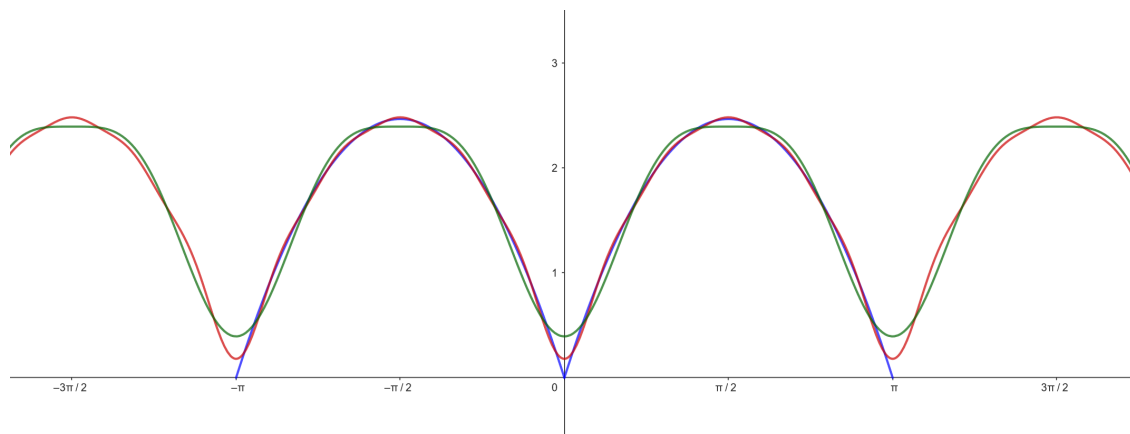
Tako je za $x \in [0, \pi]$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k^2}.$$

Posledično je

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{ozioroma} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Z modro barvo je narisana graf sode razširitve f , z zeleno delna vsota do člena $\frac{\cos 4x}{2^2}$, z rdečo pa delna vsota do člena $\frac{\cos 10x}{5^2}$:



6. Funkcijo $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ razvijte na $(0, \pi)$ v Fourierovo vrsto:

- po samih sinusih,
- po samih kosinusih.

Odgovor:

- $F(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2nx),$
- $F(x) = - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x).$

7. Naj bo $a \notin \mathbb{Z}$ poljuben in f 2π -periodična funkcija z $f(x) = \cos(a\pi - a|x|)$ za $x \in [-\pi, \pi]$. Določite Fourierovo vrsto f in pokažite

$$\cot(\pi a) = \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 - k^2} \right) = \frac{a}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 - k^2}.$$

Rešitev:

Ker je funkcija soda, so vsi $b_k = 0$. Nadalje je

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(a\pi - ax) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(a\pi - ax)}{-a} \right]_0^{\pi} = \frac{\sin(a\pi)}{\pi a}$$

in za $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(a\pi - ax) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos(a\pi + (-a+k)x) + \cos(a\pi + (-a-k)x) \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(a\pi + (-a+k)x)}{-a+k} + \frac{\sin(a\pi + (-a-k)x)}{-a-k} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(k\pi)}{-a+k} + \frac{\sin(-k\pi)}{-a-k} \right) - \left(\frac{\sin(a\pi)}{-a+k} + \frac{\sin(a\pi)}{-a-k} \right) \\ &= 0 + \frac{1}{\pi} \sin(a\pi) \left(\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a+k} \right) \\ &= \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - k^2)}. \end{aligned}$$

Fourierova vrsta je tako

$$F(x) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - k^2)} \cos kx.$$

Funkcija f je zvezna v 0 in obstajata levi in desni odvod. Zato konvergira vrsta za $x = 0$ proti $f(0) = \cos(a\pi)$. Torej

$$\cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - k^2)}$$

oziroma

$$\cot(a\pi) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi(a^2 - k^2)}.$$

Robni problemi

8. Rešite robne probleme

$$(a) \quad y'' + 4y = 0, \quad y(0) + 2y'(0) = -1, \quad -y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8,$$

$$(b) \quad y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y(2\pi) = -2,$$

$$(c) \quad y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y(2\pi) = 3.$$

Rešitev:

V vseh treh primerih je karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4.$$

Splošna rešitev je tako

$$y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Potrebujemo še

$$y'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x.$$

V primeru (a) dobimo pogoja

$$-1 = y(0) + 2y'(0) = A + 4B$$

in

$$8 = -y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -B - 2A.$$

Sledi $A = -\frac{31}{7}$ in $B = \frac{6}{7}$ in tako

$$y = -\frac{31}{7} \cos 2x + \frac{6}{7} \sin 2x.$$

Če naj veljata robna pogoja iz (b), mora biti

$$-2 = y(0) = A \quad \text{in} \quad -2 = y(2\pi) = A.$$

Torej rešitev ni enolična. Za vsak $B \in \mathbb{R}$ imamo namreč rešitev

$$y = -2 \cos 2x + B \sin 2x.$$

Podobno mora v (c) veljati

$$-2 = y(0) = A \quad \text{in} \quad 3 = y(2\pi) = A.$$

Ta robni problem torej nima rešitve.

9. Rešite robne probleme:

$$(a) \quad y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y(2\pi) = 0,$$

$$(b) \quad y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0,$$

$$(c) \quad y'' + 25y = 0, \quad y'(0) = 6, \quad y'(\pi) = -9.$$

Odgovor:

- (a) $y(x) = 7 \cos(\sqrt{3}x) - 7 \cot(2\sqrt{3}\pi) \sin(\sqrt{3}x)$
- (b) $y(x) = 0$
- (c) robni problem nima rešitve

10. Poščite lastne vrednosti in lastne funkcije za linearen diferencialni operator $Ly = -y''$ z robnimi pogoji

- (a) $y(0) = y(\pi) = 0$,
- (b) $y'(0) = y'(2\pi) = 0$.

Rešitev:

Če je k lastna vrednost, y pa lastna funkcija, potem velja $Ly = ky$, oziroma

$$y''(x) + ky(x) = 0.$$

Karakteristični polinom je $\lambda^2 + k = 0$. Če je $k = -\omega^2 < 0$, je splošna rešitev

$$y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$$

V primeru (a) mora biti

$$0 = y(0) = A + B.$$

Torej je

$$y(x) = A(e^{\omega x} - e^{-\omega x}).$$

Potem mora zaradi $y(\pi) = 0$ veljati $A = 0$. Ničelna funkcija pa ni lastna funkcija. Torej noben $k < 0$ ni lastna vrednost. Za $k = 0$ bi dobili $y(x) = A + Bx$, iz česar spet sledi $y = 0$. Zato so vse lastne vrednosti pozitivne, t. j. $k = \omega^2 > 0$. Dobimo

$$y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

Iz $y(0) = 0$ sledi $A = 0$. Potem mora biti še

$$y(\pi) = 0 = B \sin \omega \pi.$$

Sledi $\omega \in \mathbb{N}$.

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ imamo torej lastno vrednost $\lambda_n = n^2$ in pripadajočo lastno funkcijo $y_n = \sin nx$.

V primeru (b) najprej podobno kot pri (a) dobimo, da negativnih lastnih vrednosti ni. Za $k = 0$ pa imamo neničelno lastno funkcijo 1.

Za pozitivne $k = \omega^2$ pa imamo spet

$$y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

Potem je

$$y'(x) = -A\omega \sin \omega x + B\omega \cos \omega x.$$

Sledi

$$0 = y'(0) = B\omega$$

in

$$0 = y'(2\pi) = -A\omega \sin 2\pi\omega,$$

torej $2\omega \in \mathbb{N}$. Za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $\lambda_n = \frac{n^2}{4}$ lastna vrednost in $y_n(x) = \cos \frac{n}{2}x$ lastna funkcija.

11. Poščite lastne vrednosti in lastne funkcije za linearen diferencialni operator $Ly = -y''$ z robnimi pogoji

(a) $y(\frac{\pi}{2}) = y(\pi) = 0,$

(b) $y'(0) = y(2\pi) = 0,$

(c) $y(0) = y'(\pi) = 0.$

Odgovor:

(a) $\lambda_n = 4n^2, y_n(x) = \sin 2nx, n \in \mathbb{N}$

(b) $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, y_n(x) = \cos \frac{(2n-1)x}{2}, n \in \mathbb{N}$

(c) $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, y_n(x) = \sin \frac{(2n-1)x}{2}, n \in \mathbb{N}$

Poglavje 7

Parcialne diferencialne enačbe

Valovna enačba na premici

Rešitev homogene valovne enačbe na premici

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

ob podanih začetnih pogojih

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

dobimo po d'Alambertovi formuli

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

1. Rešite Cauchyjev problem:

$$u_{tt} - \frac{1}{4}u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \cos x, \quad u_t(x, 0) = x - 1.$$

Rešitev:

Razberemo

$$c = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \cos x, \quad g(x) = x - 1.$$

Po d'Alambertovi formuli je rešitev enaka

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ &= \frac{\cos(x + \frac{t}{2}) + \cos(x - \frac{t}{2})}{2} + \int_{x-\frac{t}{2}}^{x+\frac{t}{2}} (s-1) ds \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{(x+\frac{t}{2})+(x-\frac{t}{2})}{2}\right) \cos\left(\frac{(x+\frac{t}{2})-(x-\frac{t}{2})}{2}\right)}{2} + \left[\frac{s^2}{2} - s\right]_{x-\frac{t}{2}}^{x+\frac{t}{2}} \\ &= \cos x \cos \frac{t}{2} + xt - t. \end{aligned}$$

2. Rešite Cauchyjev problem:

$$u_{tt} - \frac{1}{9}u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = x.$$

Odgovor: $u(x, t) = x^2 + xt + \frac{2}{9}t^2$

3. Rešite Cauchyjev problem:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 3 \cos x, \quad u_t(x, 0) = 2 \sin x.$$

Odgovor: $u(x, t) = 3 \cos x \cos t + 2 \sin x \sin t$

Fourierova metoda ločevanja spremenljivk

4. Poiščite rešitve oblike $u(x, y) = X(x)Y(y)$ diferencialne enačbe $xu_x = yu_y$ in naredite preizkus.

Rešitev:

Če je u oblike $u(x, y) = X(x)Y(y)$, potem je

$$u_x(x, y) = X'(x)Y(y) \quad \text{in} \quad u_y(x, y) = X(x)Y'(y).$$

Sledi

$$\begin{aligned} xu_x &= yu_y \\ xX'(x)Y(y) &= yX(x)Y'(y) \\ \frac{xX'(x)}{X(x)} &= \frac{yY'(y)}{Y(y)} \end{aligned}$$

Enačbo smo uredili na tak način, da je leva stran odvisna le od x , desna pa le od y . To pa je mogoče le, če sta konstantni. Torej je

$$\frac{xX'(x)}{X(x)} = b = \frac{yY'(y)}{Y(y)}$$

za neki $b \in \mathbb{R}$. Tako smo dobili dve (enaki) enačbi z ločljivima spremenljivkama:

$$X' = \frac{b}{x}X \Rightarrow \int \frac{dX}{X} = \int \frac{b}{x} dx \Rightarrow \ln X = \ln a_1 + b \ln x \Rightarrow X(x) = a_1 x^b,$$

pri čemer je $a_1 \in \mathbb{R}$ poljuben. Podobno je $Y(y) = a_2 y^b$ za neki $a_2 \in \mathbb{R}$. Torej je

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = a_1 x^b a_2 y^b = a(xy)^b$$

za neka $a, b \in \mathbb{R}$.

Še preskus:

$$\begin{aligned} xu_x &= x \cdot ab(xy)^{b-1}y = ab(xy)^b \\ yu_y &= y \cdot ab(xy)^{b-1}x = ab(xy)^b \end{aligned}$$

Tako smo dejansko dobili vse rešitve, ki imajo obliko produkta.

5. Poiščite rešitve oblike $u(x, y) = X(x)Y(y)$ diferencialne enačbe $u_{xy} = u$ in naredite preizkus.

Odgovor: $u(x, y) = ae^{bx + \frac{y}{b}}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

6. Poiščite rešitve oblike $u(x, y) = X(x)Y(y)$ diferencialne enačbe $u_x + u_y = u$ in naredite preizkus.

Odgovor: $u(x, y) = ae^{bx + (1-b)y}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Toplotna enačba na končnem intervalu

Homogena toplotna enačba na intervalu $[0, L]$

$$u_t - ku_{xx} = 0$$

ob podanem začetnem pogoju

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{za } x \in [0, L]$$

in homogenih robnih pogojih

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{za vse } t \geq 0$$

ima rešitev

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

kjer so B_n koeficienti v razvoju funkcije f na intervalu $[0, L]$ po sinusih.

7. Poiščite funkcijo $u : [0, 2] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki reši

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{3} \sin \pi x, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$$

Rešitev:

V našem primeru je $k = 1$, $L = 2$ in $f(x) = \frac{1}{3} \sin \pi x$. Torej je

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

B_n so pa koeficienti v razvoju funkcije f na intervalu $[0, 2]$ po sinusih, torej

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Tukaj samo primerjamo obe strani in opazimo, da je $B_2 = \frac{1}{3}$ in $B_n = 0$ sicer. Posledično je

$$u(x, t) = \frac{1}{3} e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

8. Poiščite funkcijo $u : [0, 4] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki reši

$$u_t - 4u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 2 \sin \pi x - \sin \frac{5\pi x}{2}, \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$$

Odgovor: $u(x, t) = 2e^{-4\pi^2 t} \sin \pi x - e^{-25\pi^2 t} \sin \frac{5\pi x}{2}$

9. Poiščite funkcijo $u : [0, 2] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki reši

$$u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, 2] \end{cases}, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$$

Odgovor: $u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{1}{4}((n+\frac{1}{2})\pi)^2 t} \sin((n+\frac{1}{2})\pi x)$

10. Poiščite funkcijo $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki reši

$$u_t - 3u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Odgovor: $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-3(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x)$

Del II

Primeri kolokvijev in izpitov

1. kolokvij (6. 12. 2021)

1. naloga [20 točk]

Določite (z utemeljitvijo), ali so naslednje podmnožice linearni podprostor v danih prostorih:

- (a) $\mathcal{A} = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 1\} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$,
 - (b) $\mathcal{B} = \{(x, y, z) : x + 2z = 0, 3x - 5y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
 - (c) $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,
 - (d) $\mathcal{D} = \{(x, y, z) : xy \geq 0, z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
-

- (a) \mathcal{A} ni podprostor, ker ne vsebuje ničelnega polinoma.
- (b) \mathcal{B} je podprostor, ker je množica rešitev homogenega sistema linearnih enačb.
- (c) \mathcal{C} je podprostor:

Vzemimo poljubni matriki $\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$ in poljuben skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je njuna vsota v \mathcal{C} , saj je

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}$$

in zmožek s skalarjem, saj je

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 \\ \alpha b_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}.$$

- (d) \mathcal{D} ni podprostor, ker ni zaprta za seštevanje. Na primer $(-1, 0, 0), (0, 1, 0) \in \mathcal{D}$, ampak $(-1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (-1, 1, 0) \notin \mathcal{D}$.

2. naloga [30 točk]

Dani so polinomi

$$p_1(x) = 1 - 2x + x^2, \quad p_2(x) = 1 - x^2 \quad \text{in} \quad p_3(x) = 1 + 2x + x^2.$$

- (a) Pokažite, da je $\mathbf{B} = (p_1, p_2, p_3)$ baza prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (polinomov stopnje največ 2).
- (b) Zapišite prehodni matriki $P_{\mathbf{B}\mathbf{S}}$ in $P_{\mathbf{S}\mathbf{B}}$, pri čemer je \mathbf{S} standardna baza $(1, x, x^2)$ prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (c) Razvijte polinom $q(x) = 3 + 4x + 5x^2$ po bazi \mathbf{B} .

- (a) Prostor $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ima dimenzijo 3. Zato zadošča, da pokažemo, da so p_1, p_2, p_3 linearno neodvisni. Naj bo

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 0.$$

Iz

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(1 - 2x + x^2) + \beta(1 - x^2) + \gamma(1 + 2x + x^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (-2\alpha + 2\gamma)x + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 \end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -2\alpha + 2\gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Če odštejemo zadnjo enačbo od prve, dobimo $\beta = 0$. Ker iz druge sledi $\alpha = \gamma$, morata biti oba 0. Torej so ti trije polinomi res linearno neodvisni.

- (b) Prehodno matriko $P_{\mathbf{B}\mathbf{S}}$ lahko zapišemo takoj:

$$P_{\mathbf{B}\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za drugo velja

$$P_{\mathbf{S}\mathbf{B}} = (P_{\mathbf{B}\mathbf{S}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

- (c) Nastavimo

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = q$$

oziroma

$$\alpha(1 - 2x + x^2) + \beta(1 - x^2) + \gamma(1 + 2x + x^2) = 3 + 4x + 5x^2.$$

Dobimo sistem

$$\alpha + \beta + \gamma = 3$$

$$-2\alpha + 2\gamma = 4$$

$$\alpha - \beta + \gamma = 5$$

Ponovno lahko odštejemo tretjo enačbo od prve in dobimo $2\beta = -2$. Torej je $\beta = -1$. Iz $\alpha + \gamma = 4$ in $-\alpha + \gamma = 2$ sledi še $\gamma = 3$ in $\alpha = 1$. Torej je

$$q = p_1 - p_2 + 3p_3.$$

3. naloga [25 točk]

Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z, w) = (-3x - y + 3w, x + 3y + 5z, x - y - 2z - w).$$

- (a) Zapišite matriko preslikave \mathcal{A} v standardnih bazah.
 (b) Določite dimenziji in bazi njenega ničelnega prostora in zaloge vrednosti.
 (c) Določite, ali je \mathcal{A} injektivna, surjektivna.

- (a) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 0, 0, 0) &= (-3, 1, 1), \\ \mathcal{A}(0, 1, 0, 0) &= (-1, 3, -1), \\ \mathcal{A}(0, 0, 1, 0) &= (0, 5, -2), \\ \mathcal{A}(0, 0, 0, 1) &= (3, 0, -1),\end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{A}]_{\text{ss}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Ničelni prostor sestavljajo vektorji, ki se preslikajo v ničelni vektor, torej rešitve

$$\mathcal{A}(x, y, z, w) = (-3x - y + 3w, x + 3y + 5z, x - y - 2z - w) = (0, 0, 0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].\end{aligned}$$

Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo rešitev

$$w = \alpha, \quad z = -\alpha, \quad y = \frac{3}{2}\alpha, \quad x = \frac{1}{2}\alpha.$$

Torej

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \left\{ \alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1, 1 \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1, 1 \right) \right\}.$$

Ničelni prostor je posledično enorazsežen, baza je npr. $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1, 1 \right) \right\}$.

Iz $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sledi, da ima zaloga vrednosti preslikave \mathcal{A} dimenzijo 3. Ker leži v trirazsežnem prostoru \mathbb{R}^3 , je torej kar $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$. Za bazo lahko vzamemo standardno bazo $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

- (c) \mathcal{A} ni injektivna, saj je ničelni prostor enodimenzionalen, je pa surjektivna.

4. naloga [25 točk]

V prostoru \mathbb{R}^4 sta dana vektorja $u = (2, -1, 1, 2)$ in $v = (5, 3, 5, 4)$.

- (a) Določite eno ortonormirano bazo podprostora $\mathcal{V} = \mathcal{L}\{u, v\}$.
 (b) Izračunajte oddaljenost točke $A(-3, 7, 1, 1)$ od \mathcal{V} .

- (a) Uporabimo Gram-Schmidtov postopek. Ker je

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 4 + 1 + 1 + 4 = 10,$$

je

$$g_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2).$$

Nadalje iz

$$\langle v, g_1 \rangle = \langle (5, 3, 5, 4), \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(10 - 3 + 5 + 8) = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

dobimo

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2 &= v - \langle v, g_1 \rangle g_1 \\ &= (5, 3, 5, 4) - 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2) \\ &= (5, 3, 5, 4) - (4, -2, 2, 4) \\ &= (1, 5, 3, 0). \end{aligned}$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = 1 + 25 + 9 + 0 = 35 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0).$$

Ortonormirana baza je torej $(\frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0))$.

- (b) Za oddaljenost od podprostora moramo izračunati pravokotno projekcijo vektorja $a = (-3, 7, 1, 1)$ na podprostor, ki jo dobimo po formuli

$$\text{proj}_{\mathcal{V}} a = \langle a, g_1 \rangle g_1 + \langle a, g_2 \rangle g_2.$$

Iz

$$\begin{aligned} \langle a, g_1 \rangle &= \langle (-3, 7, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(-6 - 7 + 1 + 2) = -\sqrt{10} \\ \langle a, g_2 \rangle &= \langle (-3, 7, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{35}}(-3 + 35 + 3 + 0) = \sqrt{35} \end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathcal{V}} a &= -\sqrt{10} \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2) + \sqrt{35} \frac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0) \\ &= -(2, -1, 1, 2) + (1, 5, 3, 0) \\ &= (-1, 6, 2, -2). \end{aligned}$$

Oddaljenost dobimo po formuli

$$\begin{aligned}d(A, \mathcal{V}) &= \|a - \text{proj}_{\mathcal{V}} a\| \\&= \|(-3, 7, 1, 1) - (-1, 6, 2, -2)\| \\&= \|(-2, 1, -1, 3)\| \\&= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2} \\&= \sqrt{15}\end{aligned}$$

2. kolokvij (17. 1. 2022)

1. naloga [25 točk]

Dana je tabela vrednosti meritev:

| | | | | | |
|-------|----|----|---|---|---|
| x_i | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y_i | 4 | 3 | 1 | 2 | 5 |

Poiščite parabolo $y = a + bx + cx^2$, ki se najbolje prilega tem točkam.

Podatki nam dajo sistem 5 linearnih enačb:

$$\begin{aligned}4 &= a + b \cdot (-2) + c \cdot (-2)^2 \\3 &= a + b \cdot (-1) + c \cdot (-1)^2 \\1 &= a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 \\2 &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 \\5 &= a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2\end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Najboljše parametre dobimo kot rešitev normalnega sistema $A^\top Ax = A^\top b$ ali

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ 41 \end{bmatrix}.$$

Takoj dobimo $b = \frac{1}{10}$. Če od zadnje enačbe odštejemo dvakratnik prve, dobimo

$$14c = 11, \quad \text{torej je } c = \frac{11}{14}.$$

Iz prve enačbe potem izračunamo še $a = \frac{10}{7}$. Iskana parabola je

$$y = \frac{10}{7} + \frac{1}{10}x + \frac{11}{14}x^2$$

2. naloga [25 točk]

Dana je funkcija

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{sicer} \end{cases}$$

- (a) Določite njeno Fourierovo vrsto.
 (b) Kam konvergira Fourierova vrsta pri $x = \frac{\pi}{4}$ in kam pri $x = \frac{\pi}{2}$?
 (c) Določite vsoto vrste

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

- (a) Koeficienti so

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 1 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

ter za $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 1 \cos kx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \cos kx dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin k(-\frac{\pi}{2})}{k} - \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k} \right) \\ &= -\frac{2}{k\pi} \sin k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

in $b_k = 0$, saj je f soda funkcija. Izraz $\sin k\frac{\pi}{2}$ je za sode k enak 0, za lihe pa $(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}$. Torej je

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} - \sum_{k \text{ lih}} \frac{2(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}}{k\pi} \cos(kx) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right). \end{aligned}$$

- (b) Ker je f odsekoma zvezna in v vsaki točki obstajata levi in desni odvod, njena Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki k aritmetični sredini leve in desne limite v tej točki. Torej je

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{in} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(c) Označimo

$$s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Opazimo, da je

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{in} \quad \cos \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

potem se pa to obnašanje ponavlja. Zato je

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Torej je

$$0 = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} s,$$

oziroma

$$s = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3. naloga [25 točk]

Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' - 3y = 8xe^{-x} - 2e^{3x} \cos x.$$

Karakteristični polinom enačbe $y'' - 2y' - 3y = 0$ je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Splošna rešitev homogene enačbe je zato

$$y_H(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}.$$

Ker je -1 enostavna ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za xe^{-1x}

$$y_{P1}(x) = x^1(ax + b)e^{-x} = (ax^2 + bx)e^{-x}.$$

Izračunamo še prva odvoda:

$$\begin{aligned} y'_{P1}(x) &= (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx)(-e^{-x}) \\ &= (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} \\ y''_{P1}(x) &= (-2ax + (2a - b))e^{-x} + (-ax^2 + (2a - b)x + b)(-e^{-x}) \\ &= (ax^2 + (-4a + b)x + (2a - 2b))e^{-x}. \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo, uredimo in dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P1} - 2y'_{P1} - 3y_{P1} &= xe^{-x} \\ ((-8a)x + (2a - 4b))e^{-x} &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

Torej je $a = -\frac{1}{8}$ in $b = -\frac{1}{16}$, ter

$$y_{P1}(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{-x}.$$

$3 \pm i$ pa nista ničli karakterističnega polinoma, zato je nastavek za $e^{3x} \cos x = e^{3x}(1 \cos 1x + 0 \sin 1x)$ enak

$$y_{P2}(x) = x^0 e^{3x}(c \cos x + d \sin x) = e^{3x}(c \cos x + d \sin x).$$

Odvoda sta

$$\begin{aligned} y'_{P2}(x) &= 3e^{3x}(c \cos x + d \sin x) + e^{3x}(-c \sin x + d \cos x) \\ &= e^{3x}((3c + d) \cos x + (3d - c) \sin x) \\ y''_{P2}(x) &= 3e^{3x}((3c + d) \cos x + (3d - c) \sin x) + \\ &\quad + e^{3x}(-(3c + d) \sin x + (3d - c) \cos x) \\ &= e^{3x}((8c + 6d) \cos x + (8d - 6c) \sin x) \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned}y''_{P2} - 2y'_{P2} - 3y_{P2} &= e^{3x} \cos x \\e^{3x}((-c + 4d) \cos x + (-d - 4c) \sin x) &= e^{3x} \cos x\end{aligned}$$

oziroma $-c + 4d = 1$ in $-d - 4c = 0$, iz česar sledi $c = -\frac{1}{17}$ in $d = \frac{4}{17}$ in

$$y_{P2}(x) = e^{3x} \left(-\frac{1}{17} \cos x + \frac{4}{17} \sin x \right).$$

Partikularna rešitev je tako

$$y_P(x) = 8y_{P1} - 2y_{P2} = (-x^2 - \frac{1}{2}x)e^{-x} + e^{3x} \left(\frac{2}{17} \cos x - \frac{8}{17} \sin x \right),$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} + (-x^2 - \frac{1}{2}x)e^{-x} + e^{3x} \left(\frac{2}{17} \cos x - \frac{8}{17} \sin x \right).$$

4. naloga [25 točk]

Poiščite rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned}x' &= 3x - y, & x(0) &= -1, \\y' &= 4x + 3y, & y(0) &= 2.\end{aligned}$$

Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 + 4.$$

Lastni vrednosti sta torej $3 \pm 2i$. Dovolj je, da poiščemo lastni vektor za eno od njih, npr. za $3 + 2i$.

Ena rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Ae^{3t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + Be^{3t} \left(\sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right).$$

Začetni pogoj nam da

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = A \cdot 1 \left(1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + B \cdot 1 \left(0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} A \\ -2B \end{bmatrix}.$$

Torej je $A = B = -1$ in

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ 2 \cos 2t - 2 \sin 2t \end{bmatrix}.$$

1. izpit (2. 2. 2022)

1. naloga [25 točk]

Določite (z utemeljitvijo), katere od naslednjih podmnožic so baze prostora \mathbb{R}^4 in v vsaki, ki je baza, razvijte vektor $v = (1, 5, -1, 7)$:

(a) $\mathcal{A} = \{(1, 4, -2, 1), (2, 5, -3, -2), (-1, -1, 2, 3), (3, 10, -4, 5)\}$

(b) $\mathcal{B} = \{(2, 0, 2, 2), (5, -1, 3, -4), (-3, 1, 4, -1)\}$

(c) $\mathcal{C} = \{(2, 3, 1, 2), (-3, 1, 2, 1), (2, 1, -1, 4), (1, -2, -1, -5)\}$

Prostor \mathbb{R}^4 ima dimenzijo 4, kar pomeni, da ima vsaka njegova baza 4 elemente. Množica \mathcal{B} torej zagotovo ni baza. Za ostali dve pa moramo preveriti, ali sta linearno neodvisni.

Nastavimo za \mathcal{A}

$$\alpha(1, 4, -2, 1) + \beta(2, 5, -3, -2) + \gamma(-1, -1, 2, 3) + \delta(3, 10, -4, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Poiskati moramo torej rešitve sistema

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta - \gamma + 3\delta &= 0 \\ 4\alpha + 5\beta - \gamma + 10\delta &= 0 \\ -2\alpha - 3\beta + 2\gamma - 4\delta &= 0 \\ \alpha - 2\beta + 3\gamma + 5\delta &= 0\end{aligned}$$

Rešujemo v matrični obliki. Najprej s pomočjo prve vrstice dosežemo, da so v prvem stolpcu pod diagonalo same ničle. Nato zamenjamo drugo in tretjo vrstico, zadnjo pa delimo z 2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 10 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Potem dosežemo ničle še v drugem stolpcu pod diagonalo in nato dokončamo proces:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 0 \end{array} \right].$$

Torej je edina rešitev $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, kar pomeni, da so vektorji linearno neodvisni. Ker so štirje, razpenjajo štirirazsežen prostor, torej cel \mathbb{R}^4 , in posledično sestavljajo bazo.

Poiščimo torej še koeficiente v razvoju vektorja v v bazi \mathcal{A} :

$$\alpha(1, 4, -2, 1) + \beta(2, 5, -3, -2) + \gamma(-1, -1, 2, 3) + \delta(3, 10, -4, 5) = (1, 5, -1, 7).$$

Enaki koraki kot zgoraj nam dajo

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 10 & 5 \\ -2 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 & 7 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & 6 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] &\sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Po vrsti so

$$\delta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \beta = -1 \quad \text{in} \quad \alpha = 0.$$

Dejansko je

$$-(2, 5, -3, -2) + (3, 10, -4, 5) = (1, 5, -1, 7).$$

Podobno nastavimo linearno kombinacijo za \mathcal{C} :

$$\alpha(2, 3, 1, 2) + \beta(-3, 1, 2, 1) + \gamma(2, 1, -1, 4) + \delta(1, -2, -1, -5) = (0, 0, 0, 0),$$

oziroma

$$\begin{aligned} 2\alpha - 3\beta + 2\gamma + \delta &= 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma - 2\delta &= 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma - \delta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma - 5\delta &= 0 \end{aligned}$$

Najprej zamenjamo vrstnih red vrtec in dosežemo, da so v prvem stolpcu pod diagonalo ničle:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \end{array} \right].$$

Zadnjo vrstico delimo z -3 in jo prestavimo na drugo mesto. Z njo dosežemo, da sta še v drugem stolpcu ničli pod diagonalo. Nato proces dokončamo:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Obstajajo torej netrivialne rešitve, npr.

$$\delta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \beta = 1 \quad \text{in} \quad \alpha = 0.$$

Vektorji iz \mathcal{C} so posledično linearno odvisni in ne morejo sestavljati baze.

2. naloga [25 točk]

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiščite baze in dimenzije osnovnih prostorov matrike A , torej prostorov $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^\top)$, $\mathcal{C}(A)$ in $\mathcal{C}(A^\top)$.

Vsaka matrika je tudi linearna preslikava. Dana matrika A nam tako določa preslikavo $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Velja naslednje:

$$\mathcal{C}(A^\top) = \mathcal{N}(A)^\perp, \quad \mathcal{N}(A^\top) = \mathcal{C}(A)^\perp \quad \text{in} \quad \dim \mathcal{C}(A^\top) = \dim \mathcal{C}(A).$$

Za ničelni prostor A dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Torej je $x_3 = \alpha$ poljuben. Potem je $x_2 = \alpha$ in $x_1 = -\alpha + 2\alpha = \alpha$. Vektor $[1, 1, 1]^\top$ razpenja ničelni prostor matrike A , ki je tako enorazsežen.

Iz dimenzijske formule

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A)$$

sledi, da je prostor $\mathcal{C}(A)$ dvorazsežen. Napenjajo ga stolpci matrike A . Stolpci so očitno paroma linearno neodvisni, tako da lahko za bazo vzamemo poljuben par stolpcev.

Nadalje je $\dim \mathcal{C}(A^\top) = \dim \mathcal{C}(A) = 2$. Za bazo lahko vzamemo poljuben par vrstic, saj so paroma neodvisne. Ker je po drugi strani $\mathcal{C}(A^\top) = \mathcal{N}(A)^\perp = ([1, 1, 1]^\top)^\perp$, je očitno možna baza tudi

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Preostane še $\mathcal{N}(A^\top)$. Tudi ta prostor je dvorazsežen, kar vidimo na primer iz formule

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathcal{N}(A^\top) + \dim \mathcal{C}(A^\top).$$

Določen je s sistemom

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right].$$

Zadnji dve neznanki sta poljubni, to je $x_4 = \alpha$ in $x_3 = \beta$. Potem sta $x_2 = \alpha + \frac{1}{3}\beta$ in $x_1 = -\alpha + \frac{4}{3}\beta$. Ena možna baza je

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. naloga [25 točk]

Obravnavajte diferencialno enačbo

$$y'' + 8y' + 20y = 0$$

z robnima pogojeja

(a) $y(0) = 0, y(\pi) = 0,$

(b) $y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 1.$

(Za zgornja robna problema morate določiti, ali sta rešljiva, in izračunati vse (morebitne) rešitve.)

Karakteristični polinom enačbe $y'' + 8y' + 20y = 0$ je

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 20.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-16}}{2} = -4 \pm 2i.$$

Splošna rešitev enačbe je zato

$$y(x) = Ae^{-4x} \cos 2x + Be^{-4x} \sin 2x.$$

(a) V tem primeru nam robna pogoja dasta enačbi

$$0 = y(0) = Ae^0 \cos 0 + Be^0 \sin 0 = A \cdot 1 + 0 = A$$

$$0 = y(\pi) = Ae^{-4\pi} \cos 2\pi + Be^{-4\pi} \sin 2\pi = Ae^{-4\pi} + 0 = Ae^{-4\pi}$$

Iz obeh enačb sledi, da mora biti $A = 0$. Torej je problem rešljiv. Reši ga vsaka funkcija oblike

$$y(x) = Be^{-4x} \sin 2x, \quad B \in \mathbb{R}.$$

(b) V tem primeru pa dobimo

$$1 = y(0) = A$$

$$1 = y(\frac{\pi}{2}) = Ae^{-2\pi} \cos \pi + Be^{-2\pi} \sin \pi = -Ae^{-2\pi} + 0 = -Ae^{-2\pi}$$

Ta sistem nima rešitve. Torej robni problem ni rešljiv.

4. naloga [25 točk]

Poiščite splošno rešitev sistema

$$\begin{aligned}x' &= y + z \\y' &= x + z \\z' &= x - y\end{aligned}$$

Sistem prepíšemo v matrično obliko

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} &= (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda^3 - \lambda) + (\lambda + 1) + (-1 + \lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda \\ &= -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1).\end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej -1 , 0 in 1 .

Lastni vektorji za -1 rešijo sistem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad \text{Eden je } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za lastno vrednost 0 imamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \text{npr. } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pri 1 pa dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{in lahko izberemo } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Ae^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Ce^{1t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ae^{-t} + B + Ce^t \\ B + Ce^t \\ Ae^{-t} - B \end{bmatrix}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

1. kolokvij (5. 12. 2022)

1. naloga [25 točk]

V \mathbb{R}^4 so dani vektorji

$$a = (-1, 2, 0, 1), \quad b = (2, 0, 1, -3), \quad c = (0, 4, 1, -1), \quad d = (1, 1, 1, 0), \quad e = (1, -1, 0, -3).$$

Naj bo \mathcal{V} linearna ogrinjača teh 5 vektorjev.

- (a) Določite dimenzijo podprostora \mathcal{V} in eno njegovo bazo.
- (b) Za vektor $u = (1, 1, 1, 1)$ določite, ali leži v \mathcal{V} . V primeru, da je tako, ga razvijte v bazi iz točke (a).

(a) Teh pet vektorjev zapišemo po vrsticah v matriko in izvedemo Gaußovo eliminacijo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo tri neničelne vrstice, ki so (ena) baza za \mathcal{V} . Dimenzija \mathcal{V} je torej 3.

- (b) Vektor u leži v podprostoru \mathcal{V} , če ga je moč zapisati kot linearno kombinacijo baznih elementov, to je

$$(1, 1, 1, 1) = \alpha(-1, 2, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, -2) + \gamma(0, 0, 1, 7).$$

Pripadajoč sistem enačb je

$$\begin{aligned} 1 &= -\alpha \\ 1 &= 2\alpha + \beta \\ 1 &= \gamma \\ 1 &= \alpha - 2\beta + 7\gamma \end{aligned}$$

Iz prve in tretje enačbe takoj sledi $\alpha = -1$ in $\gamma = 1$. Posledično je $\beta = 3$. Vendar pri teh vrednostih zadnja enačba ni izpolnjena. Torej $u \notin \mathcal{V}$.

2. naloga [20 točk]

Določite (z utemeljitvijo), ali so naslednje podmnožice linearni podprostor v danih prostorih:

- (a) $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(2) = 2f(1)^2\}$ v prostoru vseh funkcij $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 (b) $\mathcal{B} = \{(x, y, z) : x + y^2 + z^3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
 (c) $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$,
 (d) $\mathcal{D} = \{(x, y, z) : 5x = 3y - 2z, 5z = 3x - 2y\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

- (a) \mathcal{A} ni podprostor:

Za protiprimer moremo vzeti identično preslikavo $\text{id}(x) = x$. Ker je

$$\text{id}(2) = 2 \quad \text{in} \quad 2(\text{id}(1))^2 = 2,$$

leži id v \mathcal{A} . Po drugi strani pa $-\text{id} \notin \mathcal{A}$, saj je

$$(-\text{id})(2) = -2, \quad \text{vendar} \quad 2((-\text{id})(1))^2 = 2(-1)^2 = 2.$$

- (b) \mathcal{B} ni podprostor, ker ni zaprta za množenje s skalarjem:

Na primer $(-1, 0, 1) \in \mathcal{B}$, ampak $2(-1, 0, 1) \notin \mathcal{B}$, saj je $-2 + 0^2 + 2^3 = 6 \neq 0$.

- (c) \mathcal{C} je podprostor:

Vzemimo poljubni matriki $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{bmatrix}$ iz \mathcal{C} in poljuben skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je njuna vsota v \mathcal{C} , saj je

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}$$

in zmožek s skalarjem, saj je

$$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \alpha b_1 & \alpha c_1 & \alpha a_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}.$$

- (d) \mathcal{D} je podprostor, ker je množica rešitev homogenega sistema linearnih enačb

$$5x - 3y + 2z = 0 \quad \text{in} \quad 3x - 2y - 5z = 0.$$

3. naloga [25 točk]

Dana je linearna preslikava

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{A}(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - y, 4x - y - 3z, -x + 2y - z).$$

- (a) Zapišite matriko preslikave \mathcal{A} v standardnih bazah.
 (b) Poiščite bazo in dimenzijo ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave \mathcal{A} .
 (c) Ali je preslikava \mathcal{A} injektivna, surjektivna?

- (a) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1, 0, 0) &= (2, 1, 4, -1), \\ \mathcal{A}(0, 1, 0) &= (-3, -1, -1, 2), \\ \mathcal{A}(0, 0, 1) &= (1, 0, -3, -1), \end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{A}]_{\text{ss}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Ničelni prostor sestavljajo vektorji, ki se preslikajo v ničelni vektor, torej rešitve

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - y, 4x - y - 3z, -x + 2y - z) = (0, 0, 0, 0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Sledi

$$z = \alpha, \quad y = \alpha, \quad x = \alpha.$$

Torej

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\alpha(1, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}.$$

Ničelni prostor je posledično enorazsežen, baza je npr. $\{(1, 1, 1)\}$.

Iz $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sledi

$$\dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = 3 - 1 = 2.$$

Zalogo vrednosti razpenjajo stolpci matrike. Prva dva nista vzporedna, torej lahko ju lahko vzamemo za bazo:

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{(2, 1, 4, -1), (-3, -1, -1, 2)\}.$$

- (c) \mathcal{A} ni injektivna, saj je ničelni prostor enodimenzionalen, niti ni surjektivna, saj je zaloga vrednosti dvodimenzionalna.

4. naloga [30 točk]

V prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje kvečjemu 2 definiramo skalarni produkt s predpisom

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) Pokažite, da velja $\langle p, p \rangle = 0 \iff p = 0$. Ostalih lastnosti skalarnega produkta ni treba preverjati.
- (b) Poiščite eno ortonormirano bazo \mathbf{B} tega evklidskega prostora.
- (c) Zapišite prehodni matriki $P_{\mathbf{BS}}$ in $P_{\mathbf{SB}}$, pri čemer je \mathbf{S} standardna baza $(1, x, x^2)$.
- (d) Izrazite v bazi \mathbf{B} polinom $q_0(x) = x^2 + x$.

- (a) Če je $p = 0$, je očitno $\langle p, p \rangle = 0$, saj je $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$.

Obratno: Vzemimo poljuben $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, za katerega velja $\langle p, p \rangle = 0$. Polinom p je oblike $p(x) = ax^2 + bx + c$. Sledi

$$0 = \langle p, p \rangle = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 = (a - b + c)^2 + c^2 + (a + b + c)^2.$$

Torej mora veljati

$$a - b + c = c = a + b + c = 0,$$

od koder sledi $a = b = c = 0$ in zato $p = 0$.

- (b) Za prostor $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ imamo standardno bazo $\mathbf{S} = (1, x, x^2)$. Na njej bomo uporabili Gram-Schmidtov postopek in tako dobili eno ortonormirano bazo. Označimo

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2.$$

Ker je

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0 \rangle = p_0(-1)^2 + p_0(0)^2 + p_0(1)^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3,$$

je

$$g_0 = \frac{p_0}{\|p_0\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} p_0, \quad \text{ozioroma} \quad g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nadalje iz

$$\begin{aligned} \langle p_1, g_0 \rangle &= p_1(-1)g_0(-1) + p_1(0)g_0(0) + p_1(1)g_0(1) \\ &= (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

sledi $\tilde{g}_1 = p_1$. Ker je

$$\|\tilde{g}_1\|^2 = \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_1 \rangle = \tilde{g}_1(-1)^2 + \tilde{g}_1(0)^2 + \tilde{g}_1(1)^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2,$$

je

$$g_1 = \frac{\tilde{g}_1}{\|\tilde{g}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} p_1, \quad \text{ozioroma} \quad g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} x.$$

Za tretji bazni element najprej izračunamo

$$\begin{aligned}\langle p_2, g_0 \rangle &= p_2(-1)g_0(-1) + p_2(0)g_0(0) + p_2(1)g_0(1) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\langle p_2, g_1 \rangle &= p_2(-1)g_1(-1) + p_2(0)g_1(0) + p_2(1)g_1(1) \\ &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sledi

$$\tilde{g}_2 = p_2 - \langle p_2, g_0 \rangle g_0 - \langle p_2, g_1 \rangle g_1 = p_2 - \frac{2}{\sqrt{3}}g_0, \quad \tilde{g}_2(x) = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Normo tega polinoma dobimo iz

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \tilde{g}_2(-1)^2 + \tilde{g}_2(0)^2 + \tilde{g}_2(1)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

Torej

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right).$$

Ena ortonormirana baza je $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}x, \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

(c) Prehodno matriko $P_{\mathbf{BS}}$ lahko zapišemo takoj:

$$P_{\mathbf{BS}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}.$$

Za drugo velja

$$P_{\mathbf{SB}} = P_{\mathbf{BS}}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}.$$

(d) Nastavimo

$$q_0 = \alpha g_0 + \beta g_1 + \gamma g_2$$

oziroma

$$x^2 + x = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}x + \gamma \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Dobimo sistem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha - \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\beta &= 1 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\gamma &= 1\end{aligned}$$

Sledi

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \beta = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

2. kolokvij (16. 1. 2023)

1. naloga [25 točk]

Po metodi najmanjših kvadratov poiščite najboljši približek za rešitev predločenega sistema:

$$\begin{aligned}x - y + 2z &= 2 \\4x + 2y + z &= -1 \\-2x + 2y + z &= 1 \\2x + y - 2z &= -3\end{aligned}$$

Za rešitev normalnega sistema uporabite QR-razcep.

Poiskati moramo torej QR-razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo Gram-Schmidtov postopek na njenih stolpcih. Ker je

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 4^2 + (-2)^2 + 2^2 = 25,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \text{Torej} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & * & * \\ \frac{4}{5} & * & * \\ -\frac{2}{5} & * & * \\ \frac{2}{5} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 5 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5}(-1 + 8 - 4 + 2) = 1$$

dobimo

$$\tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1 \rangle g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = \frac{(-6)^2 + 6^2 + 12^2 + 3^2}{5^2} = \frac{225}{25} = 9$$

in

$$g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Tako smo določili tudi druga stolpca

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & * \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & * \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & * \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 1 & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Ker sta skalarna produkta

$$\langle v_3, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{in} \quad \langle v_3, g_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0,$$

je kar

$$\tilde{g}_3 = v_3 - \langle v_3, g_1 \rangle g_1 - \langle v_3, g_2 \rangle g_2 = v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \|\tilde{g}_3\|^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + (-2)^2 = 10.$$

Zadnji bazni vektor je

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Tako je

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Najboljši približek $v = [x, y, z]^T$ reši sistem $Rv = Q^T b$. Ker je

$$Q^T b = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ \sqrt{10} \end{bmatrix},$$

iz

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ \sqrt{10} \end{bmatrix}$$

sledi

$$z = 1, \quad y = -\frac{1}{3} \quad \text{in} \quad x = -\frac{1}{3}.$$

2. naloga [25 točk]

Poiščite rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned}x' &= x - z, & x(0) &= -1, \\y' &= -x + 2y - 3z, & y(0) &= 1, \\z' &= x - y + z, & z(0) &= 2.\end{aligned}$$

Sistem prepíšemo v matrično obliko

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti pripadajče matrike dobimo iz enačbe

$$\begin{aligned}0 &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & -3 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 - \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 3) - (1 - 2 + \lambda) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 1) + (1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)\end{aligned}$$

Določimo lastne vektorje:

- Za $\lambda = 0$ iz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

dobimo na primer lastni vektor $[1, 2, 1]^\top$,

- za $\lambda = 1$ iz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

lastni vektor $[1, 1, 0]^\top$,

- ter za $\lambda = 3$ iz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

še lastni vektor $[-1, -5, 2]^\top$.

Splošna rešitev je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Ae^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{1t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + Ce^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Upoštevamo še začetni pogoj

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Gaußova metoda eliminacije nam da

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right].$$

Torej je $C = 0$, $B = -3$ in $A = 2$.

Rešitev našega začetnega problema je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 3e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 3e^t \\ 4 - 3e^t \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. naloga [25 točk]

Poiščite splošno rešitev enačbe

$$y'' + 2y' + 10y = 5x - 2 \sin 3x.$$

Pripadajoča homogena enačba je

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

s karakterističnim polinomom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i.$$

Posledično je splošna rešitev homogene enačbe

$$y_H(x) = Ae^{-1x} \cos 3x + Be^{-1x} \sin 3x.$$

Partikularno rešitev bomo sestavili iz dveh delov.

Nastavek za partikularno rešitev, ki reši enačbo z desno stranjo $f_1(x) = x = e^{0x} \cdot x$, je

$$y_{P1}(x) = x^0 e^{0x} (ax + b) = ax + b,$$

saj 0 ni ničla karakterističnega polinoma. Prva odvoda sta

$$y'_{P1}(x) = a \quad \text{in} \quad y''_{P1}(x) = 0.$$

Vstavimo v enačbo, uredimo in dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P1} + 2y'_{P1} + 10y_{P1} &= x \\ 0 + 2a + 10(ax + b) &= x \\ 10ax + (2a + 10b) &= x \end{aligned}$$

Torej je $a = \frac{1}{10}$ in $b = -\frac{1}{50}$, ter

$$y_{P1}(x) = \frac{1}{10}x - \frac{1}{50}.$$

Za desno stran $f_2(x) = \sin 3x = e^{0x}(1 \sin 3x + 0 \cos 3x)$ pa je odločilno, da $0 \pm 3i$ nista ničli karakterističnega polinoma. Eno rešitev zato dobimo z nastavkom

$$y_{P2}(x) = x^0 e^{0x} (c \sin 3x + d \cos 3x) = c \sin 3x + d \cos 3x.$$

Odvoda sta

$$y'_{P2}(x) = 3c \cos 3x - 3d \sin 3x \quad \text{in} \quad y''_{P2}(x) = -9c \sin 3x - 9d \cos 3x.$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned}y''_{P_2} + 2y'_{P_2} + 10y_{P_2} &= \sin 3x \\ -9c \sin 3x - 9d \cos 3x + 2(3c \cos 3x - 3d \sin 3x) + 10(c \sin 3x + d \cos 3x) &= \sin 3x \\ (c - 6d) \sin 3x + (d + 6c) \cos 3x &= \sin 3x\end{aligned}$$

Iz $c - 6d = 1$ in $d + 6c = 0$ sledi $c = \frac{1}{37}$ in $d = -\frac{6}{37}$. Torej je

$$y_{P_2}(x) = \frac{1}{37} \sin 3x - \frac{6}{37} \cos 3x.$$

Partikularna rešitev je tako

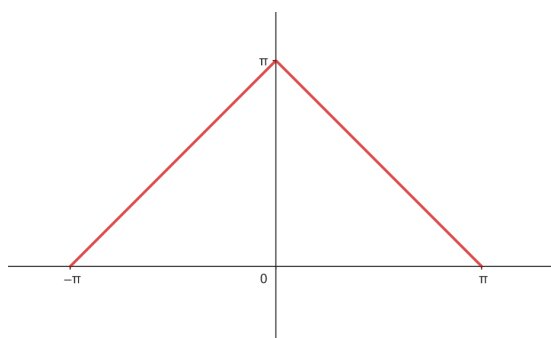
$$y_P(x) = 5y_{P_1}(x) - 2y_{P_2}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{10} - \frac{2}{37} \sin 3x + \frac{12}{37} \cos 3x,$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^{-x} \cos 3x + Be^{-x} \sin 3x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{10} - \frac{2}{37} \sin 3x + \frac{12}{37} \cos 3x.$$

4. naloga [25 točk]

Funkcija $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je podana z grafom:



(a) Določite njeno Fourierovo vrsto.

(b) Kam konvergira Fourierova vrsta pri $x = \pi$?

(c) Določite vsoto vrste

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

Enačba funkcije je

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \pi + x & x \leq 0 \\ \pi - x & x > 0 \end{cases}.$$

(a) Funkcija je soda, tako da v Fourierovi vrsti nastopajo le kosinusi (in konstanta). Sodost izkoristimo tudi pri izračunu a_k :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

in za $k \in \mathbb{N}$ s pomočjo integriranja po delih

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[(\pi - x) \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-1) \frac{\sin kx}{k} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 + \left[-\frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\cos k\pi + 1}{k^2} \\ &= \begin{cases} 0, & k \text{ sod} \\ \frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ lih} \end{cases}. \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k \text{ lih}} \frac{4}{\pi k^2} \cos kx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

(b) Ker je f odsekoma zvezna in v vsaki točki obstajata levi in desni odvod, njena Fourierova vrsta konvergira v vsaki točki k aritmetični sredini leve in desne limite v tej točki. Periodična razširitev je zvezna pri π , saj je $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, torej $F(\pi) = 0$.

(c) Označimo

$$s = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

Opazimo, da je

$$\pi = F(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}s.$$

Torej

$$s = \frac{\pi^2}{8}.$$

1. izpit (1. 2. 2023)

1. naloga [25 točk]

V prostoru \mathbb{R}^4 so dani vektorji $u = (1, 3, -1, 3)$, $v = (2, 1, -2, 1)$ in $w = (-1, 1, 2, 0)$.

- (a) Določite eno ortonormirano bazo podprostora $\mathcal{V} = \mathcal{L}\{u, v, w\}$.
- (b) Poiščite točko iz podprostora \mathcal{V} , ki je najbližja točki $A(1, 1, 1, 1)$. Kolikšna je njuna medsebojna oddaljenost?
-

- (a) Uporabimo Gram-Schmidtov postopek. Ker je

$$\|u\|^2 = 1^2 + 3^2 + (-1)^2 + 3^2 = 20, \quad \text{je} \quad g_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, -1, 3).$$

Za drugi bazni vektor najprej izračunamo

$$\langle v, g_1 \rangle = \langle (2, 1, -2, 1), \frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, -1, 3) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2 + 3 + 2 + 3) = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

in

$$\tilde{g}_2 = v - \langle v, g_1 \rangle g_1 = (2, 1, -2, 1) - \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, -1, 3) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{20}{4} = 5$$

in

$$g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, -1, -3, -1).$$

Ker sta skalarna produkta

$$\begin{aligned} \langle w, g_1 \rangle &= \langle (-1, 1, 2, 0), \frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, -1, 3) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-1 + 3 - 2 + 0) = 0 \\ \langle w, g_2 \rangle &= \langle (-1, 1, 2, 0), \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, -1, -3, -1) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-3 - 1 - 6 + 0) = -\sqrt{5}, \end{aligned}$$

je

$$\tilde{g}_3 = w - \langle w, g_1 \rangle g_1 - \langle w, g_2 \rangle g_2 = (-1, 1, 2, 0) + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, -1, -3, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

To je že tudi g_3 , saj je norma tega vektorja 1, kajti

$$\|\tilde{g}_3\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Ortonormirana baza za \mathcal{V} je

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, -1, 3), \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, -1, -3, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1) \right).$$

- (b) Krajevni vektor r_B najbližje točke B dobimo kot pravokotno projekcijo krajevnega vektorja $r_A = (1, 1, 1, 1)$ točke A na podprostor \mathcal{V} :

$$r_B = \text{proj}_{\mathcal{V}} r_A = \langle r_A, g_1 \rangle g_1 + \langle r_A, g_2 \rangle g_2 + \langle r_A, g_3 \rangle g_3.$$

Ker so

$$\begin{aligned} \langle r_A, g_1 \rangle &= \left\langle (1, 1, 1, 1), \frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, -1, 3) \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}(1 + 3 - 1 + 3) = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \langle r_A, g_2 \rangle &= \left\langle (1, 1, 1, 1), \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, -1, -3, -1) \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}(3 - 1 - 3 - 1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \langle r_A, g_3 \rangle &= \left\langle (1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1) \right\rangle = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 - 1) = 1 \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} r_B &= \text{proj}_{\mathcal{V}} r_A \\ &= \langle r_A, g_1 \rangle g_1 + \langle r_A, g_2 \rangle g_2 + \langle r_A, g_3 \rangle g_3 \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, -1, 3) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, -1, -3, -1) + 1 \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Oddaljenost med točkama znaša

$$d(A, B) = \|r_B - r_A\| = \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 1, 1, 1) \right\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\| = 1.$$

2. naloga [25 točk]

Dani sta linearna preslikava

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{A}(x, y, z) = (-x + 2y + z, 3x - y + 2z, -x + 2y)$$

in urejena trojica vektorjev

$$\mathbf{B} = ((1, 2, 0), (-1, -3, 2), (0, -1, 1)).$$

- Pokažite, da je \mathbf{B} baza prostora \mathbb{R}^3 .
- Določite prehodni matriki $P_{\mathbf{BS}}$ in $P_{\mathbf{SB}}$ med bazo \mathbf{B} in standardno bazo \mathbf{S} .
- Zapišite matriki $[\mathcal{A}]_{\mathbf{BS}}$ in $[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}$
- Poiščite bazo in dimenzijo ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave \mathcal{A} .

- Elementi baze morajo biti linearno neodvisni. Nastavimo poljubno linearno kombinacijo:

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(-1, -3, 2) + \gamma(0, -1, 1) = (0, 0, 0).$$

Torej imamo sistem

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 0 \\ 2\alpha - 3\beta - \gamma &= 0 \\ 2\beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve in tretje enačbe lahko izrazimo $\alpha = \beta$ in $\gamma = -2\beta$. Če oboje vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$2\beta - 3\beta - (-2\beta) = 0.$$

Torej je nujno $\beta = 0$ in posledično tudi $\alpha = \gamma = 0$. Ti trije vektorji so res linearno neodvisni. Razpenjajo trirazsežen prostor, torej ves \mathbb{R}^3 , in zato tvorijo bazo.

- V prehodni matriki elemente prve baze razvijemo v drugi bazi. Zato je

$$P_{\mathbf{BS}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pri zamenjanem vrstnem redu baz dobimo inverzno matriko:

$$P_{\mathbf{SB}} = (P_{\mathbf{BS}})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Stolpci matrike so slike baznih vektorjev prve baze, razviti v drugi bazi. Ker so

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1, 2, 0) &= (3, 1, 3), & \mathcal{A}(1, 0, 0) &= (-1, 3, -1) \\ \mathcal{A}(-1, -3, 2) &= (-3, 4, -5), & \mathcal{A}(0, 1, 0) &= (2, -1, 2) \\ \mathcal{A}(0, -1, 1) &= (-1, 3, -2), & \mathcal{A}(0, 0, 1) &= (1, 2, 0) \end{aligned}$$

sta

$$[\mathcal{A}]_{BS} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{A}]_{SS} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (d) Ničelni prostor sestavljajo vektorji, ki se preslikajo v ničelni vektor, torej rešitve enačbe

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (-x + 2y + z, 3x - y + 2z, -x + 2y) = (0, 0, 0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo že po enem koraku

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right],$$

iz česar sledi $x = y = z = 0$. Torej

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{(0, 0, 0)\} \quad \text{in} \quad \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) = 0.$$

Iz $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sledi

$$\dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = 3 - 0 = 3.$$

Ker $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ leži v trirazsežnem prostoru \mathbb{R}^3 , je torej

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3.$$

Za bazo moremo vzeti standardno bazo $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

3. naloga [25 točk]

Poiščite rešitev začetnega problema

$$y'' + 16y = 3 \cos 4x - 8x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1.$$

Pripadajoča homogena enačba je

$$y'' + 16y = 0$$

s karakterističnim polinomom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 16.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm 4i.$$

Posledično je splošna rešitev homogene enačbe

$$y_H(x) = Ae^{0x} \cos 4x + Be^{0x} \sin 4x = A \cos 4x + B \sin 4x.$$

Partikularno rešitev bomo sestavili iz dveh delov.

Za desno stran $f_1(x) = \cos 4x = e^{0x}(0 \sin 4x + 1 \cos 4x)$ je odločilno, da sta $0 \pm 4i$ enostavni ničli karakterističnega polinoma. Eno rešitev zato dobimo z nastavkom

$$y_{P1}(x) = x^1 e^{0x} (c \sin 4x + d \cos 4x) = x(c \sin 4x + d \cos 4x).$$

Izračunamo prva odvoda te funkcije:

$$y'_{P1}(x) = 1 \cdot (c \sin 4x + d \cos 4x) + x \cdot (4c \cos 4x - 4d \sin 4x)$$

in

$$y''_{P2}(x) = (4c \cos 4x - 4d \sin 4x) + \\ + 1 \cdot (4c \cos 4x - 4d \sin 4x) + x \cdot (-16c \sin 4x - 16d \cos 4x).$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P1} + 16y_{P1} &= \cos 4x \\ 8c \cos 4x - 8d \sin 4x - 16x(c \sin 4x + \cos 4x) + 16x(c \sin 4x + d \cos 4x) &= \cos 4x \\ 8c \cos 4x - 8d \sin 4x &= \cos 4x \end{aligned}$$

Torej $c = \frac{1}{8}$ in $d = 0$, ter

$$y_{P2}(x) = x \left(\frac{1}{8} \cdot \sin 4x + 0 \cdot \cos 4x \right) = \frac{1}{8} x \sin 4x.$$

Nastavek za partikularno rešitev, ki reši enačbo z desno stranjo $f_1(x) = x = e^{0x} \cdot x$, pa je

$$y_{P2}(x) = x^0 e^{0x} (\alpha x + \beta) = \alpha x + \beta,$$

saj 0 ni ničla karakterističnega polinoma. Prva odvoda sta

$$y'_{P2}(x) = \alpha \quad \text{in} \quad y''_{P2}(x) = 0.$$

Vstavimo v enačbo, uredimo in dobimo

$$\begin{aligned}y_{P2}'' + 16y_{P2} &= x \\0 + 16(\alpha x + \beta) &= x \\16\alpha x + 16\beta &= x\end{aligned}$$

Torej sta $\alpha = \frac{1}{16}$ in $\beta = 0$, ter

$$y_{P2}(x) = \frac{1}{16} \cdot x + 0 = \frac{1}{16}x.$$

Partikularna rešitev je tako

$$y_P(x) = 3y_{P1}(x) - 8y_{P2}(x) = 3 \cdot \frac{1}{8}x \sin 4x - 8 \cdot \frac{1}{16}x = \frac{3}{8}x \sin 4x - \frac{1}{2}x,$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = A \cos 4x + B \sin 4x + \frac{3}{8}x \sin 4x - \frac{1}{2}x.$$

Iz $y(0) = 4$ sledi

$$4 = A \cdot 1 + 0 + 0 + 0 = A.$$

Ker je

$$y'(x) = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x + \frac{3}{8}(1 \cdot \sin 4x + x \cdot 4 \cos 4x) - \frac{1}{2},$$

iz $y'(0) = -1$ dobimo še

$$-1 = 0 + 4B + 0 - \frac{1}{2} \quad \text{oziroma} \quad B = -\frac{1}{8}.$$

Rešitev zastavljenega začetnega problem je torej

$$y(x) = 4 \cos 4x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{3}{8}x \sin 4x - \frac{1}{2}x.$$

4. naloga [25 točk]

Dana je funkcija $f(x) = x^2$.

- (a) Določite njeno Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.
 (b) Kam konvergira Fourierova vrsta pri $x = \frac{\pi}{3}$?
 (c) Določite vsoto vrste

$$1 + \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{2}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{2}{9^2} \dots$$

- (a) Funkcija je soda, tako da v Fourierovi vrsti nastopajo le kosinusi (in konstanta). Sodost izkoristimo tudi pri izračunu a_k . Najprej dobimo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Za $k \in \mathbb{N}$ dvakrat integriramo po delih. Po prvi integraciji dobimo

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x^2 \cdot \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \frac{\sin kx}{k} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left((0 - 0) - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right) \\ &= -\frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx, \end{aligned}$$

nato pa

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{4}{k\pi} \left(\left[x \cdot \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \left(\frac{-\cos kx}{k} \right) dx \right) \\ &= -\frac{4}{k\pi} \cdot \left(\frac{-\pi \cos k\pi - 0}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{4}{k\pi} \cdot \left(\frac{-\pi(-1)^k}{k} + 0 \right) \\ &= \frac{4(-1)^k}{k^2}. \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx = \\ &= \frac{\pi^3}{3} + 4 \left(-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

(b) Ker je f povsod zvezna (tudi če jo periodično razširimo) in povsod obstajata levi in desni odvod, njena Fourierova vrsta v vsaki točki konvergira v vsaki točki k funkcijski vrednosti. Torej je $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}$.

(c) Označimo

$$s = 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{2}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{2}{9^2} \dots$$

Po eni strani je

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi^3}{3} + 4 \left(-\frac{\cos \frac{\pi}{3}}{1^2} + \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2^2} - \frac{\cos \frac{3\pi}{3}}{3^2} + \frac{\cos \frac{4\pi}{3}}{4^2} - \frac{\cos \frac{5\pi}{3}}{5^2} + \frac{\cos \frac{6\pi}{3}}{6^2} - \dots \right) \\ &= \frac{\pi^3}{3} + 4 \left(-\frac{\frac{1}{2}}{1^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2^2} - \frac{-1}{3^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{4^2} - \frac{\frac{1}{2}}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \dots \right) \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 2s, \end{aligned}$$

po drugi pa $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}$. Torej je

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{9} \right) = \frac{\pi^2}{9}.$$

Gradiva iz Matematike 3 za študente Geodezije in geoinformatike (MA)

Avtor: Martin Jesenko

Založila: Založba Univerze v Ljubljani

Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani

Izdala: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

Ljubljana, 2023

Prva e-izdaja

Publikacija je brezplačna.

Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na <https://ebooks.uni-lj.si>

DOI: 10.15292/9789612973063



To delo je ponujeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Deljenje pod enakimi pogoji 4.0 Mednarodna licenca (izjema so fotografije). / This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (except photographs).

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 191229187

ISBN 978-961-297-306-3 (PDF))