Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

Gradiva iz Matematike 3 za študente Gradbeništva (MA)

Martin Jesenko

Ljubljana, 2023

Kazalo

Predgovor

V tej zbirki je zbrano nekaj gradiv iz predmeta Matematika 3, ki ga poslušajo študentje magistrskega študijskega programa Gradbeništvo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Temelji na izvedbah tega predmeta v akademskih letih 2021/22 in 2022/23. Razdeljena je na dva dela.

V prvem delu so zbrane računske naloge. Tiste, ki so bile rešene v okviru vaj, praviloma vsebujejo tudi rešitve, preostale, ki so namenjene samostojnemu delu, pa imajo odgovore. Svoja gradiva so mi prijazno odstopili kolegi, ki so izvajali vaje v preteklih izvedbah: Ganna Kudryavtseva, Marjeta Škapin Rugelj in ostali.

Drugi del sestavljajo primeri rešenih kolokvijev in izpitov.

Martin Jesenko

Del I

Zapiski vaj

Poglavje 1

Linearni (vektorski) prostori in podprostori

Prostor $\mathbb{R}^n$

Osnovni primer linearnih prostorov že poznamo. Gre za prostor n-teric realnih števil $\mathbb{R}^n$, pri čemer sta operaciji seštevanja in množenja s skalarjem definirani po koordinatah.

1. Naj bodo $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 3, 4)$ in $a_3 = (-1, 0, 1)$. Izračunajte linearni kombinaciji $5a_1 - \frac{1}{2}a_2$ in $a_1 - a_2 + a_3$.

Rešitev:

V prostoru $\mathbb{R}^3$ je seštevanje in množenje s skalarjem definirano po koordinatah. Tako je

$$\begin{aligned} 5a_1 - \tfrac{1}{2}a_2 &= 5(1, 2, 3) - \tfrac{1}{2}(2, 3, 4) \\ &= (5, 10, 15) - (1, \tfrac{3}{2}, 2) \\ &= (4, \tfrac{17}{2}, 13) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 &= (1, 2, 3) - (2, 3, 4) + (-1, 0, 1) \\ &= (-2, -1, 0). \end{aligned}$$

2. Za vsako od naslednjih podmnožic $\mathbb{R}^3$ preverite, ali je linearen prostor:

(a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$.

(b) $B = \{(1, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

(c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 3 - 2t, x_2 = t, x_3 = 4t, t \in \mathbb{R}\}$.

(d) $D = \{(-2t, t, 4t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(e) $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Rešitev:

Podmnožica v poljubnem linearnem prostoru je linearen prostor, če je linearen podprostor.

(a) A ni linearen prostor, saj ni zaprta za množenje s skalarjem. Tako je $(1,1,1) \in A$, vendar $(-2) \cdot (1,1,1) = (-2,-2,-2) \notin A$.

(b) B ni linearen prostor, saj ne vsebuje ničelnega vektorja $(0,0,0)$.

(c) C ni linearen prostor, saj ne vsebuje ničelnega vektorja. Ne obstaja namreč tak $t \in \mathbb{R}$, da je $(3-2t, t, 4t) = (0,0,0)$. Za zadnji dve koordinati bi moral biti $t = 0$, toda potem $3 \neq 0$.

(d) D je linearen prostor. Gre za premico skozi izhodišče s smernim vektorjem $(-2,1,4)$. Vzemimo poljubna elementa $t_1(-2,1,4), t_2(-2,1,4) \in D$ in poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potem je tudi

$$\alpha\ t_1(-2,1,4) + \beta\ t_2(-2,1,4) = (\alpha t_1 + \beta t_2)(-2,1,4) \in D.$$

(e) E ni linearen prostor, saj ni zaprta za seštevanje. $(1,1,0)$ in $(1,0,1)$ sta elementa B, njuna vsota $(2,1,1)$ pa ne.

3. Pokažite, da množica vektorjev v $\mathbb{R}^n$, ki so rešitve sistema linearnih enačb, tvori podprostor v $\mathbb{R}^n$ natanko takrat, ko je sistem enačb homogen.

Rešitev:

Označimo z $\mathcal{R}$ množico rešitev $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Najprej predpostavimo, da je $\mathcal{R}$ podprostor:

Ker vsak podprostor vsebuje ničelni vektor, je $(0, \ldots, 0) \in \mathcal{R}$. Če vstavimo ta vektor v sistem, iz tega sledi $b_1 = \ldots = b_m = 0$.

Obratno, predpostavimo sedaj $b_1 = \ldots = b_m = 0$:

Vzemimo poljubni rešitvi $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}$ in poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pokazati moramo, da je potem tudi $\alpha(x_1, \ldots, x_n) + \beta(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}$. Ker je za vsak $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \quad \text{in} \quad a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = 0,$$

velja tudi

$$\begin{aligned} & a_{i1}(\alpha x_1 + \beta y_1) + \ldots + a_{in}(\alpha x_n + \beta y_n) \\ =\ & a_{i1}\alpha x_1 + a_{i1}\beta y_1 + \ldots + a_{in}\alpha x_n + a_{in}\beta y_n \\ =\ & \alpha(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) + \beta(a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n) \\ =\ & \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ =\ & 0, \end{aligned}$$

torej dejansko $\alpha(x_1, \ldots, x_n) + \beta(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}$.

4. Določite parameter a tako, da bo vektor $(-1, a+2, -2, a^2+a+1)$ linearna kombinacija $(1,0,2,4)$, $(3,1,1,2)$ in $(5,1,5,3)$.

Odgovor: $a = -2$

5. Določite parameter a tako, da bo vektor $(7,-2,a)$ linearna kombinacija vektorjev $(2,3,5)$, $(3,7,8)$ in $(1,-6,1)$.

Odgovor: $a = 15$

6. Določite (z utemeljitvijo), ali so naslednje podmnožice linearni podprostori v danih prostorih:

(a) $\mathcal{A} = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^3 + z^4 + u = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$,
(b) $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(c) $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ yz = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
(d) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0,\ 3x - 5y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Odgovor: ne, da, ne, da

7. Katere od naslednjih podmnožic prostora $\mathbb{R}^5$ so linearni podprostori v $\mathbb{R}^5$?

(a) $\mathcal{A} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 \in \mathbb{Z}\}$,
(b) $\mathcal{B} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 = 0\}$,
(c) $\mathcal{C} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$,
(d) $\mathcal{D} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 1\}$,
(e) $\mathcal{E} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_3 = x_5 \quad \text{in} \quad x_2 = x_4\}$.

Odgovor: ne, da, da, ne, da

8. Ugotovite, ali so naslednje podmnožice linearni podprostori danih prostorov:

(a) $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(b) $\mathcal{B} = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 : x = z, y = u\} \subseteq \mathbb{R}^4$,
(c) $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0, 2x - 3y = 0, 2x + y + 4z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
(d) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(e) $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Odgovor: ne, da, da, ne, da

Prostori matrik

Vse matrike določenih dimenzij tudi tvorijo linearen prostor. Za dana $m, n \in \mathbb{N}$ bomo množico vseh realnih matrik z m vrsticami in n stolpci označevali z

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Operaciji seštevanja in množenja s skalarjem sta definirani po elementih. Gre torej za zelo podoben primer kot je $\mathbb{R}^n$, le da imajo koordinate dva indeksa. V prvi nalogi bomo najprej preverili vse aksiome.

9. Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}$. Pokažite, da je množica vseh realnih matrik z m vrsticami in n stolpci $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ s seštevanjem in množenjem s skalarjem po koordinatah linearen prostor.

Rešitev:

Pri seštevanju dveh $m \times n$-matrik in množenju takih matrik s skalarjem je rezultat spet $m \times n$-matrika, torej sta operaciji dobro definirani.

Sedaj moramo preveriti, da operaciji izpolnjujeta zahtevane aksiome. Za vsoto mora veljati:

(a) $A + B = B + A$ za vse $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (komutativnost).

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ za vse $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (asociativnost).

(c) Obstaja $0 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (nevtralni element), tako da je $A + 0 = A$ za vse $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(d) Za vsak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ obstaja $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (nasprotni element), tako da je $A + (-A) = 0$.

Nadalje mora za vse $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ in vse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ veljati še

(e) $1A = A$,

(f) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

(g) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

(h) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Označimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Seštevanje matrik je komutativno, saj sta matriki

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in

$$B + A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{bmatrix}$$

enaki.

Podobno dokažemo asociativnost seštevanja.

Nevtralni element za seštevanje je ničelna matrika

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

saj očitno velja $A + 0 = A$.

Nasprotni element poljubne matrike je

$$-A = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Očitno je

$$1\cdot A = 1\cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot a_{11} & 1\cdot a_{12} & \cdots & 1\cdot a_{1n} \\ 1\cdot a_{21} & 1\cdot a_{22} & \cdots & 1\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1\cdot a_{m1} & 1\cdot a_{m2} & \cdots & 1\cdot a_{mn} \end{bmatrix} = A.$$

Veljata tudi obe obliki distributivnosti, saj sta enaki tako matriki

$$\lambda(A+B) = \lambda\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\right)$$
$$= \lambda\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \lambda(a_{12}+b_{12}) & \cdots & \lambda(a_{1n}+b_{1n}) \\ \lambda(a_{21}+b_{21}) & \lambda(a_{22}+b_{22}) & \cdots & \lambda(a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda(a_{m1}+b_{m1}) & \lambda(a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & \lambda(a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}+\lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\lambda b_{m1} & \lambda a_{m2}+\lambda b_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}+\lambda b_{mn} \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{aligned}
\lambda A+\lambda B &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{m1} & \lambda b_{m2} & \cdots & \lambda b_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}+\lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\lambda b_{m1} & \lambda a_{m2}+\lambda b_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}+\lambda b_{mn} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

kot tudi matriki

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)A &= (\lambda+\mu) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda+\mu)a_{11} & (\lambda+\mu)a_{12} & \cdots & (\lambda+\mu)a_{1n} \\ (\lambda+\mu)a_{21} & (\lambda+\mu)a_{22} & \cdots & (\lambda+\mu)a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\lambda+\mu)a_{m1} & (\lambda+\mu)a_{m2} & \cdots & (\lambda+\mu)a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\mu a_{11} & \lambda a_{12}+\mu a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}+\mu a_{1n} \\ \lambda a_{21}+\mu a_{21} & \lambda a_{22}+\mu a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}+\mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\mu a_{m1} & \lambda a_{m2}+\mu a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}+\mu a_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\lambda A+\mu A &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & \mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \cdots & \mu a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\mu a_{11} & \lambda a_{12}+\mu a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}+\mu a_{1n} \\ \lambda a_{21}+\mu a_{21} & \lambda a_{22}+\mu a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}+\mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\mu a_{m1} & \lambda a_{m2}+\mu a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}+\mu a_{mn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Velja še $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, kar sledi iz

$$\lambda(\mu A) = \lambda \left(\mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & \mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \cdots & \mu a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu a_{11} & \lambda\mu a_{12} & \cdots & \lambda\mu a_{1n} \\ \lambda\mu a_{21} & \lambda\mu a_{22} & \cdots & \lambda\mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\mu a_{m1} & \lambda\mu a_{m2} & \cdots & \lambda\mu a_{mn} \end{bmatrix}$$

in

$$(\lambda\mu)A = (\lambda\mu) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda\mu)a_{11} & (\lambda\mu)a_{12} & \cdots & (\lambda\mu)a_{1n} \\ (\lambda\mu)a_{21} & (\lambda\mu)a_{22} & \cdots & (\lambda\mu)a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\lambda\mu)a_{m1} & (\lambda\mu)a_{m2} & \cdots & (\lambda\mu)a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tako smo preverili vse aksiome, kar pomeni, da je $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dejansko linearen prostor.

10. Pokažite, da je množica vseh zgornjetrikotnih 2×2 matrik

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

s seštevanjem in množenjem s skalarjem po koordinatah linearen prostor.

Rešitev:

Ker je ta množica vsebovana v $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, zadostuje, da preverimo, da je zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem. Dejansko velja, da je vsota dveh zgornjetrikotnih spet taka, saj je

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix},$$

prav tako pa zmožek s skalarjem, saj velja

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda c \end{bmatrix}.$$

11. Katere od naslednjih množic matrik tvorijo podprostor v prostoru $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$?

(a) Množica vseh simetričnih matrik.

(b) Množica vseh poševno simetričnih matrik. (Matrika A je poševno simetrična, če je $A^\top = -A$.)

(c) Množica vseh obrnljivih matrik.

(d) Množica vseh neobrnljivih matrik.

(e) Množica vseh matrik s sledjo 0. (Sled matrike je vsota njenih diagonalnih elementov).

Rešitev:

(a) Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

poljubni simetrični matrik. Potem je simetrična tudi njuna vsota

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{13} + b_{13} & a_{23} + b_{23} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

in za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ tudi

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{13} & \lambda a_{23} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}.$$

Simetrične matrike torej sestavljajo podprostor.

(b) Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

poljubni poševno simetrični matrik. Potem je taka tudi njuna vsota

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ -(a_{12} + b_{12}) & 0 & a_{23} + b_{23} \\ -(a_{13} + b_{13}) & -(a_{23} + b_{23}) & 0 \end{bmatrix}$$

in za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ tudi

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ -\lambda a_{12} & 0 & \lambda a_{23} \\ -\lambda a_{13} & -\lambda a_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Poševno simetrične matrike torej tudi sestavljajo podprostor.

(c) Ničelna matrika ni obrnljiva, tako da ne gre za podprostor.

(d) Matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nista obrnljivi, njuna vsota

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je. Množica neobrnljivi matriki tako ni podprostor.

(e) Poljubna matrika s sledjo 0 ima obliko

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix}.$$

Hitro vidimo, da ima tako obliko tudi vsota takih matrik ter produkt s skalarjem. Zato matrike s sledjo 0 tvorijo podprostor.

Prostori funkcij

Tretji standarden primer linearnih prostorov so prostori funkcij na dani množici.
Naj bo M poljubna množica in $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R}\}$ množica vseh funkcij iz M v $\mathbb{R}$. Na $\mathcal{F}(M)$ definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po točkah. To pomeni, da je za poljubni $f, g : M \to \mathbb{R}$ in poljuben $\lambda \in \mathbb{R}$ vsota $f + g : M \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

produkt $\lambda f : M \to \mathbb{R}$ pa z

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Množico vseh polinomov z realnimi koeficienti stopnje kvečjemu n bomo označevali z $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

12. Pokažite, da je $\mathcal{F}(M)$ linearen prostor.

Rešitev:

Ker za vsak $x \in M$ velja

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

in

$$\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = \big(f + (g+h)\big)(x)$$

je seštevanje funkcij komutativno in asociativno.

Nevtralni element za seštevanje je ničelna funkcija 0, saj je za vsak $x \in M$

$$(f+0)(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Nasprotni element je funkcija $-f$, definirana kot $(-f)(x) = -f(x)$. Dejansko je potem za vsak $x \in M$

$$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 0,$$

in sledi $f + (-f) = 0$.

Očitno je $1 \cdot f = f$, saj je za vsak $x \in M$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x).$$

Za poljubni funkciji $f, g : M \to \mathbb{R}$ in skalarja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja še

- $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$, saj je za vsak $x \in M$

$$\big(\lambda(f+g)\big)(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda\big(f(x)+g(x)\big) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

in

$$(\lambda f + \lambda g)(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x),$$

- $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f$, saj velja za vsak $x \in M$

$$\big((\lambda+\mu)f\big)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$

in

$$(\lambda f + \mu f)(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$

- in $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$, kar sledi iz

$$\big(\lambda(\mu f)\big)(x) = \lambda(\mu f)(x) = \lambda\mu f(x)$$

in

$$\big((\lambda\mu)f\big)(x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda\mu f(x).$$

13. Ali so naslednje podmnožice v $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ podprostori?

(a) Množica vseh sodih funkcij.
(b) Množica vseh funkcij, ki niso niti sode niti lihe.
(c) Množica vseh funkcij, ki imajo natanko eno ničlo.
(d) Množica vseh funkcij, ki imajo vsaj eno ničlo.
(e) Množica vseh polinomov $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, za katere velja $p(1) = 0$.
(f) Množica vseh polinomov $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, za katere velja $p'(1) = 3$.

Rešitev:

(a) Funkcija f je soda, če velja $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če sta f in g sodi funkciji in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potem je $\alpha f + \beta g$ tudi soda, saj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x).$$

Torej gre za podprostor.

(b) Množica vseh funkcij, ki niso niti sode niti lihe, ni podprostor, ker ne vsebuje ničelne funkcije. Le-ta je namreč soda in liha.

(c) Tudi ta množica ne vsebuje ničelne funkcije, ki ima neskončno ničel.

(d) Funkciji $f(x) = (x-1)^2$ in $g(x) = (x+1)^2$ imata natanko eno ničlo. Njuna vsota

$$(f+g)(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2 = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 2$$

pa je povsod pozitivna, torej nima nobene ničle. Ta množica torej ni podprostor.

(e) Naj za $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ velja $p(1) = q(1) = 0$ in naj bosta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubna. Potem je tudi $\alpha p + \beta q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ in

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = 0.$$

Taki polinomi torej tvorijo podprostor.

(f) Ta množica ne vsebuje ničelne funkcije, torej ni podprostor.

14. Ali so naslednje podmnožice v $\mathcal{V} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ podprostori?

(a) Množica vseh lihih funkcij.

(b) Množica vseh funkcij, ki nimajo nobene ničle.

(c) Množica vseh polinomov stopnje natanko 3.

(d) Množica vseh polinomov $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, za katere velja $p'(1) = p'(2) = 0$.

Odgovor: da, ne, ne, da

Linearna neodvisnost, baza, podprostori

Množica vektorjev $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je linearno neodvisna (ali drugače $v_1, \ldots, v_n$ so linearno neodvisni), če iz

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \quad \text{sledi} \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

V nasprotnem primeru je linearno odvisna.
Množica vektorjev je zagotovo linearno odvisna, če je eden od njih ničelni vektor.
Dva neničelna vektorja u in v sta linearno odvisna natanko tedaj, ko sta vzporedna, torej ko obstaja tak $\lambda \neq 0$, da velja $v = \lambda u$.

15. Ali so naslednji vektorji v prostoru $\mathbb{R}^3$ linearno neodvisni?

(a) $(1, 2, 3)$ in $(1, 2, 4)$.

(b) $(1, 2, 3)$ in $(2, 4, 6)$.

(c) $(2, -3, 1)$, $(3, -1, 5)$ in $(1, -4, 3)$.

(d) $(2, -3, 1)$, $(3, -1, 5)$, $(1, -4, 3)$ in $(2, 3, -7)$.

(e) $(5, 4, 3)$, $(3, 3, 2)$ in $(8, 1, 3)$.

Rešitev:

(a) Vektorja nista vzporedna, saj ne obstaja tak $\lambda \neq 0$, da je $(1, 2, 4) = \lambda(1, 2, 3)$. (Enakost prvih koordinat dá $\lambda = 1$, a potem ne velja enakost v tretji koordinati.) Torej sta dana vektorja linearno neodvisna.

(b) $(1, 2, 3)$ in $(2, 4, 6)$ sta linearno odvisna, saj je $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$.

(c) Nastavimo $\alpha(2,-3,1)+\beta(3,-1,5)+\gamma(1,-4,3)=(0,0,0)$, kar nam dá sistem

$$\begin{array}{rrcl} ① : & 2\alpha+3\beta+\gamma & = & 0 \\ ② : & -3\alpha-\beta-4\gamma & = & 0 \\ ③ : & \alpha+5\beta+3\gamma & = & 0 \end{array}$$

Sledi

$$\begin{array}{rrcl} ① - 2\cdot ③ : & -7\beta-5\gamma & = & 0 \\ ② + 3\cdot ③ : & 14\beta+5\gamma & = & 0 \end{array}$$

Iz vsote teh dveh enačb sledi $\beta=0$ in nato tudi $\gamma=\alpha=0$. Torej so dani vektorji linearno neodvisni.

(d) Vemo, da je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Zato nobena množica, ki ima več kot tri elemente, ne more biti linearno neodvisna.

(e) Iz $\alpha(5,4,3)+\beta(3,3,2)+\gamma(8,1,3)=(0,0,0)$ dobimo sistem

$$\begin{array}{rcl} 5\alpha+3\beta+8\gamma & = & 0 \\ 4\alpha+3\beta+\gamma & = & 0 \\ 3\alpha+2\beta+3\gamma & = & 0 \end{array}$$

Rešimo ta sistem z Gaußovo metodo eliminacije. Najprej odštejemo drugo vrstico od prve, v drugem koraku pa odštejemo od druge vrstivce štirikratnik prve, od tretje pa trikratnik prve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -27 & 0 \\ 0 & 2 & -18 & 0 \end{array}\right].$$

Nato delimo zadnji dve vrstici s 3 oz. 2 in na koncu odštejemo drugo vrstico od tretje:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Kot vidimo, obstaja neničelna rešitev. Izberemo lahko npr. $\gamma=1$, $\beta=9$ in $\alpha=-7$. Dejansko je

$$-7(5,4,3)+9(3,3,2)+1(8,1,3)=(0,0,0).$$

Ti trije vektorji so linearno odvisni.

16. Naj bodo a, b, c in d linearno neodvisni vektorji. Kaj lahko poveste o linearni (ne)odvisnosti vektorjev:

(a) $a_1=a+2c+d$, $b_1=2a-b+c$, $c_1=a+c+d$;

(b) $a_2=a+2c+d$, $b_2=2a-b+c$, $c_2=-a+b+c+d$.

Odgovor: linearno neodvisni, linearno odvisni

17. Katere od spodnjih urejenih množic vektorjev so urejene baze prostora $\mathbb{R}^4$?

(a) $\mathcal{A} = \big((0,0,0,0),(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,0,1,1)\big)$,
(b) $\mathcal{B} = \big((1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1),(2,2,2,2)\big)$,
(c) $\mathcal{C} = \big((1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\big)$,
(d) $\mathcal{D} = \big((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(1,1,1,1)\big)$,
(e) $\mathcal{E} = \big((1,1,0,1),(1,-1,1,1),(2,2,1,2),(0,1,0,0)\big)$.

Pri pritrdilnem odgovoru zapišite še vektor $u = (1,2,3,4)$ v teh bazah.

Rešitev:

(a) Če množica vsebuje ničelni element, ne more biti linearno neodvisna. Torej je $\mathcal{A}$ linearno odvisna in zagotovo ni baza.

(b) Opazimo, da je $(2,2,2,2) = 2(1,1,1,1)$. Že ta dva vektorja sta torej linearno odvisna, torej je tudi $\mathcal{B}$ linearno odvisna in ni baza.

(c) Vse baze linearnega prostora imajo toliko elementov, kolikor je njegova dimenzija. Ker je $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, tudi množica $\mathcal{C}$ ni baza. Je pa sicer linearno neodvisna. Kar ji manjka do baze je torej, da ne razpenja celega prostora.

(d) Najprej preverimo, če je $\mathcal{D}$ linearno neodvisna. Iz

$$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1) + \delta(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$$

sledi

$$\begin{array}{lrcl} ①: & \alpha + \delta & = & 0 \\ ②: & \beta + \delta & = & 0 \\ ③: & \gamma + \delta & = & 0 \\ ④: & \alpha + \beta + \gamma + \delta & = & 0 \end{array}$$

Iz ①, ② in ③ sledi $\alpha = \beta = \gamma = -\delta$. Če to vstavimo v ④, dobimo $\delta = 0$ in posledično $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Množica $\mathcal{D}$ je torej linearno neodvisna. Ker ima njena linearna ogrinjača dimenzijo 4 in leži v štirirazsežnem prostoru, je kar cel prostor. Množica $\mathcal{D}$ je zato baza.

Želimo še izraziti u z elementi $\mathcal{D}$. Iščemo take $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, da bo

$$u = (1,2,3,4) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1) + \delta(1,1,1,1)$$

ali po koordinatah

$$\begin{array}{lrcl} ①: & \alpha + \delta & = & 1 \\ ②: & \beta + \delta & = & 2 \\ ③: & \gamma + \delta & = & 3 \\ ④: & \alpha + \beta + \gamma + \delta & = & 4 \end{array}$$

Podobno kot zgoraj lahko izrazimo iz ①, ② in ③

$$\alpha = 1 - \delta, \quad \beta = 2 - \delta, \quad \gamma = 3 - \delta$$

in vstavimo v ④, ter tako dobimo $6 - 2\delta = 4$. Sledi $\delta = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ in $\gamma = 2$. Dejansko je

$$(1,2,3,4) = (0,1,0,1) + 2(0,0,1,1) + (1,1,1,1).$$

(e) Spet preverimo, ali je $\mathcal{E}$ linearno neodvisna. Iz

$$\alpha(1,1,0,1)+\beta(1,-1,1,1)+\gamma(2,2,1,2)+\delta(0,1,0,0)=(0,0,0,0)$$

sledi

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+2\gamma &= 0 \\ \alpha-\beta+2\gamma+\delta &= 0 \\ \beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta+2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Spet izvedemo Gaußovo metodo. Najprej prvo vrstico odštejemo od druge in četrte:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Že zdaj je jasno, da rešitev ni enolična, saj imamo le še tri neničelne vrstice za štiri neznanke. Zamenjamo še srednji vrstici in potem tretji prištejemo dvakratnik druge:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Obstajajo neničelne rešitve, kar pomeni, da so vektorji linearno odvisni in $\mathcal{E}$ ni baza. Vzamemo npr. lahko $\delta=-2$, $\gamma=1$, $\beta=-1$ in $\alpha=-1$. Res je

$$-(1,1,0,1)-(1,-1,1,1)+(2,2,1,2)-2(0,1,0,0)=(0,0,0,0).$$

18. V prostoru $\mathbb{R}^4$ so podani vektorji

$$a_1=(1,0,0,-1),\ a_2=(2,1,1,0),\ a_3=(1,1,1,1),\ a_4=(1,2,3,4),\ a_5=(0,1,2,3).$$

Poiščite bazo in dimenzijo prostora $\mathrm{Lin}\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$.

Rešitev:

Imamo pet vektorjev v štirirazsežnem prostoru. Prav zagotovo so torej linearno odvisni.

Ena možnost je, da dodajamo vektorje po vrsti in vsakič ugotavljamo, ali je večja množica še linearno neodvisna:

- En sam neničelen vektor je vedno linearno neodvisen, tako da je prva ogrnjača $\mathrm{Lin}\{a_1\}$.
- Dva neničelna vektorja sta linearno neodvisna, če nista vzporedna. Zato je $\mathrm{Lin}\{a_1,a_2\} \supsetneq \mathrm{Lin}\{a_1\}$.
- Ker je $a_3=a_2-a_1 \in \mathrm{Lin}\{a_1,a_2\}$, je $\mathrm{Lin}\{a_1,a_2,a_3\}=\mathrm{Lin}\{a_1,a_2\}$.
- Vektorji a_1,a_2,a_4 so linearno neodvisni. To se najhitreje vidi iz enačb za drugo in tretjo koordinato. Zato je $\mathrm{Lin}\{a_1,a_2,a_4\} \supsetneq \mathrm{Lin}\{a_1,a_2\}$.

- Zaradi $a_5 = a_4 - a_3 \in \mathrm{Lin}\{a_1, a_2, a_4\}$ je $\mathrm{Lin}\{a_1, a_2, a_4, a_5\} = \mathrm{Lin}\{a_1, a_2, a_4\}$.

Torej je $\mathrm{Lin}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \mathrm{Lin}\{a_1, a_2, a_4\}$. Ker so a_1, a_2, a_4 linearno neodvisni, sestavljajo bazo za svojo ogrinjačo in $\dim \mathrm{Lin}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = 3$.

Druga možnost je, da zapišemo vektorje kot vrstice v matriko. Če v tej matriki menjamo vrstice, jih množimo z neničelnim skalarjem ali jim prištevamo poljubne večkratnike drugih vrstic, vrstice nove matrike razpenjajo isti podprostor kot vrstice prvotne.

Če izvedemo kar Gaußovo metodo eliminacije, so neničelne vrstice zagotovo linearno neodvisne, tako da dobimo eno možno bazo.

V prvem koraku odštejemo primerne večkratnike prve vrstice od ostalih, tako da dobimo v prvem stolpcu ničle pod diagonalo. V drugem koraku to storimo še z drugo vrstico:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nato zamenjamo tretjo in peto vrstico in na koncu še odštejemo tretjo vrstico od četrte:

$$\cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobili smo tri neničelne vrstice. Dimenzija $\mathrm{Lin}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ je torej enaka tri, ena možna baza pa je

$$\big((1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 2), (0, 0, 1, 1)\big).$$

19. Pokažite, da je

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 = 0\}$$

podprostor v $\mathbb{R}^5$ ter določite njegovo dimenzijo in eno bazo.

Rešitev:

$\mathcal{U}$ je množica rešitev homogene linearne enačbe $x_2 = 0$. Iz naloge 1.3 sledi, da je podprostor. Vsak element $\mathcal{U}$ lahko zapišemo kot

$$(x_1, 0, x_3, x_4, x_5) = x_1(1, 0, 0, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 0, 1, 0) + x_5(0, 0, 0, 0, 1).$$

Množica $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ je očitno linearno neodvisna in razpenja $\mathcal{U}$. Zato je (ena) baza podprostora $\mathcal{U}$ in $\dim \mathcal{U} = 4$.

20. Pokažite, da je

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3x_1 - 2x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0,\ x_3 - 2x_5 = 0\}$$

podprostor v $\mathbb{R}^5$ ter določite njegovo dimenzijo in eno bazo.

Odgovor: $\dim \mathcal{V} = 2$, baza $\big((2,3,0,0,0),(0,0,2,-2,1)\big)$

21. Ugotovite, pri katerih vrednostih parametrov $a, b \in \mathbb{R}$ je množica

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - ay = b,\ x - az = b\}$$

linearen podprostor v $\mathbb{R}^3$. V teh primerih poiščite še bazo za $\mathcal{U}$ in določite njegovo dimenzijo. Ali je dimenzija prostora $\mathcal{U}$ odvisna od parametrov a in b?

Rešitev:

V nalogi 1.3 smo dokazali, da rešitve sistema linearnih enačb sestavljajo linearen podprostor natanko tedaj, ko je le-ta homogen. Torej je $\mathcal{U}$ podprostor v $\mathbb{R}^3$ natanko tedaj, ko je $b = 0$. Tedaj je

$$x - ay = 0 = x - az$$

oziroma

$$x = ay = az.$$

Če je $a = 0$, dobimo zgolj pogoj $x = 0$. Zato je $\dim \mathcal{U} = 2$ in ena baza je $\big((0,1,0),(0,0,1)\big)$.

Če je $a \neq 0$, so rešitve natanko vektorji (at, t, t) za vsak $t \in \mathbb{R}$. Torej $\dim \mathcal{U} = 1$ in ena baza je $\big((a,1,1)\big)$.

22. Pokažite, da vektorja $v_1 = (1,1,2,3)$ in $v_2 = (2,1,0,1)$ ne razpenjata istega podprostora v $\mathbb{R}^4$ kot vektorji $u_1 = (5,3,2,5)$, $u_2 = (-1,0,2,3)$ in $u_3 = (-4,3,4,8)$. Ali je kateri od teh dveh podprostorov vsebovan v drugem?

Rešitev:

Če imamo v nekem linearnem prostoru vektorje $v_1, \ldots, v_n$ in $u_1, \ldots, u_m$, potem velja

$$\mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathrm{Lin}\{u_1, \ldots, u_m\} \iff v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Lin}\{u_1, \ldots, u_m\}.$$

Označimo $\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$ in $\mathcal{U} = \mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$. Ker vektorja v_1 in v_2 nista vzporedna, je $\dim \mathcal{V} = 2$. Poiščimo tudi za $\mathcal{U}$ dimenzijo in (preprosto) bazo.

Najprej zamenjamo prvi dve vrstici. Nato od druge in tretje odštejemo primerne večkratnike prve. Nazadnje odštejemo še drugo vrstico od tretje:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & -16 & -24 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo tri linearno neodvisne vrstice, kar pomeni, da je $\dim \mathcal{U} = 3$ (in da so u_1, u_2, u_3 linearno neodvisni). Ker dimenziji nista enaki, ogrinjači zagotovo ne moreta biti enaki. Lahko je kvečjemu $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Za lažje računanje poiščimo še preprostejšo bazo za $\mathcal{U}$.

Tretjo vrstico delimo z -8, nato pa jo odštejemo od prve, njen šestkratnik pa od druge vrstice. Za konec spremenimo predznak prve vrstice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & -16 & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Torej sestavljajo vektorji

$$w_1 = (1, 0, 0, 0), \quad w_2 = (0, 3, 0, 2), \quad w_3 = (0, 0, 2, 3)$$

bazo $\mathcal{U}$.

Ali je torej $\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\} \subset \mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathrm{Lin}\{w_1, w_2, w_3\} = \mathcal{U}$? Po zgornjem je to natanko tedaj, ko $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$.

Leži $v_1 \in \mathcal{U}$? Potem obstajajo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tako da je $v_1 = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$, oziroma

$$(1, 1, 2, 3) = \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 3, 0, 2) + \gamma(0, 0, 2, 3).$$

Iz primerjave koordinat dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ 1 &= 3\beta \\ 2 &= 2\gamma \\ 3 &= 2\beta + 3\gamma \end{aligned}$$

Iz druge in tretje enačbe sledi $\beta = \frac{1}{3}$ in $\gamma = 1$, toda potem ni izpolnjena zadnja enačba. Taki α, β, γ ne obstajajo, torej $v_1 \notin \mathcal{U}$. Sledi $\mathrm{Lin}\{v_1, v_2\} \not\subset \mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$.

23. Ali vektorja $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ in $u_2 = (1, 0, 1, 1)$ razpenjata isti podprostor v $\mathbb{R}^4$ kot vektorja $v_1 = (2, -1, 3, 3)$ in $v_2 = (0, 1, -1, -1)$?

Odgovor: da

24. Pokažite, da so funkcije $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (kot elementi prostora $\mathcal{F}(\mathbb{R})$) linearno neodvisne, pri čemer so

(a) $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = t^2$ in $h(t) = t$,

(b) $f(t) = 1$, $g(t) = \sin t$ in $h(t) = \cos t$,

(c) $f(t) = 1$, $g(t) = \sin t$ in $h(t) = \sin^2 t$.

Rešitev:

Raziščimo, kdaj je linearna kombinacija treh funkcij enaka 0 (torej ničelni funkciji):

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0.$$

Funkciji sta enaki, če je njuna vrednost v vsaki točki enaka, torej mora za vsak $t \in \mathbb{R}$ veljati

$$\alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t) = 0.$$

(a) V tem primeru torej za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha e^{2t} + \beta t^2 + \gamma t = 0.$$

To je pa očitno možno le za $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Konkretno lahko to vidimo, če najprej vstavimo $t = 0$. Potem iz

$$\alpha \cdot e^{2 \cdot 0} + \beta \cdot 0^2 + \gamma \cdot 0 = 0$$

sledi $\alpha = 0$. Če vstavimo še $t = 1$ in $t = -1$, dobimo

$$\beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 = 0 = \beta \cdot (-1)^2 + \gamma \cdot (-1),$$

iz česar sledi še $\beta = \gamma = 0$. Te tri funkcije so torej linearno neodvisne.

(b) Sedaj za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin t + \gamma \cos t = 0.$$

Če vstavimo $t = 0$, dobimo $\alpha + \gamma = 0$, za $t = \pm\frac{\pi}{2}$ pa $\alpha \pm \beta = 0$. Spet je to možno le za $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(c) Nazadnje še

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin t + \gamma \sin^2 t = 0.$$

Pri $t = 0$ dobimo $\alpha = 0$. Spet lahko nato vstavimo $t = \pm\frac{\pi}{2}$ in dobimo še $\beta = \gamma = 0$.

25. Zapišite polinom $p(t) = t^2 + 4t - 3$ kot linearno kombinacijo polinomov $q(t) = t^2 - 2t + 5$, $r(t) = 2t^2 - 3t$ in $s(t) = t + 3$.

Rešitev:

Poiskati moramo realna števila α, β, γ, tako da velja

$$p(t) = \alpha q(t) + \beta r(t) + \gamma s(t)$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. Torej mora veljati

$$t^2 + 4t - 3 = \alpha(t^2 - 2t + 5) + \beta(2t^2 - 3t) + \gamma(t + 3)$$

oziroma

$$t^2 + 4t - 3 = (\alpha + 2\beta)t^2 + (-2\alpha - 3\beta + \gamma)t + (5\alpha + 3\gamma).$$

Ujemati se morajo vsi koeficienti polinomov na levi in desni. Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{array}{rrcl} ① : & 1 & = & \alpha + 2\beta \\ ② : & 4 & = & -2\alpha - 3\beta + \gamma \\ ③ : & -3 & = & 5\alpha + 3\gamma \end{array}$$

Iz ① lahko izrazimo $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$, iz ③ pa $\gamma = \frac{-3-5\alpha}{3}$. Potem sledi iz ② $\alpha = -3$ in zato $\beta = 2$ in $\gamma = 4$. Torej je

$$p = -3q + 2r + 4s.$$

26. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ polinomov največ tretje stopnje sta podani množici

$$S_1 = \{t^3, t^3 - t^2, t^3 + t^2, t^3 - 1\}, \quad S_2 = \{t^2 - 1, t + 1, t^3 - 1\}.$$

Če je množica linearno neodvisna, ji dodajte tak polinom, da postane linearno odvisna. Če pa je množica linearno odvisna, ji odvzemite tak polinom, da postane linearno neodvisna.

Rešitev:

Hitro se vidi, da je S_1 linearno odvisna, saj je vsota njenega drugega in tretjega elementa dvakratnik prvega, ali drugače

$$-2t^3 + (t^3 - t^2) + (t^3 + t^2) = 0.$$

Množica $S_1 \setminus \{t^3 + t^2\}$ pa je linearno neodvisna. Če v

$$\alpha t^3 + \beta(t^3 - t^2) + \gamma(t^3 - 1) = 0$$

primerjamo koeficienta pri t^2, dobimo $\beta = 0$, če pa konstantna, pa $\gamma = 0$. Potem mora biti tudi $\alpha = 0$.

Množica S_2 je linearno neodvisna, saj primerjava koeficientov pri t, t^2, t^3 pokaže, da iz

$$\alpha(t^2 - 1) + \beta(t + 1) + \gamma(t^3 - 1) = 0$$

sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dodamo lahko npr. vsoto prvih dveh $t^2 + t$.

27. Katere od naslednjih množic polinomov iz prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ so linearno neodvisne?

(a) $\{1, t, t^2 - 1\}$,

(b) $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$,

(c) $\{2t^2 + t, t^2 + 3, t\}$,

(d) $\{2t^2 + t + 1, 3t^2 + t - 5, t + 13\}$.

Če je množica linearno odvisna, izrazite en njen element kot linearno kombinacijo ostalih.

Odgovor: (a, b, c) linearno neodvisne, (d) linearno odvisna in $p_3 = 3p_1 - 2p_2$

28. V prostoru $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ je podana množica

$$\mathcal{V} = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p'(1) = p'(2) = 0\}.$$

Pokažite, da je $\mathcal{V}$ podprostor ter poiščite njegovo bazo in dimenzijo.

Rešitev:

Naj bodo $p, q \in \mathcal{V}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ poljubni. Potem velja

$$(\lambda p + \mu q)'(1) = \lambda p'(1) + \mu q'(1) = 0 \quad \text{in} \quad (\lambda p + \mu q)'(2) = \lambda p'(2) + \mu q'(2) = 0,$$

torej je tudi $\lambda p + \mu q \in \mathcal{V}$. Sledi, da je $\mathcal{V}$ podprostor.

Določimo sedaj, kako za poljuben polinom

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

iz koeficientov prepoznamo, ali je element $\mathcal{V}$.

Odvod je enak

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3,$$

tako da sta pogoja

$$0 = p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \quad \text{in} \quad 0 = p'(2) = a_1 + 4a_2 + 12a_3 + 32a_4.$$

Torej morajo koeficienti $a_0, \ldots, a_4$ rešiti

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 28 & 0 \end{array}\right].$$

Sledi, da sta $a_4 = \alpha$ in $a_3 = \beta$ poljubna. Potem dobimo

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(-9a_3 - 28a_4) = -\tfrac{9}{2}\beta - 14\alpha$$

in

$$a_1 = -2a_2 - 3a_3 - 4a_4 = 6\beta + 24\alpha.$$

Koeficient $a_0 = \gamma$ je tudi poljuben. Poljuben $p \in \mathcal{V}$ je torej oblike

$$\begin{aligned} p(t) &= \gamma + (6\beta + 24\alpha)t + (-\tfrac{9}{2}\beta - 14\alpha)t^2 + \beta t^3 + \alpha t^4 \\ &= \alpha(t^4 - 14t^2 + 24t) + \beta(t^3 - \tfrac{9}{2}t^2 + 6t) + \gamma. \end{aligned}$$

Polinomi

$$g_1(t) = t^4 - 14t^2 + 24t, \quad g_2(t) = t^3 - \tfrac{9}{2}t^2 + 6t, \quad g_3(t) = 1$$

so linearno neodvisni in razpenjajo $\mathcal{V}$, torej sestavljajo bazo. Posledično je $\dim \mathcal{V} = 3$.

29. V prostoru $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ je podana množica

$$\mathcal{V} = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p(x-1) = p(x) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}\}.$$

Pokažite, da je $\mathcal{V}$ podprostor ter poiščite njegovo bazo in dimenzijo.

Odgovor: $\dim \mathcal{V} = 1$, baza (1)

Presek in vsota podprostorov

Če sta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ podprostora linearnega prostora $\mathcal{X}$, potem sta linearna podprostora tudi njun presek $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in njuna vsota $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, pri čemer je slednja definirana kot

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{u + v : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}.$$

Velja dimenzijska formula

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}).$$

30. V prostoru $\mathbb{R}^3$ sta dana podprostora

$$\mathcal{S} = \{(0,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{T} = \operatorname{Lin}\big\{(1,2,0),(3,1,2)\big\}.$$

Poiščite baze in dimenzije podprostorov $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}+\mathcal{T}$.

Rešitev:

Vektorja $(0,1,0)$ in $(0,0,1)$ nista vzporedna, torej sta linearno neodvisna, in razpenjata $\mathcal{S}$. Torej je (ena) baza $\mathcal{S}$ množica $\big((0,1,0),(0,0,1)\big)$ in $\dim\mathcal{S} = 2$. Podobno je dimenzija $\mathcal{T}$ enaka 2, ena baza pa $\big((1,2,0),(3,1,2)\big)$.

Vektorji iz $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ so natanko tiste linearne kombinacije $\alpha(1,2,0)+\beta(3,1,2)$, ki imajo v prvi koordinati 0, torej mora veljati $\alpha+3\beta = 0$. Poljuben element $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ je posledično oblike $-3\beta(1,2,0)+\beta(3,1,2) = \beta(0,-5,2)$, kar pomeni, da je $\big((0,-5,2)\big)$ baza za enodimenzionalen podprostor $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$.

Ker velja $\dim(\mathcal{S}+\mathcal{T}) = \dim\mathcal{S}+\dim\mathcal{T}-\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{T}) = 3$, je $\mathcal{S}+\mathcal{T} = \mathbb{R}^3$ in lahko za bazo vzamemo kar standardno bazo $\mathbb{R}^3$, torej $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$.

31. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana podprostora:

$$\mathcal{S} = \operatorname{Lin}\big\{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\big\},$$
$$\mathcal{T} = \operatorname{Lin}\big\{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\big\}.$$

Poiščite baze in dimenzije podprostorov $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}+\mathcal{T}$.

Odgovor:

- $\dim\mathcal{S} = \dim\mathcal{T} = 2$, za bazi lahko vzamemo kar vektorja, ki ju razpenjata,
- $\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{T}) = 1$, ena baza je $\big((2,3,1,1)\big)$,
- $\dim(\mathcal{S}+\mathcal{T}) = 3$, baza je npr. $\big((1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\big)$

32. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sta dana podprostora:

$$\mathcal{S} = \operatorname{Lin}\big\{1+x+x^2+x^3, 2+3x+x^2, 1-x+x^2-x^3\big\},$$
$$\mathcal{T} = \operatorname{Lin}\big\{1-x-x^2+x^3, 1-x, 3-x+x^2+x^3\big\}.$$

Poiščite baze in dimenzije podprostorov $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}+\mathcal{T}$.

Rešitev:

Najprej si oglejmo prvo množico. Naj bo

$$\alpha(1+x+x^2+x^3)+\beta(2+3x+x^2)+\gamma(1-x+x^2-x^3) = 0$$

oziroma

$$(\alpha-\gamma)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+3\beta-\gamma)x+(\alpha+2\beta+\gamma) = 0.$$

Primerjava koeficientov polinomov na levi in desni nam da sistem enačb

$$\begin{array}{rrcl} ① : & \alpha - \gamma & = & 0 \\ ② : & \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ ③ : & \alpha + 3\beta - \gamma & = & 0 \\ ④ : & \alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 \end{array}$$

Iz ① sledi $\alpha = \gamma$. Če to vstavimo v ③, dobimo $\beta = 0$. Posledično iz ② sledi še $\alpha = \gamma = 0$. Polinomi $1 + x + x^2 + x^3$, $2 + 3x + x^2$ in $1 - x + x^2 - x^3$ so tako linearno neodvisni in tvorijo bazo za $\mathcal{S}$, ki ima torej dimenzijo 3.

Na podoben način vidimo, da so $1 - x - x^2 + x^3$, $1 - x$ in $3 - x + x^2 + x^3$ linearno neodvisni in tako baza za $\mathcal{T}$.

Vzemimo poljuben polinom $p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Ker leži v obeh podprostorih, ga je mogoče zapisati kot linearno kombinacijo obeh baz. Torej obstajajo $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C \in \mathbb{R}$, tako da

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha(1 + x + x^2 + x^3) + \beta(2 + 3x + x^2) + \gamma(1 - x + x^2 - x^3) \\ &= A(1 - x - x^2 + x^3) + B(1 - x) + C(3 - x + x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Torej mora veljati

$$(\alpha + 2\beta + \gamma - A - B - 3C) + (\alpha + 3\beta - \gamma + A + B + C)x + \\ + (\alpha + \beta + \gamma + A - C)x^2 + (\alpha - \gamma - A - C)x^3 = 0.$$

Če primerjamo koeficiente, dobimo sistem

$$\begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta + \gamma - A - B - 3C & = & 0 \\ \alpha + 3\beta - \gamma + A + B + C & = & 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + A - C & = & 0 \\ \alpha - \gamma - A - C & = & 0 \end{array}$$

oziroma v matrični obliki

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Če zadnjo vrstico prestavimo na prvo mesto in jo odštejemo od vseh ostalih, dobimo

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zdaj zamenjamo drugo in četrto vrstico in nato odštejemo ustrezne večkratnike druge od tretje in četrte vrstice

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Na koncu še zamenjamo zadnji dve vrstici in odštejemo trikratnik tretje od četrte

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right].$$

Torej sta B in C poljubna, za A pa mora veljati $8A + 4B + 8C = 0$, oziroma $A = -\frac{1}{2}B - C$. Zato je poljuben vektor iz preseka oblike

$$\begin{aligned} p(x) &= A(1 - x - x^2 + x^3) + B(1 - x) + C(3 - x + x^2 + x^3) \\ &= (-\tfrac{1}{2}B - C)(1 - x - x^2 + x^3) + B(1 - x) + C(3 - x + x^2 + x^3) \\ &= B(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3) + C(2 + 2x^2). \end{aligned}$$

Ker sta B in C poljubna, je

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \operatorname{Lin}\{1 - x + x^2 - x^3, 1 + x^2\}.$$

Ta dva polinoma nista vzporedna, torej tvorita bazo za $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

Po dimenzijski formuli je

$$\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = \dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{T} - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Ker je $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, je $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Za bazo lahko vzamemo standardno bazo $\big(1, x, x^2, x^3\big)$.

33. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana podprostora:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \operatorname{Lin}\big\{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 1)\big\}, \\ \mathcal{T} &= \operatorname{Lin}\big\{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1), (0, 3, -1, 1)\big\}. \end{aligned}$$

Poiščite baze in dimenzije prostorov $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} + \mathcal{T}$.

Odgovor:

- $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{T} = 2$, za bazo lahko v obeh primerih vzamemo dva izmed navedenih vektorjev.
- $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ je enodimenzionalen podprostor, ki ga razpenja $(2, 3, 1, 1)$.
- Ena baza za $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ je $\big((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\big)$.

34. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana podprostora:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(a, b, c, d) : b + c + d = 0\}, \\ \mathcal{V} &= \{(a, b, c, d) : a + b = 0 \text{ in } c = 2d\}. \end{aligned}$$

Poiščite baze in dimenzije prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Odgovor:

- $\dim \mathcal{U} = 3$, za bazo lahko vzamemo $\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\big)$.

- $\dim \mathcal{V} = 2$, ena baza je $\big((1,-1,0,0),(0,0,2,1)\big)$.
- $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = 1$, razpenja ga vektor $(3,-3,2,1)$.
- $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 4$, torej lahko vzamemo standardno bazo.

35. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sta dana podprostora

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\} \quad \text{in} \quad \mathcal{V} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 0\}.$$

Določite baze in dimenzije podprostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Odgovor:

- $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V} = 3$, možni bazi sta $\big(t-1, t^2-t, t^3-t^2\big)$ in $\big(t-2, t^2-2t, t^3-2t^2\big)$.
- $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$, baza je na primer $\big(t^3 - 3t^2 + 2t, t^2 - 3t + 2\big)$.
- $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, torej lahko vzamemo standardno bazo.

Poglavje 2

Evklidski prostori

Evklidski prostori so linearni prostori, na katerih je definiran še skalarni produkt. Potem lahko govorimo o pravokotnosti, kotih, normi (dolžini), pravokotni projekciji...
Če je A poljubna podmnožica evklidskega prostora $\mathcal{X}$, je njen ortogonalni komplement definiran kot

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{X} : x \perp a \text{ za vsak } a \in A\}.$$

Ortogonalni komplement poljubne množice je podprostor.
Če je $\mathcal{V}$ podprostor $\mathcal{X}$, potem je

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}^\perp = \mathcal{X} \quad \text{in} \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\perp = \{0\}.$$

Iz dimenzijske formule sledi

$$\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{V}^\perp = \dim \mathcal{X}.$$

Če je $\{g_1, \ldots, g_m\}$ ortonormirana baza podprostora $\mathcal{V}$, potem za poljuben vektor $x \in \mathcal{X}$ dobimo njegovo pravokotno projekcijo na $\mathcal{V}$ po formuli

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{V}} x = \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i,$$

njegovo oddaljenost od $\mathcal{V}$ pa kot

$$d(x, \mathcal{V}) = \|x - \operatorname{proj}_{\mathcal{V}} x\|.$$

1. V prostoru $\mathbb{R}^4$ je dan podprostor $\mathcal{W} = \operatorname{Lin}\{(1,1,1,1), (1,2,4,5)\}$. Določite ortogonalni komplement $\mathcal{W}^\perp$ podprostora $\mathcal{W}$.

Rešitev:

V splošnem velja

$$v \perp \operatorname{Lin}\{v_1, \ldots, v_m\} \iff v \perp v_i \text{ za vsak } i = 1, \ldots, m.$$

Poljuben vektor $v = (x, y, z, w)$ je torej pravokoten na $\mathcal{W}$ natanko tedaj, ko je pravokoten na $(1,1,1,1)$ in $(1,2,4,5)$, ali drugače, ko izpolnjuje

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y + 4z + 5w &= 0 \end{aligned}$$

Gaußova metoda eliminacije se konča že po enem koraku:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

z in w sta poljubna, medtem ko sta

$$y = -3z - 4w \quad \text{in} \quad x = -y - z - w = 2z + 3w.$$

Elementi $\mathcal{W}^\perp$ so torej oblike

$$(2z + 3w, -3z - 4w, z, w) = z(2, -3, 1, 0) + w(3, -4, 0, 1).$$

Posledično eno bazo za $\mathcal{W}^\perp$ sestavljata $(2, -3, 1, 0)$ in $(3, -4, 0, 1)$. Dimenzija $\mathcal{W}^\perp$ je enaka 2, kar sledi tudi iz dimenzijske formule

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = 2 + \dim \mathcal{W}^\perp.$$

2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana vektorja $a_1 = (1, -2, 2, -3)$ in $a_2 = (2, -3, 2, 4)$. Poiščite vektorja a_3 in a_4, tako da vektorji a_1, a_2, a_3, a_4 tvorijo ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}^4$.

Rešitev:

Najprej opazimo, da je res $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$. Poljuben vektor $v = (x, y, z, w)$, ki je pravokoten na a_1 in a_2, zadošča enačbama

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - 3w &= 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

S pomočjo Gaußove metode eliminacije dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right].$$

Ker sta z in w poljubna, izberemo na primer $z = 1$ in $w = 0$. Potem sledi $x = y = 2$. Torej $a_3 = (2, 2, 1, 0)$. Zadnji vektor mora biti pa pravokoten še na a_3, torej mora dodatno veljati še

$$2x + 2y + z = 0.$$

Poiskati moramo eno neničelno rešitev sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - 3w &= 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4w &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Tokrat dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -54 & 0 \end{array}\right].$$

Izberemo $w = 1$. Potem sledi $z = 6$, $y = 2$ in nazadnje $x = -5$. Tako smo dobili še $a_4 = (-5, 2, 6, 1)$.

3. Določite ortonormirano bazo ravnine $x + 2y - z = 0$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Odgovor: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right)$

4. Določite ortonormirano bazo podprostora v $\mathbb{R}^4$, napetega na vektorje $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,4,5)$ in $v_3 = (-2,1,3,2)$.

Rešitev:

Uporabimo Gram-Schmidtov postopek. Ker je

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1\rangle = 1+1+1+1 = 4,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \tfrac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1\rangle = \langle (1,2,4,5), \tfrac{1}{2}(1,1,1,1)\rangle = 6$$

dobimo

$$\tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1\rangle g_1 = (1,2,4,5) - 6\cdot\tfrac{1}{2}(1,1,1,1) = (-2,-1,1,2).$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2\rangle = 4+1+1+4 = 10 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,2).$$

Nazadnje izračunamo še

$$\begin{aligned}\langle v_3, g_1\rangle &= \langle (-2,1,3,2), \tfrac{1}{2}(1,1,1,1)\rangle = 2\\ \langle v_3, g_2\rangle &= \langle (-2,1,3,2), \tfrac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,2)\rangle = \sqrt{10}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\tilde{g}_3 &= v_3 - \langle v_3, g_1\rangle g_1 - \langle v_3, g_2\rangle g_2\\ &= (-2,1,3,2) - 2\cdot\tfrac{1}{2}(1,1,1,1) - \sqrt{10}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,2)\\ &= (-1,1,1,-1)\end{aligned}$$

in dobimo zadnji bazni vektor

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \tfrac{1}{2}(-1,1,1,-1).$$

Ortonormirana baza je torej $\left(\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,2), \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)\right)$.

5. Poiščite ortonormirani bazi prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ glede na skalarna produkta

(a) $\langle p, q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$,

(b) $\langle p, q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{4} p(k)q(k)$

in izrazite v njiju polinom $p(x) = x^2$.

Rešitev:

Baza prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ je na primer standardna baza (p_0, p_1, p_2), pri čemer je $p_j(x) = x^j$.

Po Gram-Schmidtovem postopku je najprej

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0 \rangle = \int_0^1 1 \; dx = 1,$$

in

$$g_0 = \frac{p_0}{\|p_0\|} = p_0, \quad \text{oziroma} \quad g_0(x) = 1.$$

V naslednjem koraku imamo

$$\langle p_1, g_0 \rangle = \int_0^1 x \; dx = \tfrac{1}{2} \quad \text{in} \quad \tilde{g}_1 = p_1 - \langle p_1, g_0 \rangle g_0 = p_1 - \tfrac{1}{2} \cdot g_0.$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_1\|^2 = \int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})^2 \; dx = \tfrac{1}{12}$$

in

$$g_1 = \frac{\tilde{g}_1}{\|\tilde{g}_1\|} = \sqrt{12}(p_1 - \tfrac{1}{2} \cdot g_0) \quad \text{ali} \quad g_1(x) = 2\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{2}).$$

Za zadnji bazni element potrebujemo

$$\langle p_2, g_0 \rangle = \int_0^1 x^2 \; dx = \tfrac{1}{3} \quad \text{in} \quad \langle p_2, g_1 \rangle = \int_0^1 2\sqrt{3}x^2(x - \tfrac{1}{2}) \; dx = \tfrac{\sqrt{3}}{6}.$$

Potem je

$$\tilde{g}_2 = p_2 - \langle p_2, g_0 \rangle g_0 - \langle p_2, g_1 \rangle g_1 = p_2 - \tfrac{1}{3}p_0 - \tfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{3}(p_1 - \tfrac{1}{2} \cdot g_0) = p_2 - p_1 + \tfrac{1}{6}p_0$$

in

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{6})^2 \; dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{36}) \; dx = \tfrac{1}{180}.$$

Tako dobimo še

$$g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \sqrt{180}(p_2 - p_1 + \tfrac{1}{6}p_0) \quad \text{ali} \quad g_2(x) = 6\sqrt{5}(x^2 - x + \tfrac{1}{6}).$$

Ortonormirana baza je torej $\left(1, 2\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{2}), 6\sqrt{5}(x^2 - x + \tfrac{1}{6})\right)$.

Želimo še izraziti polinom $p(x) = x^2$ v tej bazi. Koeficienti pri razvoju po ortonormirani bazi so kar skalarni produkti z baznimi elementi, torej konkretno

$$p = \langle p, g_0 \rangle g_0 + \langle p, g_1 \rangle g_1 + \langle p, g_2 \rangle g_2.$$

Ker je $p = p_2$, opazimo, da smo

$$\langle p_2, g_0 \rangle = \tfrac{1}{3} \quad \text{in} \quad \langle p_2, g_1 \rangle = \tfrac{\sqrt{3}}{6}$$

izračunali že zgoraj. Zadnji koeficient je

$$\langle p_2, g_2\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 6\sqrt{5}(x^2 - x + \tfrac{1}{6})\, dx = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Druga možnost je, da direktno nastavimo

$$x^2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{2}) + \gamma \cdot 6\sqrt{5}(x^2 - x + \tfrac{1}{6})$$

in določimo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ker samo zadnji bazni element vsebuje x^2, mora biti $\gamma = \frac{1}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{30}$. Potem sledi še $\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ in $\alpha = \frac{1}{3}$.

Podobno dobimo pri drugem skalarnem produktu ortonormirano bazo

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}(x-2), \tfrac{1}{\sqrt{14}}\left(x^2 - 4x + 2\right)\right).$$

6. V prostoru $\mathbb{R}^4$ poiščite pravokotno projekcijo točke $A(4, -1, -3, 4)$ na podprostor $\mathrm{Lin}\{(1,1,1,1), (1,2,2,-1), (1,0,0,3)\}$ in razdaljo od točke A do tega podprostora.

Rešitev:

Najprej uporabimo Gram-Schmidtov postopek, da dobimo ortonormirano bazo podprostora $\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\{(1,1,1,1), (1,2,2,-1), (1,0,0,3)\}$. Kot v nalogi 4 je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \tfrac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Nadaljujemo z

$$\langle v_2, g_1\rangle = \langle (1,2,2,-1), \tfrac{1}{2}(1,1,1,1)\rangle = 2$$

in

$$\tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1\rangle g_1 = (1,2,2,-1) - 2 \cdot \tfrac{1}{2}(1,1,1,1) = (0,1,1,-2).$$

Tako dobimo

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2\rangle = 0 + 1 + 1 + 4 = 6 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2).$$

Nazadnje izračunamo še

$$\begin{aligned}\langle v_3, g_1\rangle &= \langle (1,0,0,3), \tfrac{1}{2}(1,1,1,1)\rangle = 2\\ \langle v_3, g_2\rangle &= \langle (1,0,0,3), \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2)\rangle = -\sqrt{6}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\tilde{g}_3 &= v_3 - \langle v_3, g_1\rangle g_1 - \langle v_3, g_2\rangle g_2\\ &= (1,0,0,3) - 2 \cdot \tfrac{1}{2}(1,1,1,1) - (-\sqrt{6}) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2)\\ &= (0,0,0,0).\end{aligned}$$

Če dobimo ničelni vektor, to pomeni, da prvotna množica vektorjev ni bila linearno neodvisna, konkretno $v_3 \in \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$.

Ortonormirana baza $\mathcal{V}$ je torej $\left(\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2)\right)$.

Sedaj lahko projiciramo krajevni vektor $r = (4,-1,-3,4)$ točke A na podprostor $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\mathcal{V}} r &= \langle r, g_1\rangle g_1 + \langle r, g_2\rangle g_2 \\
&= \langle (4,-1,-3,4), \tfrac{1}{2}(1,1,1,1)\rangle \tfrac{1}{2}(1,1,1,1) + \\
&\quad + \langle (4,-1,-3,4), \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2)\rangle \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2) \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}(1,1,1,1) + \tfrac{-12}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2) \\
&= (1,1,1,1) - 2(0,1,1,-2) \\
&= (1,-1,-1,5).
\end{aligned}$$

Razdalja do tega podprostora pa je dolžina

$$\begin{aligned}
d(r,\mathcal{V}) = \|r - \operatorname{proj}_{\mathcal{V}} r\| = \|(4,-1,-3,4) - (1,-1,-1,5)\| = \\
= \|(3,0,-2,-1)\| = \sqrt{9+0+4+1} = \sqrt{14}.
\end{aligned}$$

7. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dani točka $A(2,1,-3,4)$ in ravnina

$$\Sigma\colon \begin{array}{l} -x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{array}$$

Poiščite pravokotno projekcijo krajevnega vektorja točke A na ravnino Σ in razdaljo od točke A do ravnine Σ.

Odgovor: $\frac{1}{2}(-1,5,-1,5)$, $d = \sqrt{17}$

8. V prostoru $\mathcal{F}([-\pi,\pi])$ je dan skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Poiščite funkcijo $v \in \mathcal{V} = \operatorname{Lin}\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$, ki na intervalu $[-\pi,\pi]$ najbolje aproksimira funkcijo f ter določite razdaljo od f do $\mathcal{V}$, če je

(a) $f(x) = x$.

(b) $f(x) = \sin^3 x$.

Rešitev:

Z Gram-Schmidtovim postopkom dobimo iz $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$ ortonormirano bazo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\right)$. Funkcijo f najbolje aproksimira njena pravokotna projekcija na $\mathcal{V}$.

(a) Z upoštevanjem lihosti dobimo brez računanja za $k = 0,1,2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(kx)\,dx = 0.$$

Velja tudi

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin x \; dx = [-x\cos x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \; dx = 2\pi$$

in podobno

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin 2x \; dx = \left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \; dx = -\pi.$$

Torej je $(\mathrm{proj}_{\mathcal{V}} f)(x) = \langle f, \sin x\rangle \sin x + \langle f, \sin 2x\rangle \sin 2x = 2\sin x - \sin 2x$. Razdalja med f in $\mathcal{V}$ pa je določena z

$$\|f - \mathrm{proj}_{\mathcal{V}} f\|^2 = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x - 2\sin x + \sin 2x)^2 \; dx = \tfrac{2}{3}\pi^2 - 5.$$

Tako je $d(f, \mathcal{V}) = \sqrt{\tfrac{2}{3}\pi^2 - 5}$.

(b) V tem primeru je edini neničelni skalarni produkt tisti s sin, in sicer velja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cdot \sin x \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \; dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Torej $(\mathrm{proj}_{\mathcal{V}} f)(x) = \langle f, \sin x\rangle \sin x = \tfrac{3}{4}\sin x$. Posledično je

$$d(f, \mathcal{V}) = \|f - \mathrm{proj}_{\mathcal{V}} f\| = \left(\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x - \tfrac{3}{4}\sin x)^2 \; dx\right)^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

9. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \; dx.$$

Poiščite polinom druge stopnje, ki na intervalu $[0, 1]$ najbolje aproksimira polinom $r(x) = x^3 - 1$.

Rešitev:

V nalogi 2.5 (a) smo ugotovili, da je eno ortonormirano bazo $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sestavljajo funkcije

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = 2\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{2}) \quad \text{in} \quad g_2(x) = 6\sqrt{5}(x^2 - x + \tfrac{1}{6}).$$

Z upoštevanjem

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^3 - 1) \cdot 1 \; dx &= -\frac{3}{4} \\
\int_0^1 (x^3 - 1) \cdot 2\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{2}) \; dx &= \frac{3\sqrt{3}}{20} \\
\int_0^1 (x^3 - 1) \cdot 6\sqrt{5}(x^2 - x + \tfrac{1}{6}) \; dx &= \frac{1}{4\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

dobimo

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} f = \sum_{i=0}^{2} \langle f, g_i \rangle g_i = -\frac{3}{4} g_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20} g_1 + \frac{1}{4\sqrt{5}} g_2$$

oziroma

$$(\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} f)(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{19}{20}.$$

10. Podprostor $\mathcal{V}$ prostora $\mathbb{R}^4$ je določen s sistemom enačb:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Poiščite sistem enačb, ki določa ortogonalni komplement $\mathcal{V}^\perp$.

Rešitev:

Najprej določimo podprostor $\mathcal{V}$, in sicer z Gaußovo metodo. Na začetku odštejemo prvo vrstico od tretje in ju zatem zamenjamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots$$

Nadaljujemo z odštevanjem večkratnikov prve vrstice od druge in tretje, zamenjavo slednjih dveh in ustreznim odštevanjem:

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sledi $x_2 = x_4$ in $x_1 = x_3 = 0$. Torej je $\mathcal{V} = \operatorname{Lin}\{(0, 1, 0, 1)\}$, zato je $\mathcal{V}^\perp$ podprostor vseh vektorjev, ki ustrezajo $x_2 + x_4 = 0$.

Poglavje 3

Linearne preslikave

Preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ med linearnima prostoroma $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ je linearna, če velja

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v \quad \text{in} \quad \mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}u$$

za vse $u, v \in \mathcal{X}$ in vse $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ničelni prostor (jedro) preslikave $\mathcal{A}$ je

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \ker \mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{A}x = 0\} \subseteq \mathcal{X}.$$

Slika (zaloga vrednosti) preslikave $\mathcal{A}$ je

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \operatorname{im} \mathcal{A} = \{\mathcal{A}x : x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{Y}.$$

Obe množici sta podprostora v ustreznem prostoru. Velja dimenzijska formula

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{X}.$$

1. Ugotovite, katere izmed spodnjih preslikav so linearne.

(a) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x, y, z) = (x, y, x + z)$.

(b) $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}(x, y) = (x + 1, y + 1)$.

Rešitev:

(a) Vzemimo poljubna vektorja $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ iz $\mathbb{R}^3$ in poljubna skalarja $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\big(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\big) &= \mathcal{A}\big(\lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2)\big) \\
&= \mathcal{A}\big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\big) \\
&= \big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\big)
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \mathcal{A}v_1 + \lambda_2 \mathcal{A}v_2 &= \lambda_1 \mathcal{A}(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(x_2, y_2, z_2) \\
&= \lambda_1(x_1, y_1, x_1 + z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, x_2 + z_2) \\
&= \big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\big),
\end{aligned}$$

torej

$$\mathcal{A}\big(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\big) = \lambda_1 \mathcal{A} v_1 + \lambda_2 \mathcal{A} v_2.$$

Preslikava $\mathcal{A}$ je torej linearna.

(b) Preslikava $\mathcal{B}$ ni linearna, saj vsaka linearna preslikava preslika ničelni element v ničelnega, tu pa je $\mathcal{B}(0,0) = (1,1)$.

2. Naj bo $\mathcal{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ preslikava, definirana s predpisom

$$\mathcal{F}(x,y,z,w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w).$$

(a) Pokažite, da je preslikava $\mathcal{F}$ linearna.

(b) Zapišite matriko preslikave $\mathcal{F}$ v standardnih bazah.

(c) Poiščite bazi in dimenziji ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{F}$.

(d) Ali je preslikava $\mathcal{F}$ bijektivna?

Rešitev:

(a) To spet preverimo kot v nalogi 3.1.

(b) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(1,0,0,0) &= (1,1,1),\\
\mathcal{F}(0,1,0,0) &= (-1,0,1),\\
\mathcal{F}(0,0,1,0) &= (1,2,3),\\
\mathcal{F}(0,0,0,1) &= (1,-1,-3),
\end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{F}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

(c) Zalogo vrednosti razpenjajo slike baznih elementov, torej je

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathrm{Lin}\{(1,1,1), (-1,0,1), (1,2,3), (1,-1,-3)\}.$$

Prva dva vektorja nista vzporedna, torej sta linearno neodvisna. Ker je

$$(1,2,3) = 2(1,1,1) + (-1,0,1) \quad \text{in} \quad (1,-1,-3) = -(1,1,1) - 2(-1,0,1),$$

ima zaloga vrednosti dimenzijo 2 in $\big((1,1,1),(-1,0,1)\big)$ je njena baza.
Tako smo tudi že ugotovili, da preslikava $\mathcal{F}$ ni surjektivna, saj je $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \subsetneq \mathbb{R}^3$.
Iz $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{F})$ sledi, da ima ničelni prostor dimenzijo 2. Iz tega sledi, da $\mathcal{F}$ tudi ni injektivna, saj $\{(0,0,0)\} \neq \mathcal{N}(\mathcal{F})$. Najti moramo bazo prostora rešitev

$$\mathcal{F}(x,y,z,w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w) = (0,0,0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker sta z in w poljubna, lahko izberemo za bazo npr. $\big((1,2,0,1),(-2,-1,1,0)\big)$.

(d) Linearna preslikava med prostoroma različnih dimenzij v splošnem ne more biti bijektivna. Videli smo, da $\mathcal{F}$ ni ne injektivna ne surjektivna.

3. Linearna preslikava $\mathcal{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je dana s predpisom $\mathcal{F}(x,y,z)=(x+y,y,x-z)$. Pokažite, da je bijektivna, in poiščite njen inverz. Poiščite tudi kak vektor v, za kateri velja $\mathcal{F}(v)=(1,2,-1)$.

Rešitev:

Ker sta dimenziji štartnega in ciljnega prostora enaki, je za bijektivnost dovolj, če pokažemo injektivnost. Določimo torej ničelni prostor.

Če je $\mathcal{F}(x,y,z)=(x+y,y,x-z)=(0,0,0)$, sledi iz druge koordinate $y=0$, nato iz prve $x=0$ in na koncu iz tretje še $z=0$. Torej je $\mathcal{N}(\mathcal{F})=\{(0,0,0)\}$, kar pomeni, da je $\mathcal{F}$ res injektivna.

Za inverz nastavimo

$$\mathcal{F}(x,y,z)=(x+y,y,x-z)=(a,b,c)$$

in izrazimo x,y,z z a,b,c. Spet najprej iz druge koordinate dobimo $y=b$, iz prve $x=a-b$ in nazadnje še $z=a-b-c$. Torej je

$$\mathcal{F}^{-1}(a,b,c)=(a-b,b,a-b-c).$$

Vektor v je enolično določen, in sicer je

$$v=\mathcal{F}^{-1}(1,2,-1)=(-1,2,0).$$

4. Linearna preslikava $\mathcal{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{F}(x,y,z)=(2x+z,x-4y,3x).$$

Pokažite, da je bijektivna, in poiščite njen inverz. Poiščite tudi tak vektor v, za katerega velja $\mathcal{F}(v)=(1,2,3)$.

Odgovor: $\mathcal{F}^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{z}{3},\frac{-3y+z}{12},\frac{3x-2z}{3}\right)$, $\mathcal{F}(1,-\frac{1}{4},-1)=(1,2,3)$.

5. Naj bo $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ dan neničelen vektor. Preslikavi $\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definiramo s predpisoma:

$$\mathcal{A}x=(x\cdot a)a \quad \text{in} \quad \mathcal{B}x=x\times a.$$

(a) Preverite, da sta dani preslikavi linearni. Ali sta bijektivni?

(b) Zapišite matriki preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

(c) Za $a = (1, 0, 2)$ določite ničelni prostor in zalogo vrednosti preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Rešitev:

(a) Linearnost sledi iz lastnosti skalarnega in vektorskega produkta. Preslikavi nista bijektivni. Vse slike preslikave $\mathcal{A}$ imajo smer vektorja a, torej je $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \text{Lin}\{a\}$ enodimenzionalen. Po drugi strani je pa $\mathcal{B}(a) = a \times a = 0$, torej je $\text{Lin}\{a\} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{B})$.

(b) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1,0,0) &= a_1(a_1, a_2, a_3),\\
\mathcal{A}(0,1,0) &= a_2(a_1, a_2, a_3),\\
\mathcal{A}(0,0,1) &= a_3(a_1, a_2, a_3),
\end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(1,0,0) &= (0, -a_3, a_2),\\
\mathcal{B}(0,1,0) &= (a_3, 0, -a_1),\\
\mathcal{B}(0,0,1) &= (-a_2, a_1, 0)
\end{aligned}$$

sledi

$$[\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Za $a = (1, 0, 2)$ imamo

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako so

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \text{Lin}\{(-2,0,1),(0,1,0)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \text{Lin}\{(1,0,2)\},$$

ter

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \text{Lin}\{(1,0,2)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{B}) = \text{Lin}\{(-2,0,1),(0,1,0)\}.$$

6. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}x = (x \cdot a)a + x \times a - 2x,$$

pri čemer je $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ dan neničelen vektor.

(a) Preverite, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in zapišite njeno matriko v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

(b) Za $a = (1, 0, 1)$ določite ničelni prostor in zalogo vrednosti preslikave $\mathcal{A}$.

Odgovor: Matrika v standardni bazi je $[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} a_1^2-2 & a_1a_2+a_3 & a_1a_3-a_2 \\ a_1a_2-a_3 & a_2^2-2 & a_2a_3+a_1 \\ a_1a_3+a_2 & a_2a_3-a_1 & a_3^2-2 \end{bmatrix}$, podprostora pa $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lin}\{(1, 0, 1)\}$, $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lin}\{(-1, -1, 1), (1, -2, -1)\}$

7. Linearni preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sta podani s predpisoma

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 0, 0),$$
$$\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1).$$

(a) Zapišite matriki preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v standardni bazi.

(b) Poiščite ničelni prostor in zalogo vrednosti preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ in ugotovite, ali sta injektivni, surjektivni, bijektivni.

(c) Določite matrike (v standardni bazi) in predpise preslikav $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

(d) Naj bo $\mathcal{C} = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{A}$. Določite matriko preslikave $\mathcal{C}$ ter $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ in $\mathcal{N}(\mathcal{C})$.

(e) Obstajata taka vektorja $x, y \in \mathbb{R}^3$, da je $\mathcal{C}x = (2, 0, 2)$ in $\mathcal{C}y = (-1, 0, 1)$?

Rešitev:

(a) Stolpce matrike dobimo kot slike baznih vektorjev. Tako je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Iz matrik razberemo

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lin}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lin}\{(1, 0, 0)\}$$

ter

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \{(0, 0, 0)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{R}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^3.$$

$\mathcal{A}$ ni ne surjektivna ne injektivna, $\mathcal{B}$ pa je bijektivna.

(c) Po definiciji je

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x_1, x_2, x_3) &= \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3)\big) \\
&= \mathcal{A}(x_2, x_3, x_1) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, 0, 0) \\
(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x_1, x_2, x_3) &= \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3)\big) \\
&= \mathcal{B}(x_1 + x_2 + x_3, 0, 0) \\
&= (0, 0, x_1 + x_2 + x_3) \\
(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_1, x_2, x_3) &= \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, 0, 0) + (x_2, x_3, x_1) \\
&= (x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, x_1)
\end{aligned}$$

Torej je

$$[\mathcal{A}\circ\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ [\mathcal{B}\circ\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } [\mathcal{A}+\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Druga pot do teh rezutatov je, da upoštevamo

$$[\mathcal{A}\circ\mathcal{B}] = [\mathcal{A}][\mathcal{B}], \quad [\mathcal{B}\circ\mathcal{A}] = [\mathcal{B}][\mathcal{A}] \quad \text{in} \quad [\mathcal{A}+\mathcal{B}] = [\mathcal{A}]+[\mathcal{B}].$$

(d) Dobimo

$$[\mathcal{C}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}) = \mathrm{Lin}\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}, \quad \mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathrm{Lin}\{(1,0,1)\}.$$

(e) Naloga nas sprašuje, ali sta $(2,0,2)$ in $(-1,0,1)$ v sliki preslikave $\mathcal{C}$. Zgoraj smo ugotovili, da so v sliki natanko večkratniki vektorja $(1,0,1)$. Torej tak x obstaja (npr. $\mathcal{C}(2,0,0) = (2,0,2)$), tak y pa ne.

8. Naj bo

$$\mathcal{A} : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{A}(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} X.$$

(a) Preverite, da je preslikava $\mathcal{A}$ linearna ter določite njeno matriko v standardni bazi prostora $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Določite dimenziji in bazi ničelnega prostora ter zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$.

Odgovor: $[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 2&0&2&0 \\ 0&2&0&2 \end{bmatrix}, \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lin}\left\{\begin{bmatrix} 1&0 \\ 2&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1 \\ 0&2 \end{bmatrix}\right\}, \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lin}\left\{\begin{bmatrix} 1&0 \\ -1&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1 \\ 0&-1 \end{bmatrix}\right\}$

9. Preslikavi $\mathcal{A},\mathcal{B} : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sta podani s predpisoma

$$\mathcal{A}(X) = \mathrm{sled}(X) \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(X) = \det X,$$

kjer je $\mathrm{sled}(X)$ sled matrike X in $\det X$ determinanta matrike X.

(a) Za vsako od preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ določite, ali je injektivna, surjektivna, bijektivna.

(b) Za vsako od preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ugotovite, ali je linearna. V primeru, ko je preslikava linearna, poiščite bazo in dimenzijo njenega ničelnega prostora in zapišite njeno matriko v standardnih bazah.

Rešitev:

(a) Preslikava $\mathcal{A}$ ni injektivna, saj je

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

je pa surjektivna, saj za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ obstaja neka matrika, katere slike je α, na primer

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \alpha.$$

Podobno $\mathcal{B}$ ni injektivna, velja denimo

$$\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

in je surjektivna, saj je za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \alpha.$$

(b) Preslikava $\mathcal{A}$ je linearna, česar ni težko preveriti po definiciji. Preslikava $\mathcal{B}$ pa ni linearna, saj je na primer

$$\mathcal{B}\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4 \neq 2 = 2\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Določimo torej $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Vemo, da je ničelni prostor trirazsežen, saj je dimenzija zaloge vrednosti 1, začetni prostor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ pa je štirirazsežen. Potrebujemo torej tri linearno neodvisne matrike iz ničelnega prostora. Ker velja

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 \iff a + d = 0,$$

je ena možna baza

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Matrika preslikave pa je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. V prostoru $\mathbb{R}^2$ imejmo bazo $\mathbf{B} = \big((1,1), (-1,1)\big)$ in standardno bazo $\mathbf{S}$.

(a) Zapišite prehodno matriko $P_{\mathbf{BS}}$ iz baze $\mathbf{B}$ v standardno bazo in prehodno matriko $P_{\mathbf{SB}}$.

(b) Določite koordinate vektorja $a = (4,3)$ v bazi $\mathbf{B}$.

Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna preslikava, za katero vemo, da je $\mathcal{A}(1,1) = (1,-2)$ in $\mathcal{A}(-1,1) = (2,3)$.

(c) Zapišite matriko $[\mathcal{A}]_{\mathbf{BS}}$ preslikave $\mathcal{A}$ glede na bazo $\mathbf{B}$ in standardno bazo $\mathbf{S}$.

(d) Določite matriko $[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}$ preslikave $\mathcal{A}$ v standardni bazi.

(e) Koliko je $\mathcal{A}(-1,5)$? Določite splošen predpis $\mathcal{A}(x,y)$.

Rešitev:

Prehodna matrika med dvema bazama, na primer $\mathbf{E}$ in $\mathbf{E}'$, je matrika identične preslikave v teh dveh bazah, torej

$$P_{\mathbf{EE}'} = [\mathrm{id}]_{\mathbf{EE}'}.$$

To pomeni, da so v i-tem stolpcu te matrike koeficienti i-tega baznega vektorja iz $\mathbf{E}$ pri razvoju v bazi $\mathbf{E}'$. Zapisi vektorjev in matrik v različnih bazah so zato povezani takole:

$$[v]_{\mathbf{E}'} = P_{\mathbf{EE}'}[v]_{\mathbf{E}} \quad \text{in} \quad [\mathcal{A}]_{\mathbf{E}'\mathbf{F}'} = P_{\mathbf{FF}'}[\mathcal{A}]_{\mathbf{EF}}P_{\mathbf{E}'\mathbf{E}}.$$

(a) V prehodni matriki med $\mathbf{B}$ in standardno bazo $\mathbf{S}$ so stolpci elementi baze $\mathbf{B}$, razviti v standarsni bazi:

$$P_{\mathbf{BS}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje velja

$$P_{\mathbf{SB}} = (P_{\mathbf{BS}})^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Po zgornji formuli je

$$[a]_{\mathbf{B}} = P_{\mathbf{SB}}[a]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(c) Glede na to, da sta podani ravno sliki elementov baze $\mathbf{B}$ v standardni bazi, je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{BS}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(d) Ker že poznamo $[\mathcal{A}]_{\mathbf{BS}}$, lahko uporabimo formulo za spremembo baz ter dobimo

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = [\mathcal{A}]_{\mathbf{BS}}P_{\mathbf{SB}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(e) Splošen predpis takoj dobimo iz $[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}$, saj je

$$[\mathcal{A}(x,y)]_{\mathbf{S}} = [\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}[(x,y)]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \\ -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}.$$

Torej je $\mathcal{A}(x,y) = \frac{1}{2}(3y - x, y - 5x)$ in $\mathcal{A}(-1,5) = (8,5)$.

11. Preslikava $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ je podana s predpisom $(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$.

(a) Pokažite, da je preslikava $\mathcal{A}$ linearna.

(b) Poiščite bazo ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Ali je preslikava $\mathcal{A}$ injektivna ali surjektivna?

(c) Poiščite matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardni bazi $\mathbf{S} = (1, x, x^2, x^3)$ prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(d) Poiščite prehodno matriko $P_{\mathbf{BS}}$ iz baze $\mathbf{B} = (x^2, x^3 - x, x, x+1)$ v standardno bazo prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(e) Polinom $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ zapišite kot linearno kombinacijo polinomov iz baze $\mathbf{B}$. Nalogo rešite na dva načina: z uporabo prehodne matrike in direktno.

(f) Poiščite matriko $[\mathcal{A}]_{\mathbf{BB}}$ preslikave $\mathcal{A}$ v bazi $\mathbf{B}$.

Rešitev:

Linearnost sledi iz definicije operacij v prostoru polinomov. Za poljubna $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda p + \mu q)(x) &= (\lambda p + \mu q)(x+1) - (\lambda p + \mu q)(x) \\
&= \big(\lambda p(x+1) + \mu q(x+1)\big) - \big(\lambda p(x) + \mu q(x)\big) \\
&= \lambda\big(p(x+1) - p(x)\big) + \mu\big(q(x+1) - q(x)\big) \\
&= \lambda \mathcal{A}(p)(x) + \mu \mathcal{A}(q)(x).
\end{aligned}$$

Zaradi jasnosti pišimo bazne elemente kot $p_j(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2, 3$. Naprej poiščimo matriko preslikave v standardni bazi. Iz

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(p_0)(x) = p_0(x+1) - p_0(x) = 1 - 1 = 0, \\
&\mathcal{A}(p_1)(x) = p_1(x+1) - p_1(x) = (x+1) - x = 1, \\
&\mathcal{A}(p_2)(x) = p_2(x+1) - p_2(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \\
&\mathcal{A}(p_3)(x) = p_3(x+1) - p_3(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1
\end{aligned}$$

sledi

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za določitev ničelnega prostora uporabimo to matriko, saj velja

$$\mathcal{A}p = 0 \iff [\mathcal{A}p]_{\mathbf{S}} = [\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}[p]_{\mathbf{S}} = [0]_{\mathbf{S}}.$$

Matrika je že v stopničasti obliki, tako da razberemo

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}[p]_{\mathbf{S}} = [0]_{\mathbf{S}} \iff [p]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{za neki } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Torej je $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lin}\{1\}$ (in konstanta 1 je baza tega enorazsežnega podprostora). Med drugim to pomeni, da preslikava ni injektivna in, ker slika med enako razsežnima prostoroma, tudi ne surjektivna.

Podobno lahko iz matrike razberemo tudi zalogo vrednosti. Zalogo vrednosti razpenjajo stolpci in zato je

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Baza je na primer $(1, x, x^2)$.

Za prehodno matriko iz baze **B** v standardno bazo moramo zapisati ustrezne koeficiente v stolpce, torej

$$P_{\mathbf{BS}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo te matrike dobimo

$$[p]_{\mathbf{B}} = P_{\mathbf{SB}}[p]_{\mathbf{S}} = (P_{\mathbf{BS}})^{-1}[p]_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$p(x) = (-2) \cdot x^2 + 1 \cdot (x^3 - x) + 3 \cdot x + (-1) \cdot (x + 1).$$

(Če odpravimo oklepaje, vidimo, da smo dobili prave koeficiente. Direktno bi te koeficiente dobili, če bi zapisali p kot poljubno linearno kombinacijo elementov baze **B** in bi primerjali koeficiente.)

Nazadnje je še

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{BB}} = P_{\mathbf{SB}}[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}}P_{\mathbf{BS}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Linearna preslikava $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{F}(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + y + z, 5x - y + z).$$

Podana je tudi baza $\mathbf{B} = \big((1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, -1, 1)\big)$ prostora $\mathbb{R}^3$.

(a) Poiščite matriko preslikave $\mathcal{F}$ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

(b) Poiščite prehodni matriki $P_{\mathbf{SB}}$ in $P_{\mathbf{BS}}$.

(c) Izračunajte koordinate vektorja $(3, 4, 5)$ v bazi **B**.

(d) Poiščite matriko preslikave $\mathcal{F}$ v bazi **B**.

Odgovor: $[\mathcal{F}]_{\mathbf{SS}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $P_{\mathbf{SB}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $P_{\mathbf{BS}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $[(3, 4, 5)]_{\mathbf{B}} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 12 \\ 8 \end{smallmatrix}\right]$, $[\mathcal{F}]_{\mathbf{BB}} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 9 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right]$

Poglavje 4

Numerična linearna algebra

LU-razcep

LU-razcep brez pivotiranja dane kvadratne matrike A je zapis matrike v obliki produkta $A = LU$, pri čemer je L spodnjetrikotna z enicami po diagonali, U pa zgornjetrikotna. V bistvu gre za „opis“ Gaußovem metode eliminacije brez menjavanja vrstic. Ta razcep obstaja in je enoličen, če so vse glavne podmatrike matrike A obrnljive.

Pri LU-razcepu z delnim pivotiranjem pa na vsakem koraku poskrbimo, da je na diagonali po absolutni vrednosti največje število v stolpcu. V tem primeru dobimo še permutacijsko matriko P, tako da je $PA = LU$. Tak razcep obstaja za vse obrnljive matrike, postopek pa je numerično stabilnejši.

LU-razcep se uporablja za reševanje sistemov enačb $Ax = b$. Velja namreč

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb.$$

Tako najprej določimo y, ki reši trikotni sistem $Ly = Pb$, nato pa poiščemo x kot rešitev trikotnega sistema $Ux = y$.

1. Poiščite LU-razcep brez pivotiranja matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Rešitev:

Da v prvem stolpcu pod diagonalo dobimo ničle, moramo od druge vrstice odšteti (-3)-kratnik prve, od tretje pa 2-kratnik prve. Tako je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ -3 & * & * \\ 2 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pododbno moramo sedaj odšteti od tretje še $(-\frac{3}{2})$-kratnik druge. Zato

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ -3 & 1 & * \\ 2 & -\frac{3}{2} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Tako je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Rešite sistem $Ax = b$ s pomočjo LU-razcepa brez pivotiranja, pri čemer sta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

V prvem koraku imamo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ -3 & * & * \\ 2 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Še drugi korak

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ -3 & 1 & * \\ 2 & 3 & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tako je

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Najprej rešimo $Ly = b$, torej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Od zgoraj navzdol sledi

$$y_1 = -11, \quad -3y_1 + y_2 = 38 \;\Rightarrow\; y_2 = 5, \quad 2y_1 + 3y_2 + y_3 = -16 \;\Rightarrow\; y_3 = -9.$$

Sedaj pa še $Ux = y$, oziroma

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Sedaj pa od spodaj navzgor dobimo

$$x_3 = 3, \quad -2x_2 + x_3 = 5 \;\Rightarrow\; x_2 = -1, \quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -11 \;\Rightarrow\; x_1 = 2.$$

Torej $x = [2, -1, 3]^\top$.

3. Rešite linearni sistem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 10 \\ x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 13 \end{aligned}$$

s pomočjo LU-razcepa brez pivotiranja in z delnim pivotiranjem.

Rešitev:

Imamo torej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Z delnim pivotiranjem gre takole:

V prvem koraku moramo zamenjati prvi dve vrstici. Tako imamo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Potem

$$L = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{2} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix}.$$

Zdaj zamenjamo drugo in tretjo vrstico. Zato je

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \frac{1}{2} & * & * \\ \frac{1}{2} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Nato dobimo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ \frac{1}{2} & 1 & * \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{13} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{7}{13} \end{bmatrix}.$$

Torej so

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{13} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{7}{13} \end{bmatrix}$$

in velja $PA = LU$.

Zdaj pa še $Ax = b$. Najprej izračunamo

$$b' = Pb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Potem rešimo spodnjetrikoten sistem $Ly = b'$ in dobimo

$$Ly = b' \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ y = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ -\frac{21}{13} \end{bmatrix}.$$

Nazadnje iz zgornjetrikotnega sistema $Ux = y$ dobimo rešitev

$$Ux = y \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{7}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ -\frac{21}{13} \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ x = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

4. Z LU-razcepom z delnim pivotiranjem poišči permutacijsko matriko P in trikotni matriki L in U, da bo $PA = LU$, ter reši sistem $Ax = b$, če sta

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & -6 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} -33 \\ 11 \\ 20 \\ 42 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 60 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Rešitev:

V prvem koraku moramo zamenjati prvo in zadnjo vrstico. Tako imamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & -6 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & -6 & 5 \\ -3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Potem

$$L = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ \frac{1}{2} & * & * & * \\ \frac{1}{3} & * & * & * \\ -\frac{1}{2} & * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & -6 & 5 \\ -3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zdaj zamenjamo drugo in tretjo vrstico. Zato je

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ \frac{1}{3} & * & * & * \\ \frac{1}{2} & * & * & * \\ -\frac{1}{2} & * & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako dobimo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ \frac{1}{3} & 1 & * & * \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & * & * \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Zdaj ni potrebna menjava, tako da ostaneta P in L enaka. Nato dobimo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & * \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 1 & * \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Torej so

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

in velja $PA = LU$.

Zdaj pa še $Ax = b$. Najprej je $b' = Pb = [42, 20, 11, -33]^\top$. Potem rešimo $Ly = b'$ in dobimo $y = [42, 6, -6, -12]^\top$. Nazadnje še iz $Ux = y$ dobimo $x = [1, 2, 3, 4]^\top$.

Podobno dobimo pri (b):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & -8 \\ 0 & 5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -13 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Iterativna metoda za reševanje linearnih sistemov

Sistem $Ax = b$ lahko rešujemo tudi iterativno. To pomeni, da po nekem algoritmu računamo približke, dokler ne dosežemo zaželjene natančnosti. Če zapišemo A kot vsoto

$$A = M + K, \quad M \text{ obrnljiva},$$

potem

$$Ax = b \iff (M + K)x = b \iff Mx = -Kx + b \iff x = -M^{-1}Kx + M^{-1}b.$$

Torej je

$$x = Rx + d, \quad \text{pri čemer sta } R = -M^{-1}K \text{ in } d = M^{-1}b.$$

To nam dá predpis za zaporedje približkov

$$x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + d.$$

Razcepimo matriko A kot $A = L + D + U$, kjer je L del matrike A pod diagonalo, D njena diagonala in U pa del matrike nad diagonalo. Uporabljali bomo dve iterativni metodi:

- **Jacobijeva metoda:** Tu je $M = D$ in $K = L + U$. Tako sta $R_J = -D^{-1}(L + U)$ in $d_J = D^{-1}b$.

- **Gauß-Seidlova metoda:** V tem primeru vzamemo $M = L + D$ in $K = U$. Posledično sta $R_{GS} = -(L + D)^{-1}U$ in $d_{GS} = (L + D)^{-1}b$, Obe metodi konvergirata proti rešitvi, če je A strogo diagonalno dominantna po vrsticah, to je, če je v vsaki vrstici absolutna vrednost diagonalnega elementa strogo večja od vsote absolutnih vrednosti ostalih elementov v vrstici. Pri tem Gauß-Seidlova metoda konvergira hitreje.

5. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(a) Pokažite, da za dani sistem Jacobijeva in Gauß-Seidlova metoda iteracije konvergirata.

(b) Izračunajte prve tri približke po obeh metodah pri začetnem vektorju $x^{(0)} = [0,0,0]^\top$ ter pravo rešitev sistema.

Rešitev:

(a) Pripadajoča matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

je strogo diagonalno dominantna po vrsticah, zato obe iteraciji konvergirata.

(b) Oba predpisa dobimo enostavneje, če ne računamo ustreznih R in d, ampak iz i-te enačbe izrazimo i-to neznanko:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(-x_3 + 1) \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(x_3 + 2) \\ x_3 &= \tfrac{1}{4}(-x_1 + x_2 - 1) \end{aligned}$$

Nato pri Jacobijevi metodi v celotnem koraku uporabljamo prejšnji približek, pri Gauß-Siedlovi pa vedno uporabimo zadnji že izračunani približek:

Jacobijeva metoda:

$$\begin{aligned} x_1^{(r+1)} &= \tfrac{1}{2}(-x_3^{(r)} + 1) \\ x_2^{(r+1)} &= \tfrac{1}{2}(x_3^{(r)} + 2) \\ x_3^{(r+1)} &= \tfrac{1}{4}(-x_1^{(r)} + x_2^{(r)} - 1) \end{aligned}$$

Gauß-Seidlova metoda:

$$\begin{aligned} x_1^{(r+1)} &= \tfrac{1}{2}(-x_3^{(r)} + 1) \\ x_2^{(r+1)} &= \tfrac{1}{2}(x_3^{(r)} + 2) \\ x_3^{(r+1)} &= \tfrac{1}{4}(-x_1^{(r+1)} + x_2^{(r+1)} - 1) \end{aligned}$$

Prvi trije približki po Jacobijevi metodi so tako

$$\begin{array}{lll} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(-0+1) = \frac{1}{2} & x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(-(-\frac{1}{4})+1) = \frac{5}{8} & x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(-(-\frac{1}{8})+1) = \frac{9}{16} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(0+2) = 1 & x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4}+2) = \frac{7}{8} & x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{8}+2) = \frac{15}{16} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(-0+0-1) = -\frac{1}{4} & x_3^{(2)} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}+1-1) = -\frac{1}{8} & x_3^{(3)} = \frac{1}{4}(-\frac{5}{8}+\frac{7}{8}-1) = -\frac{3}{16} \end{array}$$

po Gauß-Seidlovi metodi pa

$$\begin{array}{lll} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(-0+1) = \frac{1}{2} & x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(-(-\frac{1}{8})+1) = \frac{9}{16} & x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(-(-\frac{5}{32})+1) = \frac{37}{64} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(0+2) = 1 & x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{8}+2) = \frac{15}{16} & x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(-\frac{5}{32}+2) = \frac{59}{64} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}+1-1) = -\frac{1}{8} & x_3^{(2)} = \frac{1}{4}(-\frac{9}{16}+\frac{15}{16}-1) = -\frac{5}{32} & x_3^{(3)} = \frac{1}{4}(-\frac{37}{64}+\frac{59}{64}-1) = -\frac{21}{128} \end{array}$$

Primerjava:

- Točna rešitev je $\begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{11}{12} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.583333 \\ 0.916667 \\ -0.166667 \end{bmatrix}$.
- Približek po Jacobijevi metodi je $\begin{bmatrix} \frac{9}{16} \\ \frac{15}{16} \\ -\frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5625 \\ 0.9375 \\ -0.1875 \end{bmatrix}$,
- po Gauß-Seidlovi pa $\begin{bmatrix} \frac{37}{64} \\ \frac{59}{64} \\ -\frac{21}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.578125 \\ 0.921875 \\ -0.164063 \end{bmatrix}$.

6. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Z začetnim vektorjem $x^{(0)} = [0,0]^\top$ izračunajte prva dva približka z obema iteracijama. Kaj opazite? Kako bi zagotovili konvergenco? Izračunajte prva dva približka še enkrat.

Rešitev:

Sistem $\boxed{\begin{array}{rcr} x_1 - 5x_2 & = & -4 \\ 7x_1 - x_2 & = & 6 \end{array}}$ prepišemo v $\boxed{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 5x_2 - 4 \\ x_2 & = & 7x_1 - 6 \end{array}}$.

Pri Jacobijevi metodi imamo korak in prva približka

$$\begin{array}{lll} x_1^{(r+1)} = 5x_2^{(r)} - 4 & x_1^{(1)} = 5 \cdot 0 - 4 = -4 & x_1^{(2)} = 5 \cdot (-6) - 4 = -34 \\ x_2^{(r+1)} = 7x_1^{(r)} - 6 & x_2^{(1)} = 7 \cdot 0 - 6 = -6 & x_2^{(2)} = 7 \cdot (-4) - 6 = -34 \end{array}$$

pri Gauß-Seidlovi pa

$$\begin{array}{lll} x_1^{(r+1)} = 5x_2^{(r)} - 4 & x_1^{(1)} = 5 \cdot 0 - 4 = -4 & x_1^{(2)} = 5 \cdot (-34) - 4 = -174 \\ x_2^{(r+1)} = 7x_1^{(r+1)} - 6 & x_2^{(1)} = 7 \cdot (-4) - 6 = -34 & x_2^{(2)} = 7 \cdot (-174) - 6 = -1224 \end{array}$$

Metodi torej divergirata, pri čemer je točna rešitev $[1,1]^\top$.

Če pa vrstni red enačb zamenjamo, je nova matrika strogo diagonalno dominantna:

$$\boxed{\begin{array}{rcr} 7x_1 - x_2 & = & 6 \\ x_1 - 5x_2 & = & -4 \end{array}} \quad \text{oziroma} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{7}(x_2 + 6) \\ x_2 & = & \frac{1}{5}(x_1 + 4) \end{array}}.$$

Sedaj po Jacobijevi metodi dobimo

$$\begin{array}{lll} x_1^{(r+1)} = \frac{1}{7}(x_2^{(r)} + 6) & x_1^{(1)} = \frac{1}{7}(0 + 6) = \frac{6}{7} & x_1^{(2)} = \frac{1}{7}(\frac{4}{5} + 6) = \frac{34}{35} \\ x_2^{(r+1)} = \frac{1}{5}(x_1^{(r)} + 4) & x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5} & x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(\frac{6}{7} + 4) = \frac{34}{35} \end{array}$$

po Gauß-Seidlovi pa

$$\begin{array}{lll} x_1^{(r+1)} = \frac{1}{7}(x_2^{(r)} + 6) & x_1^{(1)} = \frac{1}{7}(0 + 6) = \frac{6}{7} & x_1^{(2)} = \frac{1}{7}(\frac{34}{35} + 6) = \frac{244}{245} \\ x_2^{(r+1)} = \frac{1}{5}(x_1^{(r+1)} + 4) & x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(\frac{6}{7} + 4) = \frac{34}{35} & x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(\frac{244}{245} + 4) = \frac{1224}{1225} \end{array}$$

7. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Preuredite sistem, če je treba, tako da bosta Jacobijeva in Gauß-Seidlova metoda iteracije zagotovo konvergirali.

(b) Izračunajte prva dva približka po obeh metodah pri začetnim vektorju $x^{(0)} = [0, 0, 0]^\top$ ter pravo rešitev sistema.

Odgovor: Zadnjo vrstico damo na vrh, ostali dve pa eno vrstico nižje.

Točno: $\begin{bmatrix} \frac{129}{259} \\ -\frac{79}{259} \\ -\frac{31}{259} \end{bmatrix}$; Jacobi: $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{103}{210} \\ -\frac{27}{70} \\ \frac{1}{210} \end{bmatrix}$; Gauß-Seidel: $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{11}{35} \\ -\frac{23}{210} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{529}{1050} \\ -\frac{382}{1225} \\ -\frac{5521}{44100} \end{bmatrix}$

8. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(a) Pokaži, da za dani sistem Jacobijeva in Gauß-Seidlova metoda iteracije konvergirata.

(b) Izračunaj prva dva približka po obeh metodah pri začetnim vektorju $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^\top$ ter pravo rešitev sistema.

Odgovor: Točno: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; Jacobi: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$; Gauß-Seidel: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{15}{16} \\ \frac{15}{16} \end{bmatrix}$

Metoda najmanjših kvadratov

Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, polnega ranga (rang $A = n$) in vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Če je $m > n$, skoraj zagotovo ne obstaja rešitev sistema

$$Ax = b.$$

Zato iščemo vektor x, ki minimizira

$$\|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \Big((Ax)_i - b_i \Big)^2.$$

Tak vektor je rešitev normalnega sistema

$$A^\top A x = A^\top b,$$

ki pa je enolično rešljiv.

9. Dana je tabela vrednosti meritev funkcije f :

x_i	-1	0	1	2
y_i	$\frac{11}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$

Poiščite parabolo $y = a + bx + cx^2$, ki se najbolje prilega tem točkam.

Rešitev:

Če bi obstajala parabola, ki bi res šla skozi te točke, bi njeni koeficienti rešili sistem

$$\begin{aligned} \tfrac{11}{4} &= a + b\cdot(-1) + c\cdot(-1)^2 \\ \tfrac{7}{4} &= a + b\cdot 0 + c\cdot 0^2 \\ \tfrac{1}{4} &= a + b\cdot 1 + c\cdot 1^2 \\ \tfrac{13}{4} &= a + b\cdot 2 + c\cdot 2^2 \end{aligned}$$

ali drugače

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

Pripadajoč normalni sistem je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}.$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema je $a = 1$, $b = -1$ in $c = 1$, torej se parabola

$$p(x) = x^2 - x + 1$$

najbolj prilega danim točkam.

10. Poiščite linearno funkcijo $y = kx + n$, ki najbolje aproksimira tabelo

x_i	0	1	2	3	4
y_i	2	4	3	6	8

Odgovor: $y = \frac{7}{5}x + \frac{9}{5}$

QR-razcep

Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, poln rang, potem obstaja QR-razcep:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = QR = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix},$$

pri čemer je $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortonormirana, t. j. $Q^\top Q = I$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa zgornjetrikotna in obrnljiva.
Reševanje normalnega sistema

$$A^\top A x = A^\top b$$

preko QR-razcepa je numerično stabilnejše. Če je $A = QR$, je $A^\top A = R^\top R$ in $A^\top = R^\top Q^\top b$. Tako je

$$A^\top A x = A^\top b \iff R^\top R x = R^\top Q^\top b \iff Rx = Q^\top b.$$

11. Zapišite QR-razcep za matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

Najprej A: Uporabimo Gram-Schmidtov postopek na njenih stolpcih. Ker je

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1\rangle = 2^2 + 1^2 + 1 + (-2)^2 = 9,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & * & * \\ \frac{1}{3} & * & * \\ -\frac{2}{3} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{dobimo} \quad \tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1\rangle g_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2\rangle = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj poznamo že

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & * \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & * \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Nazadnje izračunamo še

$$\langle v_3, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \langle v_3, g_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3}$$

in

$$\tilde{g}_3 = v_3 - \langle v_3, g_1 \rangle g_1 - \langle v_3, g_2 \rangle g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\|\tilde{g}_3\|^2 = \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_3 \rangle = \tfrac{1}{81}(5^2 + 10^2 + 10^2) = \tfrac{225}{81} = \tfrac{25}{9},$$

dobimo zadnji za bazni vektor

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \frac{1}{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Na podoben način dobimo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

12. Zapišite QR-razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Uporabimo Gram-Schmidtov postopek na stolpcih matrike A. Ker je

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 2,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Torej} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{dobimo} \quad \tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1 \rangle g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = 0^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 2 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tako smo določili tudi druga stolpca

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & * \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & * \\ 0 & \sqrt{2} & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Nazadnje izračunamo še

$$\langle v_3, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{4}{\sqrt{2}} \quad \text{in} \quad \langle v_3, g_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

in

$$\tilde{g}_3 = v_3 - \langle v_3, g_1 \rangle g_1 - \langle v_3, g_2 \rangle g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadnji bazni vektor je

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tako je

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

13. Poiščite vektor $x = [x_1, x_2, x_3]^\top$, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje ustreza danemu sistemu

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Normalni sistem rešite preko QR-razcepa.

Rešitev:

Iščemo torej x, ki bo dal najboljši približek za $Ax = b$, pri čemer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

QR-razcep matrike A smo določili v nalogi 4.12, namreč

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

x je torej rešitev sistema $Rx = Q^\top b$. Ker je

$$Q^\top b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

moramo rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Torej

$$\begin{aligned} 2x_3 = -\tfrac{1}{2} &\quad\Rightarrow\quad x_3 = -\tfrac{1}{4} \\ \sqrt{2}x_2 = -\tfrac{3}{\sqrt{2}} &\quad\Rightarrow\quad x_2 = -\tfrac{3}{2} \\ \sqrt{2}x_1 - \tfrac{4}{\sqrt{2}}x_3 = \tfrac{10}{\sqrt{2}} &\quad\Rightarrow\quad x_1 = \tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

Singularni razcep

Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, obstaja singularni razcep $A = U\Sigma V^\top$, oziroma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}^\top,$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortonormirani matriki, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa je diagonalna matrika. Njeni elementi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ so singularne vrednosti matrike A. Določene so s tem, da so njihovi kvadrati σ_i^2 lastne vrednosti $A^\top A$. Stolpci matrike V so pripadajoči lastni vektorji matrike $A^\top A$, stolpci matrike U pa zadoščajo $Av_i = \sigma_i u_i$.

S pomočjo singularnega razcepa lahko poiščemo za dani $b \in \mathbb{R}^m$ tak $x \in \mathbb{R}^n$, da je $\|Ax-b\|$ minimalen, tudi če A nima polnega ranga. (To pomeni, da je 0 tudi singularna vrednost.) Vendar pa v tem primeru ta x ni enolično določen. Spodnji postopek nam dá tistega, ki ima minimalno normo.

Psevdoinverz matrike A je določen s formulo

$$A^+ = V\Sigma^+U^\top.$$

Diagonalno matriko Σ^+ dobimo iz matrike Σ tako, da invertiramo njene obrnljive elemente. Iskani x je potem

$$x = A^+b.$$

14. Poiščite singularni razcep matrike A, njen psevdoinverz in najboljši približek rešitve $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov, če je

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev:

Najprej opazimo, da matrika A ni obrnljiva in da b ne leži v zalogi vrednosti. Tako sistem $Ax = b$ zagotovo nima rešitve, lahko pa poiščemo x, tako da bo $\|Ax - b\|$ najmanjše možno. Ker preslikava ni injektivna, ta x ni enoličen.

Singularne vrednosti matrike A so kvadratni koreni lastnih vrednosti matrike

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\det(A^\top A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 25 = (-\lambda)(10-\lambda),$$

je $\sigma_1 = \sqrt{10}$ in $\sigma_2 = 0$. Stolpci matrike V so lastni vektorji matrike $A^\top A$.

- Lastna vrednost 10: Rešujemo
$$0 = (A^\top A - 10I)v = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Torej je $y = x$. Ker mora biti normiran, mora veljati $1 = x^2 + y^2 = 2x^2$, torej $v = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Lastna vrednost 0: Iščemo v, tako da
$$0 = (A^\top A - 0I)v = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Torej je $y = -x$. Spet mora biti $1 = x^2 + y^2 = 2x^2$, torej $v = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Torej je, če obakrat izberemo $+$,
$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Stolpce matrike U dobimo iz $Av_i = \sigma_i u_i$. Iz
$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
tako sledi
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$
Ker je $\sigma_2 = 0$ (in res
$$Av_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}),$$
moramo u_2 določiti na „roke“. Veljati mora $u_2 \perp u_1$, torej
$$u_2 = \pm \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$
Tako je še
$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Res je
$$A = U\Sigma V^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\top.$$
Psevdoinverz je
$$A^+ = V\Sigma^+ U^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Zato je najboljši približek dosežen pri

$$x = A^+ b = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

Kot vidimo, je

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

Od vseh vektorjev, ki minimizirajo $\|Ax - b\|$, ima zgornji najmanjšo normo.

Podobno dobimo pri (b) najprej izračunamo

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 5\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{17} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad V = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A^+ = V\Sigma^+ U^\top = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt{17}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

in

$$x = A^+ b = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{85} \\ \frac{8}{85} \end{bmatrix}.$$

15. Poiščite singularni razcep matrike A, njen psevdoinverz in najboljši približek rešitve $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov ter preveri, da je dobljena rešitev enaka rešitvi normalnega sistema, če sta

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Rešitev:

Singularne vrednosti matrike A so kvadratni koreni lastnih vrednosti matrike

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 22 \end{bmatrix}.$$

Ničli

$$\det(A^\top A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -6 \\ -6 & 22-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)(22-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 39\lambda + 338$$

sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 - 4 \cdot 338}}{2} = \frac{39 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{39 \pm 13}{2}$$

oziroma $\lambda_1 = 26$ in $\lambda_2 = 13$. Torej sta singularni vrednosti $\sigma_1 = \sqrt{26}$ in $\sigma_2 = \sqrt{13}$. Stolpci matrike V so lastni vektorji matrike $A^\top A$.

- Lastna vrednost 26: Rešujemo

  $$0 = (A^\top A - 26I)v = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

  Torej je $x = -\frac{2}{3}y$. Ker mora biti normiran, mora veljati $1 = x^2 + y^2 = \frac{4}{9}y^2 + y^2 = \frac{13}{9}y^2$, torej $v = \pm\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- Lastna vrednost 13: Iščemo v, tako da

  $$0 = (A^\top A - 13I)v = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

  Torej je $x = \frac{3}{2}y$. Spet mora biti $1 = x^2 + y^2 = \frac{9}{4}y^2 + y^2 = \frac{13}{4}y^2$, torej $v = \pm\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Torej je, če obakrat izberemo +,

$$V = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Stolpce matrike U dobimo iz $Av_i = \sigma_i u_i$. Iz

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{13}{\sqrt{13}} \\ \frac{13}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{13} \\ \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

tako sledi

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{13} \\ \sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Iz

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{\sqrt{13}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa dobimo

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} \sqrt{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tako je še

$$U=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}.$$

Res je

$$A=U\Sigma V^\top=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{26} & 0\\ 0 & \sqrt{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}^\top.$$

Psevdoinverz je

$$A^+=V\Sigma^+U^\top=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{26}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}^\top=\begin{bmatrix}\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{26} & \frac{3}{26}\end{bmatrix}.$$

Zato je najboljši približek dosežen pri

$$x=A^+b=\begin{bmatrix}\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{26} & \frac{3}{26}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{13}\\ \frac{7}{26}\end{bmatrix}.$$

Kot vidimo, je

$$Ax=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{13}\\ \frac{7}{26}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Res sta enaka

$$A^\top Ax=\begin{bmatrix}17 & -6\\ -6 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{13}\\ \frac{7}{26}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\quad\text{in}\quad A^\top b=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}.$$

Pri (b) dobimo

$$U=\tfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & 1\\ \sqrt{3} & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ \Sigma=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ \Sigma^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ 2\end{bmatrix},$$

pri (c) pa

$$U=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{3} & 0\end{bmatrix},\ \Sigma=\begin{bmatrix}3\sqrt{2} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ \Sigma^+=\begin{bmatrix}\frac{13}{36} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18}\\ \frac{5}{36} & \frac{13}{36} & -\frac{1}{18}\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}.$$

Razcep Choleskega

Pravimo, da je (simetrična) matrika A pozitivno definitna natanko tedaj, ko velja $A = A^\top$ in $x^\top Ax = \langle Ax, x\rangle > 0$ za vsak $x \neq 0$.

Za vsako tako matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obstaja razcep Choleskega, t. j. obstaja spodnje trikotna matrika V, tako da velja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = VV^\top = \begin{bmatrix} v_{11} & & & \\ v_{21} & v_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ & & \dots & \vdots \\ & & & v_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriko V sestavljamo po stolpcih: Za vsak $k = 1, 2, \dots, n$:

- Diagonalni element je $v_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2}$.
- Pod diagonalo so $v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}}\left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji}v_{ki}\right)$, $j = k+1, \dots, n$.

16. Poiščite razcep Choleskega matrik

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 & -5 & -5 \\ 4 & 1 & 9 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 & 22 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 7 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 13 & 23 & 8 & 8 \\ 4 & 23 & 77 & 32 & 32 \\ 1 & 8 & 32 & 30 & 30 \\ 1 & 8 & 32 & 30 & 55 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Najprej matrika A. Prvi stolpec matrike V (torej $k = 1$) dobimo po formulah

- $v_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
- Za vsak $j = 2, 3, 4, 5$: $\quad v_{j1} = \frac{1}{v_{11}} a_{j1}$.

Torej

$$\begin{aligned} v_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2 \\ v_{21} &= \tfrac{1}{v_{11}} a_{21} = \tfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \\ v_{31} &= \tfrac{1}{v_{11}} a_{31} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 = 2 \\ v_{41} &= \tfrac{1}{v_{11}} a_{41} = \tfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \\ v_{51} &= \tfrac{1}{v_{11}} a_{51} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 = 2 \end{aligned}$$

Zaenkrat poznamo

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & * & & & \\ 2 & * & * & & \\ -1 & * & * & * & \\ 2 & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Za $k = 2$ moramo izvesti:

- $v_{22} = \sqrt{a_{22} - v_{21}^2}$.
- Za vsak $j = 3, 4, 5$: $\quad v_{j2} = \frac{1}{v_{22}}(a_{j2} - v_{j1}v_{21})$.

Zdaj dobimo

$$
\begin{aligned}
v_{22} &= \sqrt{a_{22} - v_{21}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3 \\
v_{32} &= \tfrac{1}{v_{22}}(a_{32} - v_{31}v_{21}) = \tfrac{1}{3}(1 - 2 \cdot (-1)) = 1 \\
v_{42} &= \tfrac{1}{v_{22}}(a_{42} - v_{41}v_{21}) = \tfrac{1}{3}(-5 - (-1) \cdot (-1)) = -2 \\
v_{52} &= \tfrac{1}{v_{22}}(a_{52} - v_{51}v_{21}) = \tfrac{1}{3}(-5 - 2 \cdot (-1)) = -1
\end{aligned}
$$

in tako

$$
V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ 2 & 1 & * & & \\ -1 & -2 & * & * & \\ 2 & -1 & * & * & * \end{bmatrix}.
$$

Za $k = 3$ imamo:

- $v_{33} = \sqrt{a_{33} - v_{31}^2 - v_{32}^2}$.
- Za vsak $j = 4, 5$: $\quad v_{j3} = \frac{1}{v_{33}}(a_{j3} - v_{j1}v_{31} - v_{j2}v_{32})$.

Tokrat dobimo

$$
\begin{aligned}
v_{33} &= \sqrt{a_{33} - v_{31}^2 - v_{32}^2} = \sqrt{9 - 2^2 - 1^2} = 2 \\
v_{43} &= \tfrac{1}{v_{22}}(a_{43} - v_{41}v_{31} - v_{42}v_{32}) = \tfrac{1}{2}(-2 - (-1) \cdot 2 - (-2) \cdot 1) = 1 \\
v_{53} &= \tfrac{1}{v_{22}}(a_{53} - v_{51}v_{31} - v_{52}v_{32}) = \tfrac{1}{2}(1 - 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = -1
\end{aligned}
$$

in

$$
V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ -1 & -2 & 1 & * & \\ 2 & -1 & -1 & * & * \end{bmatrix}.
$$

Preostanejo še

$$
v_{44} = \sqrt{a_{44} - v_{41}^2 - v_{42}^2 - v_{43}^2} = \sqrt{22 - 2^2 - (-1)^2 - (-1)^2} = 4
$$

in

$$
\begin{aligned}
v_{54} = \tfrac{1}{v_{44}}&(a_{54} - v_{51}v_{41} - v_{52}v_{42} - v_{53}v_{43}) = \\
&= \tfrac{1}{4}(7 - 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2) - (-1) \cdot 1) = 2
\end{aligned}
$$

ter

$$
v_{55} = \sqrt{a_{55} - v_{51}^2 - v_{52}^2 - v_{53}^2 - v_{54}^2} = \sqrt{14 - 2^2 - (-1)^2 - (-1)^2 - 2^2} = 2.
$$

Matrika V je tako določena:

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za matriko B dobimo na podoben način

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

17. Poiščite razcep Choleskega matrike A in s pomočjo dobljenega razcepa rešite linearni sistem $Ax = b$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 \\ -1 & 5 & 2.12 \\ 0.5 & 2.12 & 3.6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7.5 \\ -8.68 \\ -0.24 \end{bmatrix}.$

Odgovor:

(a) $V = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$

(b) $V = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ -0.4 & 2.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 1.6 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Poglavje 5

Linearne diferencialne enačbe

Homogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Rešitve homogene linearne enačbe s konstantnimi koeficienti

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

sestavljajo n-razsežen linearen prostor. Njegovo bazo dobimo tako, da poiščemo ničle pripadajočega karakterističnega polinoma

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Če je $\lambda \in \mathbb{R}$ r-kratna ničla karakterističnega polinoma, imamo linearno neodvisne rešitve

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}.$$

Če je $\lambda = \alpha \pm \beta i \notin \mathbb{R}$ konjugiran par r-kratnih ničel karakterističnega polinoma, imamo linearno neodvisne rešitve

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots,\quad x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Na tak način dobimo n linearno neodvisnih rešitev dane enačbe.

1. Rešite začetni problem

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Rešitev:

Karakteristični polinom je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Rešitve homogene linearne diferencialne enačbe 2. reda sestavljajo dvorazsežen vektorski prostor. Baza je (e^{2x}, xe^{2x}). Poljubna rešitev je tako oblike

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Da bosta izpolnjena začetna pogoja, mora veljati najprej

$$1 = y(0) = Ae^{2\cdot 0} + B \cdot 0 = A.$$

Ker je

$$y'(x) = 2Ae^{2x} + B(e^{2x} + 2xe^{2x}),$$

drugi pogoj pomeni

$$4 = y'(0) = 2Ae^{2\cdot 0} + B(e^{2\cdot 0} + 0) = 2A + B.$$

Torej je $A = 1$ in $B = 2$ ter

$$y(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}.$$

2. Rešite homogeni linearni diferencialni enačbi 2. reda s konstantnimi koeficienti:

(a) $y'' + y' - 6y = 0;$

(b) $y'' - 6y' + 13y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 8.$

Odgovor:

(a) $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x},\ A, B \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = 2e^{3x}\cos 2x + e^{3x}\sin 2x$

3. Poiščite splošni rešitvi diferencialnih enačb:

(a) $y''' - 7y'' + 11y' - 5y = 0;$

(b) $y^{(5)} + 18y''' + 81y' = 0.$

Rešitev:

(a) Karakteristični polinom je

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5.$$

Ena ničla je 1. Tako dobimo

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5).$$

Torej je splošna rešitev

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{5x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

(b) Karakteristični polinom je

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^5 + 18\lambda^3 + 81\lambda \\ &= \lambda(\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81) \\ &= \lambda(\lambda^2 + 9)^2 \\ &= \lambda(\lambda + 3i)^2(\lambda - 3i)^2. \end{aligned}$$

Torej

$$y(x) = A + B\cos 3x + Cx\cos 3x + D\sin 3x + Cx\sin 3x, \quad A, B, C, D, E \in \mathbb{R}.$$

4. Rešite naslednje diferencialne enačbe:

(a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.
(b) $y^{(4)} - y''' + 2y' = 0$.
(c) $y^{(4)} - y = 0$.

Odgovor:

(a) $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x} + Ce^{-x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$
(b) $y(x) = A + Be^{-x} + e^{x}(C\cos x + D\sin x), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$
(c) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Nehomogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Splošna rešitev nehomogene linearne enačbe s konstantnimi koeficienti

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

je oblike $y = y_H + y_P$, pri čemer je y_H splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe (ko je $f(x) = 0$), y_P pa je neka (partikularna) rešitev dane enačbe. Če ima f posebno obliko, imamo za partikularno rešitev nastavek.

- Če je
$$f(x) = e^{ax}P(x),$$
kjer je P polinom stopnje ν in a poljubno realno število (lahko tudi 0), je nastavek
$$y_P(x) = x^{\rho}e^{ax}Q(x),$$
kjer je Q polinom stopnje ν z neznanimi koeficienti in je ρ stopnja ničle a karakterističnega polinoma. (Če a ni ničla, je torej $\rho = 0$.)

- Če je
$$f(x) = e^{ax}(P_1(x)\cos(bx) + P_2(x)\sin(bx)),$$
kjer sta P_1 in P_2 polinoma stopnje ν_1 oz. ν_2, je nastavek
$$y_P(x) = x^{\rho}e^{ax}(Q_1(x)\cos(bx) + Q_2(x)\sin(bx)),$$
kjer sta Q_1 in Q_2 polinoma stopnje $\max\{n_1, n_2\}$ z neznanimi koeficienti in je ρ stopnja ničle $a + ib$ karakterističnega polinoma.

- Če y_{P1} reši enačbo z desno stranjo f_1 in y_{P2} tako, ki ima na desni f_2, potem $\alpha_1y_{P1} + \alpha_2y_{P2}$ reši enačbo z desno stranjo $\alpha_1f_1 + \alpha_2f_2$.

5. Rešite naslednje diferencialne enačbe:

(a) $y'' - 2y' + y = (3+x)e^{2x}, \ \ y(0) = 2, \ \ y'(0) = 4.$

(b) $y'' + 9y = \cos 2x.$

(c) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}.$

Rešitev:

(a) Najprej poiščemo ničle karakterističnega polinoma

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Ker je 1 dvojna ničla, ima homogena enačba splošno rešitev

$$y_H(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

Za partikularno rešitev uporabimo nastavek

$$y_P(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

Izračunamo oba odvoda

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= ae^{2x} + (ax+b) \cdot 2e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x} \\ y_P''(x) &= 2ae^{2x} + (2ax + a + 2b) \cdot 2e^{2x} = 4(ax + a + b)e^{2x} \end{aligned}$$

in ju vstavimo v enačbo:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= (3+x)e^{2x} \\ 4(ax + a + b)e^{2x} - 2(2ax + a + 2b)e^{2x} + (ax+b)e^{2x} &= (3+x)e^{2x} \\ (ax + 2a + b)e^{2x} &= (3+x)e^{2x} \end{aligned}$$

Torej mora biti $a = 1$ in $2a + b = 3$, oziroma $b = 1$. Posledično je splošna rešitev enaka

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = (x+1)e^{2x} + Ae^x + Bxe^x.$$

Za upoštevanje začetnega pogoja potrebujemo še odvod:

$$y'(x) = (2x+3)e^{2x} + Ae^x + B(x+1)e^x.$$

Veljati mora

$$2 = y(0) = 1 + A$$

in

$$4 = y'(0) = 3 + A + B.$$

Torej je $A = 1$ in $B = 0$. Iskana rešitev je

$$y(x) = (x+1)e^{2x} + e^x.$$

(b) V tem primeru dobimo za karakteristični polinom

$$0 = \lambda^2 + 9.$$

Ničli sta $0 \pm 3i$, zato ima homogena enačba splošno rešitev

$$y_H(x) = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Za partikularno rešitev uporabimo nastavek

$$y_P(x) = a\cos 2x + b\sin 2x.$$

Potrebujemo drugi odvod

$$y_P''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x.$$

Iz

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= \cos 2x \\ -4a\cos 2x - 4b\sin 2x + 9(a\cos 2x + b\sin 2x) &= \cos 2x \\ 5a\cos 2x + 5b\sin 2x &= \cos 2x \end{aligned}$$

sledi $a = \frac{1}{5}$ in $b = 0$. Torej je splošna rešitev

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = \frac{1}{5}\cos 2x + A\cos 3x + B\sin 3x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(c) Iz

$$0 = \lambda^2 + 1$$

sledi $\lambda = 0 \pm i$. Homogena enačba ima splošno rešitev

$$y_H(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Ker je enačba linearna, lahko vzamemo nastavek za vsak člen posebej. Partikularna rešitev bo potem linearna kombinacija obeh. Najprej za $\sin x$:

$$y_{P1}(x) = x(a\cos x + b\sin x).$$

Odvoda sta

$$y_{P1}'(x) = (a\cos x + b\sin x) + x(-a\sin x + b\cos x).$$

in

$$y_{P1}''(x) = (-a\sin x + b\cos x) + (-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x).$$

Iz

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin x \\ 2(-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x) + x(a\cos x + b\sin x) &= \sin x \\ 2(-a\sin x + b\cos x) &= \sin x \end{aligned}$$

dobimo $a = -\frac{1}{2}$ in $b = 0$. Torej je

$$y_{P1}(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos x.$$

Nastavek za e^{-x} je

$$y_{P2}(x) = ae^{-x}.$$

in

$$y''_{P2}(x) = ae^{-x}.$$

Iz

$$\begin{aligned} y'' + y &= e^{-x} \\ ae^{-x} + ae^{-x} &= e^{-x} \end{aligned}$$

sledi $a = \frac{1}{2}$. Partikularna rešitev je

$$y_P(x) = y_{P1}(x) - 2y_{P2}(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos x - e^{-x},$$

tako da je splošna rešitev

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos x - e^{-x} + A\cos x + B\sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

6. Rešite sledeče začetne probleme:

(a) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 4.$

(b) $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = 2.$

(c) $y'' + y' = 2, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 1.$

(d) $y'' + y = x^2 - x + 1, \;\; y(0) = -1, \;\; y'(0) = 2.$

(e) $y'' + y = 2\sin x, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = 1.$

Odgovor:

(a) $y(x) = (1 + 2x + \frac{x^3}{6})e^{2x}$

(b) $y(x) = 2e^x - e^{-x} + 2\cos x - \sin x$

(c) $y(x) = 1 + e^{-x} + 2x$

(d) $y(x) = 3\sin x + x^2 - x - 1$

(e) $y(x) = 3\cos x + 2\sin x - x\cos x$

7. Poiščite vse rešitve diferencialnih enačb

(a) $y''' - y' = \sin 3x.$

(b) $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = e^{2x} - e^{-x}.$

(c) $y^{(4)} + 2y'' + y = e^x\cos x.$

Odgovor:

(a) $y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} + \frac{1}{30}\cos 3x, \;\; A, B, C \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = (A + Bx + Cx^2 + \frac{x^3}{18})e^{-x} + (D + \frac{x}{27})e^{2x}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = (-\frac{3e^x}{25} + A + Bx)\cos x + (\frac{4e^x}{25} + C + Dx)\sin x, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

8. Poiščite nastavke za partikularne rešitve naslednjih linearnih diferencialnih enačb:

(a) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$

(b) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$

(c) $y'' - 3y' = x + \cos x$

Rešitev:

(a) Karakteristični polinom enačbe $y'' - 5y' + 6y = 0$ je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Ker 1 ni ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za prvi člen

$$y_{P1}(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

2 je enostavna ničla karakterističnega polinoma, torej

$$y_{P2}(x) = x(\alpha x + \beta)e^{2x}.$$

Torej

$$y_P(x) = (ax^2 + bx + c)e^x + x(\alpha x + \beta)e^{2x}.$$

(b) Karakteristični polinom enačbe $y'' - 2y' + 5y = 0$ je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i.$$

Koeficient pri eksponentni funkciji na desni je v obeh členih ravno tako $1 \pm 2i$. Ker gre za enostavni ničli in je večja stopnja polinomov na desni enaka 2, iščemo partikularno rešitev z nastavkom

$$y_P(x) = xe^x \big[(ax^2 + bx + c)\cos 2x + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\sin 2x\big].$$

(c) Tukaj dobimo nastavek

$$y_P(x) = x(ax + b) + c\cos x + d\sin x.$$

Enačbe prvega reda z nekonstantnimi koeficienti

Od linearnih enačb z nekonstantnimi koeficienti se bomo spomnili le metode za enačbe prvega reda

$$a(x)y' + b(x)y = f(x).$$

Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo

$$a(x)y' + b(x)y = 0,$$

ki ima ločljivi spermenljivki. Njena splošna rešitev ima obliko

$$y_H(x) = Cu(x),$$

kjer je C poljubna konstanta. Partikularno rešitev dobimo z *variacijo konstante*, to je, z nastavkom

$$y_P(x) = C(x)u(x).$$

Splošna rešitev je $y = y_H + y_P$.

9. Rešite linearne diferencialne enačbe

(a) $x^2y' = 2xy - 3,\ \ y(-1) = 1.$

(b) $x(1 + x^2)y' = (1 + x^2)y + x^2,\ \ y(1) = \frac{\pi}{4},$

(c) $y' = 3x^2y + x^5 + x^2,\ \ y(0) = 1.$

Rešitev:

(a) Pripadajoča homogena enačba je

$$x^2y' = 2xy,$$

ki ima ločljivi spremenljivki. Njena splošna rešitev je

$$\begin{aligned} y' &= \tfrac{2y}{x} \\ \int \tfrac{1}{y}\, dy &= \int \tfrac{2}{x}\, dx \\ \ln y &= \ln C + 2\ln x \\ y_H(x) &= Cx^2 \end{aligned}$$

Rešitev nehomogene enačbe dobimo z variacijo konstante. Pišemo

$$y_P(x) = C(x)x^2 \quad \text{in tako} \quad y_P'(x) = C'(x)x^2 + 2C(x)x$$

in vstavimo v enačbo. Tako dobimo

$$x^2\big(C'(x)x^2 + 2C(x)x\big) = 2xC(x)x^2 - 3.$$

Sledi $C'(x) = -\frac{3}{x^4}$. Ena možnost je $C(x) = \frac{1}{x^3}$. Tako smo dobili

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Cx^2 + \tfrac{1}{x^3} \cdot x^2 = Cx^2 + \tfrac{1}{x}.$$

Veljati mora

$$1 = y(-1) = C - 1.$$

Zato je

$$y(x) = 2x^2 + \tfrac{1}{x}.$$

(b) Pripadajoča homogena enačba

$$x(1+x^2)y' = (1+x^2)y$$

ima rešitev

$$y_H(x) = Cx.$$

Z nastavkom $y_P(x) = C(x)x$ dobimo $C'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oziroma $C(x) = \arctan x$. Tako je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Cx + x\arctan x.$$

Upoštevamo še začetni pogoj

$$\tfrac{\pi}{4} = y(1) = C + \arctan 1$$

in dobimo $C = 0$ ter

$$y(x) = x\arctan x.$$

(c) Spet najprej rešimo homogeno enačbo

$$y' = 3x^2y \quad \text{in dobimo} \quad y_H(x) = Ce^{x^3}.$$

Nastavek $y_P(x) = C(x)e^{x^3}$ nam dá $C'(x) = (x^5 + x^2)e^{-x^3}$. Z uvedbo nove spremenljivke in per partesom dobimo

$$C(x) = -\tfrac{1}{3}(x^3+2)e^{-x^3}.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{x^3} - \tfrac{1}{3}(x^3+2).$$

Iz

$$1 = y(0) = Ce^0 - \tfrac{1}{3}(0+2)$$

določimo še

$$C = \tfrac{5}{3} \quad \text{in} \quad y(x) = \tfrac{5}{3}e^{x^3} - \tfrac{1}{3}(2+x^3).$$

10. Poiščite splošne rešitve naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $xy' + y = \ln x + 1$,

(b) $y' - y\tan x = \cos x$.

Odgovor:

(a) $y(x) = \ln x + \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = \frac{C+2x+\sin 2x}{4\cos x}$, $C \in \mathbb{R}$

Poglavje 6

Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Homogen sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti ima obliko
$$v'(t) = Av(t),$$
kjer je $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ iskana vektorska funkcija, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ pa dana matrika koeficientov. Rešitve sestavljajo n-razsežen linearni prostor. Na voljo imamo tri metode za reševanje:

- Sistem lahko pretvorimo v diferencialno enačbo n-tega reda za eno skalarno funkcijo.
- Če je matrika A diagonalizabilna, moremo bazo tvoriti z uporabo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Za vsako realno lastno vrednost λ in pripadajoči lastni vektor u imamo rešitev
$$t \mapsto e^{\lambda t} u.$$
Če imamo konjugiran par lastnih vrednosti $\alpha \pm \beta i$ in je u lastni vektor za eno izmed njih, sta
$$t \mapsto e^{\alpha t}\big((\cos\beta t)\operatorname{Re} u - (\sin\beta t)\operatorname{Im} u\big) \quad \text{in} \quad t \mapsto e^{\alpha t}\big((\sin\beta t)\operatorname{Re} u + (\cos\beta t)\operatorname{Im} u\big)$$
rešitvi.
- Bazo za prostor rešitev sestavljajo stolpci matrične funkcije
$$\Phi(t) = e^{tA}.$$
Če imamo podan začetni pogoj, je rešitev enaka $v(t) = \Phi(t)v(0)$.

1. Rešitvi začetnih problemov
$$\begin{aligned} x' &= -x + y, & x(0) &= 10,\\ y' &= 4x - 4y, & y(0) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{in} \qquad \begin{aligned} x' &= 4x + 2y, & x(0) &= 2,\\ y' &= -3x - y, & y(0) &= -3. \end{aligned}$$
poiščite na vse tri načine. Za vsako rešitev narišite še časovni diagram in določite orbito ter jo skicirajte. Kaj lahko poveste o $x(t)$ in $y(t)$, ko preteče veliko časa?

Rešitev:

Najprej prvi sistem. Če iz prve enačbe izrazimo

$$y = x' + x$$

in vstavimo v drugo, dobimo

$$y' = x'' + x' = 4x - 4(x' + x) = -4x',$$

torej

$$x'' + 5x' = 0.$$

Ničli karakterističnega polinoma sta 0 in -5, zato je splošna rešitev

$$x(t) = A + Be^{-5t}.$$

Začetna pogoja sta

$$x(0) = 10 \quad \text{in} \quad x'(0) = -x(0) + y(0) = -10,$$

iz česar sledi $10 = A + B$ in $-10 = -5B$. Torej je $B = 2$ in $A = 8$. Rešitev je torej

$$x(t) = 8 + 2e^{-5t}.$$

Iz tega sledi še

$$y(t) = x'(t) + x(t) = -10e^{-5t} + 8 + 2e^{-5t} = 8 - 8e^{-5t}.$$

Sedaj rešimo nalogo s pomočjo lastnih vektorjev: Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda + 5).$$

Poiščimo pripadajoče lastne vektorje.

- $\lambda = 0$: Rešitev sistema $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je npr. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $\lambda = -5$: Ena rešitev $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Splošna rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + be^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + be^{-5\cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

dobimo $a + b = 10$ in $0 = a - 4b$. Tako je $b = 2$ in $a = 8$.

Tretja možnost je z eksponentno funkcijo matrike. Tedaj velja

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}.$$

Zgoraj smo že izračunali lastne vrednosti in vektorje, tako da je

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2e^{-5t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 + 2e^{-5t} \\ 8 - 8e^{-5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opazimo, da za vsak t velja $\frac{x-8}{2} = \frac{y-8}{-8}$. Orbita leži na premici $y = -4x + 40$. Velja

$$\lim_{t\to-\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty \\ -\infty \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Gibanje je ves čas v isti smeri, saj je

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e^{-5t} \\ 40e^{-5t} \end{bmatrix} = e^{-5t} \begin{bmatrix} -10 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Za drugi sistem dobimo

$$x(t) = 2e^t \quad \text{in} \quad y(t) = -3e^t.$$

2. Poiščite splošno rešitev sistemov

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= -2x + 3y \end{aligned} \qquad \text{in} \qquad \begin{aligned} x' &= 2x + y, \\ y' &= x + 2y. \end{aligned}$$

Rešitev:

Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1.$$

Lastni vrednosti sta torej $2 \pm i$. Ena rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} -1 \mp i & 1 \\ -2 & 1 \mp i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

je vektor $\begin{bmatrix}1\\1\pm i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \pm i\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Splošna rešitev je tako

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = Ae^{2t}\left(\cos t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \sin t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) + Be^{2t}\left(\sin t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \cos t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

oziroma

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{2t}\cos t + Be^{2t}\sin t,\\ y(t) &= Ae^{2t}(\cos t - \sin t) + Be^{2t}(\sin t + \cos t). \end{aligned}$$

Podobno dobimo za drugi sistem

$$x(t) = -Ae^{t} + Be^{3t}, \quad y(t) = Ae^{t} + Be^{3t}.$$

3. Začetni problem

$$u' = \begin{bmatrix}4 & -7\\-1 & 10\end{bmatrix}u, \quad u(0) = \begin{bmatrix}14\\10\end{bmatrix}$$

rešite na dva načina:

- s prevedbo na linearno diferencialno enačbo drugega reda,
- z uporabo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike sistema.

Poiščite $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x(t)}{y(t)}$.

Odgovor: $x(t) = 21e^{3t} - 7e^{11t}$, $y(t) = 3e^{3t} + 7e^{11t}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x(t)}{y(t)} = -1$

4. Poiščite splošno rešitev sistema $v' = Av$, če je

(a) $A = \begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\3 & 2 & 3\\-4 & 0 & -2\end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\0 & -1 & -3\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

Rešitev:

(a) Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 1\\3 & 2-\lambda & 3\\-4 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\-4 & -2-\lambda\end{vmatrix} =\\ &= (2-\lambda)\Big((3-\lambda)(-2-\lambda)+4\Big) = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) =\\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

Lastni vrednosti sta tako -1 in $2_{(2)}$. Pripadajoči lastni vektorji:

- v ničelnem prostoru $A+I=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ leži npr. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$,
- v ničelnem prostoru $A-2I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ lahko najdemo dva linearno neodvisna lastna vektorja, npr. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Splošna rešitev je torej

$$v(t)=Ae^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}+Be^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+Ce^{2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Podobno dobimo

$$x(t)=Ae^{-t}+Be^{2t},\quad y(t)=-Ae^{-t}+Ce^{2t},\quad z(t)=-Ce^{2t}.$$

5. Poiščite rešitve naslednjih začetnih problemov in obravnavajte njihova obnašanja za $t\to\infty$:

(a) $u'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}u,\quad u(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$,

(b) $v'=\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}v,\quad v(0)=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$,

(c) $w'=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}w,\quad w(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Rešitev:

(a) Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -9 & -5-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2.$$

-2 je torej dvojna ničla karakterističnega polinoma. Toda ničelni prostor matrike

$$A+2I=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

je enodimenzionalen, napenja ga vektor $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$. Z doslej uporabljeno metodo dobimo le eno rešitev.

Če imamo dvorazsežen problem kot v tej nalogi, eno dvojno lastno vrednost, a le enodimenzionalen prostor lastnih vektorjev, potem storimo sledeče: Za w_2 vzamemo poljuben neničelen vektor ki ni lastni, npr. $w_2=\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Potem je $w_1=(A+2I)w_2=\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -9 \end{smallmatrix}\right]$ lastni vektor. Splošna rešitev je

$$u(t)=Ae^{-2t}w_1+Be^{-2t}(w_2+tw_1)=Ae^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}+Be^{-2t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}\right).$$

Iz začetnega pogoja sledi

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = u(0) = A \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je $A = \frac{4}{9}$. Potem je $B = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$. Tako je

$$u(t) = \frac{4}{9}e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} \right) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 - t \\ 3t - 4 \end{bmatrix}.$$

Velja še

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = 0.$$

(b) Rešitev je

$$v(t) = e^{-6t} \begin{bmatrix} 3\cos t + 2\sin t \\ 5\cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

Zanjo velja $\lim_{t \to \infty} v(t) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) Tukaj je rešitev

$$w(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 4t + 1 \\ -4t + 3 \end{bmatrix}.$$

Opazimo še $\lim_{t \to \infty} \frac{w_1(t)}{w_2(t)} = -1$.

Poglavje 7

Fourierove vrste

Denimo, da imamo „dovolj lepo“ funkcijo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Zadošča, da je odsekoma zvezna in da je $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$. Potem jo lahko razvijemo v Fourierovo vrsto

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big),$$

pri čemer so koeficienti enaki

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

ter za $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{in} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Vrsta konvergira v prostoru $L^2(-\pi, \pi)$ in določa funkcijo F, ki je dobro definirana na celem $\mathbb{R}$ in je periodična s periodo 2π.
Podobno lahko razvijemo funkcije s poljubno periodo. Če ima $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodo P, potem je njena Fourierova vrsta

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos \tfrac{2\pi k}{P} x + b_k \sin \tfrac{2\pi k}{P} x\big)$$

s koeficienti

$$a_0 = \frac{2}{P} \int_I f(x) \, dx, \quad a_k = \frac{2}{P} \int_I f(x) \cos \tfrac{2\pi k}{P} x \, dx \quad \text{in} \quad b_k = \frac{2}{P} \int_I f(x) \sin \tfrac{2\pi k}{P} x \, dx.$$

Pri tem I je poljuben interval dolžine P, na primer $[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}]$.
Ker gre za konvergenco v ekvlidskih prostoru, dodajmo še pojasnilo o obnašanju te vrste po točkah.
Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična s periodo $P > 0$ in odsekoma zvezna. Če v neki točki $x_0 \in \mathbb{R}$ obstajata vsaj oba enostranska odvoda, potem je

$$F(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \nearrow x_0} f(x) + \lim_{x \searrow x_0} f(x) \right).$$

1. Določite Fourierovo vrsto funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

Rešitev:

Koeficienti so

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\ dx = \frac{1}{\pi}\pi = 1$$

ter za $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cos kx\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} = 0$$

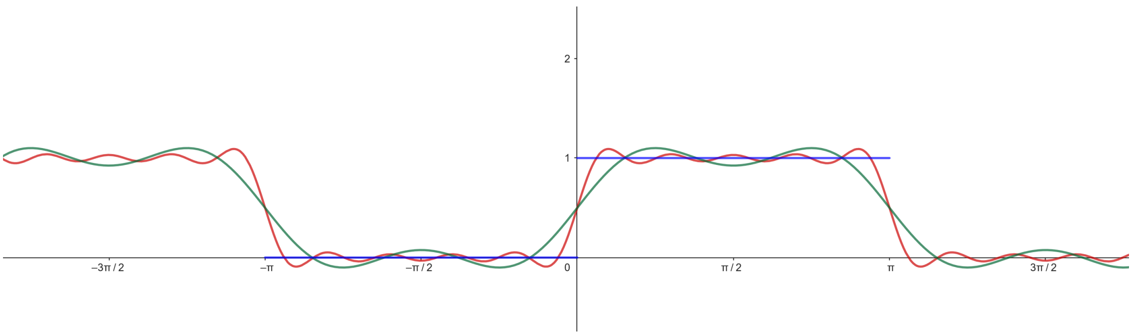
in

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\sin kx\ dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{-(-1)^k+1}{k\pi}.$$

Torej je

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\dots\right).$$

Na spodnji sliki je z modro barvo narisan graf funkcije f, z zeleno delna vsota do člena $\frac{\sin 3x}{3}$, z rdečo pa delna vsota do člena $\frac{\sin 9x}{9}$:



2. Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

razvijte v Fourierovo vrsto. Z dobljenim rezultatom izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Odgovor: $F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

3. Določite Fourierovo vrsto funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ in izračunajte vsoto vrste

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Rešitev:

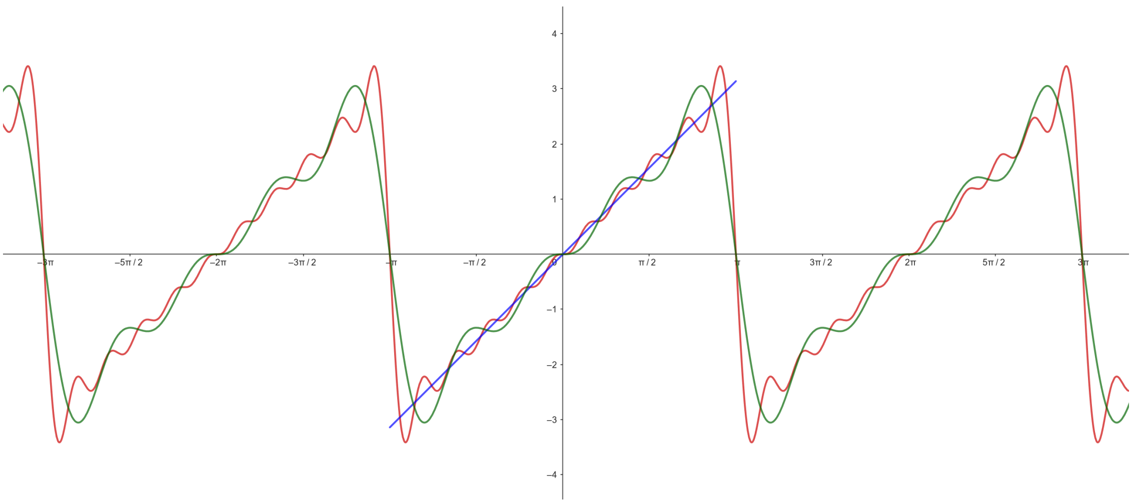
Ker je funkcija liha, so vsi $a_k = 0$. Nadalje je

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin kx \; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{-\cos kx}{k}\; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\pi\frac{-(-1)^k}{k} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Fourierova vrsta je torej

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right).$$

Na spodnji sliki je z modro barvo narisan graf funkcije f, z zeleno delna vsota do člena $\frac{\sin 4x}{4}$, z rdečo pa delna vsota do člena $\frac{\sin 10x}{10}$:



V $x = \frac{\pi}{3}$ je f odvedljiva, zato Fourierova vrsta v tej točki konvergira proti funkcijski vrednosti. Če označimo z s iskano vsoto, je

$$\frac{\pi}{3} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2}s, \quad \text{in tako} \quad s = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. Funkcijo $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, razvijte v Fourierovo vrsto. Z dobljenim rezultatom izračunajte vsoto vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Odgovor: $F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

5. Funkcijo $f(x) = x(\pi - x)$ razvijte na $[0, \pi]$ v Fourierovo vrsto:

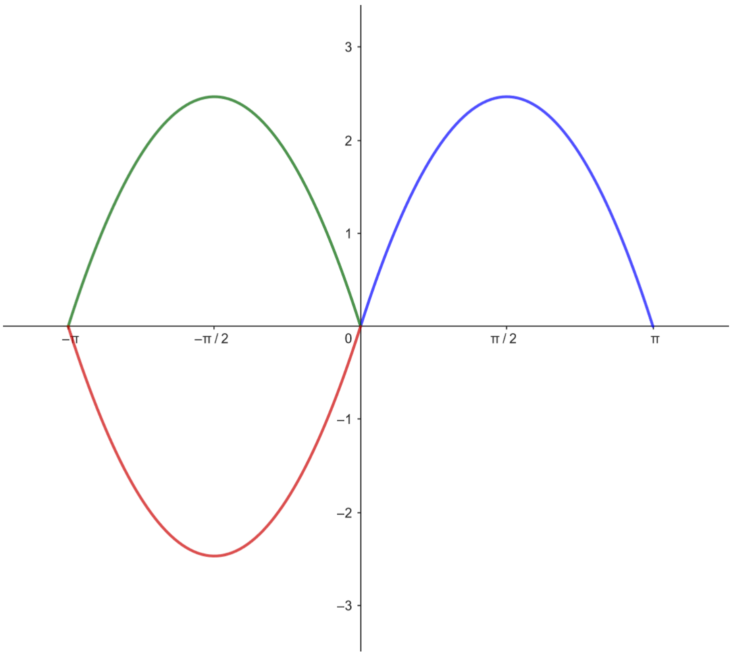
(a) po samih sinusih,

(b) po samih kosinusih.

Z dobljenim rezultatom izračunajte vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Rešitev:

Funkcija f nas zanima samo na intervalu $[0, \pi]$. To je modra črta na sliki. Če želimo dobiti razvoj po samih kosinusih, jo moramo razširiti do sode funkcije na $[-\pi, \pi]$ (zelena črta), če pa po samih sinusih, pa do lihe funkcije na $[-\pi, \pi]$ (rdeča črta):



Najprej izračunajmo integrale, ki jih bomo potrebovali:

$$\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos kx}{k}\,dx$$
$$= -\pi\frac{\cos k\pi}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^\pi = \pi\frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

ter

$$\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k} = 0 + \left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$
$$\int_0^\pi x^2\sin kx\,dx = \left[x^2\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\frac{-\cos kx}{k} = -\pi^2\frac{\cos k\pi}{k} + \frac{2}{k}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$
$$\int_0^\pi x^2\cos kx\,dx = \left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\frac{\sin kx}{k} = -\frac{2}{k}\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Koeficienti v razvoju po sinusih so

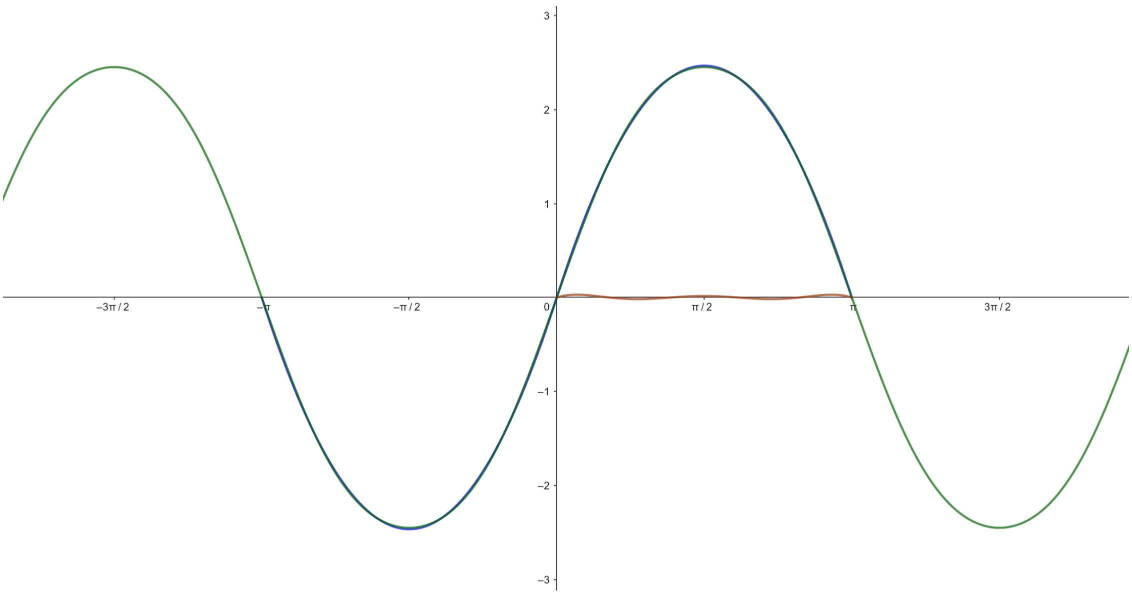
$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin kx\ dx \\
&= 2\int_0^\pi x\sin kx\ dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin kx\ dx \\
&= 2\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k} + 2\pi\frac{(-1)^k}{k} - \frac{2}{\pi}\frac{2}{k}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \\
&= \frac{4}{k^3\pi}(1 + (-1)^{k+1}).
\end{aligned}
$$

(Ker integriramo sodo funkcijo po intervalu $[-\pi, \pi]$, je interval enak dvakratniku integrala po $[0, \pi]$.) Torej je za $x \in [0, \pi]$

$$
f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right).
$$

Dejansko smemo pisati enačaj, saj razvijamo periodično zvezno funkcijo, ki ima povsod vsaj enostranske odvode.

Na spodnji sliki je z modro barvo narisan graf lihe razširitve f. Že vsota prvih dveh členov (zelena črta) zelo dobro aproksimira f. Razlika je obarvana rjavo.



V razvoju po samih kosinusih pa so koeficienti

$$
a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}
$$

ter za $k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\cos kx\ dx \\
&= 2\int_0^\pi x\cos kx\ dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx\ dx \\
&= 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \frac{2}{\pi}\frac{2}{k}\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2} + 4\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \\
&= 2\frac{(-1)^{k+1} - 1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

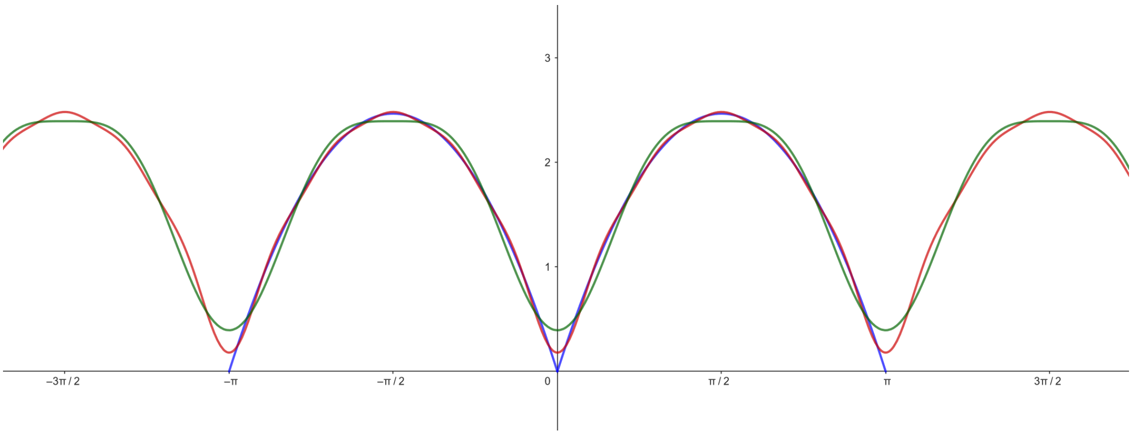
Tako je za $x \in [0, \pi]$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 4\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2kx}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2kx}{k^2}.$$

Posledično je

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \quad \text{oziroma} \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Z modro barvo je narisan graf sode razširitve f, z zeleno delna vsota do člena $\frac{\cos 4x}{2^2}$, z rdečo pa delna vsota do člena $\frac{\cos 10x}{5^2}$:



6. Funkcijo $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ razvijte na $(0, \pi)$ v Fourierovo vrsto:

(a) po samih sinusih,

(b) po samih kosinusih.

Odgovor:

(a) $F(x) = -\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\sin(2nx)$,

(b) $F(x) = -\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$.

7. Naj bo $a \notin \mathbb{Z}$ poljuben in f 2π-periodična funkcija z $f(x) = \cos(a\pi - a|x|)$ za $x \in [-\pi, \pi]$. Določite Fourierovo vrsto f in pokažite

$$\cot(\pi a) = \frac{a}{\pi}\left(\frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 - k^2}\right) = \frac{a}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 - k^2}.$$

Rešitev:

Ker je funkcija soda, so vsi $b_k = 0$. Nadalje je

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(a\pi - ax)\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(a\pi - ax)}{-a}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin(a\pi)}{\pi a}$$

in za $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(a\pi - ax)\cos kx\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\cos\big(a\pi + (-a+k)x\big) + \cos\big(a\pi + (-a-k)x\big)\Big)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\big(a\pi + (-a+k)x\big)}{-a+k} + \frac{\sin\big(a\pi + (-a-k)x\big)}{-a-k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(k\pi)}{-a+k} + \frac{\sin(-k\pi)}{-a-k}\right) - \left(\frac{\sin(a\pi)}{-a+k} + \frac{\sin(a\pi)}{-a-k}\right) \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\sin(a\pi)\left(\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a+k}\right) \\
&= \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi(a^2 - k^2)}.
\end{aligned}$$

Fourierova vrsta je tako

$$F(x) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi(a^2 - k^2)}\cos kx.$$

Funkcija f je zvezna v 0 in obstajata levi in desni odvod. Zato konvergira vrsta za $x = 0$ proti $f(0) = \cos(a\pi)$. Torej

$$\cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi(a^2 - k^2)}$$

oziroma

$$\cot(a\pi) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi(a^2 - k^2)}.$$

Del II

Primeri kolokvijev in izpitov

1. kolokvij (6. 12. 2021)

1. naloga [20 točk]

Določite (z utemeljitvijo), ali so naslednje podmnožice linearni podprostori v danih prostorih:

(a) $\mathcal{A} = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 1\} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$,

(b) $\mathcal{B} = \{(x, y, z) : x + 2z = 0,\ 3x - 5y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(c) $\mathcal{C} = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right] : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

(d) $\mathcal{D} = \{(x, y, z) : xy \geq 0, z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) $\mathcal{A}$ ni podprostor, ker ne vsebuje ničelnega polinoma.

(b) $\mathcal{B}$ je podprostor, ker je množica rešitev homogenega sistema linearnih enačb.

(c) $\mathcal{C}$ je podprostor:

Vzemimo poljubni matriki $\left[\begin{smallmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ in $\left[\begin{smallmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ in poljuben skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je njuna vsota v $\mathcal{C}$, saj je

$$\left[\begin{smallmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & a_1+a_2 \\ b_1+b_2 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{C}$$

in zmožek s skalarjem, saj je

$$\alpha\left[\begin{smallmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & \alpha a_1 \\ \alpha b_1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{C}.$$

(d) $\mathcal{D}$ ni podprostor, ker ni zaprta za seštevanje. Na primer $(-1, 0, 0), (0, 1, 0) \in \mathcal{D}$, ampak $(-1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (-1, 1, 0) \notin \mathcal{D}$.

2. naloga [20 točk]

Dani so polinomi

$$p_1(x) = 1 - 2x + x^2, \quad p_2(x) = 1 - x^2 \quad \text{in} \quad p_3(x) = 1 + 2x + x^2.$$

(a) Pokažite, da je $\mathbf{B} = (p_1, p_2, p_3)$ baza prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (polinomov stopnje največ 2).

(b) Razvijte polinom $q(x) = 3 + 4x + 5x^2$ po bazi $\mathbf{B}$.

(a) Prostor $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ima dimenzijo 3. Zato zadošča, da pokažemo, da so p_1, p_2, p_3 linearno neodvisni. Naj bo
$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 0.$$
Iz
$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(1 - 2x + x^2) + \beta(1 - x^2) + \gamma(1 + 2x + x^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (-2\alpha + 2\gamma)x + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 \end{aligned}$$
sledi
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -2\alpha + 2\gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$
Če odštejemo zadnjo enačbo od prve, dobimo $\beta = 0$. Ker iz druge sledi $\alpha = \gamma$, morata biti oba 0. Torej so ti trije polinomi res linearno neodvisni.

(b) Nastavimo
$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = q$$
oziroma
$$\alpha(1 - 2x + x^2) + \beta(1 - x^2) + \gamma(1 + 2x + x^2) = 3 + 4x + 5x^2.$$
Dobimo sistem
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ -2\alpha + 2\gamma &= 4 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 5 \end{aligned}$$
Ponovno lahko odštejemo tretjo enačbo od prve in dobimo $2\beta = -2$. Torej je $\beta = -1$. Iz $\alpha + \gamma = 4$ in $-\alpha + \gamma = 2$ sledi še $\gamma = 3$ in $\alpha = 1$. Torej je
$$q = p_1 - p_2 + 3p_3.$$

3. naloga [30 točk]

Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z, w) = (-3x - y + 3w, x + 3y + 5z, x - y - 2z - w).$$

(a) Zapišite matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardnih bazah.

(b) Določite dimenziji in bazi njenega ničelnega prostora in zaloge vrednosti.

(c) Določite, ali je $\mathcal{A}$ injektivna, surjektivna.

(a) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1,0,0,0) &= (-3,1,1), \\ \mathcal{A}(0,1,0,0) &= (-1,3,-1), \\ \mathcal{A}(0,0,1,0) &= (0,5,-2), \\ \mathcal{A}(0,0,0,1) &= (3,0,-1), \end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ničelni prostor sestavljajo vektorji, ki se preslikajo v ničelni vektor, torej rešitve

$$\mathcal{A}(x, y, z, w) = (-3x - y + 3w, x + 3y + 5z, x - y - 2z - w) = (0, 0, 0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo rešitev

$$w = \alpha, \quad z = -\alpha, \quad y = \tfrac{3}{2}\alpha, \quad x = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Torej

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\alpha(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Lin}\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -1, 1)\}.$$

Ničelni prostor je posledično enorazsežen, baza je npr. $\{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1, 1)\}$.

Iz $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sledi, da ima zaloga vrednosti preslikave $\mathcal{A}$ dimenzijo 3. Ker leži v trirazsežnem prostoru $\mathbb{R}^3$, je torej kar $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$. Za bazo lahko vzamemo standardno bazo $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

(c) $\mathcal{A}$ ni injektivna, saj je ničelni prostor enodimenzionalen, je pa surjektivna.

4. naloga [30 točk]

V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana vektorja $u = (2, -1, 1, 2)$ in $v = (5, 3, 5, 4)$.

(a) Določite eno ortonormirano bazo podprostora $\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\{u, v\}$.

(b) Izračunajte oddaljenost točke $A(-3, 7, 1, 1)$ od $\mathcal{V}$.

(a) Uporabimo Gram-Schmidtov postopek. Ker je

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = 4 + 1 + 1 + 4 = 10,$$

je

$$g_1 = \frac{u}{\|u\|} = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2).$$

Nadalje iz

$$\langle v, g_1\rangle = \langle (5, 3, 5, 4), \tfrac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2)\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(10 - 3 + 5 + 8) = \tfrac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

dobimo

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_2 &= v - \langle v, g_1\rangle g_1 \\
&= (5, 3, 5, 4) - 2\sqrt{10} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2) \\
&= (5, 3, 5, 4) - (4, -2, 2, 4) \\
&= (1, 5, 3, 0).
\end{aligned}$$

Sledi

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2\rangle = 1 + 25 + 9 + 0 = 35 \quad \text{in} \quad g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \tfrac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0).$$

Ortonormirana baza je torej $\left(\tfrac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2), \tfrac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0)\right)$.

(b) Za oddaljenost od podprostora moramo izračunati pravokotno projekcijo vektorja $a = (-3, 7, 1, 1)$ na podprostor, ki jo dobimo po formuli

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{V}}\, a = \langle a, g_1\rangle g_1 + \langle a, g_2\rangle g_2.$$

Iz

$$\begin{aligned}
\langle a, g_1\rangle &= \langle (-3, 7, 1, 1), \tfrac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2)\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(-6 - 7 + 1 + 2) = -\sqrt{10} \\
\langle a, g_2\rangle &= \langle (-3, 7, 1, 1), \tfrac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0)\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{35}}(-3 + 35 + 3 + 0) = \sqrt{35}
\end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\mathcal{V}}\, a &= -\sqrt{10}\tfrac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2) + \sqrt{35}\tfrac{1}{\sqrt{35}}(1, 5, 3, 0) \\
&= -(2, -1, 1, 2) + (1, 5, 3, 0) \\
&= (-1, 6, 2, -2).
\end{aligned}$$

Oddaljenost dobimo po formuli

$$
\begin{aligned}
d(A, \mathcal{V}) &= \|a - \operatorname{proj}_{\mathcal{V}} a\| \\
&= \|(-3, 7, 1, 1) - (-1, 6, 2, -2)\| \\
&= \|(-2, 1, -1, 3)\| \\
&= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{15}
\end{aligned}
$$

2. kolokvij (17. 1. 2022)

1. naloga [25 točk]

Dana je tabela vrednosti meritev:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	4	3	1	2	5

Poiščite parabolo $y = a + bx + cx^2$, ki se najbolje prilega tem točkam.

Podatki nam dajo sistem 5 linearnih enačb:

$$\begin{aligned}
4 &= a + b \cdot (-2) + c \cdot (-2)^2 \\
3 &= a + b \cdot (-1) + c \cdot (-1)^2 \\
1 &= a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 \\
2 &= a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 \\
5 &= a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2
\end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Najboljše parametre dobimo kot rešitev normalnega sistema $A^\top Ax = A^\top b$ ali

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ 41 \end{bmatrix}.$$

Takoj dobimo $b = \frac{1}{10}$. Če od zadnje enačbe odštejemo dvakratnik prve, dobimo

$$14c = 11, \quad \text{torej je} \quad c = \tfrac{11}{14}.$$

Iz prve enačbe potem izračunamo še $a = \frac{10}{7}$. Iskana parabola je

$$y = \tfrac{10}{7} + \tfrac{1}{10}x + \tfrac{11}{14}x^2.$$

2. naloga [25 točk]

Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 2 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Preuredite sistem, če je treba, tako da bosta Jacobijeva in Gauß-Seidlova metoda iteracije zagotovo konvergirali.

(b) Pri začetnim vektorju $x^{(0)} = [0, 0, 0]^\top$ izračunajte prva približka po obeh metodah in ju primerjajte s pravo rešitvijo sistema.

(a) Obe iteraciji zagotovo konvergirata, če je matrika strogo diagonalno dominantna. To dosežemo z zamenjavo prve in zadnje vrstice, torej

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= -7 \end{aligned}$$

(b) Enačbe za iteracije dobimo iz zgornjega sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(7 + x_2 - 2x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{-5}(7 - 2x_1 - 2x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{10}(-7 - 4x_1 - 5x_2) \end{aligned}$$

Po Jacobiju dobimo

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{4}(7 + 0 - 2 \cdot 0) = \tfrac{7}{4} & x_1^{(2)} &= \tfrac{1}{4}(7 + (-\tfrac{7}{5}) - 2 \cdot (-\tfrac{7}{10})) = \tfrac{7}{4} \\ x_2^{(1)} &= -\tfrac{1}{5}(7 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = -\tfrac{7}{5} & x_2^{(2)} &= -\tfrac{1}{5}(7 - 2 \cdot \tfrac{7}{4} - 2 \cdot (-\tfrac{7}{10})) = -\tfrac{49}{50} \\ x_3^{(1)} &= \tfrac{1}{10}(-7 - 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0) = -\tfrac{7}{10} & x_3^{(2)} &= \tfrac{1}{10}(-7 - 4 \cdot \tfrac{7}{4} - 5 \cdot (-\tfrac{7}{5})) = -\tfrac{7}{10} \end{aligned}$$

po Gauß-Seidlu pa

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{4}(7 + 0 - 2 \cdot 0) = \tfrac{7}{4} & x_1^{(2)} &= \tfrac{1}{4}(7 + (-\tfrac{7}{10}) - 2 \cdot (-\tfrac{21}{20})) = \tfrac{21}{10} \\ x_2^{(1)} &= -\tfrac{1}{5}(7 - 2 \cdot \tfrac{7}{4} - 2 \cdot 0) = -\tfrac{7}{10} & x_2^{(2)} &= -\tfrac{1}{5}(7 - 2 \cdot \tfrac{21}{10} - 2 \cdot (-\tfrac{21}{20})) = -\tfrac{49}{50} \\ x_3^{(1)} &= \tfrac{1}{10}(-7 - 4 \cdot \tfrac{7}{4} - 5 \cdot (-\tfrac{7}{10})) = -\tfrac{21}{20} & x_3^{(2)} &= \tfrac{1}{10}(-7 - 4 \cdot \tfrac{21}{10} - 5 \cdot (-\tfrac{49}{50})) = -\tfrac{21}{20} \end{aligned}$$

Prava rešitev je

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

tako da je po dveh korakih sploh Gauß-Seidlova metoda dala že zelo dober približek.

3. naloga [25 točk]

Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' - 3y = 8xe^{-x} - 2e^{3x}\cos x.$$

Karakteristični polinom enačbe $y'' - 2y' - 3y = 0$ je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Splošna rešitev homogene enačbe je zato

$$y_H(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}.$$

Ker je -1 enostavna ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za xe^{-1x}

$$y_{P1}(x) = x^1(ax + b)e^{-x} = (ax^2 + bx)e^{-x}.$$

Izračunamo še prva odvoda:

$$\begin{aligned} y'_{P1}(x) &= (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx)(-e^{-x}) \\ &= \big(-ax^2 + (2a - b)x + b\big)e^{-x} \\ y''_{P1}(x) &= \big(-2ax + (2a - b)\big)e^{-x} + \big(-ax^2 + (2a - b)x + b\big)(-e^{-x}) \\ &= \big(ax^2 + (-4a + b)x + (2a - 2b)\big)e^{-x}. \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo, uredimo in dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P1} - 2y'_{P1} - 3y_{P1} &= xe^{-x} \\ \big((-8a)x + (2a - 4b)\big)e^{-x} &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

Torej je $a = -\frac{1}{8}$ in $b = -\frac{1}{16}$, ter

$$y_{P1}(x) = (-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x)e^{-x}.$$

$3\pm i$ pa nista ničli karakterističnega polinoma, zato je nastavek za $e^{3x}\cos x = e^{3x}(1\cos 1x + 0\sin 1x)$ enak

$$y_{P2}(x) = x^0e^{3x}(c\cos x + d\sin x) = e^{3x}(c\cos x + d\sin x).$$

Odvoda sta

$$\begin{aligned} y'_{P2}(x) &= 3e^{3x}(c\cos x + d\sin x) + e^{3x}(-c\sin x + d\cos x) \\ &= e^{3x}\big((3c + d)\cos x + (3d - c)\sin x\big) \\ y''_{P2}(x) &= 3e^{3x}\big((3c + d)\cos x + (3d - c)\sin x\big) + \\ &\qquad + e^{3x}\big(-(3c + d)\sin x + (3d - c)\cos x\big) \\ &= e^{3x}\big((8c + 6d)\cos x + (8d - 6c)\sin x\big) \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P2} - 2y'_{P2} - 3y_{P2} &= e^{3x}\cos x \\ e^{3x}\big((-c+4d)\cos x + (-d-4c)\sin x\big) &= e^{3x}\cos x \end{aligned}$$

oziroma $-c+4d=1$ in $-d-4c=0$, iz česar sledi $c=-\frac{1}{17}$ in $d=\frac{4}{17}$ in

$$y_{P2}(x) = e^{3x}(-\tfrac{1}{17}\cos x + \tfrac{4}{17}\sin x).$$

Partikularna rešitev je tako

$$y_P(x) = 8y_{P1} - 2y_{P2} = (-x^2 - \tfrac{1}{2}x)e^{-x} + e^{3x}(\tfrac{2}{17}\cos x - \tfrac{8}{17}\sin x),$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} + (-x^2 - \tfrac{1}{2}x)e^{-x} + e^{3x}(\tfrac{2}{17}\cos x - \tfrac{8}{17}\sin x).$$

4. naloga [25 točk]

Poiščite rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y, & x(0) &= -1,\\ y' &= 4x + 3y, & y(0) &= 2. \end{aligned}$$

Karakteristični polinom pripadajoče matrike je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 4.$$

Lastni vrednosti sta torej $3 \pm 2i$. Dovolj je, da poiščemo lastni vektor za eno od njih, npr. za $3 + 2i$.

Ena rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Ae^{3t}\left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) + Be^{3t}\left(\sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right).$$

Začetni pogoj nam da

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = A \cdot 1 \left(1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) + B \cdot 1 \left(0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A \\ -2B \end{bmatrix}.$$

Torej je $A = B = -1$ in

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t - 2\sin 2t \end{bmatrix}.$$

1. izpit (1. 2. 2022)

1. naloga [25 točk]

Določite (z utemeljitvijo), katere od naslednjih podmnožic so baze prostora $\mathbb{R}^4$ in v vsaki, ki je baza, razvijte vektor $v = (-3, -10, 5, 9)$.

(a) $\mathcal{A} = \{(1, -2, 1, -1), (1, 3, -1, 1), (4, -3, 2, -2), (2, 0, 2, 2)\}$,

(b) $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1, -2), (3, 1, -5, -8), (1, -2, -4, 4), (2, 8, -5, 1)\}$,

(c) $\mathcal{C} = \{(-1, 4, 7, 3), (10, 9, 5, -5), (3, 3, 3, 3)\}$.

Prostor $\mathbb{R}^4$ ima dimenzijo 4, kar pomeni, da ima vsaka njegova baza 4 elemente. Množica $\mathcal{C}$ torej zagotovo ni baza. Za ostali dve pa moramo preveriti, ali sta linearno neodvisni.

Nastavimo za $\mathcal{A}$

$$\alpha(1, -2, 1, -1) + \beta(1, 3, -1, 1) + \gamma(4, -3, 2, -2) + \delta(2, 0, 2, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Poiskati moramo torej rešitve sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 4\gamma + 2\delta &= 0 \\ -2\alpha + 3\beta - 3\gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta &= 0 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma + 2\delta &= 0 \end{aligned}$$

Rešujemo v matrični obliki. Najprej s pomočjo prve vrstice dosežemo, da so v prvem stolpcu pod diagonalo same ničle. Nato zadnji dve vrstici delimo z 2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Zamenjamo srednji dve vrstici. Potem dosežemo ničle še v drugem stolpcu pod diagonalo in nato dokončamo proces:

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sistem torej ima neničelne rešitve, zato $\mathcal{A}$ ni linearno neodvisna in posledično ni baza. Vzamemo lahko $\delta = 0$, $\gamma = 1$, $\beta = -1$ in $\alpha = -3$. Dejansko je

$$-3(1, -2, 1, -1) - (1, 3, -1, 1) + (4, -3, 2, -2) = (0, 0, 0, 0).$$

Podobno nastavimo linearno kombinacijo za $\mathcal{B}$:

$$\alpha(1,1,-1,-2)+\beta(3,1,-5,-8)+\gamma(1,-2,-4,4)+\delta(2,8,-5,1)=(0,0,0,0),$$

oziroma

$$\begin{aligned} \alpha+3\beta+\gamma+2\delta &= 0 \\ \alpha+\beta-2\gamma+8\delta &= 0 \\ -\alpha-5\beta-4\gamma-5\delta &= 0 \\ -2\alpha-8\beta+4\gamma+\delta &= 0 \end{aligned}$$

Dosežemo, da so v prvih dveh stolpcih pod diagonalo ničle:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 8 & 0 \\ -1 & -5 & -4 & -5 & 0 \\ -2 & -8 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Iz te oblike že sledi, da je edina rešitev $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$. Množica $\mathcal{B}$ je linearno neodvisna in zato baza.

Poiščimo torej še koeficiente v razvoju vektorja v v bazi $\mathcal{B}$:

$$\alpha(1,1,-1,-2)+\beta(3,1,-5,-8)+\gamma(1,-2,-4,4)+\delta(2,8,-5,1)=(-3,-10,5,9).$$

Enaka koraka kot zgoraj nam dasta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 8 & -10 \\ -1 & -5 & -4 & -5 & 5 \\ -2 & -8 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 10 \end{array}\right].$$

Po vrsti so

$$\delta=-1, \quad \gamma=1, \quad \beta=-1 \quad \text{in} \quad \alpha=1.$$

Še preizkus:

$$(1,1,-1,-2)-(3,1,-5,-8)+(1,-2,-4,4)-(2,8,-5,1)=(-3,-10,5,9).$$

2. naloga [25 točk]

Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (3x + y - 3z, -2x + 2y + z, x + 3y - 2z).$$

(a) Zapišite matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardni bazi.

(b) Določite dimenziji in bazi njenega ničelnega prostora in zaloge vrednosti.

(c) Določite, ali je $\mathcal{A}$ injektivna, surjektivna.

(a) Stolpce matrike dobimo kot slike baznih vektorjev. Iz

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1,0,0) &= (3,-2,1), \\ \mathcal{A}(0,1,0) &= (1,2,3), \\ \mathcal{A}(0,0,1) &= (-3,1,-2), \end{aligned}$$

sledi

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) V ničelnem prostoru so rešitve enačbe

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (3x + y - 3z, -2x + 2y + z, x + 3y - 2z) = (0,0,0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ trojica

$$z = \alpha, \quad y = \tfrac{3}{8}\alpha \quad \text{in} \quad x = \tfrac{7}{8}\alpha$$

reši zgornjo enačbo. Torej

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\alpha(\tfrac{7}{8}, \tfrac{3}{8}, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Lin}\{(\tfrac{7}{8}, \tfrac{3}{8}, 1)\}.$$

Ničelni prostor je enorazsežen, baza je npr. $\big((7,3,8)\big)$.

Iz $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sledi

$$\dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = 3 - 1 = 2.$$

Zalogo vrednosti razpenjajo stolpci matrike. Prva dva nista vzporedna, torej lahko ju lahko vzamemo za bazo:

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \operatorname{Lin}\{(3,-2,1), (1,2,3)\}.$$

(c) $\mathcal{A}$ ni injektivna, saj je ničelni prostor enodimenzionalen, niti ni surjektivna, saj je zaloga vrednosti dvodimenzionalna.

3. naloga [30 točk]

Dana sta matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in vektor} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunajte QR-razcep matrike A.

(b) Poiščite vektor x, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje ustreza sistemu $Ax = b$.

Poiskati moramo torej QR-razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo Gram-Schmidtov postopek na njenih stolpcih. Ker je

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

je

$$g_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \text{Torej} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ -\frac{2}{3} & * & * \\ -\frac{1}{3} & * & * \\ \frac{2}{3} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Nadalje iz

$$\langle v_2, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3}(0 - 2 + 2 + 0) = 0$$

dobimo

$$\tilde{g}_2 = v_2 - \langle v_2, g_1 \rangle g_1 = v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \|\tilde{g}_2\|^2 = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2 = 9.$$

Sledi

$$g_2 = \frac{\tilde{g}_2}{\|\tilde{g}_2\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & * \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & * \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & * \\ \frac{2}{3} & 0 & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Ker sta skalarna produkta

$$\langle v_3, g_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{2}{3} \quad \text{in} \quad \langle v_3, g_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = -1,$$

je

$$\tilde{g}_3 = v_3 - \langle v_3, g_1\rangle g_1 - \langle v_3, g_2\rangle g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{2}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{10}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{bmatrix} = \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$\|\tilde{g}_3\| = \frac{5}{9}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{5}{9}\sqrt{18} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

Zadnji bazni vektor je

$$g_3 = \frac{\tilde{g}_3}{\|\tilde{g}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tako je

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

Najboljši približek $x = [x_1, x_2, x_3]^\top$ reši sistem $Rx = Q^\top b$. Ker je

$$Q^\top b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix},$$

iz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

sledi

$$x_3 = -\frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{5} \quad \text{in} \quad x_1 = -\frac{1}{5}.$$

4. naloga [20 točk]

Dana je funkcija

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Določite njeno Fourierovo vrsto.

Najprej določimo konstantni koeficient

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\ dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ostale dobimo s pomočjo integriranja po delih:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k}\ dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(0 - \left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos k\pi - 1}{k^2} \\
&= \begin{cases} 0, & k \text{ sod} \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & k \text{ lih} \end{cases}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[x \left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\ dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\pi \frac{\cos k\pi}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\pi \frac{(-1)^k}{k} + 0 \right) \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{k}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k \text{ lih}} \frac{-2}{\pi k^2} \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).
\end{aligned}
$$

1. kolokvij (5. 12. 2022)

1. naloga [25 točk]

V $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji

$$a = (-1, 2, 0, 1),\ b = (2, 0, 1, -3),\ c = (0, 4, 1, -1),\ d = (1, 1, 1, 0),\ e = (1, -1, 0, -3).$$

Naj bo $\mathcal{V}$ linearna ogrinjača teh 5 vektorjev.

(a) Določite dimenzijo podprostora $\mathcal{V}$ in eno njegovo bazo.

(b) Za vektor $u = (1, 1, 1, 1)$ določite, ali leži v $\mathcal{V}$. V primeru, da je tako, ga razvijte v bazi iz točke (a).

(a) Teh pet vektorjev zapišemo po vrsticah v matriko in izvedemo Gaußovo eliminacijo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo tri neničelne vrtice, ki so (ena) baza za $\mathcal{V}$. Dimenzija $\mathcal{V}$ je torej 3.

(b) Vektor u leži v podprostoru $\mathcal{V}$, če ga je moč zapisati kot linearno kombinacijo baznih elementov, to je

$$(1, 1, 1, 1) = \alpha(-1, 2, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, -2) + \gamma(0, 0, 1, 7).$$

Pripadajoč sistem enačb je

$$\begin{aligned} 1 &= -\alpha \\ 1 &= 2\alpha + \beta \\ 1 &= \gamma \\ 1 &= \alpha - 2\beta + 7\gamma \end{aligned}$$

Iz prve in tretje enačbe takoj sledi $\alpha = -1$ in $\gamma = 1$. Posledično je $\beta = 3$. Vendar pri teh vrednostih zadnja enačba ni izpolnjena. Torej $u \notin \mathcal{V}$.

2. naloga [20 točk]

Določite (z utemeljitvijo), ali so naslednje podmnožice linearni podprostori v danih prostorih:

(a) $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(2) = 2f(1)^2\}$ v prostoru vseh funkcij $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(b) $\mathcal{B} = \{(x, y, z) : x + y^2 + z^3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(c) $\mathcal{C} = \{\left[\begin{smallmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{smallmatrix}\right] : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$,

(d) $\mathcal{D} = \{(x, y, z) : 5x = 3y - 2z,\ 5z = 3x - 2y\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) $\mathcal{A}$ ni podprostor:

Za protiprimer moremo vzeti identično preslikavo $\mathrm{id}(x) = x$. Ker je

$$\mathrm{id}(2) = 2 \quad \text{in} \quad 2(\mathrm{id}(1))^2 = 2,$$

leži id v $\mathcal{A}$. Po drugi strani pa $-\mathrm{id} \notin \mathcal{A}$, saj je

$$(-\mathrm{id})(2) = -2, \quad \text{vendar} \quad 2((-\mathrm{id})(1))^2 = 2(-1)^2 = 2.$$

(b) $\mathcal{B}$ ni podprostor, ker ni zaprta za množenje s skalarjem:

Na primer $(-1, 0, 1) \in \mathcal{B}$, ampak $2(-1, 0, 1) \notin \mathcal{B}$, saj je $-2 + 0^2 + 2^3 = 6 \neq 0$.

(c) $\mathcal{C}$ je podprostor:

Vzemimo poljubni matriki $\left[\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right]$ in $\left[\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right]$ iz $\mathcal{C}$ in poljuben skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je njuna vsota v $\mathcal{C}$, saj je

$$\left[\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{C},$$

in zmožek s skalarjem, saj je

$$\alpha\left[\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \alpha b_1 & \alpha c_1 & \alpha a_1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{C}.$$

(d) $\mathcal{D}$ je podprostor, ker je množica rešitev homogenega sistema linearnih enačb

$$5x - 3y + 2z = 0 \quad \text{in} \quad 3x - 2y - 5z = 0.$$

3. naloga [25 točk]

Dana je linearna preslikava

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{A}(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - y, 4x - y - 3z, -x + 2y - z).$$

(a) Zapišite matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardnih bazah.

(b) Poiščite bazo in dimenzijo ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$.

(c) Ali je preslikava $\mathcal{A}$ injektivna, surjektivna?

(a) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1,0,0) &= (2,1,4,-1), \\ \mathcal{A}(0,1,0) &= (-3,-1,-1,2), \\ \mathcal{A}(0,0,1) &= (1,0,-3,-1), \end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ničelni prostor sestavljajo vektorji, ki se preslikajo v ničelni vektor, torej rešitve

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - y, 4x - y - 3z, -x + 2y - z) = (0, 0, 0, 0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sledi

$$z = \alpha, \quad y = \alpha, \quad x = \alpha.$$

Torej

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\alpha(1, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Lin}\{(1, 1, 1)\}.$$

Ničelni prostor je posledično enorazsežen, baza je npr. $\{(1, 1, 1)\}$.

Iz $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sledi

$$\dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = 3 - 1 = 2.$$

Zalogo vrednosti razpenjajo stolpci matrike. Prva dva nista vzporedna, torej lahko ju lahko vzamemo za bazo:

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \text{Lin}\{(2, 1, 4, -1), (-3, -1, -1, 2)\}.$$

(c) $\mathcal{A}$ ni injektivna, saj je ničelni prostor enodimenzionalen, niti ni surjektivna, saj je zaloga vrednosti dvodimenzionalna.

4. naloga [30 točk]

V prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje kvečjemu 2 definiramo skalarni produkt s predpisom

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

(a) Pokažite, da velja $\langle p, p\rangle = 0 \iff p = 0$. Ostalih lastnosti skalarnega produkta ni treba preverjati.

(b) Poiščite eno ortonormirano bazo $\mathbf{B}$ tega evklidskega prostora.

(c) Izrazite v bazi $\mathbf{B}$ polinom $q_0(x) = x^2 + x$.

(a) Če je $p = 0$, je očitno $\langle p, p\rangle = 0$, saj je $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$.

Obratno: Vzemimo poljuben $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, za katerega velja $\langle p, p\rangle = 0$. Polinom p je oblike $p(x) = ax^2 + bx + c$. Sledi

$$0 = \langle p, p\rangle = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 = (a - b + c)^2 + c^2 + (a + b + c)^2.$$

Torej mora veljati

$$a - b + c = c = a + b + c = 0,$$

od koder sledi $a = b = c = 0$ in zato $p = 0$.

(b) Za prostor $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ imamo standardno bazo $\mathbf{S} = (1, x, x^2)$. Na njej bomo uporabili Gram-Schmidtov postopek in tako dobili eno ortonormirano bazo. Označimo

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2.$$

Ker je

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0\rangle = p_0(-1)^2 + p_0(0)^2 + p_0(1)^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3,$$

je

$$g_0 = \tfrac{p_0}{\|p_0\|} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\, p_0, \quad \text{oziroma} \quad g_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nadalje iz

$$\begin{aligned}
\langle p_1, g_0\rangle &= p_1(-1)g_0(-1) + p_1(0)g_0(0) + p_1(1)g_0(1)\\
&= (-1)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

sledi $\tilde{g}_1 = p_1$. Ker je

$$\|\tilde{g}_1\|^2 = \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_1\rangle = \tilde{g}_1(-1)^2 + \tilde{g}_1(0)^2 + \tilde{g}_1(1)^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2,$$

je

$$g_1 = \tfrac{\tilde{g}_1}{\|\tilde{g}_1\|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, p_1, \quad \text{oziroma} \quad g_1(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, x.$$

Za tretji bazni element najprej izračunamo

$$\begin{aligned}\langle p_2, g_0\rangle &= p_2(-1)g_0(-1) + p_2(0)g_0(0) + p_2(1)g_0(1)\\ &= 1\cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 0\cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}\\ &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\langle p_2, g_1\rangle &= p_2(-1)g_1(-1) + p_2(0)g_1(0) + p_2(1)g_1(1)\\ &= 1\cdot (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) + 0\cdot 0 + 1\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Sledi

$$\tilde{g}_2 = p_2 - \langle p_2, g_0\rangle g_0 - \langle p_2, g_1\rangle g_1 = p_2 - \tfrac{2}{\sqrt{3}}g_0, \quad \tilde{g}_2(x) = x^2 - \tfrac{2}{3}.$$

Normo tega polinoma dobimo iz

$$\|\tilde{g}_2\|^2 = \tilde{g}_2(-1)^2 + \tilde{g}_2(0)^2 + \tilde{g}_2(1)^2 = (\tfrac{1}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{2}{3}.$$

Torej

$$g_2(x) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}(x^2 - \tfrac{2}{3}).$$

Ena ortonormirana baza je $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}x, \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

(c) Nastavimo

$$q_0 = \alpha g_0 + \beta g_1 + \gamma g_2$$

oziroma

$$x^2 + x = \alpha\cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \beta\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \gamma\cdot \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right).$$

Dobimo sistem

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{3}}\alpha - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\gamma &= 0\\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\beta &= 1\\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}\gamma &= 1\end{aligned}$$

Sledi

$$\gamma = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \beta = \sqrt{2}, \quad \alpha = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

2. kolokvij (10. 1. 2023)

1. naloga [30 točk]

Dana sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Določite singularni razcep matrike A.

(b) Po metodi najmanjših kvadratov izračunajte najboljši približek za rešitev sistema $Ax = b$.

(a) Za singularni razcep $A = U\Sigma V^\top$ najprej izračunamo matriko

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti te matrike dobimo iz karakterističnega polinoma

$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 3^2 = (3-\lambda)(9-\lambda).$$

Določimo sedaj pripadajoče lastne vektorje.

- $\lambda = 9$: Iščemo rešitve enačbe $(A - 9I)x = 0$. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Lastni vektorji so torej večkratniki vektorja $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Ker potrebujemo normiranega, vzamemo na primer $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

- $\lambda = 3$: Tukaj določamo vektorje z $(A - 3I)x = 0$. Iz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  dobimo, da je ena možnost $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Σ je diagonalna matrika, katere elementi so padajoče urejeni koreni lastnih vrednosti matrike $A^\top A$, stolpci matrike V pa pripadajoči normirani lastni vektorji:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stolpca matrike U dobimo iz formule $\sigma_i u_i = A v_i$, $i = 1, 2$:

$$\sigma_1 u_1 = A v_1 \quad \Rightarrow \quad 3u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 u_2 = A v_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Torej imamo še

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

(b) Lahko uporabimo zgornji singularni razcep. Psevdoinverz je

$$A^+ = V\Sigma^+U^\top = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Najboljši približek po metodi najmanjših kvadratov je

$$x^+ = A^+b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. naloga [25 točk]

Dan je sistem

$$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 1 \\ 4x + 2y - z &= 2 \\ -x + 3y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

(a) Uredite sistem, če je treba, tako da bosta Jacobijeva in Gauß-Seidlova metoda iteracije zagotovo konvergirali. (Utemeljite izbiro.)

(b) Izračunajte prva dva približka po obeh metodah pri začetnem vektorju $x^{(0)} = [0,0,0]^\top$ in ju primerjajte s pravo rešitvijo sistema.

(a) Obe iteraciji zagotovo konvergirata, če je matrika strogo diagonalno dominantna. To dosežemo z zamenjavo prve in druge vrstice, torej

$$\begin{aligned} 4x + 2y - z &= 2 \\ -2x + 4y + z &= 1 \\ -x + 3y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

(b) Enačbe za iteracije dobimo, če zgornji sistem prepišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}(2 - 2y + z) \\ y &= \tfrac{1}{4}(1 + 2x - z) \\ z &= \tfrac{1}{5}(2 + x - 3y) \end{aligned}$$

Prva dva približka po Jacobijevi metodi sta tako

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \tfrac{1}{4}(2 - 2\cdot 0 + 0) = \tfrac{1}{2} & x^{(2)} &= \tfrac{1}{4}(2 - 2\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{5}) = \tfrac{19}{40} \\ y^{(1)} &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cdot 0 - 0) = \tfrac{1}{4} & y^{(2)} &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5}) = \tfrac{2}{5} \\ z^{(1)} &= \tfrac{1}{5}(2 + 0 - 3\cdot 0) = \tfrac{2}{5} & z^{(2)} &= \tfrac{1}{5}(2 + \tfrac{1}{2} - 3\cdot\tfrac{1}{4}) = \tfrac{7}{20} \end{aligned}$$

po Gauß-Seidlovi pa

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \tfrac{1}{4}(2 - 2\cdot 0 + 0) = \tfrac{1}{2} & x^{(2)} &= \tfrac{1}{4}(2 - 2\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}) = \tfrac{3}{10} \\ y^{(1)} &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cdot\tfrac{1}{2} - 0) = \tfrac{1}{2} & y^{(2)} &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cdot\tfrac{3}{10} - \tfrac{1}{5}) = \tfrac{7}{20} \\ z^{(1)} &= \tfrac{1}{5}(2 + \tfrac{1}{2} - 3\cdot\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{5} & z^{(2)} &= \tfrac{1}{5}(2 + \tfrac{3}{10} - 3\cdot\tfrac{7}{20}) = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Točna rešitev je $x = y = \frac{3}{8}$ in $z = \frac{1}{4}$.

3. naloga [25 točk]

Poiščite rešitev začetnega problema

$$y'' - 2y' + y = x^2 + e^x \sin x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Najprej poiščemo rešitve pripadajoče homogene enačbe

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Njen karakteristični polinom je

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Splošna rešitev homogene enačbe je zato

$$y_H(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

Nastavek za partikularno rešitev, ki reši enačbo z desno stranjo $f_1(x) = x^2 = e^{0x} \cdot x^2$, je

$$y_{P1}(x) = x^0 e^{0x}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + c,$$

saj 0 ni ničla karakterističnega polinoma. Izračunamo še prva odvoda:

$$y'_{P1}(x) = 2ax + b \quad \text{in} \quad y''_{P1}(x) = 2a.$$

Vstavimo v enačbo, uredimo in dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P1} - 2y'_{P1} + y_{P1} &= x^2 \\ ax^2 + (-4a + b)x + (2a - 2b + c) &= x^2 \end{aligned}$$

Torej so $a = 1$, $b = 4$ in $c = 6$, ter

$$y_{P1}(x) = x^2 + 4x + 6.$$

Za desno stran $f_2(x) = e^x \sin x = e^{1x}(1\ \sin 1x + 0\ \cos 1x)$ pa je odločilno, da $1 \pm i$ nista ničli karakterističnega polinoma. Nastavek je zato enak

$$y_{P2}(x) = x^0 e^{1x}(\alpha \sin 1x + \beta \cos 1x) = e^x(\alpha \sin x + \beta \cos x).$$

Odvoda sta

$$\begin{aligned} y'_{P2}(x) &= e^x\big((\alpha - \beta)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x\big) \\ y''_{P2}(x) &= e^x\big(-2\beta \sin x + 2\alpha \cos x\big) \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P2} - 2y'_{P2} + y_{P2} &= e^x \sin x \\ -e^x(\alpha \sin x + \beta \cos x) &= e^x \sin x \end{aligned}$$

iz česar sledi $\alpha = -1$, $\beta = 0$ in

$$y_{P2}(x) = -e^x \sin x.$$

Partikularna rešitev je tako

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x) = x^2 + 4x + 6 - e^x \sin x,$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^x + Bxe^x + x^2 + 4x + 6 - e^x \sin x.$$

Da bomo lahko upoštevali oba začetna pogoja, splošno rešitev odvajamo:

$$y'(x) = Ae^x + B(e^x + xe^x) + 2x + 4 - (e^x \sin x + e^x \cos x).$$

Iz $y(0) = 1$ sledi

$$1 = A + 0 + 0 + 0 + 6 - 0, \quad \text{oziroma} \quad A = -5,$$

iz $y'(0) = 0$ pa

$$0 = A + B + 0 + 4 - 1, \quad \text{in tako} \quad B = 2.$$

Rešitev danega začetnega problema je funkcija

$$y(x) = -5e^x + 2xe^x + x^2 + 4x + 6 - e^x \sin x.$$

4. naloga [20 točk]

Poiščite splošno rešitev sistema

$$\begin{aligned} x' &= -z \\ y' &= -x + y - z \\ z' &= x - y + 2z \end{aligned}$$

Sistem prepišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti pripadajoče matrike dobimo iz enačbe

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1) - (1 - 1 + \lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1) - \lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Določimo lastne vektorje:

- Za $\lambda = 0$ iz
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
dobimo na primer lastni vektor $[1, 1, 0]^\top$,
- za $\lambda = 1$ iz
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
lastni vektor $[-1, 0, 1]^\top$,
- ter za $\lambda = 2$ iz
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
še lastni vektor $[-1, -1, 2]^\top$.

Splošna rešitev je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Ae^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + Be^{1t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + Ce^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Be^t - Ce^{2t} \\ A - Ce^{2t} \\ Be^t + 2Ce^{2t} \end{bmatrix}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

1. izpit (31. 1. 2023)

1. naloga [25 točk]

V prostoru $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji $u = (1, 4, -2, 2)$, $v = (-1, 2, 2, 1)$ in $w = (2, 1, 1, -2)$.

(a) Poiščite eno ortonormirano bazo podprostora $\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\{u, v, w\}$.

(b) Izračunajte oddaljenost točke $A(3, 1, 0, 1)$ do podprostora $\mathcal{V}$.

(a) Uporabimo Gram-Schmidtov postopek. Iz

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2 + 2^2} = 5,$$

dobimo

$$e_1 = \frac{u}{\|u\|} = (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}).$$

Za naslednji bazni element najprej izračunamo

$$\langle v, e_1 \rangle = \langle (-1, 2, 2, 1), (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}) \rangle = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{8}{5} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{5} = 1.$$

Dobimo

$$\tilde{e}_2 = v - \langle v, e_1 \rangle e_1 = (-1, 2, 2, 1) - 1 \cdot (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}) = (-\tfrac{6}{5}, \tfrac{6}{5}, \tfrac{12}{5}, \tfrac{3}{5}).$$

Sledi

$$\|\tilde{e}_2\|^2 = \langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle = \tfrac{36}{25} + \tfrac{36}{25} + \tfrac{144}{25} + \tfrac{9}{25} = 9$$

in

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \tfrac{1}{3}(-\tfrac{6}{5}, \tfrac{6}{5}, \tfrac{12}{5}, \tfrac{3}{5}) = (-\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5}).$$

Na koncu iz

$$\begin{aligned}
\langle w, e_1 \rangle &= \langle (2, 1, 1, -2), (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}) \rangle = \tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{5} - \tfrac{4}{5} = 0 \\
\langle w, e_2 \rangle &= \langle (2, 1, 1, -2), (-\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5}) \rangle = -\tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{5} = 0
\end{aligned}$$

dobimo

$$\tilde{e}_3 = w - \langle w, e_1 \rangle e_1 - \langle w, e_2 \rangle e_2 = w,$$

ter

$$\|\tilde{e}_3\|^2 = 4+1+1+4 = 10 \quad \text{in} \quad e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, -2) = (\tfrac{2}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}, -\tfrac{2}{\sqrt{10}}).$$

Ena ortonormirana baza je torej (e_1, e_2, e_3).

(b) Za oddaljenost od podprostora moramo izračunati pravokotno projekcijo vektorja $a = (3, 1, 0, 1)$ na podprostor $\mathcal{V}$, ki jo dobimo po formuli

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{V}}\, a = \langle a, e_1 \rangle e_1 + \langle a, e_2 \rangle e_2 + \langle a, e_3 \rangle e_3.$$

Iz

$$\begin{aligned}
\langle a, e_1\rangle &= \langle (3,1,0,1), (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5})\rangle = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} + 0 + \tfrac{2}{5} = \tfrac{9}{5}\\
\langle a, e_2\rangle &= \langle (3,1,0,1), (-\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5})\rangle = -\tfrac{6}{5} + \tfrac{2}{5} + 0 + \tfrac{1}{5} = -\tfrac{3}{5}\\
\langle a, e_3\rangle &= \langle (3,1,0,1), (\tfrac{2}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}, -\tfrac{2}{\sqrt{10}})\rangle = \tfrac{6}{\sqrt{10}} + \tfrac{1}{\sqrt{10}} + 0 - \tfrac{2}{\sqrt{10}} = \tfrac{5}{\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\mathcal{V}} a &= \tfrac{9}{5}\cdot(\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}) + (-\tfrac{3}{5})\cdot(-\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{5}) + \tfrac{5}{\sqrt{10}}\cdot(\tfrac{2}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}, -\tfrac{2}{\sqrt{10}})\\
&= (\tfrac{9}{25}, \tfrac{36}{25}, -\tfrac{18}{25}, \tfrac{18}{25}) + (\tfrac{6}{25}, -\tfrac{6}{25}, -\tfrac{12}{25}, -\tfrac{3}{25}) + (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -1)\\
&= (\tfrac{8}{5}, \tfrac{17}{10}, -\tfrac{7}{10}, -\tfrac{2}{5}).
\end{aligned}$$

Oddaljenost dobimo po formuli

$$\begin{aligned}
d(A, \mathcal{V}) &= \|a - \operatorname{proj}_{\mathcal{V}} a\|\\
&= \|(3,1,0,1) - (\tfrac{8}{5}, \tfrac{17}{10}, -\tfrac{7}{10}, -\tfrac{2}{5})\|\\
&= \|(\tfrac{7}{5}, -\tfrac{7}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{7}{5})\|\\
&= \tfrac{7\sqrt{10}}{10}.
\end{aligned}$$

2. naloga [25 točk]

Dani sta linearni preslikavi

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{A}(x, y, z) = (-x + 2y + z, 3x - y + 2z, -x + 2y)$$

in

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B}(x, y, z) = (x + y - 4z, -2x + y + z).$$

(a) Zapišite matrike preslikav $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ v standardnih bazah.

(b) Poiščite bazo in dimenzijo ničelnega prostora in zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$.

(c) Ali je preslikava $\mathcal{B}$ injektivna, surjektivna?

(a) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev. Ker je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1,0,0) &= (-1,3,-1), & \mathcal{B}(1,0,0) &= (1,-2) \\ \mathcal{A}(0,1,0) &= (2,-1,2), & \mathcal{B}(0,1,0) &= (1,1) \\ \mathcal{A}(0,0,1) &= (1,2,0), & \mathcal{B}(0,0,1) &= (-4,1) \end{aligned}$$

je

$$[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$[\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = [\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}}[\mathcal{A}]_{\mathbf{SS}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Ničelni prostor sestavljajo vektorji, ki se preslikajo v ničelni vektor, torej rešitve enačbe

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (-x + 2y + z, 3x - y + 2z, -x + 2y) = (0, 0, 0).$$

Z Gaußovo metodo eliminacije dobimo že po enem koraku

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right],$$

iz česar sledi $x = y = z = 0$. Torej

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{(0, 0, 0)\} \quad \text{in} \quad \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) = 0.$$

Iz $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sledi

$$\dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = 3 - 0 = 3.$$

Ker $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ leži v trirazsežnem prostoru $\mathbb{R}^3$, je torej

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3.$$

Za bazo moremo vzeti standardno bazo $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(c) Zaloga vrednosti preslikave $\mathcal{B}$ leži v $\mathbb{R}^2$. Ker sta prva stolpca matrike $[\mathcal{B}]_{\mathbf{SS}}$ linearno neodvisna, je

$$\dim \mathcal{R}(\mathcal{B}) = 2 \quad \text{in zato} \quad \mathcal{R}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^2.$$

Preslikava $\mathcal{B}$ je torej surjektivna. Ni pa injektivna, saj je ničelni prostor enodimenzionalen, namreč

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{B}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathcal{R}(\mathcal{B}) = 3 - 2 = 1.$$

3. naloga [25 točk]

Poiščite rešitev začetnega problema

$$y'' + 16y = 3\cos 4x - 8x, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1.$$

Pripadajoča homogena enačba je

$$y'' + 16y = 0$$

s karakterističnim polinomom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 16.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm 4i.$$

Posledično je splošna rešitev homogene enačbe

$$y_H(x) = Ae^{0x}\cos 4x + Be^{0x}\sin 4x = A\cos 4x + B\sin 4x.$$

Partikularno rešitev bomo sestavili iz dveh delov.

Za desno stran $f_1(x) = \cos 4x = e^{0x}(0\ \sin 4x{+}1\ \cos 4x)$ je odločilno, da sta $0{\pm}4i$ enostavni ničli karakterističnega polinoma. Eno rešitev zato dobimo z nastavkom

$$y_{P1}(x) = x^1e^{0x}(c\sin 4x + d\cos 4x) = x(c\sin 4x + d\cos 4x).$$

Izračunamo prva odvoda te funkcije:

$$y'_{P1}(x) = 1\cdot(c\sin 4x + d\cos 4x) + x\cdot(4c\cos 4x - 4d\sin 4x)$$

in

$$\begin{aligned} y''_{P2}(x) = {}& (4c\cos 4x - 4d\sin 4x) + \\ & + 1\cdot(4c\cos 4x - 4d\sin 4x) + x\cdot(-16c\sin 4x - 16d\cos 4x). \end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P1} + 16y_{P1} &= \cos 4x \\ 8c\cos 4x - 8d\sin 4x - 16x(c\sin 4x + \cos 4x) + 16x(c\sin 4x + d\cos 4x) &= \cos 4x \\ 8c\cos 4x - 8d\sin 4x &= \cos 4x \end{aligned}$$

Torej $c = \frac{1}{8}$ in $d = 0$, ter

$$y_{P2}(x) = x(\tfrac{1}{8}\cdot\sin 4x + 0\cdot\cos 4x) = \tfrac{1}{8}x\sin 4x.$$

Nastavek za partikularno rešitev, ki reši enačbo z desno stranjo $f_1(x) = x = e^{0x}\cdot x$, pa je

$$y_{P2}(x) = x^0e^{0x}(\alpha x + \beta) = \alpha x + \beta,$$

saj 0 ni ničla karakterističnega polinoma. Prva odvoda sta

$$y'_{P2}(x) = \alpha \quad \text{in} \quad y''_{P2}(x) = 0.$$

Vstavimo v enačbo, uredimo in dobimo

$$\begin{aligned} y''_{P2} + 16y_{P2} &= x \\ 0 + 16(\alpha x + \beta) &= x \\ 16\alpha x + 16\beta &= x \end{aligned}$$

Torej sta $\alpha = \frac{1}{16}$ in $\beta = 0$, ter

$$y_{P2}(x) = \tfrac{1}{16} \cdot x + 0 = \tfrac{1}{16}x.$$

Partikularna rešitev je tako

$$y_P(x) = 3y_{P1}(x) - 8y_{P2}(x) = 3 \cdot \tfrac{1}{8}x \sin 4x - 8 \cdot \tfrac{1}{16}x = \tfrac{3}{8}x \sin 4x - \tfrac{1}{2}x,$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = A \cos 4x + B \sin 4x + \tfrac{3}{8}x \sin 4x - \tfrac{1}{2}x.$$

Iz $y(0) = 4$ sledi

$$4 = A \cdot 1 + 0 + 0 + 0 = A.$$

Ker je

$$y'(x) = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x + \tfrac{3}{8}(1 \cdot \sin 4x + x \cdot 4 \cos 4x) - \tfrac{1}{2},$$

iz $y'(0) = -1$ dobimo še

$$-1 = 0 + 4B + 0 - \tfrac{1}{2} \quad \text{oziroma} \quad B = -\tfrac{1}{8}.$$

Rešitev zastavljenega začetnega problem je torej

$$y(x) = 4 \cos 4x - \tfrac{1}{8} \sin 4x + \tfrac{3}{8}x \sin 4x - \tfrac{1}{2}x.$$

4. naloga [25 točk]

Dana sta matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ in vektor $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Določite LU-razcep z delnim pivotiranjem matrike A.

(b) S pomočjo tega razcepa rešite sistem $Ax = b$.

(a) V prvem koraku moramo zamenjati prvo in zadnjo vrstico. Tako imamo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Potem

$$L = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ -\frac{1}{5} & * & * \\ \frac{2}{5} & * & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Zdaj menjava vrstic ni potrebna. Zato je

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ -\frac{1}{5} & 1 & * \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Torej so

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

in velja $PA = LU$.

(b) Vektor x reši enačbo $Ax = b$ natanko tedaj, ko je $PAx = (LU)x = Pb$. Najprej je

$$b' = Pb = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Potem poiščemo y, ki reši

$$Ly = b' \quad \text{oziroma} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dobimo $y = [4, \frac{24}{5}, -2]^\top$. Iskani x potem reši

$$Ux = y, \quad \text{to je} \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{24}{5} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

dobimo $x = [2, -1, 1]^\top$.

Gradiva iz Matematike 3 za študente Gradbeništva (MA)

Avtor: Martin Jesenko

Založila: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdala: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

Ljubljana, 2023
Prva e-izdaja
Publikacija je brezplačna.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na https://ebooks.uni-lj.si
DOI: 10.15292/9789612973070

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 191231235
ISBN 978-961-297-307-0 (PDF)