Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za upravo*

Srečko Devjak

Kvantitativne metode za analize v upravi

UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za upravo

Srečko Devjak

Kvantitativne metode za analize v upravi

KVANTITATIVNE METODE ZA ANALIZE V UPRAVI
Avtor: Prof. dr. Srečko Devjak
Recenzenta: dr. Janez Usenik, dr. Janko Seljak
Naslovnica: studiobotas
Oblikovanje besedila in preloma: Marina Šučur, Simona Janež, Darko Malić

Založila: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdala: Fakulteta za upravo Univerze v Ljubljani
Za izdajatelja: Mirko Pečarič, dekan Fakultete za upravo Univerze v Ljubljani

Prva elektronska izdaja, Ljubljana, 2024
(Izvorna izdaja: tiskana iz leta 2008)
Publikacija je brezplačna.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na https://ebooks.uni-lj.si/

DOI:10.17573/9789612974251

Publikacija je izšla v okviru projekta razvojnega stebra financiranja (RSF) Univerze v Ljubljani, natančneje pod ukrepom A.II.1. »Uporaba in razvoj odprtih učnih gradiv na UL v luči spodbujanja njihovega soustvarjanja s študenti« v letu 2024.

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID 212006147
ISBN 978-961-297-425-1 (PDF)

Vsebina

Predgovor

Ta učbenik je ponatis učbenika »Kvantitativne metode za analize v upravi«, izdanega v letu 2004 na Fakulteti za upravo Univerze v Ljubljani. Namenjen je predvsem študentom bolonjskih študijskih programov I. stopnje na Fakulteti za upravo, pri vseh metodoloških predmetih. Vsebovane vsebine in pridobljena znanja vplivajo na razvoj predmetno specifičnih kompetenc za področje javna uprava. Namenjen je tudi študentom fakultete na II. bolonjski stopnji, predvsem pri predmetih, pri katerih so metode in z njimi pridobljene predmetne kompetence pomembne pri usposabljanju študentov za razvojnoraziskovalno delo.

Učbenik je predviden kot dodatno študijsko gradivo pri študijskih predmetih Fakultete za upravo ali njenih seminarjih, ki so preneseni v obliko e-izobraževanja in kjer nastopajo ali se uporabljajo v njem vključene metode. Prav tako je učbenik namenjen tudi študentom drugih podobnih študijskih programov, vsem tistim zaposlenim, ki pri svojem delu potrebujejo v učbeniku zajete metode ter so spoznali prednosti uporabe kvantitativnih analiz pri merjenju učinkovitosti in uspešnosti dela v upravi. Vsebine, metode dela in analize, predstavljene v učbeniku, bodo zanimive tudi za tisti del strokovne javnosti, ki se pri svojem delu srečuje z metodami kvantitativne raziskave.

Poglavja so vsebinsko sklenjene celote. Predvsem prvi dve poglavji sta nadgradnja metod opisne statistike. V tretjem in četrtem poglavju sem poskušal opisati nekatere najbolj uveljavljene metode kvantitativne analize na ekonomskem, organizacijskem in informacijskem področju javnega sektorja. Vsako poglavje vsebuje toliko opredelitev, obrazcev, postopkov njihove uporabe in primerov, da je obravnavana snov razumljiva vsakemu bralcu, ki ima temeljna znanja srednješolske matematike in obvlada osnovne metode opisne statistike. Razlage in primeri so zasnovani tako, da omogočajo dovolj podrobno in nazorno razlago uporabljenih postopkov in metod. Prav tako so vsebine razložene na izbranih primerih s področja priprave informacij za odločanje v upravi, kar olajšuje razumevanje kvantitativnih metod predvsem tistim, ki so jim take vsebine bližje ali se z njihovim preučevanjem tudi ukvarjajo.

Celotna vsebina učbenika je razdeljena v štiri poglavja. Na koncu je navedena uporabljena literatura, ki je zdaj tudi dostopna večjemu številu bralcev. Seznam literature je namenjen predvsem tistim bralcem, ki želijo širšo in poglobljeno razlago pojmov in obrazcev, obravnavanih v učbeniku.

Izbor obravnavanih metod izhaja iz učnih načrtov predmetov, ki jim je učbenik namenjen. S tem želim doseči prvi in osnovni namen tega dela, tj. zagotoviti študentom preprost dostop do najpogostejših metod, ki omogočajo izvajanje osnovnih kvantitativnih analiz v upravi.

Zahvaljujem se recenzentoma dr. Janezu Useniku in dr. Janku Seljaku za opravljene recenzije ter koristne nasvete in pripombe. Mnenja obeh so mi pomagala odpraviti nekatere nejasnosti, nerodnosti in pomanjkljivosti, kar je bistveno prispevalo h kakovosti tega učbenika. Odgovornost za vse morebitne napake, ki so še ostale v učbeniku, prevzemam nase.

Prof. dr. Srečko Devjak

1 ANALIZA POVEZANOSTI STATISTIČNIH SPREMENLJIVK[1]

1.1 Povezanost statističnih spremenljivk

Pri opazovanju množičnega pojava - statistične množice, nas najpogosteje zanima povezanost med definiranimi statističnimi znaki - statističnimi spremenljivkami. Postopki preučevanja povezanosti statističnih spremenljivk so različni, prirejeni so vrstam statističnih spremenljivk (numerične, ordinalne, nominalne), ki jih med seboj primerjamo.

Pojmu povezanosti v statistiki ustreza pojem korelacije in ju bomo z vsebinskega pomena v nadaljevanju enakovredno uporabljali.

Včasih se da povezanost med statističnimi spremenljivkami odkriti že iz samih podatkov, včasih se taka povezanost izkaže, ko so podatki urejeni in tabelarično ali grafično prikazani, običajno pa jo odkrijemo po posebnih postopkih obdelave podatkov in izračunavanju statističnih parametrov.

[1] *Podrobnejšo razlago vsebine tega poglavja lahko bralec najde v:*
Artenjak, J.: Poslovna statistika, Univerza v Mariboru, Maribor 1997
Devjak, S.: Matematične metode v managementu, statistika, Visoka šola za management v Kopru, Koper 1997
Košmelj, B.: Statistične metode - II.del, Višja upravna šola Ljubljana, Ljubljana 1989
Seljak, J.: Statistične metode, Univerza v Ljubljani, Visoka upravna šola, Ljubljana 1995

1.2 Korelacija pri numeričnih statističnih spremenljivkah

1.2.1 Splošne opredelitve

Prikazovanje povezanosti statističnih spremenljivk

Imejmo statistično množico z N enotami, za vsako enoto pa poznamo vrednosti numerične statistične spremenljivke x in numerične statistične spremenljivke y.

Vrednosti statistične spremenljivke x označimo z $x_1, x_2, ..., x_N$, vrednosti statistične spremenljivke y pa označimo z $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

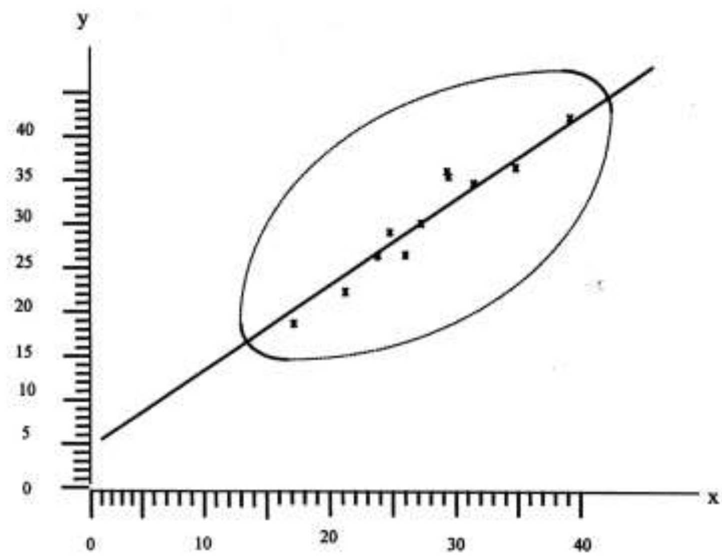
Vsaki enoti te statistične množice lahko zato priredimo urejeno dvojico: (x_i, y_i), kjer zavzame i vrednosti: i= 1,2,...,N.

Urejene dvojice lahko grafično prikažemo s točkami v dvodimenzionalnem koordinatnem sistemu, kar imenujemo razsevni diagram ali razsevni grafikon. V razsevnem grafikonu je v tem primeru N točk, ali drugače povedano, vsaki enoti iz statistične množice pripada točka v razsevnem grafikonu.

Podatke (x_i, y_i) prikažemo grafično s točkami v razsevnem grafikonu. Točkam v razsevnem grafikonu pa želimo:

- prirediti krivuljo, ki najbolj ponazarja splošno zakonitost razvrščenih točk v razsevnem diagramu in
- določiti območja, v katerih se gosti večina točk razsevnega grafikona.

Slika 1.1: Smer, oblika in jakost povezanosti spremenljivk x, y za deset statističnih enot



Iz slike 1.1 lahko ugotovimo:

- Točke razsevnega grafikona določajo smer, iz katere je razvidno, da z naraščanjem vrednosti ene spremenljivke narašča vrednost druge spremenljivke.
- Razpored točk omogoča opredelitev krivulje, ki pomeni povezanost med spremenljivkama in odraža bistveno lastnost povezave. Povezanost, ponazorjeno s krivuljo, lahko izrazimo s funkcijskim zapisom. To je s predpisom, ki za izbrano vrednost spremenljivke priredi vrednost spremenljivke y. Za tako opredeljeno povezavo je značilno, da pri posameznih statističnih enotah ustreza vrednost spremenljivke y vrednosti, določeni s funkcijsko povezavo za spremenljivko x, pogosto pa se te vrednosti razlikujejo. Zato označimo, da za izbrano vrednost x_i dobimo s funkcijsko povezavo vrednost y_i', kar pomeni, da je lahko drugačna od vrednosti znaka y

pri i (i= 1,2, ...,N) statistični enoti. Tako funkcijsko povezavo zapišimo z oznakami:

$y' = y'(x)$

– Veliko točk razsevnega grafikona ni na grafu krivulje $y' = y'(x)$, kar je posledica pogosto nepojasnjenih vplivov, ki vplivajo na spreminjanje spremenljivke y poleg vpliva, ki izhaja iz spreminjanja spremenljivke x. Take vplive označimo z ε, zvezo med spremenljivkama x in y na statističnih enotah statistične množice pa zapišemo z izrazom:

$$y = y'(x) + \varepsilon.$$

Pri tem pomeni:

y - vrednost znaka y za izbrano vrednost znaka x ob upoštevanju vseh vplivov na variiranje znaka na statistični množici,

y'(x) - vrednost znaka y za izbrano vrednost znaka x, ko so upoštevani samo vplivi variiranja znaka x na variiranje znaka y,

ε - slučajno spremenljivko, ki izraža spremembo znaka y zaradi preostalih vplivov na variiranje spremenljivke y, razen vpliva, ki izhaja iz variiranja znaka x.

Zaradi odnosov, ki pri variiranju nastopajo, bomo imenovali spremenljivke:

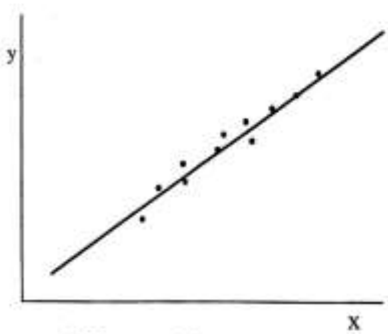
y - odvisna ali pojasnjevana spremenljivka,

x - neodvisna, pojasnjevalna spremenljivka,

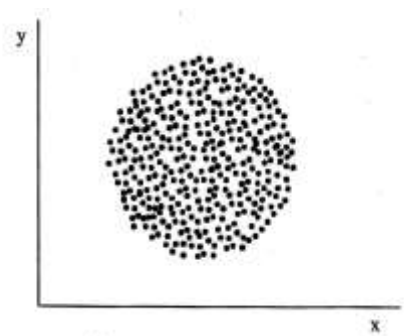
ε - spremenljivka, ki pomeni druge vplive na spremenljivko y (razen vplivov spremenljivke x).

Pri proučevanju povezanosti dveh številskih statističnih spremenljivk x in y proučujemo:

- moč povezave, ta se grafično izraža v razpršenosti točk okoli krivulje, ki jo želimo opredeliti s funkcijo povezanosti (slika 1.2). Če je ta razpršenost prevelika, je moč povezave premajhna in ne omogoča določanja funkcijske povezave, kar ponazarja slika 1.3. Na sliki 1.2 je razpršenost točk majhna, zato je izbor primerne krivulje možen in enostaven;

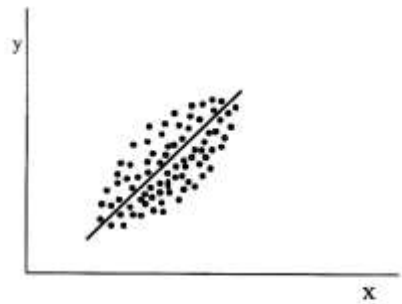


Slika 1.2: Močna povezanost

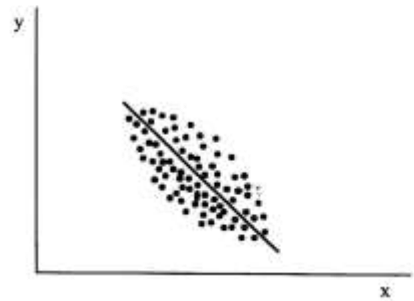


Slika 1.3: Povezanosti ni

- smer povezave, ki pojasnjuje spreminjanje vrednosti spremenljivke y pri naraščanju vrednosti spremenljivke x. Kadar pri naraščanju vrednosti spremenljivke x narašča tudi vrednost spremenljivke y, govorimo o pozitivni povezanosti (slika 1.4). Kadar pa ob naraščanju vrednosti spremenljivke x pada vrednost spremenljivke y, govorimo o negativni povezanosti (slika 1.5);

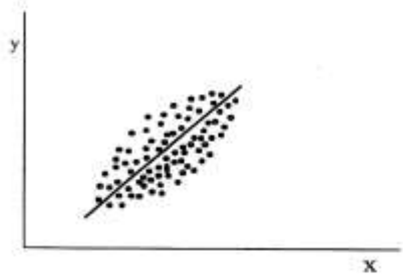


Slika 1.4: Pozitivna povezanost med spremenljivkama x in y

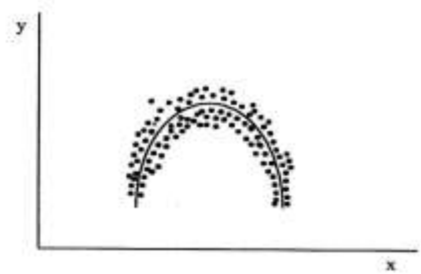


Slika 1.5: Negativna povezanost med spremenljivkama x in y

– obliko povezave, ki določa obliko (vrsto) funkcijske povezanosti. Ločimo linearne oblike povezanosti (slika 1.6.) in nelinearne (kvadratne, eksponentne in druge) oblike povezav (slika 1.7.).



Slika 1.6: Linearna oblika povezanosti med spremenljivkama x in y



Slika 1.7: Nelinearna oblika povezanosti med spremenljivkama x in y

Kadar so vrednosti statističnih spremenljivk podane s frekvenčnimi porazdelitvami, je povezanost razvidna iz dvodimenzionalne frekvenčne porazdelitve in pogojnih frekvenc za tako frekvenčno porazdelitev.

Analiza povezanosti

Pri numeričnih spremenljivkah lahko proučujemo obliko povezanosti in način njenega splošnega zapisa v matematični obliki. O regresij ski analizi govorimo takrat, ko lahko eno spremenljivko opredelimo kot odvisno spremenljivko, drugo pa kot neodvisno. Včasih pri preučevanju zveze med pojavi ni mogoče predpostaviti, da je en pojav vzrok, drugi posledica. Takrat govorimo o korelacijski analizi (Košmelj, 1998).

Pri regresijski analizi zato običajno v matematični obliki izražamo odnos med spremenljivkama z eno regresijsko funkcijo. Če značaj pojava zahteva korelacijsko analizo, izražamo odnos med statističnima spremenljivkama z dvema regresijskima funkcijama.

1.2.2 Linearna regresija

Proučujemo zapis linearne regresijske funkcije za dve števILski statistični spremenljivki.

Splošna oblika funkcijskega zapisa povezanosti med spremenljivkama x in y, v katerem nastopa izraz linearne odvisnosti, ima obliko:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon. \tag{1.1.1}$$

Izraz (1.1.1) lahko splošno zapišemo kot

$$y = y'(x) + \varepsilon,$$

kjer pomeni

$$y' = \alpha + \beta x. \tag{1.1.2}$$

Za določanje koeficientov α in β funkcije (1.1.2) uporabljamo obrazce (določeni z metodo najmanjših kvadratov):

$$\alpha = \overline{Y} - \beta \overline{X} ,$$

$$\beta = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2}. \tag{1.1.3}$$

Oznake v obrazcih (1.1.3) imajo naslednji pomen:

$\overline{X}, \overline{Y}$ - aritmetični sredini spremenljivk x in y,

σ_x^2 - varianca spremenljivke x,

$C_{xy} = C_{xy}$ - kovarianca med x in y.

Pri računanju navedenih parametrov uporabljamo obrazce:

Posamični podatki	Frekvenčna porazdelitev
$\overline{X} = M_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$\overline{X} = M_x = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K} f_k x_k$
$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})^2$	$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K} f_k (x_k - \overline{X})^2$
$C_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$	$C_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{M} f_{jk}(x_k - \overline{X})(y_j - \overline{Y})$

Primer 1.1

Zbrane imamo podatke o številu zaposlenih v prometu in proizvodnji v nekaterih državah evropskega prostora za leto 1991. Vir: Statistični letopis RS 1994 (str. 608).

Preglednica 1.1: Število zaposlenih v prometu in proizvodnji v nekaterih državah evropskega prostora za leto 1991

Država	Proizvodnja (v mio) X_i	Promet (v mio) Y_i
AVSTRIJA	0,94	0,22
DANSKA	0,53	0,18
ITALIJA	4,73	1,15
MADŽARSKA	1,39	0,41
NEMČIJA-ZR	9,39	1,70
POLJSKA	4,03	1,00
	21,01	**4,66**

Leto 1991		Proizvodnja	Promet				
Država	i	x_i	y_i	$x_i - \overline{X}$	$y_i - \overline{Y}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$
AVSTRIJA	1	0,94	0,22	-2,57	-0,55	6,58	1,42
DANSKA	2	0,53	0,18	-2,97	-0,60	8,80	1,77
ITALIJA	3	4,73	1,15	1,23	0,37	1,51	0,46
MADŽARSKA	4	1,39	0,41	-2,11	-0,37	4,45	0,78
NEMČIJA – ZR	5	9,39	1,70	5,89	0,92	34,64	5,44
POLJSKA	6	4,03	1,00	0,53	0,22	0,28	0,12
SKUPAJ		**21,01**	**4,67**	**0,00**	**0,00**	**56,26**	**9,98**
		$N = 6$	$\overline{X} = 3{,}50$	$\overline{Y} = 0{,}7$	$\sigma_x^2 = 9{,}3$	$C_{xy} = 1{,}66$	

$$\beta = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{1{,}66}{9{,}38} = 0{,}18$$

$$\alpha = \overline{Y} - \beta \overline{X} = 0{,}78 - 0{,}18 * 3{,}50 = 0{,}16$$

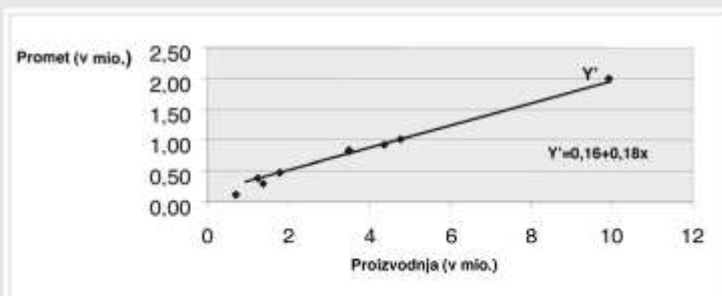
$$y` = 0{,}16 + 0{,}18x$$

Za regresijsko funkcijo izračunajmo nekaj vrednosti:

x	y'
1	0,34
3,5	0,79
10	1,96

Podatke in regresijsko funkcijo grafično prikažimo.

Slika 1.8: Razsevni diagram in regresijska premica za število zaposlenih v prometu in proizvodnji v nekaterih državah evropskega prostora za leto 1991



1.2.3 Korelacijska analiza

Pri korelacijski analizi ugotavljamo vzajemno povezanost spreminjanja opazovanih pojavov, ki jo predstavljata spremenljivki x in y. Korelacijska analiza se izvaja z računanjem parametrov, ki to povezanost ocenjujejo in določanjem regresijskih funkcij za obe obliki odvisnosti, kar zapišemo kot:

$$y' = y'(x) \quad \text{in} \quad x'=x'(y)$$

Korelacijski in determinacijski koeficient

Korelacijski koeficient (za linearno korelacijo) računamo po obrazcu:

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x * \sigma_y} \tag{1.1.4}$$

ρ_{xy} - korelacij ski koeficient, Pearsonov koeficient (linearne) korelacije,

$C_{xy} = C_{xy}$ - kovarianca med x in y,

σ_x - standardni odklon spremenljivke x,

σ_y - standardni odklon spremenljivke y.

Pearsonov korelacij ski koeficient ρ_{xy} zavzame vrednosti:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$$

Izraža stopnjo in smer povezave. Pozitivna vrednost koeficienta kaže, da je povezanost pozitivna - pri naraščanju prve spremenljivke narašča tudi druga. Negativna vrednost koeficienta kaže, da je povezanost negativna - pri naraščanju prve spremenljivke padajo vrednosti druge spremenljivke.

Jakost povezanosti izraža absolutna vrednost koeficienta - povezanost je močnejša pri večjih absolutnih vrednostih koeficienta. Podrobnejši komentarji za vrednosti koeficienta so predstavljeni v tabeli 1.2.

Preglednica 1.2: Vrednosti Pearsonovega koeficienta in jakost povezanosti statističnih spremenljivk

Vrednost ρ_{xy}		Komentar za jakost povezanosti
od	do pod	
0	+/-0,20	ni
+/-0,20	+/-0,40	šibka
+/-0,40	+/-0,70	zmerna
+/-0,70	+/-1,00	močna

Determinacijski koeficient izraža delež variabilnosti v celotni variabilnosti pojava (y), ki izhaja iz povezanosti z obravnavano spremenljivko.

Determinacijski koeficient izračunamo kot razmerje med pojasnjeno in celotno varianco:

$$\rho_{xy}^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2},$$

pri tem je

$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{\varepsilon y}^2,$$

kjer pomeni

ρ_{xy}^2 - determinacijski koeficient

σ_y^2 - celotna varianca spremenljivke y

$\sigma_{\varepsilon y}^2$ - nepojasnjena varianca spremenljivke y

σ_{xy}^2 - pojasnjena varianca spremenljivke y

Determinacijski koeficient (pri linearni korelaciji) običajno računamo s pomočjo naslednjega obrazca:

$$\rho_{xy}^2 = \frac{C_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}, \tag{1.1.5}$$

Primer 1.2

Za podatke v preglednici 1.1 izračunajmo determinacijski koeficient.

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x * \sigma_y}$$

$$C_{xy} = 1{,}66$$

$$C_{xy}^2 = 2{,}76$$

$$\sigma_x^2 = 9{,}39$$

$$\sigma_x = 3{,}06$$

$$\sigma_y^2 = 0{,}31$$

$$\sigma_y = 0{,}55$$

$$\rho_{xy} = \frac{1{,}66}{3{,}06 * 0{,}55} = 0{,}978$$

$$\rho_{xy}^2 = \frac{2{,}76}{9{,}39 * 0{,}31} = (0{,}978)^2 = 0{,}956$$

Povezanost je močna in pozitivna. 95,6% celotne variance izhaja iz povezanosti obravnavanih pojavov.

Druga regresijska funkcija

Cilj korelacijske analize je odkrivanje splošnejše povezanosti med pojavoma in ne samo odvisnosti ene spremenljivke od druge (regresijska analiza).

Proučujemo obe vrsti odvisnosti: y od x in prav tako x od y. Zato lahko opredelimo dve linearni regresij ski funkciji.

Prva (linearna) regresijska funkcija ima obliko:

$$y' = \alpha_1 + \beta_1 x$$

in je bila definirana z obrazci (1.1.2) in (1.1.3).

Drugo (linearno) regresijsko funkcijo pa zapišimo v podobni obliki:

$$x' = \alpha_2 + \beta_2 y\,. \tag{1.1.6}$$

Pri računanju parametrov druge regresijske funkcije uporabimo obrazca:

$$\alpha_2 = \overline{X} - \beta_2 \overline{Y} \,,$$

$$\beta_2 = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2} \,. \qquad (1.1.7)$$

Primer 1.3

Za podatke iz primera (1.1) bomo določili drugo regresijsko funkcijo.

V prejšnjih primerih smo že izračunali vrednosti naslednjih parametrov:

$$\sigma_x^2 = 9{,}39$$

$$\overline{X} = 3{,}50 \quad \sigma_x = 3{,}06 \quad C_{xy} = 1{,}66 \quad \beta_1 = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{1{,}66}{9{,}38} = 0{,}18$$

$$\overline{Y} = 0{,}78 \quad \sigma_y^2 = 0{,}31 \quad C_{xy}^2 = 2{,}76 \quad \alpha_1 = \overline{Y} - \beta \overline{X} = 0{,}78 - 0{,}18 * 3{,}50 = 0{,}16$$

$$\sigma_y = 0{,}55$$

Izračunajmo parametre druge regresijske funkcije:

$$\beta_2 = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{1{,}66}{0{,}31} = 5{,}42,$$

$$\alpha_2 = \overline{X} - \beta_2 \overline{Y} = 3{,}50 - 5{,}42.0{,}78 = 0{,}71 \,.$$

Zapišimo drugo regresijsko funkcijo:

x' = - 0,71 + 5,42 y.

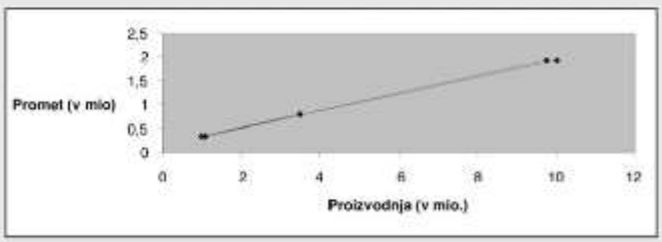
Prva regresijska funkcija pa je imela obliko:

y' = 0,16 + 0,18 x.

Določimo nekaj točk pri obeh regresijskih premicah:

x	y'
10,00	1,93
1,00	0,33
3,50	0,78

y	x'
1,93	9,75
0,33	1,10
0,78	3,50



Ker je med pojavoma močna povezanost, sta premici tesno skupaj. Sekata se v točki, ki jo določata aritmetični sredini obeh spremenljivk.

1.2.4 Korelacija ranga

Koeficient, ki tudi omogoča ugotavljanje statistične povezanosti dveh numeričnih spremenljivk, se imenuje koeficient korelacije ranga r_{xy} - Spearmanov korelacij ski koeficient.

Za računanje tega koeficienta uporabljamo obrazec:

$$r_{xy} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N}\left(Ry_i - Rx_i\right)^2}{N(N^2-1)} . \qquad (1.1.8)$$

Oznake v obrazcu imajo naslednji pomen:

Rx_i - rang za i-to (i= 1,2,.. .,N) statistično enoto, glede na vrednost spremenljivke x,

Ry_i - rang za i-to (i= 1,2,.. .,N) statistično enoto, glede na vrednost spremenljivke y.

Vrednosti Spearmanovega koeficienta komentiramo enako kot komentiramo vrednosti Pearsonovega koeficienta. Pri linearni korelaciji imata podobni vrednosti; kadar korelacija ni linearna, je primernejši za uporabo Spearmanov koeficient.

Primer 1.4

Za podatke o številu zaposlenih v prometu in proizvodnji v nekaterih državah evropskega prostora za leto 1991, navedene že v primeru (1.2.1), izračunajmo Spearmanov korelacijski koeficient.

Preglednica 1.3: Zaposleni v milijonih po nekaterih državah v letu 1991 (Statistični letopis RS 1994, str. 608)

Država	Proizvodnja (v mio) x_i	Promet (v mio) y_i	i	Rx_i	Ry_i	$Ry_i - Rx_i$	$(Ry_i - Rx_i)^2$
AVSTRIJA	0,94	0,22	1	6	6	0	0
DANSKA	0,53	0,18	2	7	7	0	0
ITALIJA	4,73	1,15	3	2	3	1	1
MADŽARSKA	1,39	0,41	4	5	5	0	0
NEMČIJA-ZR	9,39	1,7	5	1	1	0	0
POLJSKA	4,03	1	6	4	4	0	0
FRANCIJA	4,51	1,43	7	3	2	-1	1
SKUPAJ							2

$$r_{xy} = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^{N} (Ry_i - Rx_i)^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 * 2}{7 * (49 - 1)} = 0,96$$

Izračunana vrednost r_{xy} se bistveno ne razlikuje od vrednosti ρ_{xy}.

1.3 Korelacija pri atributivnih statističnih spremenljivkah

1.3.1 Vrste atributnih spremenljivk

Atributivne spremenljivke delimo v dve skupini: ordinalne spremenljivke in nominalne spremenljivke. Pri prvih je opredelitev urejenosti možna, pri drugih te ureditve ni možno definirati. S tem je povezana tudi definicija koeficientov mer povezanosti atributivnih spremenljivk. Povezanost atributivnih spremenljivk bomo obravnavali ločeno in spoznali:

- mere povezanosti ordinalnih spremenljivk in
- mere povezanosti nominalnih spremenljivk.

1.3.2 Grafično prikazovanje atributivnih spremenljivk

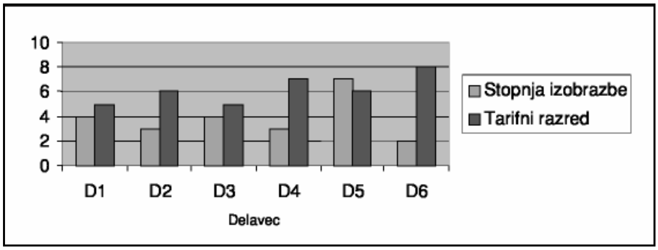
Grafično prikazovanje atributivnih spremenljivk omogoča pregleden prikaz rezultatov statistične analize. Iz njih je pogosto razvidna statistična zakonitost in tudi morebitna povezanost med različnimi pojavi. Pri grafičnem prikazovanju atributivnih spremenljivk najpogosteje uporabljamo stolpce in strukturne kroge. Povezanost se običajno nazorneje izraža pri prikazih s stolpci.

V nadaljevanju predstavljamo nekaj možnih grafičnih prikazov za primere, ki so v tem poglavju obravnavani.

V sliki 1.9: Prikaz povezanosti stopnje izobrazbe in razredov za plačo skupine zaposlenih, bomo za šest zaposlenih grafično prikazali naslednje podatke:

Delavec	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Stopnja izobrazbe	IV	III	IV	III	VII	III
Tarifni razred	5	6	5	7	6	8

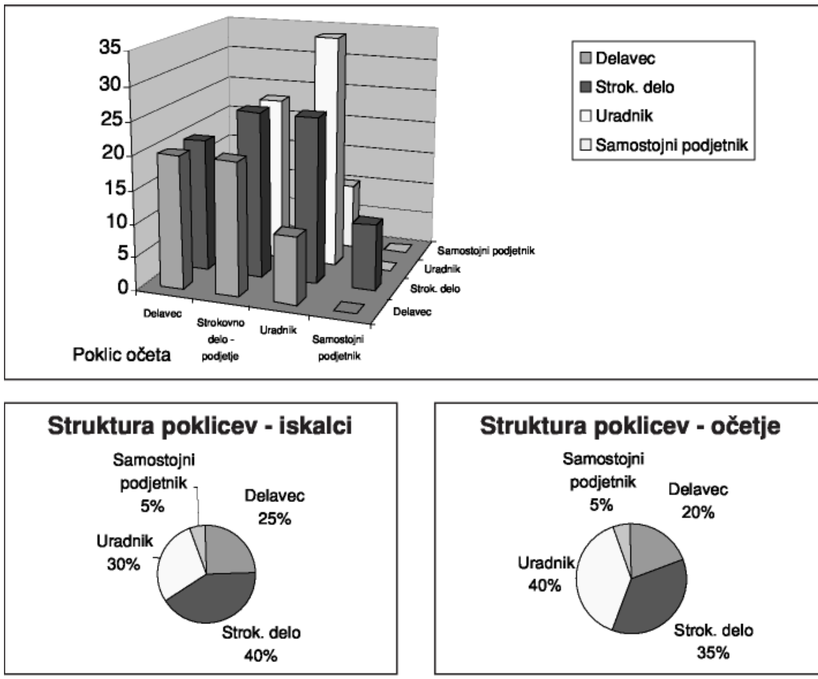
Slika 1.9: Prikaz povezanosti stop nje izobrazbe in razredov za plačo šestih delavcev



V sliki 1.10 prikazujemo primer iskalcev zaposlitve po izraženih željah in poklicih njihovih staršev. Podatki za obravnavan primer so navedeni v spodnji tabeli, v sliki pa prikazujemo način prikazovanja s stolpci ali s krogi.

		Področje zaposlitve očeta				
		Delavec	**Strokovno delo – podjetje**	**Uradnik**	**Samostojni podjetnik**	**SKUPAJ**
Področje zaposlitve iskalca	**Delavec**	20	20	10	0	50
	Strok. delo	20	25	25	10	80
	Uradnik	0	25	35	0	60
	Samostojni podjetnik	0	0	10	0	10
	Skupaj	40	70	80	10	200

Slika 1.10: Prikaz iskalcev zaposlitve po izračenih željah in poklicih njihovih očetov



Iz navedenih primerov je razvidno, da je že v grafičnih prikazih možno zaznati morebitno povezanost med statističnimi spremenljivkami.

1.3.3 Povezanost ordinalnih spremenljivk

Za ordinalne spremenljivke bomo obravnavali naslednje mere povezanosti:

- koeficient korelacije ranga in
- koeficient konkordance.

Koeficient korelacije ranga ali Spearmanov korelacijski koeficient smo definirali že v poglavju o ocenjevanju korelacijske povezanosti številskih spremenljivk z obrazcem (1.1.8).

Koeficient konkordance

Korelacijsko povezanost dveh ordinalnih statističnih spremenljivk x in y na izbrani statistični množici z N enotami lahko ovrednotimo tudi s koeficientom konkordance. Definiran je na predpostavki, da se dajo vrednosti obeh spremenljivk urediti po velikosti.

Vsaka enota E_i v opazovani množici ima določeno vrednost spremenljivke x, ki jo označimo z x_i in določeno vrednost spremenljivke y, ki jo označimo z y_i. Lahko rečemo, da vsaki enoti E_i pripada dvojica vrednosti (x_i, y_i). Z enako razlago priredimo enoti E_j dvojico vrednosti (x_j, y_j).

Korelacijo med spremenljivkama x in y bomo ugotavljali na usklajenosti variiranja vrednosti statističnih spremenljivk pri dvojicah izbranih enot E_i in E_j ($i \neq j$, $i=1,2,\ldots,N$ in $j = 1,2,\ldots,N$) statistične množice .

Med vrednostmi spremenljivk pri navedenih dvojicah (x_i, y_i) in (x_j, y_j) lahko nastopijo naslednji odnosi:

1. Vrednosti x_i in x_j sta v enakem odnosu urejenosti, kot sta vrednosti y_i in y_j, kar zapišemo:

$$x_i > x_j \Rightarrow y_i > y_j \text{ ali } x_i < x_j \Rightarrow y_i < y_j \,,$$

zato par E_i in E_j imenujemo konkordanten par.

2. Vrednosti x_i in x_j sta v nasprotnem odnosu urejenosti, kot sta vrednosti y_i in y_j, kar zapišemo:

$$x_i > x_j \Rightarrow y_i < y_j \text{ ali } x_i < x_j \Rightarrow y_i > y_j \,,$$

zato par E_i in E_j imenujemo diskonkordanten par.

3. Kateri dve vrednosti od proučevanih spremenljivk imata pri proučevanem paru enaki vrednosti.

Lahko je:

$x_i = x_j$, za vrednosti spremenljivke y pa lahko nastopi $y_i > y_j$ ali $y_i < y_j$

Lahko pa nastopi primer, ko je:

$y_i = y_j$, za vrednosti spremenljivke x pa lahko nastopi $x_i > x_j$ ali $x_i < x_j$.

Število konkordantnih in število diskonkordantnih parov označuje jakost in smer povezanosti: pri večjem številu konkordantnih parov govorimo o pozitivni povezanosti, pri večjem številu diskonkordantnih parov pa o negativni smeri statistične povezanosti.

Število vseh različnih parov, ki jih na množici z N enotami tvorimo, je enako številu kombinacij brez ponavljanja:

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Mero za ugotavljanje jakosti in smeri povezanosti imenujemo koeficient konkordance ali tudi koeficient skladnosti, ki omogoča ugotavljanje korelacijske povezanosti spremenljivk x in y na N enotah statistične množice. Računamo ga z obrazcem:

$$k_{kon} = \frac{2(N_{kon} - N_{dis})}{N(N-1)}$$

$$-1 \leq k_{kon} \leq +1, \qquad (1.1.9)$$

kjer pomeni:

k_{kon} - koeficient konkordance,

N_{kon} - število konkordantnih parov,

N_{dis} - število diskonkordantnih parov,

N - število enot statistične množice.

Koeficient konkordance je razmerje razlike med številom konkordantnih in številom diskonkordantnih parov s številom vseh parov. To je normirana mera, ki ima vrednost +1, ko so vsi pari konkordantni, ima vrednost -1, ko so vsi pari diskonkordantni, in ima vrednost 0, ko je enako število konkordantnih in diskonkordantnih parov.

Koeficient konkordance je pozitiven, ko je več konkordantnih kot diskonkordantnih parov, kar pomeni, da prevladuje pozitivna smer pri povezanosti statističnih spremenljivk na izbrani statistični množici. Koeficient konkordance je negativen, ko je večje število diskonkordantnih kot konkordantnih parov, kar opredeljujemo kot negativno smer statistične povezanosti.

Primer 1.5

V oddelku priprave proizvodnje smo na primeru šestih zaposlenih ugotavljali stopnjo povezanosti izobrazbe in tarifnega razreda za izračun plače. Podatki so prikazani v naslednji preglednici.

Delavec	Stopnja izobrazbe	Tarifni razred
D1	4	VI
D2	3	VII
D3	4	V
D4	3	VII
D5	7	VI
D6	2	VIII

Dvojice primerjajmo med seboj in ugotovimo število konkordantnih in diskonkordantnih parov. To lahko pregledno opravimo v preglednici z naslednjo obliko:

Dvojice	4;VI	3;VII	4;V	3;VII	7;VI	2;VIII	SKUPAJ
4;VI	xxxxx	DIS	...	DIS	...	DIS	
3;VII		xxxxx	DIS	...	DIS	DIS	
4;V			xxxxx	DIS	KON	DIS	
3;VII				xxxxx	DIS	DIS	
7;VI					xxxxx	DIS	
2;VIII						xxxxx	
N_{DIS}		1	1	2	2	5	11
N_{KON}				0	1	0	1

Uporabimo obrazec (1.1.9):

$$k_{kon} = \frac{2(N_{kon} - N_{dis})}{N(N-1)} = \frac{2(1-11)}{6(6-1)} = \frac{-20}{30} = -0{,}667.$$

Oznaka tarifnega razreda in izobrazba zaposlenih sta v negativni povezanosti (zaradi načina označevanja) in zmerno povezana.

1.3.4 Povezanost nominalnih spremenljivk

Za merjenje povezanosti med nominalnimi statističnimi spremenljivkami bomo uporabljali naslednji dve meri povezanosti:

– kontingenco in
– asociacijo.

Kontingenca

Povezanost med dvema nominalnima spremenljivkama, od katerih ima vsaj ena več kot dve vrednosti, ugotavljamo s koeficientoma:

χ^2 - hi kvadrat in

C - koeficientom kontingence.

Koeficient χ^2 je mera za ugotavljanje povezanosti. Če ni povezanosti med proučevanima spremenljivkama, je vrednost koeficienta enaka nič, sicer je pozitivna. Koeficient χ^2 računamo po obrazcu:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\frac{\left(f(x_j,y_k)-f^t(x_j,y_k)\right)^2}{f^t(x_j y_k)} . \qquad (1.1.10)$$

Pri tem pomeni:

$f(x_j, y_k)$ - frekvenca enot, ki imajo za spremenljivko x (prirejeno) vrednost x_j (j= 1,2,.. .,J), za spremenljivko y pa vrednost y_k (k=1,2,..,K),

$f^t(x_j, y_k)$ - izračunana frekvenca enot za primer neodvisnosti med spremenljivkama x in y in se računa iz robnih frekvenc $f(x_j)$ in $f(y_k)$ po obrazcu:

$$f^t(x_j,y_k)=\frac{f(x_j)\,f(y_k)}{N} .$$

$f(x_j)$ - frekvenca razreda j (j=1,2,...,J), frekvenčne porazdelitve enot za spremenljivko x

$f(y_k)$ - frekvenca razreda k (k=1,2,...,K), frekvenčne porazdelitve enot za spremenljivko y.

Prav tako velja:

$$N = \sum_{j=1}^{J} f(x_j) = \sum_{k=1}^{K} f(y_k).$$

Kadar obstaja korelacijska povezanost med opazovanima spremenljivkama, je $\chi^2 > 0$ in nadaljujemo s postopkom izračuna koeficienta kontingence.

Za izračun koeficienta uporabimo naslednji obrazec:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}}. \qquad (1.1.11)$$

Koeficient kontingence C je normirana mera jakosti korelacije med atributivnimi statističnimi spremenljivkami. Njegove vrednosti se gibljejo na intervalu:

$$0 \le C < 1$$

Dobljena vrednost C je odvisna od števila različnih vrednosti, ki jih imata spremenljivki x in y. Število vrednosti x_j (j= 1,2,...,J) spremenljivke x in število vrednosti y_k (k=1,2,...,K) vpliva na vrednost C, ki je pri majhnih J in K premajhna.

Navedeni vpliv števila vrednosti obravnavanih spremenljivk ocenimo z:

$$C_{max} = \sqrt{\frac{m-1}{m}}.$$

Pri tem je m večja od vrednosti J in K (J- število različnih vrednosti za spremenljivko x, K- število različnih vrednosti za spremenljivko y), kar lahko zapišemo:

$$m = \max(J,K)$$

Popravljeno vrednost koeficienta kontingence potem izračunamo po obrazcu:

$$C_{corr} = \frac{C}{C_{\max}}. \tag{1.1.12}$$

Primer 1.6

V anketirani skupini iskalcev zaposlitve so zbrani podatki o želenih področjih zaposlitve iskalcev in področjih zaposlitve njihovih očetov.

Področje zaposlitve iskalca	**Področje zaposlitve očeta**					
		Delavec	Strokovno delo-podjetje	Uradnik	Samostojni podejtnik	Skupaj
		y_1	y_2	y_3	y_4	
Delavec	x_1	20	20	10	0	50
Strokovno delo	x_2	20	25	15	10	80
Uradnik	x_3	0	25	35	0	60
Samostojni podjetnik	x_4	0	0	10	0	10
Skupaj		40	70	80	10	200

Da bi znali odgovoriti na zastavljeno vprašanje, bomo morali izračunati koeficient kontingence po obrazcu (1.1.12). Zato bomo najprej izračunali χ2. Izračun teoretičnih frekvenc bomo naredili v naslednji tabeli:

Teoretične frekvence: $f^t(x_j, y_k) = \frac{f(x_j) f(y_k)}{N}.$

	y_1	y_2	y_3	y_4	Y_5
x_1	10	17,5	20	2,5	50
x_2	16	28	32	4	80
x_3	12	21	24	3	60
x_4	2	3,5	4	0,5	10
$f(y_k)$	40	70	80	10	200

Zaradi preglednosti bomo tabelarično zapisali tudi izraze:

$$\frac{\left(f(x_j, y_k) - f^t(x_j, y_k)\right)^2}{f^t(x_j y_k)}.$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	Y_5
x_1	10	0,36	5	2,5	17,86
x_2	1	0,32	1,53	9	11,85
x_3	12	0,76	5,04	3	20,80
x_4	2	3,5	9	0,5	15,00
Skupaj					**65,51**

$$\chi^2 = 65{,}51$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{65{,}51}{65{,}51 + 200}} = 0{,}497$$

$$C_{\max} = \sqrt{\frac{m-1}{m}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = 0{,}866$$

$$C_{corr} = \frac{C}{C_{\max}} = \frac{0{,}497}{0{,}866} = 0{,}75$$

Ugotovimo lahko, da glede na namere opazovanih iskalcev zaposlitve obstaja močna povezanost med izraženimi namerami področij zaposlovanja iskalcev in področji zaposlitev njihovih očetov.

Asociacija

Pri pojavih, kjer obravnavamo povezanost dveh nominalnih spremenljivk, kjer ima vsaka od spremenljivk natanko dve vrednosti, govorimo o asociaciji.

Imejmo spremenljivko x, ki ima vrednosti x_1 in x_2, ter spremenljivko y, ki ima vrednosti y_1 in y_2. Mero povezanosti med spremenljivkama x in y imenujemo Yulesov koeficient asociacije Q, ki ga računamo po obrazcu:

$$Q = \frac{f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) f(x_2, y_1)}{f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) f(x_2, y_1)}, \qquad (1.1.13)$$

kjer pomeni

$f(x_1, y_1)$ - število enot, ki ima za spremenljivko x vrednost x_1 in za spremenljivko y vrednost y_1

$f(x_1, y_2)$ - število enot, ki ima za spremenljivko x vrednost x_1 in za spremenljivko y vrednost y_2

$f(x_2, y_1)$ - število enot, ki ima za spremenljivko x vrednost x_2 in za spremenljivko y vrednost y_1

$f(x_2, y_2)$ - število enot, ki ima za spremenljivko x vrednost x_2 in za spremenljivko y vrednost y_2

Koeficient Q asociacije je normirana mera in zavzame vrednosti:

$$-1 \leq Q \leq 1 .$$

Pri večji absolutni vrednosti Q je povezanost med spremenljivkama močnejša.

Primer 1.7

Med 89 zaposlenimi smo opazovali zakonski stan in spol. Zbrane podatke prikazujemo v naslednji preglednici:

		Poročen y_1	Neporočen y_2	**SKUPAJ**
Moški	x_1	33	22	55
Ženske	x_2	28	6	34
SKUPAJ		61	28	89

Izračunajmo Yulesov koeficient asociacije Q:

$$Q = \frac{f(x_1,y_1)f(x_2,y_2) - f(x_1,y_2)f(x_2,y_1)}{f(x_1,y_1)f(x_2,y_2) - f(x_1,y_2)f(x_2,y_1)} = \frac{33.6 - 22.28}{33.6 + 22.28} = \frac{198-616}{198+616} = \frac{-418}{814} = -0{,}51.$$

Povezanost med zakonskim stanom zaposlenih in spolom je zmerna.

1.3.5 Merjenje jakosti korelacije med atributivno in numerično statistično spremenljivko - korelacijsko razmerje η_{yx}

Korelacijsko razmerje η_{yx} je mera, ki omogoča ugotavljanje stopnje povezanosti med dvema statističnima spremenljivkama, od katerih je ena numerična, druga pa je lahko atributivna.

Opredelitev izračuna in razlage izhaja iz naslednjih izhodišč:

– numerično spremenljivko označimo z y,
– podatke grupirajmo po spremenljivki x (numerični ali atributivni) v K skupin,
– tvorimo aritmetične sredine M_{yk} za spremenljivko y za enote, razporejene v k-to (k = 1,2,.. .,K) skupino spremenljivke x,
– če med dobljenimi grupnimi aritmetičnimi sredinami M_{yk} obstajajo razlike, pomeni, da vrednost spremenljivke x vpliva na vrednost spremenljivke y in da obstaja med spremenljivkama x in y povezanost,
– če med dobljenimi grupnimi aritmetičnimi sredinami M_{yk} niso opazne razlike, pomeni, da vrednosti spremenljivke x ne vplivajo na vrednosti spremenljivke y in da ne obstaja med spremenljivkama x in y statistična povezanost.

Označimo z:

N - število enot v statistični množici,

K - število grup za spremenljivko x,

N_k - število enot v k-ti (k =1,2,...,K) grupi spremenljivke x ,

M_y - aritmetična sredina spremenljivke y v statistični množici,

M_{yk} - aritmetična sredina spremenljivke y za k-to (k = 1 ,2,...,K) grupo,

σ^2_{Myk} - variance za vrednosti M_{yk} glede na aritmetično sredino M_y, spremenljivke y na celotni statistični množici.

Obrazec za računanje M_{yk} lahko zapišemo v obliki:

$$M_{yk} = \sum_{ik=1}^{N_k} y_{ik} / N_k \ ,$$

kjer pomeni:

y_{ik}- vrednosti spremenljivke y v k-ti (k = 1,2,...,K) grupi spremenljivke x, v kateri je N_k enot.

Obrazec za izračun aritmetične sredine spremenljivke y na celotni populaciji pa ima obliko:

$$M_y = \sum_{i=1}^{N} y_i / N \quad .$$

Varianco, ki izhaja iz variiranja vrednosti M_{yk} glede na M_y pojasnimo kot posledico povezanosti med spremenljivko x in spremenljivko y in zapišemo:

$$\sigma^2_{Myk} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K} N_k (M_{yk} - M_y)^2 \ .$$

Mera za korelacijo med spremenljivkama x in y je opredeljena kot koren iz razmerja med varianco σ^2_{Myk}, ki izraža variiranje spremenljivke y zaradi povezanosti s spremenljivko x in celotno varianco σ^2_y spremenljivke y na statistični množici. Opredeljeno mero korelacijske povezanosti med znakoma x in y označimo z η_{yx} in imenujemo korelacijsko razmerje η_{yx}.

Iz opredelitve η_{yx} izhajajo naslednji obrazci:

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{Myk}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K} N_k (M_{yk} - M_y)^2}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (y_i - M_y)^2}} \ . \qquad (1.1.14)$$

Uporabimo oznake:

$$Y_k^2 = \left(\sum_{ik=1}^{N_k} y_{ik} \right)^2,$$

$$Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} y_i \right)^2,$$

in obrazec (1.1.14) zapišemo v obliki:

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{K} Y_k^2 / N_k - Y^2 / N}{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - Y^2 / N}}. \tag{1.1.15}$$

Primer 1.8

Med zaposlenimi proučujemo povezanost med stopnjo izobrazbe in spolom. Zbrane podatke smo uredili v naslednji preglednici.

Zap. št.	Spol	Stopnja izobrazbe
1	Ž	3
2	Ž	4
3	Ž	4
4	M	4
5	M	5
6	M	4
7	M	7
8	M	5
9	M	4
10	M	2
11	M	4
12	M	4
13	M	3
14	M	4
15	M	7

Izračunali bomo korelacijsko razmerje η_{yx} in pri tem uporabili obrazec (1.1.15). Potrebne podatke za uporabo navedenega obrazca bomo izračunali s pomočjo naslednje preglednice:

	X_i	N_k	y_i	Y_k^2	$\frac{Y_k^2}{N_k}$	Y_i^2
	ž		3			9
	ž		4			16
	ž		4			16
	Y1	3	11	121	40,3333	0
4	m		4			16
5	m		5			25
6	m		4			16
7	m		7			49
8	m		5			25
9	m		4			16
10	m		2			4
11	m		4			16
12	m		4			16
13	m		3			9
14	m		4			16
15	m		7			49
	Y2	**12**	**53**	**2809**	**234,083**	**298**
	N=	**15**	**64**		**274,417**	

$$Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2 = 64^2 = 4096$$

$$\frac{Y^2}{N} = \frac{4096}{15} = 273{,}06$$

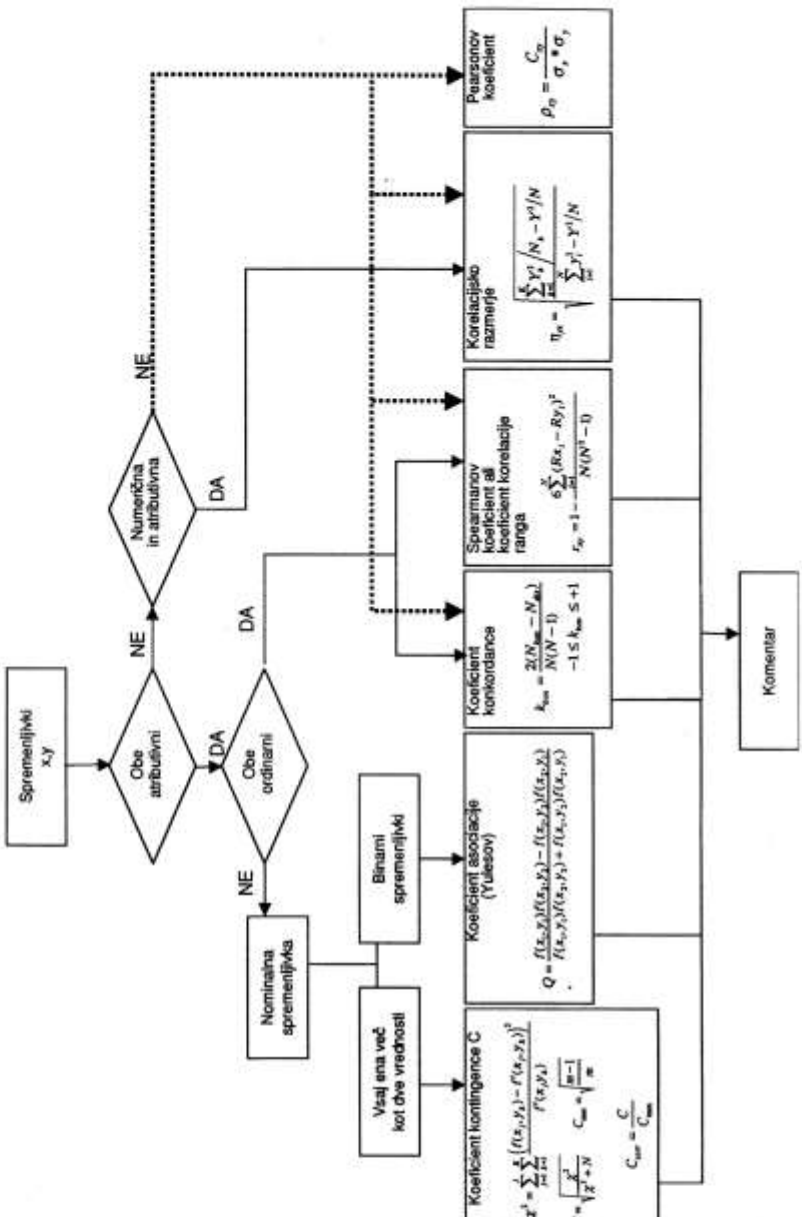
$$\sum_i y_i^2 = 298$$

$$\sum_{k=1}^{K} Y_k^2 / N_k = 274{,}41$$

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{K} Y_k^2 / N_k - Y^2 / N}{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - Y^2 / N}} = \sqrt{\frac{274{,}41 - 273{,}06}{298{,}0 - 273{,}1}} = \sqrt{\frac{1{,}35}{24{,}9}} = 0{,}23$$

Odgovor: Med spolom in stopnjo izobrazbe je v opazovani množici šibka povezanost.

Diagram 1.1: Zbirni prikaz uporabe koeficientov analize povezanostistatističnih spremenljivk



V tem poglavju ste o numeričnih in atributivnih spremenljivkah spoznali:

- **način prikazovanja povezanosti dveh statističnih spremenljivk,**
- **koeficiente za merjenje jakosti korelacije med statističnimi spremenljivkami,**
- **postopke analize in pojasnjevanja korelacije statističnih spremenljivk.**

2 VZORČENJE[2]

2.1 Izhodišče

Pri vzorčenju se ukvarjamo z dvema področjema: ocenjevanjem parametrov statistične množice z vzorci in preizkušanjem hipotez. Pri vzorčnih ocenah se bomo usmerili na področje ocenjevanja parametrov statistične množice. Poglabljali bomo znanje o odnosu med osnovno statistično množico, vzorcem in množico vseh vzorcev. Ukvarjali se bomo z velikimi vzorci. Zakonitosti normalne porazdelitve in verjetnostnega računa so zato podlaga tej vrsti proučevanja statističnih pojavov.

2.2 Uvod v vzorčenje

Osnovni pojmi

Opazovanje pojavov je lahko:

- popolno, kadar opazujemo vse enote statistične množice,
- delno, kadar opazujemo le nekatere enote statistične množice - vzorec.

Delno opazovanje lahko izvedemo tako, da opazujemo nekatere enote statistične množice, ki so bile izbrane:

- po nekem kriteriju kot tipične enote ali predstavniki statistične množice, pri takem izboru je velika možnost, da bodo prisotni subjektivni vplivi, ali
- z vzorčenjem, ko so za vse enote statistične množice veljale enake možnosti izbora.

[2] *Podrobnejšo razlago vsebine tega poglavja lahko bralec najde v:*
Artenjak, J.: Poslovna statistika, Univerza v Mariboru, Maribor 1997
Košmelj, B.: Statistika 2 - I.del, Ekonomska fakulteta v Ljubljani, Ljubljana 1993

Nas bodo zanimala taka delna opazovanja, ko so pri sestavljanju vzorca imele enote enake možnosti izbora - slučajni vzorci.

Ugotovimo lahko, da:

- je vzorec statistična množica,
- so spremenljivke na vzorcu iste kot na osnovni populaciji,
- so na osnovni populaciji izračunane vrednosti parametrov prave vrednosti parametrov,
- so na vzorcu izračunane vrednosti parametrov lahko le ocene za prave vrednosti parametrov osnovne populacije.

V nadaljevanju bomo pri označevanju parametrov, izračunanih na osnovni populaciji in na vzorcu, uporabljali oznake, navedene v preglednici 2.1.

Preglednica 2.1: Označevanje parametrov osnovne populacije in vzorca.

PARAMETER	OSNOVNA POPULACIJA	VZOREC
SPLOŠNO	G	g
ŠTEVILO ENOT		
VREDNOST SPREMENLJIVKE		
ARITMETIČNA SREDINA	$\overline{Y} = M_y = \mu$	$\overline{y}$
VARIANCA	$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})^2}{N}$ $\sigma_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j(y_j - \overline{Y})^2}{N}$	$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}$ $s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j(y_j - \overline{y})^2}{n-1}$
STANDARDNI ODKLON	σ_y	s_y

Vrste vzorčenja

Po načinu izbire enot v slučajni vzorec ločimo:

- enostavno vzorčenje - naključen način izbire enot v vzorec, poznavanje celotne množice ni potrebno,
- stratificirano vzorčenje - razdelitev množice v homogene dele - stratume, variabilnost v stratumih je majhna, v njih izvedemo slučajno vzorčenje,
- vzorčenje v skupinicah - izbiramo skupinice slučajno in te opazujemo v celoti,
- vzorčenje v več stopnjah - nadaljevanje vzorčenja v skupinicah, ko je možna delitev populacije v hierarhične skupine,
- sistematično vzorčenje - naključno je izbrana prva enota, nato se izbirajo enote po neki zakonitosti.

Mi se bomo ukvarjali z zakonitostmi in lastnostmi vzorčenja za razmere, ko so vzorci slučajni in izbrani po načelih enostavnega vzorčenja.

Če povzamemo opisovanje problematike vzorčenja, lahko ugotovimo, da imamo pri vzorčenju opravka s tremi statističnimi množicami:

- osnovna (celotna) statistična množica ali populacija,
- delna statistična množica - vzorec in
- množica vseh vzorcev.

Za vsako od navedenih množic lahko določamo:

- spremenljivke in
- parametre.

V preglednici 2.2 bomo prikazali nekatere lastnosti množic omenjenih množic in odnos med njihovimi parametri. Iz preglednice je razvidno, da je najštevilčnejša množica vzorcev in da je vzorec množica, ki omogoča ocenjevanje ostalih dveh množic.

Preglednica 2.2: Število enot, znaki in parametri v osnovni populaciji, vzorcu in množici vzorcev

MNOŽICA	ŠTEVILO ENOT	SPREMENLJIVKA	PARAMETER
Osnovna populacija	N	Spremenljivka y	Parameter spremenljivke y na populaciji
Vzorec	n	Spremenljivka y	Vrednost parametra spremenljivke y na vzorcu , to je ocena parametra spremenljivke y za populacijo
Množica vseh vzorcev	$\binom{N}{n}$	Ocene parametra spremenljivke y za populacijo na vzorcih	Parameter, računan iz ocen parametra spremenljivke y na množici vzorcev

Primer 2.1

Primer bomo opravili na majhni statistični množici iz metodoloških razlogov, da bodo spoznanja, do katerih bomo prišli, bolj razumljiva in nam bodo olajšala razumevanje v naslednjih temah tega poglavja.

Statistična množica ima 4 enote, spremenljivka y ima vrednosti: 2, 3, 7, 8.

Parametri množice so:

i	y_i	$y_i = \overline{Y}$	$(y_i = Y)^2$
y_1	2	-3	9
y_2	3	-2	4
y_3	7	2	4
y_4	8	3	9
SKUPAJ	**20**	**0**	**26**

Parametri populacije so:

$N = 4$, $\sigma_y^2 = \frac{26}{4} = 6{,}50$,

$\overline{Y} = \frac{20}{4} = 5$, $\sigma_y = \sqrt{6{,}5} = 2{,}55$.

Iz množice izberemo vzorec z dvema enotama, za naš primer naj bosta to enoti, pri katerih sta y vrednosti: 2 in 7.

Izračunajmo parametre vzorca:

n=2

i	y_i	$y_i = \bar{y}$	$(y_i = \bar{y})^2$
1	2	-2,5	6,25
2	7	2,5	6,25
SKUPAJ	**9**	**0**	**12,5**

$$\bar{y} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$s_y^2 = \frac{12,5}{2-1} = 12,5$$

$$s_y = \sqrt{12,5} = 3,53$$

Množica vseh vzorcev:

Število enot: $\binom{N}{n} = \binom{4}{2} = \frac{1*2*3*4}{(1*2)*(1*2)} = 6$

Aritmetične sredine za možne vzorce:

	2	**3**	**7**	**8**
2	xxx	2,5	4,5	5
3		xxx	5	5,5
7			xxx	7,5
8				xxx

Parametri množice vseh vzorcev:

$\bar{y}_j$	f_j	$f_j*\bar{y}_j$	$\bar{y}_j-\bar{Y}_{\bar{y}}$	$f_j*(\bar{y}_j-\bar{Y}_{\bar{y}})^2$
2,5	1	2,5	-2,5	6,25
4,5	1	4,5	-0,5	0,25
5	2	10	0	0
5,5	1	5,5	0,5	0,25
7,5	1	7,5	2,5	6,25
	6	30		13

$$\bar{Y}_{\bar{y}} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sum f_j(\bar{y}_j - \bar{Y}_{\bar{y}})^2}{\sum f_j} = \frac{13}{6} = 2,17$$

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sigma_{\bar{y}}^2} = 1,47$$

Iz prikazanega primera lahko povzamemo:

- pri vzorčenju nastopajo tri statistične množice:
  - osnovna množica
  - vzorec
  - množica vseh vzorcev
- aritmetična sredina osnovne populacije in aritmetična sredina množice vseh vzorcev sta enaki
- množica vseh vzorcev je porazdeljena podobno normalni porazdelitvi.

2.3 Verjetnostni račun in verjetnostna porazdelitev

Za razumevanje teorije vzorčenja potrebujemo nekaj osnov verjetnostnega računa. Zato v nadaljevanju predstavljamo nekaj osnovnih pojmov in zakonitosti.

2.3.1 Verjetnostni račun

Osnovna pojma verjetnostnega računa sta poskus in dogodek. Poskus pomeni vsako dejanje, ki ga izvedemo pod določenimi pogoji. Množico pogojev, pod katerimi je izveden poskus, imenujemo kompleks pogojev. Če se spremeni samo eden od pogojev izmed kompleksa pogojev, to ni več isti poskus. V tem primeru gre za drug poskus. Poskus predstavlja met igralne kocke. Poskus je tudi izbira statistične enote[3] iz statistične množice. Poskus označujemo z velikimi tiskanimi črkami s konca abecede: X, Y, Z, ...

Dogodek je možna realizacija poskusa. Pri metu igralne kocke je dogodek dejstvo, da pade pet pik. Pri tem poskusu je dogodek tudi dejstvo, da pade liho število pik. Pri izbiri statistične enote iz statistične množice je dogodek dejstvo, da je enota izbrana. Pri istem poskusu je seveda dogodek tudi

[3] Primer statistične enote je občina, upravna enota, posamezna upravna zadeva in podobno.

dejstvo, da enota ni izbrana. Dogodke označujemo z velikimi tiskanimi črkami od začetka abecede: A, B, C, ...

Pri ponavljanju poskusa X opazujemo realizacijo dogodka A. V tem primeru obstajajo za dogodek A tri različne možnosti:

1. Če se je pri velikem številu ponovitev poskusa X dogodek A zgodil pri vsaki ponovitvi tega poskusa, lahko sklepamo, da se bo dogodek A zgodil pri katerikoli ponovitvi tega poskusa. Dogodek, ki se zgodi pri vsaki ponovitvi poskusa, imenujemo gotov dogodek. Pri metu kocke je gotov dogodek, da vržemo manj kot sedem pik. O tem ni nobenega dvoma, saj so ploskve pri igralni kocki označene od ena do šest pik.

2. Če se pri velikem številu ponovitev poskusa X dogodek A ni zgodil pri nobeni ponovitvi tega poskusa, lahko utemeljeno sklepamo, da se dogodek A ne bo zgodil v nobeni ponovitvi tega poskusa. Dogodek, ki se ne zgodi pri nobeni ponovitvi poskusa, imenujemo nemogoč dogodek. Pri metu kocke je nemogoč dogodek, da vržemo več kot šest pik.

3. Če se pri velikem številu ponovitev poskusa X dogodek A v določenih ponovitvah tega poskusa zgodi, v določenih ponovitvah pa se dogodek A ne zgodi, potem dogodek A imenujem slučajen dogodek. V tem primeru namreč ne moremo pred ponovitvijo poskusa X napovedati, ali bo prišlo do realizacije dogodka A ali ne. Slučajen je dogodek, da vržemo z igralno kocko npr. pet pik.

V vseh treh primerih smo opazovali realizacijo dogodka A pri velikem številu ponovitev poskusa X. Število vseh ponovitev poskusa X bomo označili z n, kjer je n poljubno naravno število. Med vsemi ponovitvami poskusa X pa nas zanima število tistih poskusov, pri katerih se je zgodil dogodek A. To število imenujemo frekvenca dogodka A. Frekvenco dogodka A bomo označevali s f(A). Če frekvenco dogodka A delimo s številom vseh ponovitev poskusa X, do¬bimo relativno frekvenco dogodka A. Če relativno frekvenco dogodka A označimo s f° (A), velja:

$$f^{\circ}(A) = \frac{f(A)}{n}$$

Relativna frekvenca dogodka A je enaka kvocientu med njegovo frekvenco in številom vseh opravljenih poskusov. V tem smislu je relativna frekvenca gotovega dogodka enaka 1, ker je njegova frekvenca enaka številu ponovitev posameznega poskusa, relativna frekvenca nemogočega dogodka pa je enaka 0, ker je njegova frekvenca enaka 0.

Relativno frekvenco dogodka A lahko izračunamo pri vsaki ponovitvi poskusa X. Pri majhnem številu ponovitev poskusa X je variabilnost relativne frekvence slučajnega dogodka A velika, pri velikem številu ponovitev poskusa X pa je variabilnost slučajnega dogodka A majhna. Pri velikem številu ponovitev poskusa X se namreč relativna frekvenca slučajnega dogodka A ustali pri neki vrednosti. Tudi če število ponovitev poskusa X povečujemo, se relativna frekvenca slučajnega dogodka A le malo spreminja. Tisto vrednost, pri kateri se ustali relativna frekvenca slučajnega dogodka A v velikem številu ponovitev poskusa X, imenujemo verjetnost slučajnega dogodka A in jo označujemo s simbolom P(A). To je statistična ali aposteriorna definicija verjetnosti.

Statistična definicija verjetnosti je aposteriorna definicija verjetnosti, ker jo računamo na podlagi realizacij dogodka A, pri ponavljanju poskusa X. Kadar pa želimo izračunati verjetnost slučajnega dogodka A, ne da bi ponavljali poskus X, uporabimo klasično ali apriorno definicijo verjetnosti. Pri klasični definiciji verjetnosti predpostavljamo simetričen popoln sistem dogodkov. Množico dogodkov imenujemo popoln sistem dogodkov takrat, kadar velja:

– dogodki so paroma nezdružljivi,
– pri poskusu se zagotovo zgodi eden izmed teh dogodkov.

Dogodka A in B sta nezdružljiva dogodka, če se pri isti ponovitvi nekega poskusa ne moreta zgoditi hkrati. Predstavimo dva nezdružljiva dogodka s primerom. Naj bo A dogodek, da izmed vseh vpisanih otrok v otroškem vrtcu izberemo dečka in naj bo B dogodek, da pri istem poskusu izberemo deklico. Ta dva dogodka sta nezdružljiva dogodka.

Dogodka A in B sta združljiva dogodka, če se lahko pri isti ponovitvi nekega poskusa zgodita hkrati. V našem primeru bi to pomenilo: naj bo A dogodek, da izmed vseh vpisanih otrok v otroškem vrtcu izberemo dečka in naj bo B dogodek, da je starost dečka manjša ali enaka štiri leta. Dogodek A in B sta v tem primeru združljiva dogodka, saj se lahko zgodi, da izberemo dečka, ki je star štiri leta ali manj.

Dogodka A in B sta simetrična dogodka, če so enaki vsi pogoji, da se zgodi bodisi dogodek A bodisi dogodek B.

Če se pri nekem poskusu ne zgodi dogodek A, se zgodi negacija dogodka A. To je dogodek, ki ga označimo z . Dogodek A skupaj z dogodkom sestavlja popoln sistem dogodkov.

Klasična definicija verjetnosti

Po klasični definiciji je verjetnost dogodka A enaka kvocientu med številom za dogodek A ugodnih dogodkov popolnega sistema dogodkov in med številom vseh dogodkov popolnega sistema. Če označimo število za dogodek A ugodnih možnosti z m in število vseh možnosti z n, potem velja:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Računanje z dogodki:

- produkt dogodkov A in B je dogodek AB, ki se zgodi, če se zgodita dogodka A in B hkrati,
- vsota dogodkov A in B je dogodek AFB, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A ali B,
- vsota dogodkov A in B, označena z A+B je dogodek, ki se zgodi natanko takrat, kadar se zgodi eden od dogodkov A ali B.

Osnovne lastnosti in pravila računanja verjetnosti

Obrazec	**Obrazložitev**
$0 \leq P(A) \leq 1$	za vsak dogodek A
$P(N) = 0$	N- nemogoč dogodek
$P(G) = 1$	G- gotov dogodek
A način B $\Rightarrow$ $P(A) \leq P(B)$	vedno, kadar se zgodi A, se zgodi tudi B
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$	kadar se A in B lahko zgodita hkrati
$P(A + B) = P(A) + P(B)$	kadar ne obstaja možnost, da bi se A in B zgodila hkrati
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	nasprotni dogodek

Več o verjetnostnem računu lahko bralec najde v učbenikih matematike in statistike za visokošolske in fakultetne študijske programe, navedenih v seznamu literature na koncu učbenika.

Primer 2.2

V neki občini je v otroški vrtec vpisanih 92 otrok, pri tem je 48 dečkov in 44 deklic. Kolikšna je verjetnost, da bomo izmed vseh vpisanih otrok v otroškem vrtcu izbrali dečka?

Pri odgovoru na zastavljeno vprašanje si bomo pomagali s klasično definicijo verjetnosti. Da bi lahko izračunali verjetnost dogodka A, moramo najprej določimo dogodek A. V tem primeru je dogodek A dejstvo, da bomo izbrali dečka. V otroški vrtec je vpisanih 48 dečkov, zato je število za dogodek A ugodnih možnosti enako 48. Število vseh možnosti je enako številu otrok, vpisanih v otroški vrtec. Teh je 92.

Ker je:
m = 48
n = 92

Sledi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{48}{92} = \frac{12}{23}$$

Verjetnost, da bomo izmed vseh vpisanih otrok v otroškem vrtcu izbrali dečka, je enaka $\frac{12}{23}$ ali 0,52.

Primer 2.3

Kolikšna je verjetnost, da bomo izmed vseh vpisanih otrok v otroškem vrtcu izbrali deklico?
Ta primer lahko rešimo na dva načina:

1. Po prvem pristopu določimo dogodek B. V tem primeru je dogodek B dejstvo, da bomo izbrali deklico. V otroški vrtec je vpisanih 44 deklic, število vseh otrok v otroškem vrtcu pa je enako 92, zato velja:
m= 44
n= 92

Zato je:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{44}{92}=\frac{11}{23}$$

Verjetnost, da bomo izmed vseh vpisanih otrok v otroškem vrtcu izbrali deklico, je enaka $\frac{11}{23}$ ali 0,48.

2.Po drugem pristopu izhajamo iz verjetnosti, da bomo izmed vseh vpi¬sanih otrok v otroškem vrtcu izbrali dečka. Ugotovili smo, da je ta enaka

$$P(A)=\frac{12}{23}$$

3.Negacija dogodka A je v našem primeru dogodek , to je dogodek, da ne bomo izbrali dečka. To pomeni, da bomo izbrali deklico. Pri izračunu verjetnosti dogodka izhajamo iz enačbe:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Ker je:

$$P(A)=\frac{12}{23}$$

Velja:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{12}{23}=\frac{11}{23}$$

Verjetnost, da bomo izmed vseh vpisanih otrok v otroškem vrtcu izbrali deklico, je enaka $\frac{11}{23}$.

Zaporedje neodvisnih poskusov

Pogosto nastopajo primeri zaporednega izvajanja velikega števila enakih poskusov. Verjetnost, da se bo dogodek A zgodil, je v vseh ponovitvah enaka, označujemo jo z: P(A) = p

Če nas zanima verjetnost, da se dogodek A zgodi v n ponovitvah poskusa k krat, bomo to verjetnost računali po obrazcu:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Bernoullijeva formula q pri tem pomeni verjetnost nasprotnega dogodka A in velja:

p + q = 1 ali q = 1 - p

Kadar je n velik, p pa blizu nič, namesto Bernoullij eve formule uporabljamo njen približek (vendar enostavnejši za izračun), to je Poissonovo formulo:

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}$$

Kadar pa je n velik, p pa v bližini vrednosti 1/2 uporabimo približek, imenovan Laplacejeva formula:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npg}}$$

V gornjem obrazcu nadomestimo z(x) naslednji del izraza:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ta funkcija je poznana pod imenom Gaussova ali normalna krivulja. Vrednosti za φ(x) so podane v dodatku te knjige.

Verjetnost $P_n(k)$ zapišemo z upoštevanjem $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ v obliki:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}.\varphi(x).$$

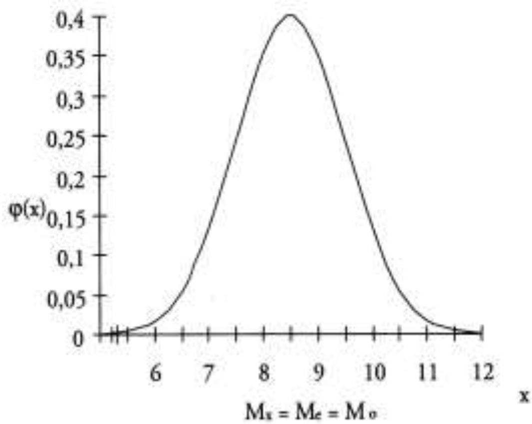
Lastnosti normalne porazdelitve $\varphi(x)$:

- enomodusne zvonaste oblike, prikazane v sliki 2.1 Graf normalne porazdelitve,
- simetrična, velja trditev: $\varphi(x\text{-}c) = (x+c)$ in da je $M_x = M_e = M_o$,
- koeficient asimetrije je enak nič: $KA_{Mo} = KA_{Me} = KA_Q = 0$,
- sploščenost normalne porazdelitve je merilo za izražanje sploščenosti drugih porazdelitev. Za porazdelitev je posebej pomembna zakonitost razporejanja enot v okolici aritmetične sredine, prikazana v preglednici 2.3.

Preglednica 2.3: Razporejanje enot v okolici aritmetične sredine pri normalni porazdelitvi

Razmik	Delež vseh enot populacije %
$M_K \pm \sigma$	68,3
$M_K \pm 2\sigma$	95,4
$M_K \pm 3\sigma$	99,7

Slika 2.1: Graf normalne porazdelitve



Ploščina pod krivuljo je mera za verjetnost, da bo vrednost spremenljivke x pod izbrano vrednostjo x_0.

Ta verjetnost se izračuna z obrazcem:

$$F(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} dx$$

Ker pogosto srečujemo spremenljivke y, za katere ne veljajo gornje lastnosti, so pa na množici normalno porazdeljene, uporabimo opisano metodo tako, da spremenljivki y priredimo ustrezno standardizirano spremenljivko z po pravilu:

$$z = \frac{y - M_y}{\sigma_y} \tag{2.3.1}$$

M_y - aritmetična sredina za spremenljivko y,

σ_y - standardni odklon za spremenljivko y.

V tem primeru je aritmetična sredina za spremenljivko z enaka 0: $M_z = 0$.

Posamezna vrednost standardizirane spremenljivke z_i nam pove, za koliko standardnih odklonov σ_y se ustrezna vrednost y_i razlikuje od aritmetične sredine M_y. Če je vrednost standardizirane spremenljivke z pozitivna, potem je ustrezna vrednost y_i večja od aritmetične sredine M_y, če pa je vrednost standardizirane spremenljivke negativna, pa je ustrezna vrednost y_i manjša od aritmetične sredine normalno porazdeljene spremenljivke Y. V tem smislu z_i=+3 pomeni, da je ustrezna vrednost y_i večja od aritmetične sredine M_y za $3\sigma_y$.

Porazdelitev vzorčnih vrednosti parametra pri velikih vzorcih

Pri velikih vzorcih velja, da se vzorčne vrednosti parametra g porazdeljujejo okoli prave vrednosti parametra G normalno.

Vsebino preglednice 2.3 bomo za primer vzorčnih vrednosti aritmetične sredine podali v preglednici 2.4. Razporejanje vzorčnih vrednosti aritmetične sredine $\bar{y}$ okoli vrednosti $\bar{Y}_{\bar{y}}$.

Preglednica 2.4: Razporejanje vzorčnih vrednosti aritmetične sredine $\bar{y}$ okoli vrednosti $\bar{Y}_{\bar{y}}$

Delež vseh vzorcev	Interval
68,28%	$\bar{Y}_{\bar{y}} - SE_{\bar{y}} < \bar{y} < \bar{Y}_{\bar{y}} + SE_{\bar{y}}$
95,45%	$\bar{Y}_{\bar{y}} - 2SE_{\bar{y}} < \bar{y} < \bar{Y}_{\bar{y}} + 2SE_{\bar{y}}$
99,73%	$\bar{Y}_{\bar{y}} - 3SE_{\bar{y}} < \bar{y} < \bar{Y}_{\bar{y}} + 3SE_{\bar{y}}$

$SE_{\bar{y}}$ standardni odklon vzorčnih vrednosti aritmetične sredine v množici vzorcev.

2.4 Točkovna in intervalna ocena parametrov statistične množice

2.4.1 Izhodiščne opredelitve

Pri nadaljevanju obravnavanja teorije vzorčenja se bomo omejili na področje velikih vzorcev, kjer za velike vzorce obravnavamo vzorce z najmaj 50 enotami.

Ocena vrednosti parametra statistične množice je lahko točkovna (ena) ali intervalna (vrednost se lahko nahaja v navedenem intervalu). Vrednosti ocen so približne, s tem da pri intervalni oceni trdimo, da vrednost ne more biti zunaj navedenega intervala, istočasno pa tudi navedemo tveganje pri taki trditvi.

Tveganje pomeni verjetnost, da se dogodek, ki ga pričakujemo, ne zgodi.

Točkovna ocena parametra G: do točkovne ocene parametra G statistične množice pridemo z izračunanjem vrednosti parametra g na proučevanem vzorcu.

Intervalna ocena parametra G: pri navajanju intervalnih ocen lahko interval omejimo na obe strani, lahko pa je omejitev intervala samo ena, ko določimo vrednost, ki je vrednost ocenjevanega parametra ne preseže ali pod katero ne more biti.

Ločimo dve vrsti intervalnih ocen (pogosto uporabljamo izraz trditev): dvostranske in enostranske.

Dvostranska trditev - kadar za vrednost parametra G, ki ga ocenjujemo, opredelimo zgornjo in spodnjo mejo.

Enostranska trditev - kadar opredelimo eno (zgornjo ali spodnjo mejo) za vrednost parametra G, ki ga ocenjujemo.

Do intervalne ocene parametra G statistične množice pridemo na osnovi tveganja z določanjem intervala, na katerem se lahko vrednost parametra G nahaja:

$$g - d_g < G < g + d_g \,, \tag{2.4.1}$$

pri tem pomeni:

g - točkovno oceno, izračunano na vzorcu,

d_g - odklon zaupanja za parameter G na množici vseh vzorcev, določen glede na porazdelitev množice vzorcev in stopnjo tveganja.

Intervalne ocene parametrov statističnih množic določamo za primere, ko se vzorčne ocene g izbranega parametra G na množici vseh (velikih) vzorcev porazdeljujejo normalno, skladno z opredelitvijo, navedeno v preglednici 2.4.

Intervalno oceno parametra statistične množice (2.3.1) bomo za naš namen zapisali v obliki:

$$g - z_\alpha SE(g) < G < g + z_\alpha SE(g), \qquad (2.4.2)$$

pri tem pomeni:

G - parameter, za katerega določamo intervalno oceno,

g - točkovna ocena parametra G,

z_α - standardizirani odklon pri stopnji tveganja α,

SE(g) - standardna napaka ocene parametra G, (standardni odklon na množici vseh vzorcev).

Za z_α se običajno uporabljajo vrednosti pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$ ali $\alpha = 0,01$ ali $\alpha = 0,001$. Vrednosti za enostranske in dvostranske ocene so prikazane v preglednici 2.5.

Preglednica 2.5: Vrednosti z_α najpogostejše stop nje tveganja

Stopnja tveganja α	Vrednost z_α pri dvostranski trditvi	Vrednost z_α pri enostranski trditvi
0,05	1,96	1,64
0,01	2,58	2,32
0,001	3,29	3,09

Ker običajno standardne napake SE(g) ne poznamo, uporabljamo oceno standardne napake se(g), ki jo računamo na vzorcu.

Potem bomo izraz (2.3.2) zapisali v obliki:

$$g - z_\alpha se(g) < G < g + z_\alpha se(g)\,. \tag{2.4.3}$$

Zaradi normalnih porazdelitev vzorčnih ocen parametra g okrog prave vrednosti G in zaradi zveze 2.4 in vrednosti z_α za običajne stopnje tveganja vsebino preglednice 2.4 zapišemo v preglednici 2.6.

Preglednica 2.6: Intervalne ocene parametrov za normalne porazdelitve vzorčnih vrednosti

Delež vseh vzorcev	Interval
95%	g-1,96*se(g)<G<g+1,96*se(g)
99%	g-2,58*se(g)<G<g+2,58*se(g)
99,9%	g-3,29*se(g)<G<g+3,29*se(g)

2.4.2 Ocenjevanje parametrov statistične množice

Splošen opis postopka

V nadaljevanju bodo predstavljeni postopki in obrazci za določanje točkovnih in intervalnih ocen za parametre:

- aritmetična sredina,
- total, (vsota, agregat),

- strukturni delež,
- ocenjevanje razlike med aritmetičnima sredinama.

Postopek ocenjevanja vrednosti parametrov G pri vseh obravnavanih primerih poteka v podobnem zaporedju:

- ocena parametra g na vzorcu - točkovna ocena parametra,
- standardni odklon s na vzorcu,
- ocena standardne napake za ocene parametra g na množici vzorcev se(g),
- določitev intervalne ocene parametra.

V primerih, ko je $\frac{n}{N} > 0{,}10$ pomnožimo vrednost se(g) s faktorjem f, ki ga imenujemo faktor za končnost:

$$f = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ .$$

Velikost vzorca

Velikost vzorca vpliva na natančnost intervalne ocene. Kadar želimo pri izbrani stopnji tveganja doseči potrebno natančnost intervalne ocene, lahko izračunamo za ugotovljene zahteve najmanjšo velikost vzorca. Glede na podane zahteve računamo velikosti vzorcev z uporabo obrazcev:

- natančnost ocene, ki se izraža z razmerjem:

$$\frac{z_\alpha . se(g)}{g} = p$$

- izračun n za vzorec iz obrazca: z_α.se(g) = pg ali

- če je z_α.se(g) podana v absolutnem znesku: z_α.se(g) = d_g, d_g imenujemo odklon zaupanja, v absolutnem znesku.

Ocenjevanje aritmetične sredine $\bar{Y}$

Pri ocenjevanju vrednosti aritmetične sredine računamo:

- točkovno oceno aritmetične sredine $\bar{y}$ na vzorcu,
- za aritmetično sredino $\bar{y}$ standardni odklon s na vzorcu,
- oceno standardne napake za ocene $\bar{y}$ na množici vzorcev se($\bar{y}$).

Točkovna ocena aritmetične sredine $\bar{y}$ se računa po znanem obrazcu:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} . \tag{2.4.4}$$

Standardni odklon s na vzorcu računamo po obrazcu:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \tag{2.4.5}$$

Kadar so vzorčni podatki v obliki frekvenčne porazdelitve, upoštevamo pri oceni variance obrazca:

$$s_y^2 = \frac{\sum f_j * (y_j - \bar{y})^2}{n-1} ,$$

$$s_{y,pop.}^2 = s_y^2 - \frac{d^2}{12} . \qquad \text{Sheppardov popravek} \tag{2.4.6}$$

(d - širina razreda frekvenčne porazdelitve)

Oceno standardne napake se($\bar{y}$) bomo računali s pomočjo obrazca:

$$se(\bar{y}) = \frac{s}{\sqrt{n}} . \tag{2.4.7}$$

Uporabimo (2.3.3) in (2.3.7) in dobimo:

$$\bar{y} - z_\alpha \frac{s_y}{\sqrt{n}} < \bar{Y} < \bar{y} + z_\alpha \frac{s_y}{\sqrt{n}} . \qquad (2.4.8)$$

Velikost vzorca pri določanju ocene aritmetične sredine računamo iz odklona zaupanja, ki je razviden v (2.3.8) in je enak:

$$d_{\bar{y}} = z_\alpha \frac{s_y}{\sqrt{n}} .$$

Izrazimo n, in dobimo:

$$n = \left(\frac{z_\alpha s}{d_{\bar{y}}} \right)^2 . \qquad (2.4.9)$$

Primer 2.4

Preglednica 2.7: Število prodajaln na drobno v letu 1993 v občinah Slovenije (SL RS1994, str. 575)

Število prodajaln		y_j	f_j	$y_j * f_j$	$f_j * (y_j - \bar{y})^2$
od	do pod				
1	51	26	5	130	25920
51	101	76	28	2128	13552
101	151	126	11	1386	8624
151	201	176	3	528	18252
201	251	226	2	452	32768
251	301	276	1	276	31684
			50	**4900**	**130800**

$\bar{y} = \frac{4900}{50} = 98$ je točkovna ocena za povprečno število prodajaln v občini

$$s_y^2 = \frac{\sum f_j (y_j - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{130800}{50-1} = 2669{,}39$$

$$s_{y,pop}^2 = s_y^2 - \frac{d^2}{12} = 2461$$

Korenimo in dobimo:

$s_y = 49{,}6$,

$se_{\bar{y}} = \frac{s_y}{\sqrt{n}} = \frac{49{,}61}{\sqrt{50}} = 7{,}02$.

(Popravka za končnost zaradi preglednosti primera ne bomo računali.)

Tveganje: α = 0,05

Dvostranska ocena: $z_\alpha = 1{,}96$

$d_{\bar{y}} = z_\alpha . se(\bar{y}) = 1{,}96 . 7{,}02 = 13{,}75$.

Spodnja meja intervala zaupanja:

$\bar{y} - d_{\bar{y}} = 98 - 13{,}75 = 84{,}25$.

Zgornja meja intervala zaupanja:

$\bar{y} + d_{\bar{y}} = 98 + 13{,}75 = 111{,}75$.

Intervalna ocena $\bar{y}$ pri stopnji tveganja α = 0,05 je:

$84{,}25 < \bar{Y} < 111{,}75.$

Velikost vzorca:
Če bi želeli, da je odklon pri stopnji tveganja α = 0,05 enak 15% aritmetične sredine, bi zapisali:

$d_{\bar{y}} = 0{,}15 . \bar{y} = 0{,}15 . 98 = 14{,}7.$

Za določitev velikosti vzorca bomo uporabili (2.8) in upoštevali dobljeno vrednost $d_{\bar{y}}$:

$$n = \left(\frac{z_\alpha s}{d_{\bar{y}}} \right)^2 = \left(\frac{1{,}96 . 49{,}6}{14{,}7} \right)^2 = 43{,}7.$$

Potrebovali bi vzorec s 44 enotami, če bi želeli doseči pri intervalni oceni interval z 15% odklonom od ocenjene srednje vrednosti.

Ocenjevanje vsote (totala, agregata) Y

Za total velja naslednja zveza:

$$Y = N\overline{Y} .$$

Ocenjena vrednost totala na celotni populaciji je potem enaka:

$$\overleftrightarrow{Y} = N\overline{y} . \tag{2.4.10}$$

Po analogiji velja za standardno napako ocene enačba:

$$se(\overleftrightarrow{Y}) = N.se(\overline{y}) = N\frac{s_y}{\sqrt{n}} . \tag{2.4.11}$$

Intervalno oceno za agregat računamo tako, da upoštevamo splošno opredelitev (2.3.3) in (2.3.11) in dobimo:

$$\overleftrightarrow{Y} - z_\alpha .N\frac{s_y}{\sqrt{n}} < Y < \overleftrightarrow{Y} + z_\alpha .N\frac{s_y}{\sqrt{n}} . \tag{2.4.12}$$

Velikost vzorca pri določanju agregata računamo iz odklona zaupanja, ki je razviden v (2.3.12) in je enak:

$$d_{\overleftarrow{y}} = z_\alpha N\frac{s_y}{\sqrt{n}} .$$

Velikost vzorca n je enaka:

$$n = \left(\frac{z_\alpha N s_y}{d_{\overleftarrow{y}}}\right)^2 . \tag{2.4.13}$$

Primer 2.5
Število prodajaln na drobno v letu 1993 v vseh občinah Slovenije je podano v primeru 2.4 (Vir:SL RS 1994, str.575). Na osnovi vzorca 50 občin določite število prodajaln v Sloveniji, ko je bilo 62 občin. Ocena naj bo dvostranska, naredimo jo pri stopnji tveganja 0,01.

V primeru 2.4 smo ugotovili, da je:

$\overleftrightarrow{Y}$ = 62,98 = 6076

z_α = 2,58,

N = 62.

Ker je

$$se(\overleftrightarrow{Y}) = N.se(\overline{y})$$

in vemo, da je:

$$se(\overline{y}) = 7{,}02,$$

potem je: $se(\overleftrightarrow{Y}) = N.se(\overline{y}) = 62.7{,}02 = 435{,}24$.

Intervalna ocena je potem enaka:

$$\overleftrightarrow{Y} - z_\alpha \cdot Nse(\overline{y}) < Y < \overleftrightarrow{Y} + z_\alpha \cdot Nse(\overline{y}),$$

6076 - 2,58 . 435,24 < Y < 6076 + 2,58 . 435,24,

4953 < Y < 7199

V obravnavanem obdobju je bilo v Sloveniji število prodajaln na drobno večje od 4953 in manjše od 7199 pri stopnji tveganja α = 0,01.

Ocenjevanje deleža P, števila enot z izbrano lastnostjo - N_a

Metoda se uporablja pri numeričnih in pri atributivnih spremenljivkah: delež otrok, delež žensk.

Delež izračunamo po obrazcu:

$$P = \frac{N_a}{N}.$$

Točkovno oceno za delež na vzorcu označimo s p in izračunamo po obrazcu:

$$p = \frac{n_a}{n} . \tag{2.4.14}$$

Ocena standardne napake se računa po obrazcu:

$$se(p) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} . \tag{2.4.15}$$

Intervalna ocena za vrednost deleža je zaradi splošne opredelitve (2.4.3) in (2.4.15) enaka:

$$p - z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < P < p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} . \tag{2.4.16}$$

Velikost vzorca pri ocenjevanju deleža računamo iz odklona zaupanja, ki je razviden v (2.3.16) in je enak:

$$d_p = z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} .$$

Iz zadnje enačbe izrazimo n in dobimo obrazec za velikost vzorca pri ocenjevanju deleža:

$$n = \frac{z_\alpha^2 p(1-p)}{d_p^2} . \tag{2.4.17}$$

Primer 2.6
V upravnih enotah smo opazovali reševanje upravnih zadev. Zanima nas, kolikšen je odstotek zadev, ki jih rešuje oddelek za upravne notranje zadeve. V 150 primerih je bilo 130 zadev oddelka za notranje upravne zadeve. Vseh upravnih zadev proučevanega obdobja je bilo 1450.

Naredimo dvostransko oceno pri stopnji tveganja 0,05. Razpolagamo s podatki:
-velikost vzorca: n = 150
-zadeve, za katere računamo delež: na = 130
-velikost osnovne statistične množice: N = 1450
-$z_{0,05}$ = 1,96

Izračunajmo:

$$p = \frac{n_a}{n} = \frac{130}{150} = 0{,}87 \qquad se(p) = \sqrt{\frac{0{,}87(1-0{,}87)}{150}} = 0{,}028,$$

$$d_p = z_{0,05} se(p) = 1{,}96.0{,}028 = 0{,}054,$$
$$0{,}81 < P < 0{,}92.$$

Pričakujemo od 82% do 92% upravnih zadev oddelka za notranje zadeve od vseh zadev ali, med 1450 zadevami bo od 1177 do 1335 zadev oddelka za notranje zadeve.

Velikost vzorca pri 5% odklonu (od točkovne ocene p) bi bila enaka:
-odklon zaupanja: $d_p = \frac{5}{100} p = 0{,}05.0{,}87 = 0{,}043,$

-velikost vzorca: $n = \frac{z_\alpha^2 p(1-p)}{d_p^2} = \frac{1{,}96^2 0{,}87(1-0{,}87)}{0{,}043^2} = 236{,}4.$

V vzorec bi moralo biti zajetih najmanj 237 enot, če bi pri 5% tveganju želeli doseči tako intervalno oceno, pri kateri bi bil odklon manjši od 5% točkovne ocene.

Ocenjevanje razlike med aritmetičnima sredinama: $\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2$

Imamo dve populaciji z N_1 in N_2 enotami in na njih opazujemo spremenljivko y. Označimo aritmetično sredino spremenljivke y na prvi populaciji z $\overline{Y}_1$ na drugi pa z $\overline{Y}_2$.

Vzorca iz teh dveh populacij imata n_1 in n_2 enot. Aritmetični sredini spremenljivke y imata vrednosti na vzorcih $\bar{y}_1$ in $\bar{y}_2$. Ocenjujemo razliko med aritmetičnima sredinama spremenljivke y na obeh populacijah.

Točkovno oceno razlike med aritmetičnima sredinama na vzorcih zapišemo v obliki:

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2$$

Oceno standardne napake v razliki med aritmetičnima sredinama računamo po obrazcu:

$$se(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\,. \tag{2.4.18}$$

Intervalna ocena za vrednost razlike aritmetičnih sredin obeh množic sledi iz (2.3.3) in (2.3.18) in je enaka:

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - z_\alpha.se(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) < (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) < (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' + z_\alpha.se(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)\,. \tag{2.4.19}$$

Primer 2.7
V dveh enotah so opazovali reševanje enake vrste upravnih zadev. Zbrali so mesečne podatke o poteku reševanja upravnih zadev in jih statistično obdelali.
V enoti I so statistični parametri imeli vrednosti:
- rešenih je bilo 165 zadev,
- povprečno trajanje reševanja ene zadeve: 4,2 ur
- standardni odklon: 0,39 ure

V enoti II so statistični parametri imeli vrednosti:
- rešenih je bilo 125 zadev,
- povprečno trajanje reševanja ene zadeve: 3,4 ure
- standardni odklon: 0,45 ure

Zanima nas, kakšna razlika obstaja med trajanji reševanja zadev v obeh enotah. Določimo točkovno in intervalno oceno pri stopnji tveganja $\alpha = 0{,}05$.
Navedenim vrednostim navedimo oznake:

$n_1 = 165,$

$\bar{y}_1 = 4{,}2,$

$s_1 = 0{,}39,$

$n_2 = 125,$

$\bar{y}_2 = 3{,}4,$

$s_2 = 0{,}45.$

Točkovna ocena:

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = 4{,}2 - 3{,}4 = 0{,}8\,.$$

Standardna napaka:

$$se(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}39^2}{165} + \frac{0{,}45^2}{125}} = \sqrt{0{,}0025} = 0{,}05.$$

Intervalna ocena razlike med aritmetičnima sredinama je:

$$0{,}8 - 1{,}96.0{,}05 < \left(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2\right) < 0{,}8 + 1{,}96.0{,}05,$$

$$0{,}70 < \left(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2\right) < 0{,}90.$$

Pri stopnji tveganja 0,05 pričakujemo, da bo povprečno daljše reševanje ene zadeve v enoti I kot v enoti II. Razlika se bo gibala v intervalu od 0,70 ure do 0,90 ure ali od 42 do 54 minut.

2.5 Statistično preizkušanje domnev

Posebej pogosto uporabljena metoda ocenjevanja vrednosti statističnih parametrov je metoda statističnega preizkušanja domnev ali hipotez. Teoretična osnova metode izhaja iz teorije vzorčenja. Imamo opravka z enakim problemom, zakonitosti med obravnavanimi množicami so enako opredeljene, kot smo jih opredeljevali pri ocenjevanju vrednosti parametrov. Zato prav tako, kot smo se v prejšnjem poglavju omejili le na velike vzorce in upoštevali zakonitosti pri velikih vzorcih, sprej memo tudi tu isto omejitev, da bomo obravnavali le primere preizkušanja hipotez za velike vzorce (n>50).

Osnovni obrazec za preizkušanje hipotez je določen na osnovi lastnosti standardizirane normalne porazdelitve in izračuna vrednosti spremenljivke iz obrazca (2.3.1):

$$z = \frac{y - M_y}{\sigma_y}.$$

V postopku preiskušanja trditev (hipotez, domnev) bomo obrazec uporabljali tako, da bomo za M_y upoštevali vrednosti parametra G_0, ki bo predmet trditve, za y bomo upoštevali vzorčno vrednost g obravnavnega parametra in za σ_y vrednost ocene za standarno napako (računano na vzorcu) za ocene parametra g. Tako bo obrazec imel obliko:

$$z = \frac{g - G_0}{se(g)}. \qquad (2.5.1)$$

Izhodišče za postopek preiskušanje trditev je pravilo, da lahko sprejmemo trditev, če smo uspeli zavrniti nasprotno trditev. Drugače povedano, kadar zavrnemo neko trditev, potem lahko sprejmemo njeno nasprotno trditev.

Postopek preizkušanja hipotez poteka v zaporedju:

- določitev osnovne trditve (domneve, hipoteze) H_1 in nasprotne ali ničelne trditve (domneve, hipoteze) H_0 in stopnjo tveganja α, pri kateri preizkušamo hipotezo,
- priprava podatkov in izračun parametra z,
- ugotovitev, ali je razlika med vzorčno oceno in vrednostjo parametra v ničelni hipotezi taka, da izračunani z prekoračuje vrednost z_α pri zahtevani stopnji tveganja α; če z presega vrednost z_α, zavrnemo ničelno hipotezo in sprej memo osnovno hipotezo (če ne želimo sprejemati hipoteze pri visoki stopnji tveganja, povečamo vzorec).

Obstaja enostransko in dvostransko preizkušanje hipotez. Pri dvostranskem preizkušanju hipoteze je:

- osnovna hipoteza H_1: $G \neq G_0$,
- ničelna hipoteza H_0: $G = G_0$.

Pri enostranskem preizkušanju hipotez so opredelitve lahko:

- osnovna hipoteza H_1: $G < G_0$
- ničelna hipoteza H_0: $G \geq G_0$

ali

- osnovna hipoteza H_1: $G > G_0$
- ničelna hipoteza H_0: $G \leq G_0$

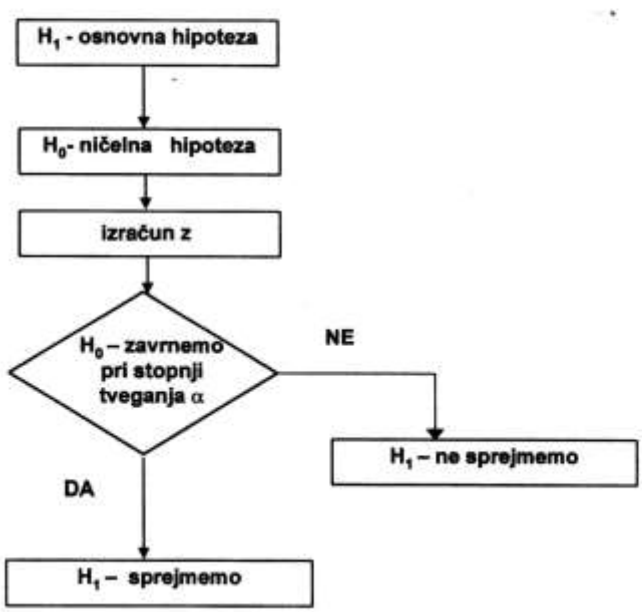
Hipoteze zavračamo glede na vrednosti z, ki jo izračunamo iz (2.5.1) in vrednosti z določene za posamezne stopnje tveganja. Pri katerih vrednostih z bomo hipoteze zavračali, prikazujemo v preglednici 2.8.

Preglednica 2. 8: Vrednosti z glede na z_α pri zavračanju hipotez in različnih stop njah tveganja

HIPOTEZA	Zavrnemo hipotezo	α = 0,05	α = 0,01	α = 0,001
$G = G_0$	$\|z\|>\|z_\alpha\|$	$\|z\|>1,96$	$\|z\|>2,58$	$\|z\|>3,29$
$G \geq G_0$	$z<z_\alpha$ $z_\alpha<0$	$z<-1,64$	$z<-2,32$	$z<-3,09$
$G \leq G_0$	$z>z_\alpha$ $z_\alpha>0$	$z>1,64$	$z>2,32$	$z>3,09$

Grafično je postopek preizkušanja hipotez prikazan v sliki 4.1.

Slika 4.1: Postopek ocenjevanja statističnih parametrov s preizkušanjem hipotez



Primeri se bodo nanašali na velike vzorce in za parametre, ki so obravnavani v poglavju o določanju intervalnih ocen za vrednosti parametrov statistične množice z vzorci.

Primer 2.8

V primeru 2.3 so podatki o številu prodajaln na drobno v letu 1993 v 50 občinah v Sloveniji (SL RS 1994, str. 575). Zanima nas, ali lahko trdimo pri stopnji tveganja 0,05, da je bilo v letu 1993 povprečno 100 prodajaln v vsaki občini.

Na vzorcu smo ugotovili, da je:

$$\bar{y} = 98,$$

$$se(\bar{y}) = 7{,}02.$$

Zapišimo trditve:

- osnovna trditev H_1: $M_y = 100$

- nasprotna trditev (ničelna hipoteza) H_0: $M_y \neq 100$

Izračunajmo z:

$$z = \frac{\bar{y} - M_y}{se(\bar{y})} = \frac{98 - 100}{7{,}02} = -0{,}28.$$

Ker je $z_{0,05} = 1{,}96$ in je $z = -0{,}28$, lahko zaradi ugotovitve, da je $|z| < |z_{0,05}|$, sprejmemo odločitev, da ničelne hipoteze ne zavrnemo, zato tudi ne sprejmemo osnovne hipoteze, da je v letu 1993 bilo povprečno v občinah po 100 trgovin na drobno.

Primer 2.9

V primeru 2.4 smo ocenjevali število prodajaln na drobno v letu 1993 v 50 občinah v Sloveniji (SL RS 1994, str. 575). Zanima nas, ali lahko trdimo pri stopnji tveganja 0,01, da je bilo v letu 1993 v Sloveniji manj kot 8000 prodajaln na drobno.

Iz vzorca smo ugotovili:

$\overleftrightarrow{Y} = 6067$

$se(\overleftrightarrow{Y}) = 435{,}24.$

Zapišimo trditve:

- osnovna trditev - $H_1 : Y < 8000$
- nasprotna trditev - $H_0 : Y \geq 8000$

Izračunajmo z:

$$z = \frac{\overleftrightarrow{Y} - Y}{se(\overleftrightarrow{Y})} = \frac{6076 - 8000}{435{,}24} = -4{,}42.$$

V našem primeru je z = -4,42 in $z_\alpha = -2{,}32$ torej velja, da je: $z < z_\alpha$; trditev H_0 torej zavrnemo in pri stopnji tveganja 0,01 sprejmemo domnevo, da je bilo število prodajaln na drobno v Sloveniji manjše od 8000.

Primer 2.10
V primeru 2.5 smo obravnavali primer deleža zadev oddelka za upravne notranje zadeve v vseh reševanih zadevah upravne enote. Na razpolago smo imeli podatke, da je v primeru 150 zadev bilo 130 zadev oddelka za notranje upravne zadeve. Zanima nas, ali lahko trdimo pri stopnji tveganja 0,001, da je bilo zadev oddelka za notranje upravne zadeve več kot 80%.

Iz vzorca smo ugotovili, da je:

$$p = \frac{n_a}{n} = \frac{130}{150} = 0{,}87,$$

$$se(p) = 0{,}028.$$

Zapišimo trditve:
Ker se vprašanje nanaša na vrednost: P_0 =0,80, je
- osnovna trditev - H_1: $P > 0{,}80$
- nasprotna trditev - H_0: $P \leq 0{,}80$.

Izračunajmo z:

$$z = \frac{p - P_0}{se(p)} = \frac{0{,}87 - 0{,}80}{0{,}028} = 2{,}50.$$

V našem primeru je z = 2,50 in z0,001 = 3,09 velja, da je $z < z_\alpha$;
trditve H_0 torej ne zavrnemo in pri stopnji tveganja 0,001 ne sprejmemo domneve, da je bilo zadev oddelka za notranje upravne zadeve več kot 80%.

V tem poglavju ste spoznali naslednje pojme:

- **osnovni namen in razloge vzorčenja,**
- **vrste vzorčenja in osnovne statistične množice pri vzorčenju,**
- **pojem verjetnosti in pojem tveganja,**
- **določanje točkovne in intervalne ocene izbranega parametra statistične množice,**
- **statistične domneve ter postopke preizkušanja statističnih domnev.**

3 GOSPODARSKI RAČUN[4]

3.1 Zmesni račun

Opredelitev problematike zmesnega računa

Vsaka dobrina je narejena iz posameznih sestavin. Pri izdelavi posamezne dobrine lahko uporabimo dve ali pa več sestavin. Razmerje med posameznimi sestavinami pri izdelavi dobrine imenujemo mešalno razmerje. Zmesni račun uporabljamo za reševanje tovrstne problematike. Poznamo dva različna načina uporabe zmesnega računa:

- poznamo lastnosti dobrine, določiti pa moramo mešalno razmerje sestavin,
- poznamo razmerje med sestavinami, določiti pa moramo kakovost dobljene dobrine.

V prvem primeru gre za pravi zmesni račun, v drugem primeru pa gre za nepravi zmesni račun. Ločimo tudi enostavni zmesni račun in pa sestavljeni zmesni račun. V okviru enostavnega zmesnega računa se bomo ukvarjali z dobrinami, ki jih dobimo s pomočjo mešanja dveh različnih sestavin, pri sestavljenem zmesnem računu pa se bomo ukvarjali s tistimi dobrinami, ki jih dobimo z mešanjem več kot le dvema sestavinama.

Pri zmesnem računu nas zanimajo lastnosti posameznih sestavin in pa lastnost dobrine, ki je rezultat mešanja posameznih sestavin. Kot merilo za lastnost posamezne sestavine ali dobrine lahko uporabljamo različne

[4] *Podrobnejšo razlago vsebine tega poglavja lahko bralec najde v:*
Indihar, S., Kavkler, I., Mastinšek, M.: Matematika za ekonomiste: I. del, Univerza v Mariboru, Maribor 1997.
Usenik, J.: Matematične metode v managementu, poslovni račun, Visoka šola za management v Kopru, Koper 1997.

kategorije. To je lahko prodajna cena, stroški,… pač odvisno od problema, ki ga želimo rešiti.

Temeljna izhodišča zmesnega računa

Temeljna izhodišča zmesnega računa lahko strnemo v dve točki:

1. vsota vseh posameznih količin pred mešanjem je enaka količini dobljene dobrine po mešanju in
2. vsota vrednosti posameznih količin pred mešanjem je enaka vrednosti dobljene dobrine po mešanju.

To sta dve osnovni pravili zmesnega računa.

Odnos med kakovostjo prve sestavine, kakovostjo druge sesta vine in kakovostjo dobrine

Kljub temu, da imamo pri mešanju sestavin lahko opraviti tudi z več kot dvema sestavinama, se za začetek omejimo samo na dve sestavini. Obe sestavini bomo najprej dodatno poimenovali. Sestavino z boljšo kakovostjo in višjo ceno v skladu z našim predhodnim dogovorom poimenujemo kot boljša sestavina, sestavino s slabšo kakovostjo in ustrezno nižjo ceno pa opredelimo kot slabše blago. Za potrebe matematične rešitve problema najprej opredelimo spremenljivke, s katerimi bomo operirali:

x_1 - količina boljše sestavine,

x_2 - količina slabše sestavine,

c_1 - kakovost boljše sestavine,

c_2 - kakovost slabše sestavine,

c_m - kakovost dobrine.

Na podlagi opredeljenih spremenljivk lahko izpeljemo enačbe zmesnega računa, ki temeljijo na temelj nih izhodiščih zmesnega računa.

Tako velja:

$$X_1C_1 + X_2C_2 = (X_1 + X_2)C_m$$

$$X_1\ (C_1 - C_m) = X_2(C_m - C_2)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{c_m - c_2}{c_1 - c_m} \qquad (3.1.1)$$

Gornjo enačbo lahko zapišemo v obliki razmerja:

$$x_1 : x_2 = (c_m - c_2) : (c_1 - c_m) \qquad (3.1.2)$$

Poleg tega velja tudi:

$c_1 > c_m > c_2$

saj je kakovost dobljene dobrine vedno med kakovostma obeh sestavin, ki ju mešamo. To pa pomeni, da sta razliki (c_m-c_2) in (c_1-c_m) vedno pozitivni.

Iz enačbe (3.1.1) sledi:

$$x_1 = (c_m - c_2)u \qquad (3.1.3)$$

$$x_2 = (c_1 - c_m)u \qquad (3.1.4)$$

Ker je ohranjanje količine sestavin eden od pogojev zmesnega računa, lahko zapišemo:

$$x_1 + x_2 = X \qquad (3.1.5)$$

kjer je X skupna količina mešanih sestavin.

V enačbo (3.1.4) vstavimo enačbi (3.1.2) in (3.1.3) ter dobimo:

$$(c_m - c_2)u + (c_1 - c_m)u = X \qquad (3.1.6)$$

Enačbo lahko poenostavimo:

$c_m u - c_2 u + c_1 u - c_m u = X$

$- c_2 u + c_1 u = X$

$u(c_1 - c_2) = X$

$$u = \frac{X}{c_1 - c_2}$$

Dobljeno rešitev vstavimo v enačbo (3.1.5) in dobimo:

$$(c_m - c_2)\frac{X}{c_1 - c_2} + (c_1 - c_m)\frac{X}{c_1 - c_2} = X$$

Enačbo delimo z X in dobimo:

$$\frac{c_m - c_2}{c_1 - c_2} + \frac{c_1 - c_m}{c_1 - c_2} = 1$$

Slednja enačba nam pove:

1. kolikšen je delež količine x_1 v dobrini

$$\frac{c_m - c_2}{c_1 - c_2}$$

2. kolikšen je delež količine x_2 v dobrini

$$\frac{c_1 - c_m}{c_1 - c_2}$$

Izračun kakovosti dobrine

Kakovost dobrine lahko računamo, če poznamo kakovosti in količine mešanih sestavin. Izhajamo iz enačbe:

$x_1c_1 + x_2c_2 = (x_1 + x_2)c_m$

Če iz navedene enačbe izrazimo c_m, dobimo:

$$c_m = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{x_1 + x_2}$$

V kolikor bi želeli izračunati kakovost dobrine, sestavljene iz n sestavin, bi postopali takole:

$$x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_nc_n = (x_1 + x_2 + ... + x_n)c_m$$

Iz tega sledi:

$$c_m = \frac{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

Primer 3.1
Občina načrtuje sofinanciranje otroškega varstva predšolskih otrok svojih občanov. Občani lahko za svoje otroke poiščejo varstvo v otroškem vrtcu v svoji občini ali pa v sosednjih občinah. Mesečni prispevek občine za varstvo enega otroka v domačem otroškem vrtcu znaša 40 tisoč DE, v vrtcu izven občine pa 50 tisoč DE. Ugotovite:

1. razmerje med številom otrok, ki lahko obiskujejo otroški vrtec v domači občini in med številom otrok, ki lahko obiskujejo otroški vrtec v drugih občinah, če želijo v občini doseči povprečni prispevek v višini 42 tisoč DE na otroka,
2. koliko otrok bi moralo obiskovati vrtec v domači občini in koliko otrok lahko obiskuje otroške vrtce izven domače občine, če želimo doseči povprečni prispevek 42 tisoč DE in ob predvidevanju, da bo obiskovalo otroške vrtce 140 otrok občine,
3. po opravljenem vpisu se izkaže, da vrtec v občini obiskuje 105 otrok, v ostale vrtce pa je vpisanih 35 otrok. Izračunajte povprečni prispevek občine.

1. Vprašanje
Podatki so:
c_1 = 40 tisoč DE
c_2 = 50 tisoč DE
c_m = 42 tisoč DE

Uporabimo enačbo:
$c_1 : c_2 = (c_m - c_2) : (c_1 - c_m)$

Če vstavimo podatke v enačbo, dobimo:

$x_1 : x_2 = (42 - 50) : (40 - 42)$

$x_1 : x_2 = 8 : 2$

$x_1 : x_2 = 4 : 1$

2. Vprašanje

Podatki so:

$X = 140$

Velja:

$x_1 + x_2 = X$

Če upoštevamo, da mora biti število otrok v razmerju:

$x_1 : x_2 = 4 : 1$

Potem velja:

$x_1 = 4 \cdot x_2$

Če vstavimo ta izraz v enačbo:

$x_1 + x_2 = X$

In upoštevamo, da je X = 140, dobimo:

$4 \cdot x_2 + x_2 = 140$

$5 \cdot x_2 = 140$

$x_2 = 28$

Sedaj lahko izračunamo tudi vrednost x_1:

$x_1 = 4 . x_2$

$x_1 = 4 . 28 = 112$

Ob danih predpostavkah bi moralo obiskovati otroški vrtec v domači občini 112 otrok, 28 otrok pa bi lahko obiskovalo vrtce izven domače občine.

3. Vprašanje

Pri računanju poprečnega prispevka občine si bomo pomagali z enačbo:

$$c_m = \frac{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$$

Podatki so:
$x_1 = 105$
$x_2 = 35$
c_1= 40 tisoč DE
c_2= 50 tisoč DE

Če vstavimo podatke v našo enačbo, dobimo:

$$c_m = \frac{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{40 \cdot 105 + 50 \cdot 35}{105 + 35} = 42{,}5$$

Občina bo za otroško varstvo iz proračuna v povprečju mesečno namenila 42500 DE na otroka.

3.2 Sklepni in delitveni račun

3.2.1 Sklepni račun

Sklepni račun je postopek, s pomočjo katerega izračunamo neznano vrednost ene spremenljivke na podlagi ostalih znanih vrednosti proučevanih spremenljivk in pri pogoju, da obstaja med proučevanimi spremenljivkami bodisi prema sorazmernost bodisi obratna sorazmernost ter da so vrednosti vseh proučevanih spremenljivk nenegativne.

Sklepni račun je lahko enostaven ali sestavljen.

3.2.1.1 Enostavni sklepni račun

Premo sorazmerje med proučevanima spremenljivkama

Pri enostavnem sklepnem računu obravnavamo dve spremenljivki, ki sta med seboj premo ali obratno sorazmerni. Označimo spremenljivki z x in y. Z indeksom označujemo zaporedno vrednost posamezne proučevane spremenljivke. Če sta spremenljivki med seboj v premem sorazmerju, potem velja:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \qquad (3.2.1)$$

Če enačbo preuredimo, dobimo:

$x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$

Obratno sorazmerje med proučevanima spremenljivkama

Če sta spremenljivki v obratnem sorazmerju, velja:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_2 : y_1 \qquad (3.2.2)$$

Tudi to enačbo lahko preuredimo. V tem primeru dobimo:

$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$

Če je iskana vrednost y_2, potem dobimo:

$$y_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot y_1$$

Primer 3.2
Koliko DE dobimo za 327 CHF*, če je tečaj 1 CHF = 141,31 DE in predpostavimo, da ni provizije?

Najprej bomo določili proučevane spremenljivke. Prva proučevana spremenljivka je CHF, druga proučevana spremenljivka pa je DE. Prvo proučevano spremenljivko bomo označili z x, drugo proučevano spremenljivko pa bomo označili z y.

Podatki so:
x_1 = 1 CHF
x_2 = 327 CHF
y_1= 141,31 DE
y_2= ?

Ker je v našem primeru neznana vrednost y2 , dobimo:
1 CHF = 141,31 DE
327 CHF = y DE

Da bi lahko pravilno odgovorili na zastavljeno vprašanje, moramo določiti odnos med proučevanima spremenljivkama. Zanima nas, ali sta proučevani spremenljivki premo sorazmerni ali obratno sorazmerni. Pri tem si pomagamo s preprostim sklepanjem. Izplačani znesek v denarnih enotah bo večji, če bomo zamenjali več frankov. Na ta način smo ugotovili, da sta proučevani spremenljivki premo sorazmerni. Pri reševanju problema si bomo zato pomagali z naslednjo enačbo:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Ker je iskana vrednost y2, bomo iz enačbe izrazili y_2:

$$y_2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot y_1$$

$$y_2 = \frac{327CHF \cdot 141{,}31DE}{1CHF} = 46210{,}50DE$$

Primer 3.3
V nekem podjetju je mesečni zaslužek delavca odvisen od števila slabih proizvodov, ki jih izdela posamezni delavec v preteklem mesecu. Eden izmed delavcev je v preteklem mesecu naredil 8 slabih proizvodov, njegov mesečni zaslužek pa je bil enak 67500 DE. Kolikšen naj bo mesečni zaslužek delavca, ki je v preteklem mesecu naredil 20 slabih proizvodov?

V tem primeru je prva proučevana spremenljivka število slabih proizvodov, druga proučevana spremenljivka pa je mesečni zaslužek delavca. Prvo proučevano spremenljivko bomo označili z x, drugo pa z y.

Podatki so:
$x_1 = 8$
$x_2 = 20$
$y_1 = 67500$ DE
$y_2 = ?$

Da bi lahko pravilno odgovorili na zastavljeno vprašanje, moramo tudi v tem primeru določiti odnos med proučevanima spremenljivkama. Mesečni zaslužek delavca bo večji, če je delavec v preteklem mesecu naredil manj slabih proizvodov. Proučevani spremenljivki sta obratno sorazmerni, zato si bomo pri reševanju naloge pomagali z

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

Ker je iskana vrednost y_2, bomo iz enačbe izrazili y_2:

$$y_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot y_1$$

Če v to enačbo vstavimo podatke, dobimo:

$$y_2 = \frac{67500DE \cdot 8}{20} = 27 \text{ tisoč DE}$$

Mesečni zaslužek delavca, ki je v preteklem mesecu naredil 20 slabih proizvodov, je enak 27 tisoč DE.

3.2.1.2 Sestavljeni sklepni račun

Pri sestavljenem sklepnem računu za razliko od enostavnega sklepnega računa obravnavamo več spremenljivk, ki so med seboj bodisi v premem bodisi v obratnem sorazmerju.

Predpostavimo, da proučujemo tri spremenljivke, ki jih bomo označili z u, v in y. V tem primeru je lahko spremenljivka y bodisi premo sorazmerna bodisi obratno sorazmerna s spremenljivko u in hkrati bodisi premo sorazmerna bodisi obratno sorazmerna s spremenljivko v. Zato imamo pri sestavljenem sklepnem računu štiri osnovne pristope:

1. Spremenljivka y je premo sorazmerna s spremenljivko u in hkrati premo sorazmerna s spremenljivko v,
2. Spremenljivka y je obratno sorazmerna s spremenljivko u in hkrati obratno sorazmerna s spremenljivko v,
3. Spremenljivka y je premo sorazmerna s spremenljivko u in hkrati obratno sorazmerna s spremenljivko v, ali pa
4. Spremenljivka y je obratno sorazmerna s spremenljivko u in hkrati premo sorazmerna s spremenljivko v. Ker lahko proučevane spremenljivke poljubno označujemo, je ta pristop enak tretjemu pristopu.

Pri enostavnem sklepnem računu smo ugotovili, da:

- v primeru premega sorazmerja med proučevanima spremenljivkama velja (3.2.1),
- v primeru obratnega sorazmerja med proučevanima spremenljivkama pa velja (3.2.2).

Za vsak posamezen pristop zato velja:

1. Če je spremenljivka y premo sorazmerna s spremenljivko u in hkrati premo sorazmerna s spremenljivko v, potem na podlagi enačb:

$y_1 : y_2 = u_1 : u_2$

$y_1 : y_2 = v_1 : v_2$

Velja[5]:

$$y_1 : y_2 = u_1 \cdot v_1 : u_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{u_1 \cdot v_1}{u_2 \cdot v_2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

Če je iskana vrednost y_2, potem dobimo:

$$y_2 = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} \cdot y_1$$

2. Če je spremenljivka y obratno sorazmerna s spremenljivko u in hkrati obratno sorazmerna s spremenljivko v, potem na podlagi enačb:

$y_1 : y_2 = u_2 : u_1$

$y_1 : y_2 = v_2 : v_1$

Velja:

$$y_1 : y_2 = u_2 \cdot v_2 : u_1 \cdot v_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{u_2 \cdot v_2}{u_1 \cdot v_1} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

Če je iskana vrednost y_2, potem dobimo:

$$y_2 = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot y_1$$

3. Če je spremenljivka y premo sorazmerna s spremenljivko u in hkrati obratno sorazmerna s spremenljivko v, potem na podlagi enačb:

$y_1 : y_2 = u_1 : u_2$

$y_1 : y_2 = v_2 : v_1$

[5] Enačbo za izračun neznane vrednosti proučevane spremenljivke v okviru sestavljenega sklepnega računa lahko naj demo v Vadnal (1974, str. 41).

Velja tudi:

$$y_1 : y_2 = u_1 \cdot v_2 : u_2 \cdot v_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{u_1 \cdot v_2}{u_2 \cdot v_1} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

Če je iskana vrednost y_2, potem dobimo:

$$y_2 = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot y_1$$

Po analogiji lahko algebraični pristop na osnovi treh spremenljivk razširimo tudi na več proučevanih spremenljivk.

Primer 3.4

V nekem podjetju je eden izmed delavcev prejel nagrado za opravljeno delo v preteklem mesecu v višini 175814 DE. Pri tem ima omenjeni delavec 35 let delovne dobe in je bil zaradi bolniške v preteklem mesecu odsoten 5 dni. Kolikšna pa bo nagrada delavca, ki ima 27 let delovne dobe in je bil zaradi bolniške v preteklem mesecu odsoten 21 dni?

V tem primeru obravnavamo tri spremenljivke, in sicer nagrada delavca (to spremenljivko bomo označili z y), število let delovne dobe (spremenljivka u) in število dni odsotnosti posameznega delavca zaradi bolniške (spremenljivka v). Reševanje problemov s pomočjo sestavljenega sklepnega računa si olajšamo s preprosto shemo, v kateri nastopajo vse proučevane spremenljivke (vrstni red spremenljivk v shemi je lahko poljuben):

Leta delovne dobe		Bolniška		Nagrada delavca	
35	$\uparrow$	5	$\downarrow$	957209	$\uparrow$
27		21		y	

Podobno kot pri enostavnem sklepnem računu moramo tudi v tem primeru najprej določiti odnose med proučevanimi spremenljivkami. Pri tem nas zanimajo odnosi med tisto spremenljivko, katere neznano vrednost računamo in med posamezno izmed preostalih proučevanih spremenljivk. Premo sorazmerje bomo označili s puščico navzgor, obratno sorazmerje pa bomo označili s puščico navzdol. Sklepanje vedno začnemo pri tisti spremenljivki, katere neznano vrednost računamo.

V našem primeru to pomeni, da bo nagrada delavca večja (puščica navzgor) pri večjem številu let delovne dobe (puščica navzgor) in pri manjšem številu dni izostanka od dela zaradi bolniške (puščica navzdol).
Zato bomo pri računanju nagrade drugega delavca uporabili tretji pristop:
$y_1 : y_2 = u_1 : u_2$
$y_1 : y_2 = v_2 : v_1$

Zato velja tudi:

$$y_1 : y_2 = u_1 \cdot v_2 : u_2 \cdot v_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{u_1 \cdot v_2}{u_2 \cdot v_1} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

Ker je iskana vrednost y_2, bomo iz enačbe izrazili y_2:

$$y_2 = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot y_1$$

Vstavimo podatke v enačbo in izračunamo y_2:

$$y_2 = \frac{27}{35} \cdot \frac{5}{21} \cdot 957209 = 175814\,\text{DE}$$

Nagrada za delavca, ki ima 27 let delovne dobe in je bil zaradi bolniške v preteklem mesecu odsoten 21 dni, je enaka 175814 DE.

3.2.2 Delitveni račun

Temeljna problematika delitvenega računa

Delitveni račun uporabljamo vselej, kadar želimo določeno celoto razdeliti na posamezne dele v skladu z delitvenimi pogoji. Pri tem je lahko število delov in število pogojev precej različno. Če imamo opraviti z enim delitvenim pogojem, govorimo o enostavnem delitvenem računu, kadar pa imamo opraviti s sistemom delitvenih pogojev, pa govorimo o sestavljenem delitvenem računu.

Sinonim za pogoj pri delitvenem računu je tudi ključ. Ta pogoj, če gre za enostavni delitveni račun, je lahko razmerje med deli celote ali pa tudi predpisane razlike med deleži. V praksi se delitveni račun precej uporablja, srečujemo ga na številnih področjih, kot primer pa navedimo družbo z neomejeno odgovornostjo. Pri družbi z neomejeno odgovornostjo družbeniki jamčijo za obveznosti družbe z vsem svojim premoženjem, kapital družbe pa družbeniki pridobijo s svojim vložkom v družbo. Število družbenikov je tako lahko različno, dobiček družbe pa se deli v skladu z njihovim vložkom v kapital. V javnem sektorju so te vrste problemi zelo pogosti (npr. delitev finančnih sredstev upravičencem).

3.2.2.1 Enostavni delitveni račun

Pri enostavnem delitvenem računu bomo uporabljali naslednjo simboliko:

A	- količina, ki jo delimo,
n	- število delov, na katero bomo delili količino A,
$x_1 : x_2 : \ldots : x_n$	- razmerje med posameznimi deli,
$y_1, y_2, \ldots, y_n$	- velikost posameznih delov.

Pri enostavnem delitvenem računu obstajata dve možnosti delitve:

– deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so premo sorazmerni delom $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

– deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so obratno sorazmerni delom $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Premo sorazmerje

Če so deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ premo sorazmerni delom $x_1, x_2, \ldots, x_n$, potem velja:

$$y_1 = k \,.\, x_i;\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2.3}$$

Ker je:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = A$$

je zaradi premo sorazmernosti tudi:

$$k \,.\, x_1 + k \,.\, x_2 + \ldots + k \,.\, x_n = A$$

Če na levi strani enačbe izpostavimo skupni člen k, dobimo:

$$k = \frac{A}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

To enačbo vstavimo v enačbo:

$$y_1 = k \,.\, x_1;\ i = 1,2,\ldots,n$$

in dobimo:

$$y_i = \frac{A}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \cdot x_i; i = 1,2,\ldots,n$$

Zato v splošnem velja:

$$y_1 : y_2 : \ldots : y_n = k \cdot x_1 : k \cdot x_2 : \ldots : k \cdot x_n \Rightarrow y_1 : y_2 : \ldots : y_n = x_1 : x_2 : \ldots : x_n$$

Obratno sorazmerje

Če so deli y_1, y_2 ,..., y_n obratno sorazmerni delom $x_1 : x_2 : ... : x_n$, potem velja:

$$y_i = \frac{k}{x_i}; i = 1,2,..., n \tag{3.2.4}$$

Tudi v tem primeru velja:

$y_1, y_2 ,..., y_n = A$

Zato velja tudi:

$$\frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2} + ... + \frac{k}{x_n} = A$$

Če iz zadnje enačbe izrazimo k, dobimo:

$$k = \frac{A}{\frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2} + ... + \frac{k}{x_n}}$$

Po analogiji velja tudi:

$$y_i = \frac{A}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \cdot \frac{1}{x_i}; i = 1,2,..., n$$

Zato v splošnem velja:

$$y_1 : y_2 : ... : y_n = \frac{k}{x_1} : \frac{k}{x_2} : ... : \frac{k}{x_n} \Rightarrow y_1 : y_2 : ... : y_n = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : ... : \frac{1}{x_n}$$

Primer 3.5

Dobiček neke družbe z neomejeno odgovornostjo je v letu L znašal 20000 DE. Kapital družbe je razdeljen med tri družbenike v razmerju 1:3:4, v istem razmerju pa se deli tudi dobiček družbe. Kolikšna je velikost posameznega dela?

Za rešitev tega problema uporabimo enačbo:

$$y_i = \frac{A}{x_1 + x_2 + ... + x_n} \cdot x_i$$

Podatki so:
A = 20000 DE
$x_1:x_2:x_3$ = 1:3:4

Podatke vnesemo v enačbo:

$$y_1 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_1 = \frac{20000}{1+3+4} \cdot 1 = 2500DE,$$

$$y_2 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_2 = \frac{20000}{1+3+4} \cdot 3 = 7500DE,$$

$$y_3 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_3 = \frac{20000}{1+3+4} \cdot 4 = 10000DE.$$

Preizkus:
$y_1 + y_2 + y_3$ = 2500DE + 7500DE + 10000DE = 20000DE

Primer 3.6

Podjetnik ima zaposlene štiri delavce, njihova mesečna plača pa je odvisna od števila slabih proizvodov, ki jih izdela posameznik. Kot slab proizvod se obravnava vsak proizvod, ki ga ni mogoče prodati na trgu. Prvi delavec je v preteklem mesecu naredil 8 slabih proizvodov, drugi 16, tretji 2 in četrti 20 slabih proizvodov.

Podjetnik ima 398250 DE sredstev, namenjenih izplačilu plač štirim zaposlenim delavcem. Koliko dobi vsak delavec?

Podatki so:

A = 398250 DE,

$$\frac{1}{x_1}:\frac{1}{x_2}:\frac{1}{x_3}:\frac{1}{x_4}=y_1:y_2:y_3:y_4=\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\frac{1}{2}:\frac{1}{20}.$$

Za reševanje tega problema uporabimo enačbo (3.2.7), vstavljamo ustrezne podatke v enačbo in izračunamo vrednosti y_i:

$$y_1=\frac{A}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}}\cdot\frac{1}{x_1}=\frac{398250}{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}}\cdot\frac{1}{8}=67500DE,$$

$$y_2=\frac{A}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{398250}{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}}\cdot\frac{1}{16}=33750DE,$$

$$y_3=\frac{A}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}}\cdot\frac{1}{x_3}=\frac{398250}{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}}\cdot\frac{1}{2}=270000DE,$$

$$y_4=\frac{A}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}}\cdot\frac{1}{x_4}=\frac{398250}{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}}\cdot\frac{1}{20}=27000DE.$$

Preizkus:

$y_1+y_2+y_3+y_4$ = 67500 DE + 33750 DE + 270000 DE + 27000 DE = 398250 DE

Sestavljeni delitveni račun

Pri enostavnem delitvenem računu smo imeli opravka z enim delitvenim pogojem, ki smo ga zapisali v obliki $x_1 : x_2 : ... : x_n$. Deli $y_1 : y_2 : ... :$

y_n so lahko bodisi premo sorazmerni bodisi obratno sorazmerni delom $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$. Pri sestavljenem delitvenem računu pa bomo imeli opravka s sistemom delitvenih pogojev.

Pri sestavljenem delitvenem računu bomo uporabljali naslednjo simboliko:

A - količina, ki jo delimo,

n - število delov, na katero bomo delili količino A,

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ - velikost posameznih delov.

Predpostavimo, da imamo dva delitvena pogoja, ki ju bomo označili z $u_1 : u_2 :\ldots: u_n$ in $v_1 : v_2 :\ldots: v_n$. V tem primeru so lahko deli $y_1, y_2,\ldots, y_n$ bodisi premo sorazmerni bodisi obratno sorazmerni delom in hkrati bodisi $u_1 : u_2 :\ldots: u_n$ premo sorazmerni bodisi obratno sorazmerni delom $v_1 : v_2 :\ldots: v_n$. Zato imamo pri sestavljenem delitvenem računu štiri osnovne pristope:

1. Deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so premo sorazmerni delom $u_1 : u_2 :\ldots: u_n$ in hkrati premo sorazmerni delom $v_1 : v_2 :\ldots: v_n$,
2. Deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so obratno sorazmerni delom $u_1 : u_2 :\ldots: u_n$ in hkrati obratno sorazmerni delom $v_1 : v_2 :\ldots: v_n$,
3. Deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so premo sorazmerni delom $u_1 : u_2 :\ldots: u_n$ in hkrati obratno sorazmerni delom $v_1 : v_2 :\ldots: v_n$, ali pa
4. Deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so obratno sorazmerni delom $u_1 : u_2 :\ldots: u_n$ in hkrati premo sorazmerni delom $v_1 : v_2 :\ldots: v_n$. Ker lahko delitvene pogoje poljubno označujemo, je ta pristop enak tretjemu.

Pri enostavnem delitvenem računu smo ugotovili, da:

- v primeru premo sorazmernosti med deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in $x_1 : x_2 :\ldots: x_n$ velja

$$y_1 : y_2 : \ldots : y_n = k \cdot x_1 : k \cdot x_2 : \ldots : k \cdot x_n \Rightarrow y_1 : y_2 : \ldots : y_n = x_1 : x_2 : \ldots : x_n$$

– v primeru obratno sorazmernosti med deli $y_1, y_2, ..., y_n$ in $x_1 : x_2 :...: x_n$ velja

$$y_1 : y_2 : ... : y_n = \frac{k}{x_1} : \frac{k}{x_2} : ... : \frac{k}{x_n} \Rightarrow y_1 : y_2 : ... : y_n = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : ... : \frac{1}{x_n}$$

Zato lahko zapišemo:

1. Če so deli $y_1, y_2, ..., y_n$ premo sorazmerni delom $u_1 : u_2 :...: u_n$ in hkrati premo sorazmerni delom $v_1 : v_2 :...: v_n$, potem velja:

$y_1, y_2, ..., y_n = u_1 : u_2 :...: u_n$

$y_1, y_2, ..., y_n = v_1 : v_2 :...: v_n$

Zato velja tudi:

$y_1, y_2, ..., y_n = u_1 . v_1 : u_2 . v_2 :...: u_n . v_n$

Velikost posameznih delov $y_1, y_2, ..., y_n$ izračunamo s pomočjo enačbe:

$y_i = k . u_i . v_i; i = 1,2,...,n$

Kjer je:

$$k = \frac{A}{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + ... + u_n \cdot v_n}$$

2. Če so deli y_1, y_2, ..., y_n obratno sorazmerni delom $u_1 : u_2 : ... : u_n$ in hkrati obratno sorazmerni delom $v_1 : v_2 : ... : v_n$, potem velja:

$$y_1 : y_2 : ... y_n = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : ... : \frac{1}{u_n}$$

$$y_1 : y_2 : ... y_n = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2} : ... : \frac{1}{v_n}$$

Zato velja tudi:

$$y_1 : y_2 : ... y_n = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{v_1} : \frac{1}{u_2} \cdot \frac{1}{v_2} : ... : \frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{v_n}$$

Velikost posameznih delov y_1, y_2, ..., y_n izračunamo s pomočjo enačbe:

$$y_i = k \cdot \frac{1}{u_i} \cdot \frac{1}{v_i}; i = 1,2,...,n$$

Kjer je:

$$k = \frac{A}{\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{1}{u_2} \cdot \frac{1}{v_2} + ... + \frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{v_n}}$$

3. Če so deli y_1, y_2, ..., y_n premo sorazmerni delom $u_1 : u_2 : ... : u_n$ in hkrati obratno sorazmerni delom $v_1 : v_2 : ... : v_n$, velja:

$y_1, y_2, ..., y_n = u_1 : u_2 : ... : u_n$

$$y_1 : y_2 : ... : y_n = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2} : ... : \frac{1}{v_n}$$

Zato velja tudi:

$$y_1 : y_2 : \ldots : y_n = u_1 \cdot \frac{1}{v_1} : u_2 \cdot \frac{1}{v_2} : \ldots : u_n \cdot \frac{1}{v_n}$$

Velikost posameznih delov y_1, y_2, ..., y_n izračunamo s pomočjo enačbe:

$$y_i = k \cdot \frac{u_i}{v_i}; i = 1,2,\ldots,n$$

Kjer je:

$$k = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \ldots + \frac{u_n}{v_n}}$$

Po analogiji lahko algebraični pristop na osnovi dveh delitvenih pogojev razširimo tudi na več delitvenih pogojev.

Primer 3.7
V podjetju nameravajo trem delavcem izplačati nagrado v višini 2360 tisoč DE. Obstajajo trije načini delitve tega zneska in sicer premo sorazmerno s prisotnostjo na delu, premo sorazmerno z delovno dobo ali pa kombinacija obeh kriterijev. V podjetju bodo pri izračunih uporabili podatke, zbrane v spodnji tabeli.

	DELAVEC 1	DELAVEC 2	DELAVEC 3
PRISOTNOST NA DELU (dni v letu)	200	180	210
DELOVNA DOBA (v letih)	35	25	40

Koliko dobi vsak delavec po posameznem pristopu?

1. Pristop: Nagrada delavca je premo sorazmerna s prisotnostjo na delu.
Podatki so:
A = 2360 tisoč DE
$x_1 : x_2 : x_3 = 200 : 180 : 210$

V tem primeru velja:
$y_i = k \,.\, x_i \,.\, v_i$; i = 1,2,3
$y_1 + y_2 + y_3 = A$

Zato velja:

$$k = \frac{A}{x_1 + x_2 + .x_3}$$

Podatke vnesemo v enačbo in izračunamo nagrade delavcev:

$$y_1 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_1 = \frac{2360000DE}{200 + 180 + 210} \cdot 200 = 800000DE$$

$$y_2 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_2 = \frac{2360000DE}{200 + 180 + 210} \cdot 180 = 720000DE$$

$$y_3 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_3 = \frac{2360000DE}{200 + 180 + 210} \cdot 210 = 840000DE$$

Preizkus:
$y_1 + y_2 + y_3 = A$
$y_1 + y_2 + y_3$ = 800 tisoč DE + 720 tisoč DE + 840 tisoč DE = 2360 tisoč DE

Po prvem pristopu bo prvi delavec zaslužil 800 tisoč DE, drugi delavec bo zaslužil 720 tisoč DE in tretji delavec bo zaslužil 840 tisoč DE.

2. Pristop: Nagrada delavca je premo sorazmerna z delovno dobo.
Podatki so:
A = 2360 tisoč DE
$x_1 : x_2 : x_3 = 35 : 40 : 25$

Tudi v tem primeru velja:
$y_i = k \,.\, x_i \,.\, v_i$; i = 1,2,3
$y_1 + y_2 + y_3 = A$

Hkrati velja:

$$k = \frac{A}{x_1 + x_2 + .x_3}$$

Podatke vnesemo v enačbo in izračunamo nagrade delavcev:

$$y_1 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_1 = \frac{2360000DE}{35+40+25} \cdot 35 = 826000DE$$

$$y_2 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_2 = \frac{2360000DE}{35+40+25} \cdot 40 = 944000DE$$

$$y_3 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_3 = \frac{2360000DE}{35+40+25} \cdot 25 = 590000DE$$

Preizkus:
$y_1 + y_2 + y_3 = A$
$y_1 + y_2 + y_3$ = 826 tisoč DE + 944 tisoč DE + 590 tisoč DE = 2360 tisoč DE

Po drugem pristopu bo prvi delavec zaslužil 826 tisoč DE, drugi delavec bo zaslužil 944 tisoč DE in tretji delavec bo zaslužil 590 tisoč DE.

3. Pristop: Kombinacija obeh kriterijev - nagrada delavca je premo sorazmerna s prisotnostjo na delu in z delovno dobo.
V tem primeru so delavci soudeleženi na dva načina in sicer z vidika prisotnosti na delu v razmerju 200:180:210 in z vidika delovne dobe v razmerju 35:40:25. Nagrade delavcev pa morajo biti hkrati sorazmerne s prisotnostjo na delu in z delovno dobo, zato velja:
$u_1 : u_2 : u_3 = 200 : 180 : 210$
$v_1 : v_2 : v_3 = 35 : 40 : 25$

Pri odgovoru na zastavljeno vprašanje si bomo pomagali z enačbo:
$y_i = k \,.\, u_i \,.\, v_i$; i = 1,2,3
$y_1 + y_2 + y_3 = A$

Hkati velja:

$$k = \frac{A}{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n}$$

Podatki so:
A = 2360 tisoč DE

Podatke vnesemo v enačbo in izračunamo nagrade delavcev:

$$y_1 = \frac{A}{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3} \cdot u_1 \cdot v_1 = \frac{2360000}{7000 + 7200 + 5250} \cdot 7000 = 849357$$

$$y_2 = \frac{A}{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3} \cdot u_2 \cdot v_2 = \frac{2360000}{7000 + 7200 + 5250} \cdot 7200 = 873625$$

$$y_3 = \frac{A}{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3} \cdot u_3 \cdot v_3 = \frac{2360000}{7000 + 7200 + 5250} \cdot 5250 = 637018$$

Preizkus:
$y_1 + y_2 + y_3 = A$
$y_1 + y_2 + y_3$ = 849357 DE + 873625 DE + 637018 DE = 2360 tisoč DE

Po tretjem pristopu bo prvi delavec zaslužil 849357 DE, drugi delavec bo zaslužil 873625 DE in tretji delavec bo zaslužil 637018 DE.

Primer 3.8

V nekem podjetju želijo trem delavcem razdeliti nagrado v višini 1680000 DE. Podjetje pri izračunih upošteva podatke, prikazane v spodnji tabeli.

	Oznaka	DELAVEC 1	DELAVEC 2	DELAVEC 3
SLABI IZDELKI (dnevno povprečje)	v_i	16	20	22
BOLNIŠKA (dni)	u_i	5	21	10
DELOVNA DOBA (v letih)	x_i	35	27	40

Koliko pripada vsakemu delavcu, če podjetje:
1. razdeli celotno nagrado trem delavcem tako, da upošteva število dni odsotnosti posameznega delavca zaradi bolniške in hkrati število slabih izdelkov?
2. razdeli celotno nagrado trem delavcem tako, da upošteva število dni odsotnosti posameznega delavca zaradi bolniške in delovno dobo posameznega delavca?
3. razdeli celotno nagrado trem delavcem premo sorazmerno z delovno dobo in obratno sorazmerno s številom slabih izdelkov ter številom dni odsotnosti posameznega delavca zaradi bolniške?

1. Vprašanje: Nagrada delavca je obratno sorazmerna s številom dni odsotnosti posameznega delavca zaradi bolniške in obratno sorazmerna s številom slabih izdelkov.

Ker moramo upoštevati oba kriterija hkrati, velja:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{5} : \frac{1}{21} : \frac{1}{10}$$

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{16} : \frac{1}{20} : \frac{1}{22}$$

Pri odgovoru na zastavljeno vprašanje si bomo pomagali z enačbo:

$$y_i = k \cdot \frac{1}{u_i} \cdot \frac{1}{v_i}; i = 1,2,3$$

$y_1 + y_2 + y_3 = A$

Hkrati velja:

$$k = \frac{A}{\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{1}{u_2} \cdot \frac{1}{v_2} + \frac{1}{u_3} \cdot \frac{1}{v_3}}$$

Podatki so:
A = 1680 tisoč DE

Podatke vnesemo v enačbo in izračunamo nagrade delavcev:

$$y_1 = \frac{A}{\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{1}{u_2} \cdot \frac{1}{v_2} + \frac{1}{u_3} \cdot \frac{1}{v_3}} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{v_1} = \frac{1680000DE}{\frac{1}{80} + \frac{1}{420} + \frac{1}{220}} \cdot \frac{1}{80} = 1081003DE$$

$$y_2 = \frac{A}{\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{1}{u_2} \cdot \frac{1}{v_2} + \frac{1}{u_3} \cdot \frac{1}{v_3}} \cdot \frac{1}{u_2} \cdot \frac{1}{v_2} = \frac{1680000DE}{\frac{1}{80} + \frac{1}{420} + \frac{1}{220}} \cdot \frac{1}{420} = 205905DE$$

$$y_3 = \frac{A}{\frac{1}{u_1} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{1}{u_2} \cdot \frac{1}{v_2} + \frac{1}{u_3} \cdot \frac{1}{v_3}} \cdot \frac{1}{u_3} \cdot \frac{1}{v_3} = \frac{1680000DE}{\frac{1}{80} + \frac{1}{420} + \frac{1}{220}} \cdot \frac{1}{220} = 393091DE$$

Preizkus:

$y_1 + y_2 + y_3 = A$

$y_1 + y_2 + y_3$ = 1081003 DE + 205905 DE + 393092 DE = 1680 tisoč DE

Ob danih predpostavkah bo prvi delavec zaslužil 1081003 DE, drugi delavec bo zaslužil 205905 DE in tretji delavec bo zaslužil 393091 DE.

2. Vprašanje: Nagrada delavca je obratno sorazmerna s številom dni odsotnosti posameznega delavca zaradi bolniške in premo sorazmerna z delovno dobo.

Ker moramo upoštevati oba kriterija hkrati, velja:

$u_1 : u_2 : u_3 = 35 : 27 : 40$

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{5} : \frac{1}{21} : \frac{1}{10}$$

Pri odgovoru na zastavljeno vprašanje si bomo pomagali z enačbo:

$$y_i = k \cdot \frac{u_i}{v_i}; i = 1,2,3$$

$y_1 + y_2 + y_3 = A$

Hkrati velja:

$$k = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3}}$$

Podatki so:

A = 1680 tisoč DE

Podatke vnesemo v enačbo in izračunamo nagrade delavcev:

$$y_1 = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3}} \cdot \frac{u_1}{v_1} = \frac{1680000DE}{\frac{35}{5} + \frac{27}{21} + \frac{40}{10}} \cdot \frac{35}{5} = 957209DE$$

$$y_2 = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3}} \cdot \frac{u_2}{v_2} = \frac{1680000DE}{\frac{35}{5} + \frac{27}{21} + \frac{40}{10}} \cdot \frac{27}{21} = 175814DE$$

$$y_3 = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3}} \cdot \frac{u_3}{v_3} = \frac{1680000DE}{\frac{35}{5} + \frac{27}{21} + \frac{40}{10}} \cdot \frac{40}{10} = 546977DE$$

Preizkus:

$y_1 + y_2 + y_3 = A$

$y_1 + y_2 + y_3 = 957209$ DE + 175814 DE + 546977 DE = 1680 tisoč DE

Ob danih predpostavkah bo prvi delavec zaslužil 957209 DE, drugi delavec bo zaslužil 175814 DE in tretji delavec bo zaslužil 546977 DE.

3. Vprašanje: Nagrada delavca je premo sorazmerna z delovno dobo in obratno sorazmerna s številom dni odsotnosti posameznega delavca zaradi bolniške ter številom slabih izdelkov.

Ker moramo upoštevati vse tri kriterije hkrati, velja:
$u_1 : u_2 : u_3 = 35 : 27 : 40$

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{5} : \frac{1}{21} : \frac{1}{10}$$

$$z_1 : z_2 : z_3 = \frac{1}{16} : \frac{1}{20} : \frac{1}{22}$$

Pri odgovoru na zastavljeno vprašanje si bomo pomagali z enačbo:

$$y_i = k \cdot u_i \cdot \frac{1}{v_i} \cdot \frac{1}{z_i} ; i = 1,2,3$$

$y_1 + y_2 + y_3 = A$

Hkrati velja:

$$k = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1 \cdot z_1} + \frac{u_2}{v_2 \cdot z_2} + \frac{u_3}{v_3 \cdot z_3}}$$

Podatki so:
A = 1680 tisoč DE

Podatke vnesemo v enačbo in izračunamo nagrade delavcev:

$$y_1 = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1 \cdot z_1} + \frac{u_2}{v_2 \cdot z_2} + \frac{u_3}{v_3 \cdot z_3}} \cdot \frac{u_1}{v_1 \cdot z_1} = \frac{1680000DE}{\frac{35}{5 \cdot 16} + \frac{27}{21 \cdot 20} + \frac{40}{10 \cdot 22}} \cdot \frac{35}{5 \cdot 16} = 1075184DE$$

$$y_2 = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1 \cdot z_1} + \frac{u_2}{v_2 \cdot z_2} + \frac{u_3}{v_3 \cdot z_3}} \cdot \frac{u_2}{v_2 \cdot z_2} = \frac{1680000DE}{\frac{35}{5 \cdot 16} + \frac{27}{21 \cdot 20} + \frac{40}{10 \cdot 22}} \cdot \frac{27}{21 \cdot 20} = 157986DE$$

$$y_3 = \frac{A}{\frac{u_1}{v_1 \cdot z_1} + \frac{u_2}{v_2 \cdot z_2} + \frac{u_3}{v_3 \cdot z_3}} \cdot \frac{u_3}{v_3 \cdot z_3} = \frac{1680000DE}{\frac{35}{5 \cdot 16} + \frac{27}{21 \cdot 20} + \frac{40}{10 \cdot 22}} \cdot \frac{40}{10 \cdot 22} = 446830DE$$

Preizkus:
$y_1 + y_2 + y_3 = A$
$y_1 + y_2 + y_3 = 1075184 \text{ DE} + 157986 \text{ DE} + 446830 \text{ DE} = 1680 \text{ tisoč DE}$

Ob danih predpostavkah bo prvi delavec zaslužil 1075184 DE, drugi delavec bo zaslužil 157986 DE in tretji delavec bo zaslužil 446830 DE.

3.3 Procentni in promilni račun

3.3.1 Procentni račun

3.3.1.1 Osnovni pojmi

Procentni in promilni račun se v praksi veliko uporabljata. Procent ali odstotek pomeni eno stotino določene količine. Tako velja:

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Osnovni obrazec procentnega računa je:

$$pz = \frac{a \cdot p}{100} \qquad (3.3.1)$$

Pri tem je:

a - osnova,

p - procenti,

pz - procentni znesek.

Razlikujemo tri vrste procentnega računa, in sicer:

– procentni račun pod 100

Na primer, poznamo ceno določenega blaga na razprodaji in poznamo procent znižanja cene tega blaga, izračunali pa bi radi ceno tega blaga pred razprodajo.

– procentni račun od 100

To vrsto procentnega računa lahko uporabljamo v primeru, ko imamo dano ceno blaga pred razprodajo in poznamo procent znižanja cene tega blaga, izračunali pa bi radi ceno blaga na razprodaji.

– procentni račun nad 100

Na primer, poznamo ceno določenega blaga skupaj z DDV, zanima pa nas cena tega blaga brez davka.

Procentni račun pod 100 uporabljamo takrat, kadar pri računanju uporabljamo za procentni znesek zmanjšano osnovo[6]. Če pa pri računanju uporabljamo za procentni znesek povečano osnovo[7], pa imamo opraviti z procentnim računom nad 100.

3.3.1.2 Procentni račun od 100

V skladu z dogovorjeno simboliko velja:

$$a_{POD} = a - pz = a\left(1 - \frac{pz}{a}\right)$$

Ker iz osnovne enačbe izhaja:

$$pz = \frac{a \cdot p}{100} \Rightarrow \frac{pz}{a} = \frac{p}{100}$$

Zato velja:

$$a_{POD} = a - pz = a\left(1 - \frac{pz}{a}\right) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right) \tag{3.3.2}$$

$$a_{NAD} = a + pz = a\left(1 + \frac{pz}{a}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \tag{3.3.3}$$

3.3.1.3 Procentni račun pod 100

Izračun osnovne vrednosti a

Velja:

$$a_{POD} = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Enačbo delimo z $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ in dobimo:

[6] V nadaljevanju bomo za procentni znesek zmanjšano osnovo označevali z a_{POD}.

[7] Za procentni znesek povečano osnovo bomo označevali z a_{NAD}.

$$a = \frac{a_{POD}}{1 - \frac{p}{100}}$$

Števec in imenovalec ulomka na desni strani enačbe pomnožimo s 100 in dobimo končno obliko enačbe za izračun osnovne vrednosti a:

$$a = \frac{100 \cdot a_{POD}}{100 - p}$$

Izračun procentov p

Iz osnovne enačbe procentnega računa izhaja:

$$pz = \frac{a \cdot p}{100} \Rightarrow p = \frac{100 \cdot pz}{a}$$

Hkrati velja:

$$a_{POD} = a - pz \Rightarrow pz = a - a_{POD}$$

Ta izraz vstavimo v izhodiščno enačbo in dobimo:

$$p = \frac{100 \cdot (a - a_{POD})}{a}$$

Izračun procentnega zneska pz

Velja:

$$a_{POD} = a - pz \Rightarrow pz = a - a_{POD}$$

Ker je:

$$a = \frac{a_{POD}}{1 - \frac{p}{100}} \Rightarrow pz = \frac{a_{POD}}{1 - \frac{p}{100}} - a_{POD} = \frac{100 a_{POD}}{100 - p} - a_{POD} = \frac{100 a_{POD} - a_{POD} \cdot (100 - p)}{100 - p} = \frac{a_{POD} \cdot p}{100 - p}$$

3.3.1.4 Procentni račun nad 100

Vse enačbe za procentni račun nad 100 izpeljemo po analogiji kot enačbe za procentni račun pod 100, zato v nadaljevanju predstavljamo samo končne enačbe.

Izračun osnovne vrednosti a

$$a = \frac{100 \cdot a_{NAD}}{100 + p}$$

Izračun procentov p

$$p = \frac{100 \cdot (a_{NAD} - a)}{a}$$

Izračun procentnega zneska pz

$$pz = \frac{a_{NAD} \cdot p}{100 + p}$$

Primer 3.9

Koliko DE dobimo za 327 CHF, če je tečaj 1 CHF = 141,31 DE in predpostavimo, da znaša provizija 2%?

Pri reševanju tega primera si bomo pomagali z enostavnim sklepnim računom in s procentnim računom od 100. S pomočjo enostavnega sklepnega računa bomo izračunali protivrednost denarnih enot danega zneska v švicarskih frankih, s pomočjo procentnega računa od 100 pa bomo izračunali denarni znesek v denarnih enotah, zmanjšan za vrednost provizije. Reševanje tega primera s pomočjo enostavnega sklepnega računa poteka po korakih:

Podatki so:

x_1 = 1 CHF

x_2 = 327 CHF

y_1= 141,31 DE

y_2= ?

Velja:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Vstavimo podatke v enačbo in izračunajmo y_2:

1 CHF . y_2 = 327 CHF . 141,31 DE

$$y_2 = \frac{327CHF \cdot 141{,}31DE}{1CHF} = 46210{,}50DE$$

Sedaj bomo izračunali še denarni znesek v denarnih enotah, zmanjšan za vrednost provizije. Izračun bo potekal na osnovi enačb procentnega računa od 100:

$$a_{POD} = a - pz = a\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 46210{,}50 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 45286$$

Če je tečaj 1 CHF = 141,31 DE in znaša provizija 2%, potem dobimo za 327 CHF 45286 DE.

Primer 3.10
Razpolagamo s 579 GBP*, ki jih moramo menjati za USD**. Predpostavimo, da lahko opravimo menjavo samo v banki 1 ali v banki 2. V banki 1 znaša tečaj 1 GBP = 1,43 USD, provizija pa je 1%. V banki 2 je tečaj 1 GBP = 1,45 USD, pri menjalniškem poslovanju pa zaračunavajo 3% provizijo. Katera banka je za nas ugodnejša? Koliko bi morala znašati provizija pri banki 2, da bi bila denarna zneska v USD po odbitku provizije pri obeh bankah enaka?

Tudi ta primer bomo reševali podobno kot prejšnjega. V prvem koraku bomo s pomočjo enostavnega sklepnega računa izračunali dolarsko protivrednost danega zneska v britanskih funtih za obe banki, v drugem koraku pa bomo izračunali denarni znesek v ameriških dolarjih, zmanjšan za vrednost provizije pri posamezni banki.

Za banko 1 velja:
1 GBP =1,4317 USD
579 GBP = y USD

Izračunajmo dolarsko protivrednost danega zneska v britanskih funtih za banko 1:
1 GBP . y_2 = 579 GBP · 1,43 USD

$$y_2 = \frac{579 GBP \cdot 1{,}43 USD}{1 GBP} = 827{,}97 USD$$

Izračunajmo še denarni znesek v ameriških dolarjih, zmanjšan za vrednost provizije pri banki 1:

$$a_{POD} = a - pz = a\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 827{,}97 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 819{,}7 USD$$

---
*Oznaka za britanski funt
**Oznaka za ameriški dolar

Za banko 2 velja:
1 GBP =1,45 USD
579 GBP = y USD

Izračunajmo dolarsko protivrednost danega zneska v britanskih funtih za banko 2:
1 GBP . y_2 = 579 GBP . 1,45 USD

$$y_2 = \frac{579GBP \cdot 1{,}45USD}{1GBP} = 839{,}55USD$$

Izračunajmo še denarni znesek v ameriških dolarjih, zmanjšan za vrednost provizije pri banki 1:

$$a_{POD} = a - pz = a\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 839{,}55 \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 814{,}4USD$$

Zanima nas, katera banka je za nas ugodnješa. To pomeni, pri kateri banki dobimo večji denarni znesek v ameriških dolarjih po odbitku provizije. Ker velja:

$$a_{POD}^{banka1} > a_{POD}^{banka2}$$

$$819{,}7 > 814{,}7 \Rightarrow$$ Za nas je ugodnejša banka 1.

Tako smo ugotovili, da je pri menjavi denarja zelo pomembna provizija. Čeprav je tečaj GBP v banki 2 višji kot v banki 1, pa je provizija, ki jo uporabljata banki pri menjalniškem poslovanju v banki 2 višja kot v banki 1, zato je izplačani denarni znesek v ameriških dolarjih po odbitku provizije višji v banki 1 kot v banki 2.

V nadaljevanju bomo izračunali, kakšna mora biti provizija pri menjalniškem poslovanju v banki 2, da bi bil izplačani denarni znesek v ameriških dolarjih po odbitku provizije pri obeh bankah enak.

To pomeni, da velja:

$$a_{POD}^{banka1} = a_{POD}^{banka2} = 819{,}7USD$$

$$a = 839{,}55USD$$

$$p = \frac{100 \cdot (a - a_{POD})}{a} = \frac{100 \cdot (839{,}55USD - 819{,}7USD)}{839{,}55USD} = 2{,}36\%$$

Da bi bila izplačana denarna zneska v USD po odbitku provizije pri obeh bankah enaka, mora pri danih tečajih in dani proviziji pri banki 1 provizija pri banki 2 znašati 2,36%.

Primer 3.11

V Sloveniji smo kupili pralni stroj, ki ga bomo izvozili na Hrvaško. Cena pralnega stroja znaša skupaj z DDV 92510 DE. Ker bomo pralni stroj izvozili na Hrvaško, bomo pri nas dobili povrnjen DDV. Stopnja DDV v Sloveniji je enaka 19%. Zato bomo morali plačati DDV na Hrvaškem, kjer je stopnja DDV enaka 22%. Izračunajmo:

1. Kolikšna je cena pralnega stroja v Sloveniji brez DDV?
2. Koliko znaša povrnjen DDV v Sloveniji?
3. Koliko znaša DDV na Hrvaškem, ki ga bomo plačali?
1. Upoštevali bomo, da znaša tečaj 1 HRK*=29,87 DE. Problem bomo rešili na dva načina. Po prvem načinu bomo predpostavili, da nimamo stroškov s provizijo, po drugem načinu pa bomo upoštevali strošek menjalniške provizije v višini 1,6%.
4. Kakšna je dejanska cena stroja, ki jo moramo plačati? Predpostavimo, da ni carine.

1. Vprašanje: Ceno pralnega stroja v Sloveniji brez DDV bomo izračunali s pomočjo procentnega računa nad 100 po obrazcu:

$$a = \frac{100 \cdot a_{NAD}}{100 + p_{SDDV}}$$

Pri izračunih bomo uporabljali naslednjo simboliko:

$p_{SDDV} \Rightarrow$ stopnja DDV v Sloveniji

$p_{HDDV} \Rightarrow$ stopnja DDV na Hrvaškem

$pz_{SDDV} \Rightarrow$ DDV v Sloveniji

$pz_{HDDV} \Rightarrow$ DDV na Hrvaškem

Ker je:

$a_{NAD} = 92500DE$

$p_{SDDV} = 19\%$

$p_{HDDV} = 22\%$

Lahko izračunamo:

$$a = \frac{100 \cdot a_{NAD}}{100 + p_{SDDV}} = \frac{100 \cdot 92500}{100 + 19} = 77731{,}09DE$$

Cena pralnega stroja brez DDV je enaka 77731,09 DE.

*Oznaka za hrvaško kuno

2. Vprašanje: Znesek povrnjenega DDV lahko izračunamo na dva načina:
Prvi pristop - s pomočjo enačbe:

$$pz_{SDDV} = \frac{a_{NAD} \cdot p_{SDDV}}{100 + p_{SDDV}} = \frac{92500 \cdot 19}{100 + 19} = 14768{,}91DE$$

Drugi pristop - s pomočjo razlike med ceno z DDV in ceno brez DDV:

$$pz_{SDDV} = a_{NAD} - a = 92500 - 77731{,}09 = 14768{,}91DE$$

Znesek povrnjenega DDV v Sloveniji znaša 14768,91 DE.

Znesek DDV, ki ga moramo plačati na Hrvaškem bomo izračunali s pomočjo enačbe procentnega računa pod 100 in sicer:

$$pz_{HDDV} = \frac{a_{POD} \cdot p_{HDDV}}{100 - p_{HDDV}}$$

Vstavimo podatke v enačbo:

$$pz_{HDDV} = \frac{a_{POD} \cdot p_{HDDV}}{100 - p_{HDDV}} = \frac{77731{,}09 \cdot 22}{100 - 22} = 21924{,}15DE$$

Na ta način smo izračunali znesek DDV, ki ga moramo plačati hrvaškim organom. Ta znesek bo nakazan v hrvaški proračun, s tem dejanjem pa bomo dobili pravico do uvoza pralnega stroja. Izračunani znesek je v denarnih enotah. Zato jih moramo zamenjati za kune.

3. Vprašanje:
Prvi način - ni provizije:
Če ni provizije, bomo izračunali ustrezno vrednost v hrvaških kunah s pomočjo enostavnega sklepnega računa:
1 HRK = 29,87 DE
x HRK = 21924,15 DE

Ker velja:
x_1 = 1 HRK
x_2 = ?
y_1= 29,87 DE
y_2= 21924,15 DE

Velja tudi:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Vstavimo podatke v enačbo in izračunajmo x_2:
1 HRK . 21924,15 DE = x_2 . 21924,15 DE

$$x_2 = \frac{1HRK \cdot 21924{,}15DE}{29{,}87DE} = 733{,}98HRK$$

Na Hrvaškem bomo plačali DDV v višini 733,98HRK.

Drugi način - strošek menjalniške provizije v višini 1,6%:
Če obstaja menjalniša provizija, potem je to strošek, ki nam podraži izvoz:
1 HRK = 29,87 DE
x HRK = 21924,15 DE

Pri izračunu bomo upoštevali:

$$x_2 = \frac{1HRK \cdot 21924{,}15DE}{29{,}87DE} = 733{,}98HRK$$

To je tisti znesek DDV, ki ga moramo plačati za uvoz pralnega stroja na Hrvaškem. Zato moramo imeti pred zamenjavo denarnih enot za kune več denarnih enot, in sicer toliko več, da bomo lahko plačali še menjalniško provizijo za menjalniški posel. Zato velja:

$$a = \frac{100 \cdot a_{POD}}{100 - p} = \frac{100 \cdot 733{,}98}{100 - 1{,}6} = 745{,}91HRK$$

Na ta način smo izračunali tisti znesek v hrvaških kunah, da bomo z njim lahko plačali menjalniško provizijo in DDV.

4. Vprašanje: Da bi lahko izračunali dejansko ceno stroja, moramo preračunati različne valutne zneske na skupno valuto. To pomeni, da bomo zneske v hrvaških kunah preračunali v denarne enote.

Prvi način - ni provizije:
Če ni provizije, bomo izračunali ustrezno vrednost v denarnih enotah s pomočjo enostavnega sklepnega računa:
1 HRK = 29,87 DE
733,98 HRK = y DE

Ker velja:
x_1 = 1 HRK
x_2 = 733,98 HRK
y_1= 29,87 DE
y_2= ?

Velja tudi:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Vstavimo podatke v enačbo in izračunajmo y_2 :

1 HRK . y_2 = 733,98 HRK . 29,8730 DE

$$y_2 = \frac{733{,}98 HRK \cdot 29{,}87 DE}{1 HRK} = 21924 DE$$

Dejanska cena stroja = Cena stroja v Sloveniji brez DDV + DDV na Hrvaškem

Zato velja:

Dejanska cena stroja = 77731 + 21924 = 99655 DE

V primeru, ko ni menjalniške provizije in ob predpostavki, da ni carine, znaša dejanska cena pralnega stroja (celotni strošek nakupa pralnega stroja) 99655 DE.

Drugi način - strošek menjalniške provizije v višini 1,6%:

1 HRK = 29,87 DE

745,91 HRK = y DE

Ker velja:

x_1 = 1 HRK

x_2 = 745,91 HRK

y_1= 29,87 DE

y_2= ?

Velja tudi:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Vstavimo podatke v enačbo in izračunajmo y_2:

1 HRK . y_2 = 745,91 HRK . 29,87 DE

$$y_2 = \frac{745{,}91 HRK \cdot 29{,}87 DE}{1 HRK} = 22280 DE$$

Dejanska cena stroja = Cena stroja v Sloveniji brez DDV + (DDV na Hrvaškem + Strošek provizije)

Zato velja:

Dejanska cena stroja = 77731 + 22280 = 100011 DE

V primeru menjalniške provizije in ob predpostavki, da ni carine, znaša dejanska cena pralnega stroja (celotni strošek nakupa pralnega stroja) 100011 DE.

3.3.2 Promilni račun

Promilni račun je podoben procentnemu računu s to razliko, da promile ali odtisoček pomeni eno tisočino določene vrednosti. Osnovni obrazec promilnega računa je:

$$pz = \frac{a \cdot p}{1000} \tag{3.3.4}$$

Pri tem je:

a - osnova,

p - promile,

pz - promilni znesek.

Razlikujemo tri vrste promilnega računa in sicer:

- promilni račun pod 1000,
- promilni račun od 1000 in
- promilni račun nad 1000.

Promilni račun pod 1000 uporabljamo takrat, kadar pri računanju uporabljamo za promilni znesek zmanjšano osnovo[8]. Če pa pri računanju uporabljamo za promilni znesek povečano osnovo[9], pa imamo opraviti z promilnim računom nad 1000. Ustrezne obrazce za promilni račun izpeljemo po analogiji iz obrazcev za procentni račun.

[8] V nadaljevanju bomo za promilni znesek zmanjšano osnovo označevali z a_{POD}.

[9] Za promilni znesek povečano osnovo bomo označevali z a_{NAD}.

Razliko med dvema procentnima vrednostima lahko izrazimo na dva načina. Prvi način je absolutna razlika, ki jo izražamo v odstotnih točkah. Drugi način pa je relativna razlika, ki jo izražamo v odstotkih.

Primer 3.12
V neki državi so spremenili stopnjo DDV z 20% na 22%. Za koliko odstotnih točk so povečali stopnjo DDV v tej državi? Za koliko odstotkov so povečali stopnjo DDV v tej državi?

Pri odgovoru na prvo vprašanje moramo izračunati absolutno spremembo v višini stopnje DDV (procentnega zneska). Zato si bomo pomagali z računom:

22%-20% =2 odstotni točki

V obravnavani državi so povečali stopnjo DDV za 2 odstotni točki.

Pri izračunu relativne spremembe v višini stopnje DDV si pomagamo s procentnim računom nad 100:

$$p = \frac{100 \cdot (a_{NAD} - a)}{a}$$

Ker velja:
a = 20%
a_{NAD} = 22%

Vstavimo vrednosti v enačbo:

$$p = \frac{100 \cdot (a_{NAD} - a)}{a} = \frac{100 \cdot (22 - 20)}{20} = 10\%$$

V obravnavani državi so povečali stopnjo DDV za 10%.

Primer 3.13
Kolikšna je davčna osnova, če je cena prehrambenega izdelka 210 DE, stopnja DDV pa je 8%?

Cena vključuje davčno osnovo in DDV. Pri reševanju tega problema si bomo pomagali s procentnim računom nad 100:

$$a = \frac{100 \cdot a_{NAD}}{100 + p}$$

Poznamo:
a_{NAD} = 210 DE
p = 8%

$$a = \frac{100 \cdot a_{NAD}}{100 + p} = \frac{100 \cdot 210DE}{100 + 8} = 194{,}44DE$$

Davčna osnova znaša 194,44 DE.

3.4 Obrestni račun

3.4.1 Osnovni pojmi

Obrestni račun je lahko:

- enostavni obrestni račun,
- obrestnoobrestni račun.

Pojmi pri obrestnem računu

Glavnica je denarni znesek (finančna sredstva), ki ga posodimo ali pa si ga izposodimo v določenem časovnem trenutku za določeno časovno obdobje. Glavnico v matematiki označimo s črko G, ki ji običajno dodajamo indekse glede na to, na kateri časovni trenutek se glavnica nanaša.

Obresti so nadomestilo (cena) za uporabo finančnih sredstev v določenem časovnem obdobju.

Obrestna mera je v relativni obliki izraženo nadomestilo (cena) za uporabo finančnih sredstev, vendar njen pomen pojasnimo s postopkom obračuna obresti. Obrestna mera je lahko dekurzivna ali pa anticipativna.

Čas obrestovanja je tisto časovno razdobje, za katerega se obračunavajo obresti. Kapitalizacijska doba je čas med dvema zaporednima pripisoma obresti.

S kapitalizacijo je določen način pripisovanja obresti v kapitalizacijski dobi in pove, kolikokrat se pripišejo obresti v obdobju, za katerega velja dogovorjena obrestna mera.

V finančni matematiki se pogosto srečujemo z latinskimi okrajšavami za posamezna časovna obdobja, te okrajšave pa so:

- p.a. (per anno) - na leto,
- p.s. (per semestris) - na polletje,
- p.q. (per quartus) - na četrtletje,
- p.m.(per mese) - na mesec.

Kredit (tudi kreditno razmerje) je pravno razmerje med kreditodajalcem in kreditojemalcem.

Kreditodajalec je fizična ali pravna oseba, ki odobri kredit fizični ali pravni osebi, ki je zanj zaprosila.

Kreditojemalec je fizična ali pravna oseba, ki prejme kredit od fizične ali pravne osebe, ki je kredit odobrila.

Dekurzivno in anticipativno obrestovanje sta izraza, ki opredeljujeta postopek obračunavanja obresti. Pri dekurzivnem obrestovanju obračunamo obresti po preteku nekega obdobja.

Dekurzivno obrestovanje je način pripisa obresti po pretečenem časovnem obdobju. Pri dekurzivnem obrestovanju gre za pripis obresti za nazaj. Tako dobljene obresti imenujemo dekurzivne obresti, obrestno mero, ki jo uporabljamo pri dekurzivnem obrestovanju, pa imenujemo dekurzivna obrestna mera.

Pri anticipativnem obrestovanju obračunamo obresti pred obrestovalnim obdobjem, za njihovo vrednost se zmanjša glavnica.

Anticipativno obrestovanje je postopek obračunavanja obresti vnaprej, to je na začetku obrestovanega obdobja. To pomeni, da pri anticipativnem obrestovanju na začetku obrestovanega obdobja od glavnice, ki dospe na koncu obrestovanega obdobja, odštejemo obresti (anticipativne obresti). Anticipativno obrestovanje je tako smiselno predvsem pri kreditnih poslih.

Kot praktični primer za dekurzivno obrestovanje lahko navedemo vezano vlogo, ki jo deponiramo pri banki. Zelo značilen primer anticipativnega obrestovanja pa so brezkuponske obveznice. Obveznice so namreč vrednostni papirji, ki imetniku obljubljajo določen donos, običajno pa imamo opraviti s kuponsko obveznico. Kuponska obveznica ima namreč več kuponov, vsak kupon pa imetniku ob dospetju prinaša donos v obliki obresti.

Razlikujemo med donosom in donosnostjo. Donos je izražen v absolutnem denarnem znesku (obresti), donosnost pa je izražena v relativni obliki (npr. obrestna mera).

Dekurzivno obrestno mero običajno označujemo s p, anticipativno obrestno mero pa označujemo s π.

Dospetje označuje tisti trenutek, ko je treba plačati obveznost. Pojem dospetje je v financah ekvivalenten pojmu zapadlost. Če nam banka danes odobri posojilo za eno leto, potem to posojilo zapade čez eno leto. To pomeni, da moramo čez eno leto banki vrniti posojeni znesek s pripadajočimi obrestmi.

Prenumerando zneski so tisti zneski, ki dospevajo na začetku posameznega kapitalizacijskega obdobja. Postnumerando zneski pa so tisti zneski, ki dospevajo na koncu posameznega kapitalizacijskega obdobja.

3.4.2 Enostavno obrestovanje

Temeljna problematika enostavnega obrestnega računa

Enostavno obrestovanje izhaja iz predpostavke, da se obresti pripisujejo le prvotni glavnici.

Oznake:

G_0 - začetna vrednost glavnice,

p - obrestna mera za kapitalizacijsko obdobje, izražena v %,

n - čas obrestovanja,

o - obresti.

Kapitalizacijsko obdobje je lahko različno. Pri navadnem obrestnem računu se kot kapitalizacijsko obdobje uporablja leto, polletje, četrtletje, mesec in dan. Obresti za vsako posamezno kapitalizacijsko obdobje izračunamo po enačbi:

$$o = \frac{G_0 \cdot p}{100}.$$

Po prvem kapitalizacijskem obdobju se glavnica G_0 poveča za obresti o:

$$G_1 = G_0 + o,$$

kjer z G_1 označujemo vrednost glavnice po enem kapitalizacijskem obdobju. Ker se pri enostavnem obrestovanju obresti izračunavajo in pripisujejo začetni glavnici, velja za izračun glavnice po dveh kapitalizacijskih obdobjih zveza:

$$G_2 = G_1 + o = G_0 + 2o.$$

In odtod sledi po analogiji splošni obrazec:

$$G_n = G_{n-1} + o = G_0 + n.o. \qquad (3.4.1)$$
$$n = 1,2,\ldots$$

Iz navedenega je razvidno, da se pri navadnem obrestovanju srečujemo z aritmetičnim zaporedjem, katerega prvi člen je začetna glavnica (G_0), diferenca ali prirastek pa obresti(o). Obravnavano zaporedje je naraščajoče, ker je obrestna mera pozitivna.

Izračun obresti za kapitalizacijsko obdobje enega meseca

Pri izračunu obresti za določeno kapitalizacijsko obdobje moramo biti predvsem pozorni, na kakšno kapitalizacijsko obdobje se obrestna mera nanaša. Največkrat je obrestna mera podana za letno raven, kar pomeni, da je velikost obresti na mesečni ravni dvanajstkrat manjša.

Tako iz enačbe (3.3.1) sledi, da znašajo mesečne obresti:

$$o = \frac{\frac{G_0 p}{100}}{12},$$

kar lahko poenostavljeno zapišemo v obliki:

$$o = \frac{G_0 p}{1200}.$$

Enačba za izračun obresti za kapitalizacijsko obdobje m mesecev ima obliko:

$$o = \frac{G_0 pm}{1200}. \qquad (3.4.2)$$

Izračun obresti za kapitalizacijsko obdobje enega dneva

Povsem enako, kot smo postopali pri izračunu obresti za obdobje enega meseca, postopamo pri izračunu obresti za kapitalizacijsko obdobje enega dneva. Enačba, iz katere izhajamo, je enačba (3.3.2), obresti na dan pa na podlagi letne obrestne mere izračunamo iz:

$$o = \frac{\frac{G_0 \cdot p}{100}}{365}$$

Enačbo poenostavimo in dobimo:

$$o = \frac{G_0 pd}{36500} \tag{3.4.3}$$

Če gre za prestopno leto, pa po analogiji velja:

$$o = \frac{G_0 pd}{36600} \tag{3.4.4}$$

Enačba za izračun obresti za kapitalizacijsko obdobje d dni je v svojem bistvu bolj natančna od enačbe za izračun obresti za m mesecev, ker letno obrestno mero najprej preračuna na dnevno raven, nato pa računa obresti za kapitalizacijsko obdobje m mesecev, enačba za izračun obresti za m mesečno kapitalizacijsko obdobje pa ne upošteva dejstva, da imajo posamezni meseci različno število dni.

Omenjena ugotovitev na višino obresti ne bo bistveno vplivala, če gre za majhno začetno glavnico, večja kot je začetna glavnica, večji so razkoraki med izračunanimi obrestmi.

Ko izračunavamo število dni obrestovanja, vedno upoštevamo naslednje pravilo:

Prvega dne (ko denar vložimo v banko, ...ipd.) ne štejemo k dnevom obrestovanja, zadnji dan (ko denar dvignemo iz banke,... ipd.) pa štejemo k dnevom obrestovanja.

Primer 3.14

Nekdo je danes vložil v banko 2000 DE. Koliko obresti bo dobil po petih letih pri 8% letni dekurzivni obrestni meri, če banka za izračun obresti uporablja metodologijo enostavnega obrestovanja? Kolikšna je tedaj velikost glavnice?

Podatki:
G_0 = 2000 DE
n = 5 let
p = 8%

Najprej izračunamo, kolikšne so obresti po enem letu. Za rešitev problema uporabimo naslednjo enačbo:

$$o = \frac{G_0 \cdot p}{100}.$$

Vstavimo podatke:

$$o = \frac{G_0 \cdot p}{100} = \frac{2000DE \cdot 8}{100} = 160DE$$

Po petih letih bodo pripisane obresti petkrat (n krat) večje:
$n \cdot o = 5 \cdot 160$ DE = 800 DE

Velikost glavnice po petih letih pa izračunamo iz enačbe:
$G_5 = G_0 + 5 \cdot o$ = 2000 DE + $5 \cdot 160$ DE = 2800 DE.

Primer 3.15

Kolikšna je letna dekurzivna obrestna mera, če je nekdo na začetku junija v banko vložil 37890 DE, konec avgusta pa je na vloženo glavnico dobil 354 DE obresti? Banka za izračun obresti uporablja navadni obrestni račun.

Podatki so:
G_0 = 37890 DE
o = 354 DE
m = 2
p = ?

Za rešitev problema uporabimo enačbo:

$$o = \frac{G_0 \cdot p \cdot m}{1200}$$

Iz enačbe izrazimo p:

$$p = \frac{o \cdot 1200}{G_0 \cdot m}.$$

Vstavimo podatke:

$$p = \frac{o \cdot 1200}{G_0 \cdot m} = \frac{354DE \cdot 1200}{37890DE \cdot 2} = 5{,}6.$$

Letna dekurzivna obrestna mera v tem primeru znaša 5,6%.

Primer 3.16

V koliko dneh se neka glavnica potroji, če je upoštevana dekurzivna obrestna mera 8%, in letna kapitalizacija in enostavno obrestovanje?

Za rešitev zastavljenega problema si pomagamo z enačbo:

$$G_n = G_0 + no.$$

Velja tudi:

$$G_n = 3G_0 = G_0 + 2G_0,$$

$$o = \frac{G_0 pd}{36500},$$

$$2G_0 = \frac{G_0 pd}{36500},$$

$$2 = \frac{pd}{36500}.$$

Izrazimo d:

$$d = \frac{2 \cdot 36500}{p}.$$

Vstavimo podatke:

$$p = 8\%\, p.a.$$

$$d = \frac{2 \cdot 36500}{p} = \frac{2 \cdot 36500}{8} = 9125$$

Ali v letih:

$$n = \frac{9125}{365} = 25 let.$$

Začetna glavnica se pri dekurzivnem obrestovanju in 8% letni obrestni meri ter celoletni kapitalizaciji potroji v 9125 dneh ali v 25 letih.

3.4.3 Obrestnoobrestni račun

Pri obrestnoobrestnem računu se obresti ne izračunavajo na podlagi začetne glavnice, ampak glede na začetno glavnico, povečano za obresti vseh predhodnih kapitalizacijskih obdobj. Vsak izračun obresti se izvede na vrednost glavnice in pripadajoče obresti iz predhodnih obdobij. Tako se pri obrestno obrestnem računu ne srečujemo z aritmetičnim zaporedjem, ampak z geometrijskim zaporedjem, ker je kvocient med dvema zaporednima vrednostnima glavnice stalen - glavnica se ob kapitalizaciji spreminja s stalnim faktorjem.

Dekurzivno obrestovanje

Vrednost glavnice v začetku obrestovalnega obdobja označimo z G_0 in ji rečemo začetna glavnica. Obrestno mero pri dekurzivnem obrestovanju označimo s p, izražamo jo v %.

Ob koncu prvega leta se začetna glavnica poveča za obresti o, ki smo jih pri enostavnem obrestnem računu izračunali kot:

$$o = \frac{G_0 \cdot p}{100}.$$

Označimo z G_1 vrednost glavnice ob zaključku prvega leta; izračunamo jo po obrazcu:

$$G_1 = G_0 + o = G_0 + \frac{G_0 \cdot p}{100} = G_0(1 + \frac{p}{100}),$$

Označimo z r izraz:

$$1 + \frac{p}{100} = r$$

in ga imenujemo dekurzivni obrestovalni faktor.

G_1 potem zapišemo v obliki:

$$G_1 = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = G_0 r\ .$$

Vsebinsko ni med enostavnim obrestovanjem in obrestnoobrestnim računom nikakršne razlike v okviru enega kapitalizacijskega obdobja, nad enim kapitalizacijskim obdobjem pa prihaja do precejšnjih razlik, saj je graf funkcije enostavnega obrestovanja linearna funkcija (v ozadju enostavnega obrestovanja je aritmetično obrestovanje), graf funkcije obrestno obrestnega računa pa je eksponentna funkcija (v ozadju obrestno obrestnega računa je geometrijsko zaporedje). Glede na to, da se čas giblje v pozitivni smeri in da je obrestna mera vedno pozitivna, sta obe funkciji definirani le za pozitivne vrednosti.

Ker se pri obrestno obrestnem računu obresti ne računajo samo od začetne glavnice, ampak tudi od vseh obresti za pretekla kapitalizacijska obdobja, velja:

$$G_1 = G_0 r,$$

$$G_2 = G_1 r = G_0 rr = G_0 r^2,$$

$$G_3 = G_2 r = G_0 rrr = G_0 r^3.$$

Tako velja splošno za naobrestenje (če je pripis obresti enkrat letno) obrazec:

$$G_n = G_0 r^n. \qquad (3.4.5)$$

Glavnica pri obrestnoobrestnem računu eksponencialno narašča. Hitrost njenega eksponencialnega naraščanja je odvisna od višine obrestne mere, kar je razvidno tudi iz splošne enačbe za obrestnoobrestni račun. Prav tako je razlika med obrestnoobrestnim in enostavnim obrestnim računom tem večja, čim večja je obrestna mera.V podjetniški in bančni praksi se uporablja obrestno obrestni račun.

Relativna in konformna obrestna mera

Kadar je pripis obresti m-krat letno, uporabljamo obrazce za izpodletno kapitalizacijo.

OBRESTOVANJE	GLAVNICA	OBRESTNA MERA
RELATIVNO	$G_{nm(r)} = G_0\left(1+\frac{p_{r,m}}{100}\right)^{nm}$	$p_{r,m} = \frac{p}{m}$ p – letna obrestna mera $p_{r,m}$ - izpodletna (polletna,četrtletna, mesečna) relativna obrestna mera
KONFORMNO	$G_{nm(r)} = G_0\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^{nm}$	$r_{k,m} = 1+\frac{p_{k,m}}{100} = \sqrt[m]{r}$ $p_{k,m} = 100\left(\sqrt[m]{r}-1\right)$ $p_{r,m}$ - izpodletna (polletna,četrtletna, mesečna) relativna obrestna mera

Pri tem pomeni:

- relativna obrestna mera - sorazmerni del letne obrestne mere letnega podobdobja, za katerega se izvrši pripis obresti,
- konformna obrestna mera - tista izpodletna obrestna mera, ki da pri izpodletnem obrestovanju v enem letu predpisane letne obresti.

Razobrestitev ali diskontiranje pri dekurzivnem obrestovanju

Znesek A danes namreč ni primerljiv z zneskom B jutri, zato teh zneskov med seboj ni mogoče primerjati neposredno ali jih seštevati. Zato moramo zneske najprej prevesti na isti časovni trenutek.

To pa lahko naredimo na dva različna načina:

- znesek A naobrestimo,
- znesek B razobrestimo.

Pri razobrestitvi gre za inverzen postopek kot pri naobrestitvi. Znesek G_n razobrestimo za n obdobij pri obrestovalnem faktorju r tako, da iz izraza (3.4.5) izrazimo vrednost G_0:

$$G_0 = \frac{G_n}{r^n}. \tag{3.4.6}$$

Izračun obrestne mere pri dekurzivnem obrestovanju

Iz enačbe (3.3.5) sledi, da je :

$$G_n = G_0 r^n = G_0 (1 + \frac{p}{100})^n,$$

odtod sledi:

$$\frac{G_n}{G_0} = (1 + \frac{p}{100})^n.$$

Izrazimo iz gornje enačbe obrestno mero p:

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right).$$

Izračun števila obrestovanih obdobij pri dekurzivnemsto obrestovanju

Če izhajamo iz enačbe (3.3.5), vidimo, da je n v eksponentu enačbe, zato si pri reševanju tovrstnih enačb pomagamo z logaritmi tako, da enačbo logaritmiramo, pri tem pa upoštevamo pravila računanja z logaritmi. Povsem vseeno je, kakšno osnovo izberemo za logaritem, iz predvsem banalnih razlogov pa se največ uporabljata naravni logaritem in desetiški logaritem:

$$\log G_n = \log G_0 + n.\log r \,.$$

Od tu pa sledi:

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log r}.$$

Primer 3.17

Nekdo je danes vložil v banko 2000 DE. Koliko obresti bo dobil po petih letih pri 8% letni dekurzivni obrestni meri, če banka za izračun obresti uporablja metodologijo obrestnega obrestovanja? Kolikšna bo tedaj velikost glavnice?

Podatki so:

G_0 = 2000 DE

n = 5

p = 8%

r= 1,08

Vstavimo podatke v (3.4.5):

$$G_5 = 2000\left(1+\frac{8}{100}\right)^5 DE = 2000.1{,}08^5\,DE = 2938{,}6DE.$$

Vrednost obresti v petih letih izračunamo kot razliko med končno in začetno vrednostjo glavnice:

G_5 - G_0 = 2938,6 DE - 2000 DE = 938,6 DE

Če primerjamo obresti pri navadnem obrestnem računu in obrestnoobrestnem računu, lahko ugotovimo, da so obresti pri obrestnoobrestnem računu večje kot obresti pri navadnem obrestnem računu.

Primer 3.18

Koliko je vredna brezkuponska obveznica danes, če dospe čez 6 let, njena letna donosnost do dospetja znaša 8,5%, njena vrednost ob dospetju (nominalna vrednost) pa znaša 120000 DE.

Vrednost brezkuponske obveznice danes dobimo po enačbi:

$$G_0 = \frac{G_n}{r^n}.$$

Podatki so:

G_0= ?

G_6= 120000 DE

n = 6

p = 8,5%

Velja:

$$G_0 = \frac{G_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}.$$

Vstavimo podatke:

$$G_0 = \frac{G_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} = \frac{120000DE}{\left(1+\frac{8,5}{100}\right)^6} = 73553,4DE.$$

Primer 3.19

Kolikšna je letna dekurzivna obrestna mera, če je nekdo na začetku junija v banko vložil 36000 DE, čez dve leti pa je dobil vrnjen znesek 40000 DE? Banka za izračun obresti uporablja obrestnoobrestni račun.

Za rešitev problema uporabimo enačbo:

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1\right).$$

Podatki so:

G_n = 40000 DE

G_0 = 36000 DE

n = 2

Vstavimo podatke in dobimo:

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[2]{\frac{40000}{36000}} - 1\right) = 5,4.$$

Letna dekurzivna obrestna mera v tem primeru znaša 5,4%.

Primer 3.20

V koliko letih se neka glavnica potroji, če je upoštevamo obrestno mero 8% p.a., celoletno kapitalizacijo, dekurzivno obrestovanje in obrestno obrestovanje?

Iz podatkov sledi zveza:

$G_n = 3G_0$.

Upoštevajmo (3.4.5):

$3G_0 = G_0 r^n$

dobimo

$3 = r^n$.

Enačbo logaritmirajmo in dobimo:

$\log 3 = n \log 1{,}08,$

sledi

$n = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}08} = 14{,}27.$

Glavnica se potroji v 14,27 letih.

Anticipativno obrestovanje

Če si na začetku obračunskega obdobja izposodimo denarni znesek G_1 pri anticipativni obrestni meri π in letnem pripisu obresti, je dejanski znesek, ki ga dobimo, G_0:

$$G_0 = G_1 - o_1 = G_1 - \frac{G_1 \cdot \pi}{100} = G_1 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{100}\right).$$

Iz gornje enačbe izrazimo:

$$G_1 = \frac{G_0}{1 - \dfrac{\pi}{100}} = G_0 \frac{100}{100 - \pi.}$$

Pri tem lahko označimo:

$$\frac{100}{100 - \pi} = \rho$$

in velja naslednja zveza:

$$G_1 = G_0 \rho,$$

ρ je anticipativni obrestovalni faktor.

Splošna formula za anticipativno obrestovanje velja:

$$G_n = G_0 \rho^n. \qquad (3.4.7)$$

Izračun obrestne mere pri anticipativnem obrestovanju

Izrazimo ρ iz (3.4.7):

$$\rho = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}.$$

Iz zveze:

$$\rho = \frac{100}{100 - \pi}$$

izrazimo π:

$$\pi = \frac{100 \cdot (\rho - 1)}{\rho} = 100 - \frac{100}{\rho}.$$

Če v zadnjem izrazu upoštevamo izraz $\rho = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$.

dobimo izraz za izračun anticipativne obrestne mere π:

$$\pi = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}}\right).$$

Primerjava dekurzivne in anticipativne obrestne mere

Tako smo prišli do enačbe za izračun anticipativne obrestne mere, enačbo za izračun dekurzivne obrestne mere pa smo izpeljali že v prejšnjih poglavjih. Zanima pa nas, katero obrestovanje je dražje.

Zanima nas torej, katera obrestna mera je večja: dekurzivna ali anticipativna. Izračunajmo, katera anticipativna obrestna mera je ekvivalentna dani dekurzivni obrestni meri in obratno. Dekurzivna obrestna mera p% in anticipativna obrestna mera π% (za isto obrestovalno obdobje) sta ekvivalentni natanko takrat, če kreditojemalec za enaka izposojena zneska v enakih časovnih obdobjih plača enake obresti. Iz tega pa sledi, da morata biti končni glavnici pri dekurzivnem in anticipativnem obrestovanju enaki, prav tako pa morata biti enaki tudi začetni glavnici, saj morajo biti obresti enake. Tako lahko zapišemo:

$$G_0 r^n = G_0 \rho^n.$$

Enačbo lahko delimo z G_0 in dobimo:

$r^n = \rho^n$.

Ker velja:

$$r^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

in

$$\rho^n = \left(\frac{100}{100 - \pi}\right)^n,$$

sledi:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \left(\frac{100}{100 - \pi}\right)^n.$$

Enačbo lahko korenimo in dobimo:

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{100}{100 - \pi}.$$

Dobljeni izraz pa nam ponuja dve možnosti, in sicer lahko izrazimo dekurzivno obrestno mero z anticipativno obrestno mero ali pa izrazimo anticipativno obrestno mero z dekurzivno. Izrazimo dekurzivno obrestno mero z anticipativno in dobimo:

$$\frac{p}{100} = \frac{100}{100 - \pi} - 1.$$

Enačbo pomnožimo s 100 in dobimo:

$$p = \frac{10000}{100 - \pi} - 100.$$

Desno stran enačbe poenostavimo:

$$p = \frac{10000 - 100 \cdot (100 - \pi)}{100 - \pi},$$

$$p = \frac{10000 - 10000 + 100 \cdot \pi}{100 - \pi}.$$

Iz tega pa sledi:

$$p = \frac{100 \cdot \pi}{100 - \pi}.$$

Na povsem enak način bi lahko izrazili tudi anticipativno obrestno mero z dekurzivno obrestno mero, končni izraz pa bi bil:

$$\pi = \frac{100 \cdot p}{100 + p}. \qquad (3.4.8)$$

Če želimo v naslednjem koraku neposredno odgovoriti na vprašanje, katera obrestna mera je večja, dekurzivna ali anticipativna, lahko postopamo takole:

$$\frac{p}{\pi} = ?.$$

Dekurzivno obrestno mero v gornjem obrazcu pustimo nespremenjeno, anticipativno obrestno mero pa zamenjajmo z izrazom (3.4.8) in dobimo:

$$\frac{p}{\pi} = \frac{p}{\frac{100 \cdot p}{100 + p}} = \frac{p \cdot (100 + p)}{100 \cdot p}.$$

Izraz pokrajšamo s p in dobimo:

$$\frac{p}{\pi}=\frac{100+p}{100}.$$

Ker velja:

p>0,

je števec ulomka $\frac{100+p}{100}$ vedno večji od imenovalca, zato je: $\frac{p}{\pi}>1$

to pa pomeni, da je dekurzivna obrestna mera vedno večja od ekvivalentne anticipativne obrestne mere. Do povsem enake ugotovitve bi prišli, če bi primerjali: $\frac{\pi}{p}$

Izračun števila obrestovanih obdobij

Pri izračunu števila obrestovanih obdobij izhajamo iz enačbe:

$$G_n = G_0 \rho^n$$

Ker je iskana neznanka n v eksponentu, enačbo logaritmiramo:

$$\log G_n = \log G_0 + n \log \rho$$

Iz enačbe izrazimo n:

$$n=\frac{\log G_n - \log G_0}{\log \rho}.$$

3.4.4 Načelo ekvivalence glavnic

Kadar imamo opraviti s posameznimi zneski v različnih trenutkih, teh zneskov ne moremo neposredno primerjati med seboj. Omenjene zneske lahko med seboj primerjamo šele tedaj, ko opravimo preračun (redukcijo) na isti časovni trenutek ali termin. Iz omenjenega dejstva izvira tudi načelo ekvivalence glavnic. Pri redukciji dveh ali več zneskov na isti trenutek običajno vzamemo termin, ko dospeva eden od vseh vključenih zneskov, kar pa ni nujno. Lahko namreč tudi sami izberemo nek poljuben trenutek kot osnovo za preračun vseh zneskov. Pri preračunu zneskov na skupni časovni termin uporabljamo naobrestitev ali razobrestitev (diskontiranje) zneskov ali pa kombinacijo obeh postopkov, odvisno od časovnega trenutka, ki smo ga izbrali kot osnovo za preračun.

Običajno se v praksi srečujemo z denarnimi pritoki in odtoki v različnih časovnih trenutkih. Kot primer navedimo investicije, kjer navadno vlagamo v začetku, donosi pa prihajajo v kasnejših časovnih trenutkih. Včasih lahko pri nekaterih investicijah investicijska vlaganja nastopijo še v času, ko že prihajajo donosi. Vse denarne prilive in odlive navadno prenesemo na časovno premico, na kateri označimo časovna obdobja ter denarne zneske, s katerimi imamo opraviti. Nato v skladu z načelom ekvivalence glavnic opravimo preračun zneskov na isti časovni trenutek.

Načelo ekvivalence glavnic se glasi:

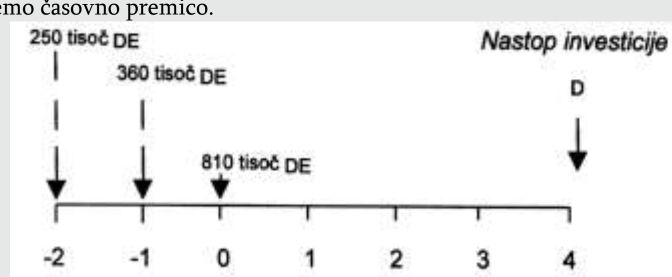
Dve glavnici sta ekvivalentni (enakovredni, enaki) natanko takrat, če postaneta, po preračunu pri enotnem obrestovanju meri na isti časovni trenutek, enaki.

Primer 3.21

Podjetje se pripravlja na investicijo, ki jo ima namen izvesti čez 4 leta. Veljavna obrestna mera je 7% p.a.. Pred dvemi leti je podjetje v banki deponiralo znesek v višini 250 tisoč DE pri dekurzivnem obrestovanju, celoletni kapitalizaciji. Prav tako so pri neki drugi banki pred enim letom deponirali 360 tisoč DE pri dekurzivni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji. Sedanja vrednost investicije je 810 tisoč DE. Koliko lastnih sredstev bo imelo podjetje na začetku financiranja investicije in kolikšen bo obseg kredita, za katerega bo pod jetje zaprosilo pri banki, če računamo po:

- navadnem obrestnem računu,
- obrestnoobrestnem računu.

Najprej narišemo časovno premico.



Vedno, kadar narišemo časovno premico, vnesemo denarne zneske na tisti časovni trenutek, na katerega se znesek nanaša. To je osnovno pravilo pri risanju časovne premice.

Pri reševanju naloge pa postopamo takole:
Vse denarne zneske, ki smo jih nanesli na časovno premico, bomo preračunali na začetek četrtega leta od danes, ko nastopi investicija. Tako se prvi znesek obrestuje 6 let, drugi pa 5 let.

Navadni obrestni račun:
Za preračun denarnih zneskov uporabimo enačbi:
$$G_n = G_0 + n.o,$$
$$o = \frac{G_0 \cdot p}{100}.$$

Vnesemo podatke:
$$G_6 = 250000DE + 6 * \frac{250000DE \cdot 7}{100} = 355000DE,$$
$$G_5 = 360000DE + 5 * \frac{360000DE \cdot 7}{100} = 486000DE.$$
Čez štiri leta od danes bo podjetje imelo lastnih sredstev:
$$G_6 + G_5 = 355000DE + 486000DE = 841000DE.$$

Ker bo podjetje investicijo, ki danes stane 810000 DE, izvedlo čez štiri leta, moramo z navadnim obrestnim računom naobrestiti še ceno investicije danes, da bomo dobili ceno iste investicije čez štiri leta:
$$G_4 = 810000DE + 4 * \frac{810000DE \cdot 7}{100} = 1036800DE.$$
Potrebni kredit D:
$$D = G_4 - (G_6 + G_5) = 1036800DE - 841000DE = 195800DE.$$

Podjetje bi moralo pri enostavnem načinu obrestovanja najeti kredit v višini 195800 DE.

Obrestnoobrestni račun:

Uporabimo enačbo:
$$D = G_4 - (G_6 + G_5).$$

Vrednost glavnice G0 po n obdobjih izračunamo pri obrestnoobrestnem računu po obrazcu:
$G_n = G_0 r^n$.
Potem velja:
$D = 810000.1{,}07^4 DE - (250000.1{,}07^6 + 360000.1{,}07^5)DE,$
$D = 810000.1{,}311 DE - (250000.1{,}501 + 360000.1{,}403) DE = 181580 DE.$

Podjetje bi moralo pri obrestnoobrestnem načinu obrestovanja najeti kredit v višini 181580 DE.

3.5 Obrestni račun in inflacija

3.5.1 Uvod

Predpostavimo, da ima posameznik premoženje v obliki ene denarne enote. Pri analiziranju realne vrednosti denarja v določenem časovnem obdobju bomo upoštevali dva skrajna primera. Posameznik lahko ta denar v celoti potroši na začetku časovnega obdobja ali pa na koncu tega časovnega obdobja. V prvem primeru lahko posameznik s tem denarjem kupi eno enoto določenega blaga. Obstaja pa tudi možnost, da se posameznik odloči za nakup ene enote istega blaga na koncu časovnega obdobja. V tem primeru ima na voljo dve možnosti:

- denar hrani pri sebi,
- denar veže na banki.

1. Posameznik denar drži celotno časovno obdobje pri sebi in ga v celoti potroši šele na koncu časovnega obdobja. Če v obravnavanem časovnem obdobju ni bilo inflacije, potem lahko posameznik z eno denarno enoto tudi na koncu časovnega obdobja kupi eno enoto določenega blaga. V tem primeru ni prišlo do zmanjšanja realne vrednosti denarja, ker ni bilo inflacije v obravnavanem časovnem obdobju. To pomeni, da imata ena denarna enota na začetku časovnega obdobja in na koncu časovnega obdobja enako kupno moč. Kupna moč denarja se tako ne spremeni, če v obravnavanem časovnem obdobju ni inflacije.

Če pa je bila v določenem obdobju R% inflacija, potem se obravnavana enota blaga zaradi inflacije podraži. Zanima nas, za koliko se podraži. Cena enote tega blaga na začetku časovnega obdobja je enaka, cena enote istega blaga na koncu časovnega obdobja pa je višja. Označili jo bomo s P_1. Ker inflacijo izražamo v odstotkih, velja:

$$\frac{P_1 - P_0}{P_0} \cdot 100 = R$$

Ker nas zanima, za koliko se je cena enote obravnavanega blaga povečala, bomo iz zadnje enačbe izrazili P_1. Do tega bomo prišli postopoma. Najprej zadnjo enačbo delimo s 100 in dobimo:

$$\frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{R}{100}$$

V naslednjem koraku bomo enačbo pomnožili s P_0:

$$P_1 - P_0 = \frac{R}{100} \cdot P_0$$

Enačbo še preuredimo in dobimo:

$$P_1 = P_0 \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

Cena enote tega blaga na koncu obdobja je enaka $1 + \frac{R}{100}$, ker je cena te enote blaga na začetku časovnega obdobja enaka 1. V tem primeru lahko posameznik na koncu časovnega obdobja z eno denarno enoto kupi $\frac{1}{1 + \frac{R}{100}}$ enot istega blaga. To pomeni, da se je v tem časovnem obdobju kupna moč domačega denarja zmanjšala.

2. Posameznik denar na začetku časovnega obdobja veže v banki za dobo enega časovnega obdobja po obrestni meri p %.

Če v obravnavanem časovnem obdobju ni inflacije, se v enem časovnem obdobju pri p % obrestni meri posojeni denarni znesek poveča na

$$1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=1+\frac{p}{100}.$$

Če pa je bila v določenem obdobju π % inflacija, potem se hkrati odvijata dva procesa, in sicer:

- v enem časovnem obdobju se pri p % obrestni meri posojeni denarni znesek poveča na

$$1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=1+\frac{p}{100},$$

- pri π % inflaciji se obravnavana enota blaga podraži za $1+\dfrac{R}{100}$.

Tudi v tem primeru se je kupna moč domačega denarja zmanjšala.

V enem časovnem obdobju se pri p % obrestni meri celotno premoženje posameznika poveča na $1\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)=1+\dfrac{p}{100}$ denarnih enot.

Zaradi inflacije se cena obravnavane enote blaga dvigne na

$1\cdot\left(1+\dfrac{R}{100}\right)=1+\dfrac{R}{100}$ denarnih enot. To pomeni, da lahko posameznik z denarnim premoženjem v višini $1+\dfrac{p}{100}$ kupi $\dfrac{1\cdot(1+\frac{p}{100})}{1\cdot(1+\frac{R}{100})}$ enote tega blaga.

Stopnja realne rasti q je v tem primeru enaka:

$$\frac{1+\dfrac{p}{100}}{1+\dfrac{R}{100}}=1+\frac{q}{100}\Rightarrow\left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(1+\frac{q}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right).$$

Pri tem pomeni:

p ... nominalna obrestna mera,

q ... realna obrestna mera,

R ... inflacija.

Posamezne faktorje v izpeljani enačbi bomo imenovali:

1. $\left(1+\frac{p}{100}\right) =$ *nominalni obrestovalni faktor*

2. $\left(1+\frac{q}{100}\right) =$ *realni obrestovalni faktor*

3.. $\left(1+\frac{R}{100}\right) =$ *revalorizacijski faktor*

Če zaradi preglednosti označimo:

$\frac{p}{100} = i$

$\frac{q}{100} = r$

$\frac{r}{100} = \pi$

Potem lahko zapišemo enačbo:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right) = \left(1+\frac{q}{100}\right) \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right)$$

v obliki:

(1+i) = (1+r) . (1+π) .

Ta enačba se imenuje Fisherjeva enačba[10]. Če iz Fisherjeve enačbe izrazimo nominalno obrestno mero dobimo:

$i = r + \pi + r \cdot \pi$.

Kadar je inflacija zelo nizka, lahko pri računanju skupne obrestne mere uporabljamo približno Fisherjevo enačbo, ki se glasi:

$i \approx r + \pi$.

Vendar pa je tako izračunana skupna obrestna mera samo približek dejanske skupne obrestne mere.

V Sloveniji za izračun revalorizacijskega faktorja uporabljamo TOM, zato velja:

R = TOM

TOM se imenuje temeljna obrestna mera, pove pa nam inflacijsko stopnjo, ki se uporablja pri revalorizaciji. TOM glede na stopnjo inflacije izračunava Banka Slovenije.

Realna obrestna mera q je tako enaka:

$$\frac{1+\frac{p}{100}}{1+\frac{R}{100}} = 1+\frac{q}{100} \Rightarrow \frac{q}{100} = \frac{1+\frac{p}{100}}{1+\frac{R}{100}} - 1 \Rightarrow \frac{q}{100} = \frac{100+p}{100+R} - 1$$

$$\frac{q}{100} = \frac{100+p-100-R}{100+R} \tag{3.5.1}$$

$$q = \frac{p-R}{100+R} \cdot 100.$$

Na podoben način izpeljemo tudi obrazec za izračun nominalne obrestne mere p:

[10] Opis Fisherjeve enačbe najdemo tudi v Čibej (1996, str. 228).

$$\frac{1+\frac{p}{100}}{1+\frac{R}{100}}=1+\frac{q}{100}\Rightarrow\frac{p}{100}=\left(1+\frac{q}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)-1$$

$$\frac{p}{100}=1+\frac{R}{100}+\frac{q}{100}+\frac{R}{100}\cdot\frac{q}{100}-1 \qquad (3.5.2)$$

$$p=R+q+\frac{R\cdot q}{100}$$

Primer 3.22

Kolikšen je bil mesečni revalorizacijski faktor za mesec februar 2001 v Sloveniji, če je znašal TOM za mesec februar 2001 0,70%?

Revalorizacijski faktor za mesec februar 2001 bomo izračunali po obrazcu:

revalorizacijski faktor = $1+\frac{R}{100}$

Ker velja:

TOM $_{\text{februar 2001}}$ = 0,70%

In ker je:

R = TOM

Velja tudi:

revalorizacijski faktor = $\left(1+\frac{TOM}{100}\right)=1+\frac{0{,}70}{100}=1{,}007$

Mesečni revalorizacij ski faktor za mesec februar 2001 v Sloveniji je znašal 1,007.

Primer 3.23

Kolikšna je realna obrestna mera, če v gospodarstvu ni inflacije, nominalna obrestna mera pa znaša 5,4%?

Podatki so:
p = 5,4%
R = 0
Za rešitev tega problema bomo uporabili naslednjo enačbo:

$$q = \frac{p - R}{100 + R} \cdot 100$$

Vstavimo podatke v enačbo in izračunajmo vrednost realne obrestne mere:

$$q = \frac{p - R}{100 + R} \cdot 100 = \frac{5{,}4 - 0}{100 + 0} \cdot 100 = 5{,}4\%$$

Problem lahko rešimo tudi drugače. Realna obrestna mera je definirana z enačbo:

$$\frac{1 + \frac{p}{100}}{1 + \frac{R}{100}} = 1 + \frac{q}{100} \Rightarrow q = \frac{1 + \frac{5{,}4}{100}}{1 + \frac{0}{100}} - 1 = \frac{1{,}054}{1 + 0} - 1 = 1{,}054 - 1 = 0{,}054 \Rightarrow q = 5{,}4\%$$

Na ta način smo prišli do pomembne ugotovitve. V razmerah, ko ni inflacije, je torej nominalna obrestna mera enaka realni obresti meri.

Primer 3.24

Pri neki banki smo vezali sredstva za dobo enega leta po realni obrestni meri v višini 3,75%. Kolikšna je nominalna obrestna mera, če je bila inflacija v tem letu enaka 2%? Kolikšna pa je vrednost nominalne obrestne mere, če pri izračunu uporabimo približno Fisherjevo enačbo?

Podatki so:
q = 3,75%
R = 2,25%

Vrednost nominalne obrestne mere bomo izračunali po obrazcu*:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(1+\frac{q}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$\left(1+\frac{3{,}75}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{2{,}25}{100}\right)=1{,}0375\cdot 1{,}0225=1{,}0608$$

$$1+\frac{p}{100}=1{,}0608\Rightarrow\frac{p}{100}=0{,}0608\Rightarrow p=6{,}08\%$$

Nominalna obrestna mera je enaka p = 6,08%.

---

*Pri reševanju naloge lahko uporabimo tudi Fisherjevo enačbo: (1+i) = (1+r) . (1+π)

Po približni Fisherjevi enačbi dobimo:

$$i=r+\pi=\frac{q}{100}+\frac{R}{100}=\frac{3{,}75}{100}+\frac{2{,}25}{100}=0{,}06$$

$$i=\frac{p}{100}\Rightarrow p=6{,}00\%$$

Nominalna obrestna mera je v tem primeru enaka p = 6,00%.

Primer 3.25

Pod jetje A je odobrilo posojilo podjetju B za eno leto. Ker podjetja niso specializirana za dajanje posojil, je nominalna obrestna mera na odobreno posojilo višja, kot če bi posojilo odobrila banka. Vendar podjetje lahko nima druge možnosti. Predpostavimo, da želi podjetje A realizirati 9% realno obrestno mero. Kolikšno nominalno obrestno mero mora postaviti pod jetje, če pričakuje 8,1% inflacijo? Kolikšna pa naj bo vrednost nominalne obrestne mere, če pri izračunu uporabimo približno Fisherjevo enačbo?

Podatki so:
q = 9,0%
R = 8,1%

Pri izračunu nominalne obrestne mere bomo uporabili enačbo:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(1+\frac{q}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$\left(1+\frac{9{,}0}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{8{,}1}{100}\right)=1{,}090\cdot 1{,}081=1{,}178$$

$$1+\frac{p}{100}=1{,}178 \Rightarrow \frac{p}{100}=0{,}178 \Rightarrow p=17{,}8\%$$

Ob danih predpostavkah mora podjetje A postaviti nominalno obrestno mero v višini
p = 17,8%.

Po približni Fisherjevi enačbi dobimo:

$$i=r+\pi=\frac{q}{100}+\frac{R}{100}=\frac{9{,}0}{100}+\frac{8{,}1}{100}=0{,}171$$

$$i=\frac{p}{100} \Rightarrow p=17{,}1\%$$

Nominalna obrestna mera je v tem primeru enaka p = 17,1% . Razlika med nominalno obrestno mero, izračunano po Fisherjevi enačbi in med nominalno obrestno mero, izračunano po približni Fisherjevi enačbi, znaša 0,7 odstotne točke.

Primer 3.26
Na začetku leta smo posodili 2000 DE po nominalni obrestni meri . Cena za liter mleka je bila na začetku leta 150 DE. Koliko litrov mleka bomo lahko s tem denarjem kupili na koncu leta, če pričakujemo inflacijo v višini 5,4%?

Podatki so:
G_0= 2000 DE
P_0 = 150 DE
p = 11,2%
R = 5,4%

Za rešitev naloge bomo uporabili naslednjo enačbo:

$$\frac{G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)}{P_0 \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right)}$$

V enačbo vstavimo podatke in rešimo nalogo:

$$\frac{G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)}{P_0 \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right)} = \frac{2000 \cdot \left(1+\frac{11,2}{100}\right)}{150 \cdot \left(1+\frac{5,4}{100}\right)} = \frac{2224}{158,1} = 14,07$$

Ob danih predpostavkah bomo ob koncu leta lahko kupili 14 litrov mleka.

3.5.2 Vrednost glavnice v razmerah inflacije

Poglejmo, kako izračunamo vrednost glavnice po n kapitalizacijskih obdobjih v razmerah inflacije. Splošna enačba za izračun glavnice po n kapitalizacijskih obdobjih obrestnega obrestovanja pri enaki nominalni obrestni meri je:

$G = G_0 \cdot r_n$

Kadar se nominalna obrestna mera v kapitalizacijskih obdobjih spreminja, ima tudi dekurzivni obrestovalni faktor različne vrednosti v posameznem kapitalizacijskem obdobju. Označimo vrednosti dekurzivnega obrestovalnega faktorja v posameznem kapitalizacijskem obdobju z r_1, r_2,..., r_n. Tako dobimo:

$G = G_0 \, . \, r_n = G_0 \, . \, r_n \, . \, (r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n)$

Če označimo:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n = \prod_{k=1}^{n} r_k$$

Dobimo:

$$G_n = G_0 \cdot r^n = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} r_k$$

Ker je dekurzivni obrestovalni faktor definiran kot:

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

Za obdobje k velja:

$$r_k = 1 + \frac{p_k}{100}$$

Zato dobimo:

$$G_n = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} r_k = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{p_k}{100}\right)$$

Če upoštevamo zvezo:

$$\left(1 + \frac{p_k}{100}\right) = \left(1 + \frac{q_k}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_k}{100}\right)$$

Dobimo:

$$G_n = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{q_k}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_k}{100}\right)$$

To enačbo lahko zapišemo drugače:

$$G_n = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{R_k}{100}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{q_k}{100}\right)$$

Pri tem je $G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{R_k}{100}\right)$ enak vrednosti revalorizirane začetne vrednosti glavnice. Revalorizirano začetno vrednost glavnice bomo označevali z G_0^{rev}, zato velja:

$$G_0^{rev} = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{R_k}{100}\right)$$

V skladu s tem velja tudi:

$$G_n = G_0^{rev} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{q_k}{100}\right)$$

Splošna enačba za izračun vrednosti glavnice po n kapitalizacijskih obdobjih pa se zelo poenostavi, če je nominalna obrestna mera v vseh kapitalizacijskih obdobjih enaka. V tem primeru velja:

$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$

Od tu pa sledi:

$$G_n = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{p_k}{100}\right) = G_0 \cdot \left(\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)\right) = G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

Tudi v tem primeru lahko člen $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ nadomestimo s produktom

$\left(\left(1+\frac{q}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)\right)^n$ in dobimo[11]

[11] Pri tem upoštevamo zvezo: $\left(1+\frac{p}{100}\right) = \left(1+\frac{q}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$$G_n = G_0 \cdot \left(\left(1+\frac{q}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)\right)^n$$

Če enačbo preuredimo, dobimo:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right)^n \cdot \left(1+\frac{q}{100}\right)^n$$

V tem primeru lahko revalorizirano začetno vrednost glavnice izračunamo po obrazcu:

$$G_0^{rev} = G_0 \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

Zato velja:

$$G_n = G_0^{rev} \cdot \left(1+\frac{q}{100}\right)^n$$

Primer 3.27

Banka A je nekemu posamezniku odobrila posojilo za časovno obdobje enega leta v višini 8700 DE. Koliko mora posameznik plačati banki na dan zapadlosti posojila, če je bila dogovorjena letna realna obrestna mera 6,5% in če je bila inflacija v obravnavanem kapitalizacijskem obdobju 2,6%? Koliko znaša vrednost revalorizirane začetne glavnice in koliko znašajo realne obresti?

Naloga nas sprašuje po vrednosti glavnice na dan zapadlosti posojila. Pri računanju si bomo pomagali z naslednjo preprosto sliko:

Podatki so:

G_0= 8700 DE

q = 6,5%

R = 2,6%

Vrednost dolga ob zapadlosti posojila bomo izračunali s pomočjo enačbe:

$$G_n = G_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{q}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right) \right)^n$$

Če v to enačbo vstavimo podatke, dobimo:

$$G_n = G_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{q}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right) \right)^n = 8700DE \cdot \left(\left(1 + \frac{6{,}5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{2{,}6}{100}\right) \right) = 9506DE$$

Vrednost glavnice na dan zapadlosti posojila je enaka 9506 DE, vrednost revalorizirane začetne glavnice pa bomo izračunali po obrazcu:

$$G_0^{rev} = G_0 \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^n = 8700DE \cdot \left(1 + \frac{2{,}6}{100}\right) = 8926DE$$

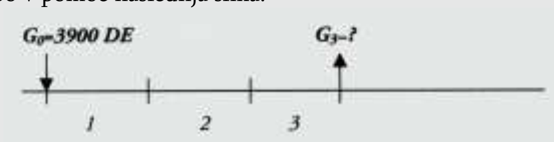
Vrednost realnih obresti bomo izračunali kot razliko med vrednostjo glavnice na dan zapadlosti posojila in vrednostjo revalorizirane začetne glavnice:

$G_1 - G_0^{rev}$ = 9506,4 DE - 8926,2 DE = 580 DE

Primer 3.28

Komitent neke banke se je pred tremi leti odločil za vezavo depozita v višini 3900 DE. Banka pri obračunu upošteva letno kapitalizacijo. V prvem letu je bila letna realna obrestna mera 5%, v drugem letu 4,5% in v tretjem letu 4,9%. Koliko bo banka izplačala njenemu komitentu danes, če je bila inflacija v prvem letu 2,5%, v drugem letu 2,1% in v tretjem letu 2,2%? Koliko znaša vrednost revalorizirane začetne vrednosti glavnice in koliko znašajo realne obresti v tem primeru?

Pri računanju nam bo v pomoč naslednja slika:



Vrednost glavnice ob zaključku tretjega leta bomo izračunali po obrazcu:

$$G_n = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{R_k}{100}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{q_k}{100}\right)$$

Podatki so:

G_0= 3900 DE

R_1 = 5%

R_2= 4,5%

R_3 = 4,9%

q_1 = 2,5%

q_2 = 2,1%

q_3 = 2,2%

Vstavimo podatke v enačbo in izračunajmo vrednost glavnice ob zaključku tretjega leta:

$$G_3 = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{R_k}{100}\right)\cdot\prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{q_k}{100}\right)$$

G_3 = 3900 DE · 1,025 · 1,021 · 1,022 ··1,05 · 1,045 · 1,049 = 4801 DE

Banka bo svojemu komitentu danes izplačala 4801 DE.

Naloga nas tudi tokrat sprašuje po vrednosti revalorizirane začetne vrednosti glavnice, ki jo v tem primeru izračunamo po obrazcu:

$$G_0^{rev} = G_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{R}{100}\right) = 3900DE \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}022 = 4171DE$$

Vrednost realnih obresti izračunamo kot razliko med vrednostjo depozita na dan izplačila in vrednostjo revaloriziranega začetnega depozita:
$G_3 – G_0^{rev}$ = 4801 DE - 4171 DE = 630 DE

3.6 Rentno varčevanje

Pri rentnem varčevanju sklenemo z banko pogodbo o varčevanju za določeno časovno obdobje. Obstajata dva različna načina rentnega varčevanja. Prvi način je rentno varčevanje s periodičnimi pologi, drugi način rentnega varčevanja pa je rentno varčevanje z vezavo depozita. V primeru rentnega varčevanja s periodičnimi pologi vlagamo v banko enake denarne zneske v enakih časovnih intervalih, ki jih imenujemo periode. Zato v tem primeru govorimo o periodičnih vlogah. Pri tem lahko vlagamo denarne zneske na začetku kapitalizacijskega obdobja (prenumerando vloge) ali na koncu kapitalizacijskega obdobja (postnumerando vloge). V primeru rentnega varčevanja z vezavo depozita pa vložimo denarni znesek v banko samo enkrat. V tem primeru gre za poseben primer rentnega varčevanja s periodičnimi pologi, kjer je število periodičnih pologov enako 1.

Ločimo tolarsko in devizno rentno varčevanje. Pri tolarskem rentnem varčevanju s periodičnimi pologi so periodični pologi v tolarjih, pri deviznem rentnem varčevanju s periodičnimi pologi pa so periodični pologi v devizah.

Podobno je v primeru rentnega varčevanja z vezavo depozita. Če imamo opraviti s tolarskim rentnim varčevanjem z vezavo depozita, potem je enkratni denarni polog v tolarjih. Če pa gre za devizno rentno varčevanje z vezavo depozita, potem je enkratni denarni polog v devizah.

Tako privarčevana denarna sredstva nam banka lahko izplača v dveh oblikah. Prva možnost je ekratno izplačilo privarčevanih denarnih sredstev, druga možnost pa je izplačevanje privarčevanih denarnih stredstev v obliki enako velikih periodičnih izplačil. Ta izplačila imenujemo rente. V tem primeru nam banka izplačuje nominalno enake denarne zneske v enakih časovnih intervalih, ki jih imenujemo periode.

Podobno kot pri periodičnih vlogah imamo tudi v tem primeru dve možnosti. V prvem primeru dobivamo rento na začetku periode (prenumerando rente), v drugem primeru pa dobivamo rento na koncu periode (postnumerando rente).

Višina izplačane rente je odvisna od višine privarčevanih denarnih sredstev in od izbranega števila izplačanih rent. Če je izbrano število izplačanih rent enako ena, potem imamo opraviti z enkratnim izplačilom privarčevanih denarnih sredstev. Večje, kot je število izplačanih rent, manjša je višina izplačane rente pri dani vsoti privarčevanih denarnih sredstev.

Problematiko rentnega varčevanja bomo obravnavali v štirih sklopih in sicer:

- rentno varčevanje z vezavo depozita v kombinaciji z enkratnim izplačilom privarčevanih denarnih sredstev,
- rentno varčevanje s periodičnimi pologi v kombinaciji z enkratnim izplačilom privarčevanih denarnih sredstev,
- rentno varčevanje z vezavo depozita v kombinaciji z rentnimi izplačili,
- rentno varčevanje s periodičnimi pologi v kombinaciji z rentnimi izplačili.

3.6.1 Rentno varčevanje z vezavo depozita v kombinaciji z enkratnim izplačilom privarčevanih denarnih sredstev

Pri rentnem varčevanju z vezavo depozita v kombinaciji z enkratnim izplačilom privarčevanih denarnih sredstev gre za obrestnoobrestni račun, pri katerem se začetna vrednost depozita obrestuje določeno časovno obdobje pri določeni obrestni meri. Zato bomo začetno vrednost depozita označili z G_0, vsoto privarčevanih denarnih sredstev pa bomo označili z G_n. Pri reševanju problemov rentnega varčevanja z vezavo depozita v kombinaciji z enkratnim izplačilom privarčevanih denarnih sredstev si bomo pomagali z naslednjo sliko:

Hkrati pa bomo uporabili že znano enačbo:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Primer 3.29
Danes smo z banko sklenili pogodbo o rentnem varčevanju. Odločili smo se za 5-letno tolarsko rentno varčevanje z vezavo depozita v znesku 500 tisoč DE pri realni dekurzivni letni obrestni meri 5,6%. Kolikšna bo višina enkratnega izplačila privarčevanih denarnih sredstev, če:
1. ni inflacije,
2. je inflacija v vseh petih letih enaka in znaša 5%?

Pri računanju nam bo v pomoč naslednja slika:

1. Vprašanje

Podatki so:
G_0 = 500 tisoč DE
r = 5,6%
π = 0
n = 5

V prvem koraku bomo izračunali nominalno obrestno mero. Ob predpostavki, da ni inflacije, je nominalna obrestna mera enaka:

$$p = \pi + r + \frac{\pi \cdot r}{100} = 0 + 5{,}6 + \frac{0 \cdot 5{,}6}{100} = 5{,}6\%$$

Velja tudi:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Zato velja:

$$G_5 = 500000DE \cdot \left(1 + \frac{5{,}6}{100}\right)^5 = 656583DE$$

Če ni inflacije, bo vsota privarčevanih denarnih sredstev ob izteku pogodbe o rentnem varčevanju enaka 656583 DE.

2. Vprašanje

Podatki so:
G_0 = 500 tisoč DE
r = 5,6%
π = 5%
n = 5

Tudi v tem primeru je potrebno v prvem koraku izračunati nominalno obrestno mero, ki je enaka:

$$p = \pi + r + \frac{\pi \cdot r}{100} = 5 + 5{,}6 + \frac{5 \cdot 5{,}6}{100} = 10{,}88\%$$

Tudi v tem primeru bomo uporabili enačbo:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Vstavimo podatke:

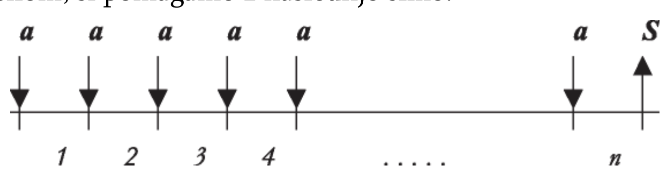
$$G_5 = 500000DE \cdot \left(1 + \frac{10{,}88}{100}\right)^5 = 837985DE$$

V primeru inflacije bo vsota privarčevanih denarnih sredstev višja in sicer znaša 837985 DE.

3.6.2 Rentno varčevanje s periodičnimi pologi v kombinaciji z enkratnim izplačilom privarčevanih denarnih sredstev

Ugotovili smo, da lahko denarne zneske vlagamo v banko bodisi na začetku kapitalizacijskega obdobja (prenumerando vloge) bodisi na koncu kapitalizacijskega obdobja (postnumerando vloge). Periodične vloge bomo označili z a, njihovo prihodnjo vrednost po n kapitalizacijskih obdobjih pa bomo označili z S_n. Pri izračunu končne vrednosti periodičnih vlog bomo upoštevali načelo ekvivalence glavnic.

Pri rentnem varčevanju s periodičnimi pologi vlagamo denarne zneske v banko na začetku kapitalizacijskega obdobja, zato bomo pri naših izračunih upoštevali prenumerando periodične vloge. Kadar imamo opraviti z rentnim varčevanj em s prenumerando periodičnimi pologi v kombinaciji z enkratnim izplačilom, si pomagamo z naslednjo sliko:



Da bi izračunali prihodnjo vrednost vseh prenumerando periodičnih vlog S_n, moramo prvo periodično vlogo a naobrestiti za n let. Pri tem si pomagamo z enačbo:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Ker velja:

$$G_n = a_n$$

$$G_0 = a$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = r^n$$

Zato je:

$a_n = a \cdot r^n$

Zato je njena vrednost v časovnem trenutku S_n enaka $a \cdot r^n$. Drugo periodično vlogo a moramo naobrestiti za (n-1) let, zato je njena vrednost v časovnem trenutku S_n enaka $a . r^{n-1}$. Po enakem postopku naobrestimo tudi ostale periodične vloge a. Končna vrednost vseh prenumerando periodičnih vlog S_n je na podlagi slike o prenumerando periodičnih vlogah enaka:

$S_n = a \cdot r^n + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^{n-2} + a \cdot r^{n-3} + a \cdot r^{n-4} \dots + a \cdot r$

Če na desni strani enačbe izpostavimo $a \cdot r$, dobimo:

$$S_n = a \cdot r \cdot \left(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + r^{n-4} + r^{n-5} + \dots + 1\right)$$

Ker gre v oklepaju na desni strani naše enačbe za vsoto prvih n členov geometričnega zaporedja (s prvim členom 1 in kvocientom r)[12], velja:

$$1 + \dots + r^{n-5} + r^{n-4} + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Zato velja tudi:

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

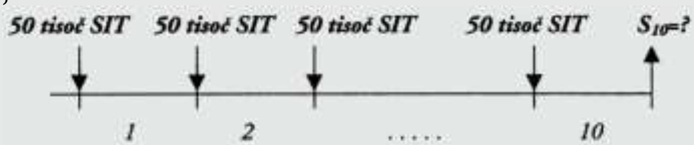
To je osnovna enačba za izračunavanje vsote privarčevanih denarnih sredstev pri rentnem varčevanju s periodičnimi pologi.

[12] Več o geometričnem zaporedju lahko najdemo v Vadnal (1974, str. 141-143).

Primer 3.30

Odločili smo se za 10-letno tolarsko rentno varčevanje s prenumerando letnimi periodičnimi plačili v višini 50 tisoč DE pri realni dekurzivni letni obrestni meri 6,1%. Kolikšna bo višina enkratnega izplačila privarčevanih denarnih sredstev, če:

1. ni nflacije in
2. če je inflacija v vseh desetih letih enaka in znaša 7%?



1. Vprašanje

Podatki so:
a = 50 tisoč DE
r = 6,1%
π = 0
n = 10

Ob predpostavki, da ni inflacije, je nominalna dekurzivna letna obrestna mera enaka realni dekurzivni letni obrestni meri. Pri reševanju tega problema si bomo pomagali z enačbo:

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Zato velja:

$$S_{10} = 50000DE \cdot 1{,}061 \cdot \frac{1{,}061^{10} - 1}{1{,}061 - 1} = 702534DE$$

Če ni inflacije, bo vsota privarčevanih denarnih sredstev ob izteku pogodbe o rentnem varčevanju enaka 702534 DE.

2. Vprašanje

Podatki so:
a = 50 tisoč DE
r = 6,1%
π = 7
n = 10

Tudi v tem primeru je potrebno v prvem koraku izračunati nominalno dekurzivno letno obrestno mero, ki je enaka:

$$p = \pi + r + \frac{\pi \cdot r}{100} = 7 + 6{,}1 + \frac{7 \cdot 6{,}1}{100} = 13{,}53\%$$

Tudi v tem primeru bomo uporabili enačbo:

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Vstavimo podatke:

$$S_{10} = 50000DE \cdot 1{,}135 \cdot \frac{1{,}1353^{10} - 1}{1{,}1353 - 1} = 1072864{,}5DE$$

V primeru 7% inflacije bo vsota privarčevanih denarnih sredstev višja in sicer znaša 1072864,5 DE.

Primer 3.31

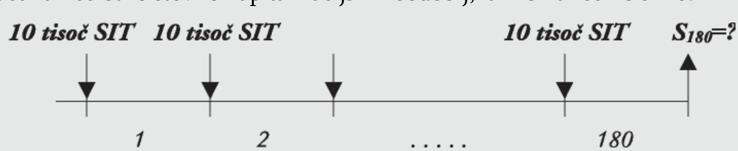
Danes smo se odločili za rentno varčevanje tako, da bomo 15 let na začetku vsakega meseca vlagali v banko 10 tisoč DE. Nominalna dekurzivna letna obrestna mera je 6,1%. Koliko bo znašala vsota privarčevanih denarnih sredstev, če banka uporablja:

1. mesečno kapitalizacijo in relativno obrestno mero?
2. mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero?

Podatki so:
a = 10 tisoč DE
r = 5,5%
π = 0
n = 15

Najprej izračunamo celotno število kapitalizacijskih obdobij, ki je v obeh primerih enako. Ker ima leto 12 mesecev, dolžina rentnega varčevanja pa je 15 let, je celotno število kapitalizacijskih obdobij enako:
n = 12 · 15 = 180

Ko smo izračunali celotno število kapitalizacijskih obdobij, lahko narišemo sliko:



1. Vprašanje

Če banka uporablja mesečno kapitalizacijo in relativno obrestno mero, potem velja:

$$r_M = 1 + \frac{\frac{p}{M}}{100} = 1 + \frac{p}{100 \cdot M}$$

Pri tem pomeni:
r_M ... relativni obrestovalni faktor za M kapitalizacijskih obdobij v letu
M ... število kapitalizacijskih obdobij v enem letu
p ... nominalna letna obrestna mera

Zato je:

$$r_{12} = 1 + \frac{5,50}{100 \cdot 12} = 1,0046$$

Pri reševanju problema si bomo pomagali z naslednjo enačbo:

$$S_n = a \cdot r_M \cdot \frac{r_M^n - 1}{r_M - 1}$$

Vsota privarčevanih denarnih sredstev je tako enaka:

$$S_{180} = 10000DE \cdot 1,0046 \cdot \frac{1,0046^{180} - 1}{1,0046 - 1} = 2805008DE$$

Če banka uporablja mesečno kapitalizacijo in relativno obrestno mero, potem znaša vsota privarčevanih sredstev 2805008 DE.

2. Vprašanje: Če banka uporablja mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero, potem je mesečni obrestovalni faktor enak dvanajstemu korenu iz letnega obrestovalnega faktorja:

$$r_M = \sqrt[M]{1 + \frac{p}{100}}$$

Zato velja:

$$r_{12} = \sqrt[12]{1 + \frac{5,5}{100}} = 1,0045$$

Vsota privarčevanih denarnih sredstev je v tem primeru enaka:

$$S_{180} = 10000DE \cdot 1,0045 \cdot \frac{1,0045^{180} - 1}{1,0045 - 1} = 2776499DE$$

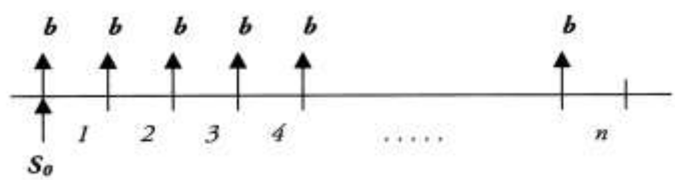
Če banka uporablja mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero, potem znaša vsota privarčevanih sredstev 2776499 DE.

3.6.3 Rentno varčevanje z vezavo depozita v kombinaciji z rentnimi izplačili

Podobno kot pri periodičnih vlogah bomo tudi v primeru rentnih izplačil upoštevali načelo ekvivalence glavnic. Kadar imamo opraviti z rentnimi izplačili, nas zanima sedanja vrednost vseh rentnih izplačil. Pri izračunavanju sedanje vrednosti vseh rentnih izplačil bomo posamezno rento označili z b, začetno vrednost vseh izplačanih rent pa bomo označili z S_0.

Pri rentnem varčevanju z vezavo depozita v kombinaciji z rentnimi izplačili se trenutna[13] glavnica po načelu obrestnoobrestnega računa obrestuje tudi v času izplačevanja rente.

Pri rentnem varčevanju z vezavo depozita ali pri rentnem varčevanju s periodičnimi pologi v kombinaciji z rentnimi izplačili nam banka izplačuje rento na začetku periode, zato bomo pri naših izračunih upoštevali prenumerando rentna izplačila. Kadar imamo opraviti z rentnim varčevanjem z vezavo depozita v kombinaciji s prenumerando rentnimi izplačili, si pomagamo z naslednjo sliko:



Sedanjo vrednost vseh prenumerando rentnih izplačil izračunamo s pomočjo preračunavanja prenumerando zneskov na sedanji trenutek:

$$S_0 = b + \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{b}{r^3} + \frac{b}{r^4} + \ldots + \frac{b}{r^{n-1}}$$

Če to enačbo zapišemo nekoliko drugače:

$$S_0 = \frac{b}{r^{n-1}} + \ldots + \frac{b}{r^4} + \frac{b}{r^3} + \frac{b}{r^2} + \frac{b}{r} + b$$

[13] Trenutna glavnica je enaka sedanji vrednosti začetne glavnice zmanjšane za sedanjo vrednost rentnih izplačil.

Potem lahko na desni strani enačbe izpostavimo prvi člen:

$$S_0 = \frac{b}{r^{n-1}} \cdot \left(1 + \ldots + r^{n-5} + r^{n-4} + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}\right)$$

V oklepaju na desni strani naše enačbe gre za znano vsoto prvih n členov geometričnega zaporedja (s prvim členom 1 in kvocientom r)[14], kjer je:

$$1 + \ldots + r^{n-5} + r^{n-4} + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Zato velja tudi:

$$S_0 = \frac{b}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

To je osnovna enačba za izračunavanje sedanje vrednosti vseh prenumerando rentnih izplačil. Za izračun sedanje vrednosti postnumerando rentnih izplačil uporabljamo enačbo:

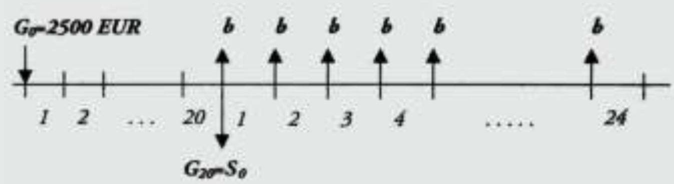
$$S_0^{`} = \frac{b}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

[14] Več o geometričnem zaporedju lahko naj demo v Vadnal (1974, str. 141-143).

Primer 3.32

Kolikšna bo velikost prenumerando rente, če se odločimo za rentno varčevanje z vezavo depozita v višini 2500 EUR* pri nominalni dekurzivni letni obrestni meri 3,75%? Banka pri izplačevanju prenumerando rent upošteva mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero. Čas vezave depozita je 20 let, odločimo pa se za 24 mesečnih rentnih izplačil.

Pri računanju nam bo v pomoč naslednja slika:



---

*Oznaka za EURO

Da bi lahko odgovorili na zastavljeno vprašanje, moramo najprej izračunati velikost privarčevanih denarnih sredstev čez 20 let. To naredimo s pomočjo obrazca:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Podatki so:
G_0= 2500 EUR
p = 3,75%
n = 20

Zato je:

$$G_n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 2500EUR \cdot \left(1 + \frac{3{,}75}{100}\right)^{20} = 5220EUR$$

Na ta način smo izračunali začetno vrednost vseh prenumerando rent. Če banka uporablja mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero, potem je mesečni obrestovalni faktor enak:

$$r_{12} = \sqrt[12]{1 + \frac{3{,}75}{100}} = 1{,}0031$$

Pri izračunu velikosti mesečne prenumerando rente si bomo pomagali z obrazcem:

$$S_0 = \frac{b}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \Rightarrow b = S_0 \cdot r^{n-1} \cdot \frac{r - 1}{r^n - 1}$$

Ker smo se odločili za 24 mesečnih prenumerando rent, je višina posamezne prenumerando rente enaka:

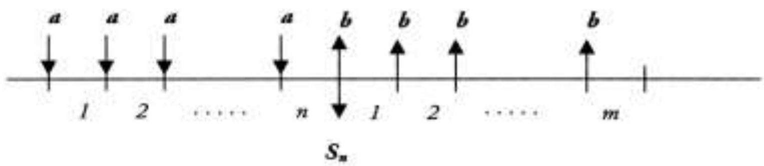
$$b = 5220EUR \cdot 1{,}0031^{24-1} \cdot \frac{1{,}0031 - 1}{1{,}0031^{24} - 1} = 225EUR$$

3.6.4 Rentno varčevanje s periodičnimi pologi v kombinaciji z rentnimi izplačili

Do sedaj smo računali ločeno bodisi prihodnjo vrednost vseh periodičnih vlog bodisi sedanjo vrednost vseh prenumerando rentnih izplačil S_0. V naslednjem primeru se bomo srečali z obema primeroma hkrati in sicer tako z računanjem prihodnje vrednosti vseh periodičnih vlog (ki so lahko bodisi prenumerando bodisi postnumerando), kakor tudi s sedanjo vrednostjo vseh periodičnih rentnih izplačil (ki so ravno tako lahko prenumerando ali postnumerando). Pri rentnem varčevanju s periodičnimi pologi v kombinaciji z rentnimi izplačili velja:

$S_n = S_0$

Če upoštevamo prenumerando periodične vloge in prenumerando rentna izplačila, potem lahko rentno varčevanje s periodičnimi pologi in rentnimi izplačili v splošnem predstavimo z naslednjo sliko:



V primeru, da je obrestovalni faktor v času periodičnih vlaganj enak r_1, v času periodičnih izplačil pa r_2, velja zveza:

$$a \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^n - 1}{r_1 - 1} = \frac{b}{r_2^{m-1}} \cdot \frac{r_2^m - 1}{r_2 - 1}$$

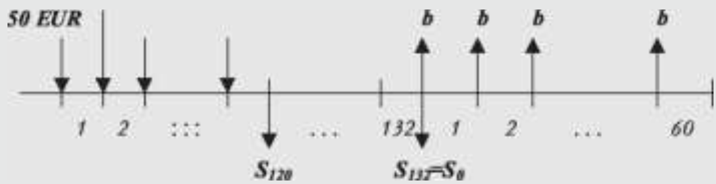
Primer 3.33

V banki želimo skleniti devizno rentno varčevanje s prenumerando mesečnimi pologi v višini 50 EUR za čas 10 let z enoletnim mirovanjem tako privarčevanih sredstev. Banka upošteva mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero. Nominalna dekurzivna letna obrestna mera je enaka 3,75%. Kolikšna bo prenumerando renta, če bi se odločili za 60 izplačanih rent?

Ker banka upošteva mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero, bomo najprej izračunali število kapitalizacijskih obdobij in konformno obrestno mero. Število kapitalizacijskih obdobij v času periodičnih vlaganj je enako:

$n = 12 \cdot 10 = 120$

Na podlagi izračunanega števila kapitalizacijskih obdobij lahko narišemo sliko, ki nam bo v pomoč pri izračunu višine prenumerando rente:



Velikost konformne obrestne mere pa bomo izračunali po obrazcu:

$$r_M = \sqrt[M]{1+\frac{p}{100}}$$

Zato velja:

$$r_{12} = \sqrt[12]{1+\frac{3,75}{100}} = 1,0031$$

Tako lahko izračunamo prihodnjo vrednost vseh prenumerando mesečnih vlog po obrazcu:

$$S_n = a \cdot r_M \cdot \frac{r_M^n - 1}{r_M - 1}$$

Podatki so:
a = 50 EUR
n = 120
M = 12

Vstavimo podatke v enačbo:

$$S_{120} = 50EUR \cdot 1,0031 \cdot \frac{1,0031^{120} - 1}{1,0031 - 1} = 7277EUR$$

Tako privarčevana denarna sredstva morajo mirovati eno leto:
$S_{132} = S_{120}\, r_{12}^{12}$ = 7277 EUR 1,003 1^{12} = 7552 EUR

Na ta način smo izračunali začetno vrednost vseh prenumerando rent. Sedaj pa bomo izračunali še velikost prenumerando rente, če bi se odločili za 60 izplačanih rent:

$$S_0 = \frac{b}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \Rightarrow b = S_0 \cdot r^{n-1} \cdot \frac{r-1}{r^n - 1}$$

Zato velja:

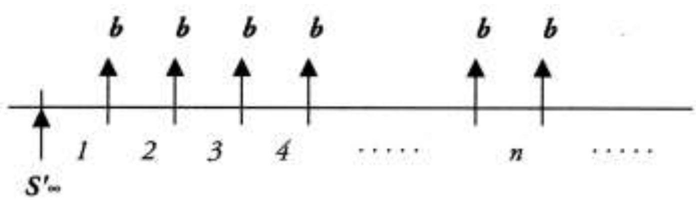
$$b = 7552EUR \cdot 1{,}0031^{60-1} \cdot \frac{1{,}0031-1}{1{,}0031^{60}-1} = 138EUR$$

Če bi se odločili za 60 prenumerando rent, bi bila ob danih predpostavkah višina prenumerando rente enaka 138 EUR.

3.7 Večna renta

Poseben primer rentnega varčevanja z vezavo depozita v kombinaciji z rentnimi izplačili je primer večne rente. Ugotovili smo, da je višina izplačane rente odvisna od višine privarčevanih denarnih sredstev in od izbranega števila izplačanih rent. Višino privarčevanih denarnih sredstev smo označili z S_0, število izplačanih rent pa smo označili z n. Če se število rentnih izplačil povečuje čez vse meje, govorimo o večni renti. Obravnavali bomo primer postnumerando izplačil večne rente.

Kadar izplačila večne rente dospevajo postnumerando, si reševanje problemov olajšamo s pomočjo naslednje slike:



Sedanjo vrednost vseh n postnumerando rentnih izplačil izračunamo po obrazcu:

$$S_\infty^` = \frac{b}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Enačbo preuredimo tako, da dobimo obliko:

$$S_\infty^` = \frac{b}{r^n} \cdot \frac{r^n}{r - 1} - \frac{b}{r^n \cdot (r - 1)}$$

V primeru večne rente se število rentnih izplačil povečuje čez vse meje, zato dobi ta enačba naslednjo obliko:

$$S_{\infty}^{`} = \frac{b}{r-1}$$

Pri tem je S'_{∞} simbol, s katerim označujemo sedanjo vrednost postnumerando izplačil večne rente.

To je osnovni obrazec za izračun sedanje vrednosti postnumerando izplačil večne rente. Posvetimo sedaj pozornost imenovalcu na desni strani naše enačbe. Ker je obrestovalni faktor r definiran z enačbo:

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

Velja:

$$r - 1 = \frac{p}{100}$$

Tako dobimo ekvivalentno enačbo za izračun sedanje vrednosti postnumerando izplačil večne rente, ki je:

$$S_{\infty}^{`} = \frac{b}{r-1} = \frac{b}{\frac{p}{100}} = \frac{100 \cdot b}{p}$$

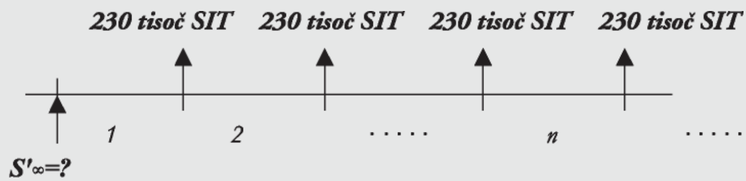
Na osnovi tega izraza dobimo tudi:

$$b = \frac{p \cdot S_{\infty}^{`}}{100}$$

S pomočjo tega izraza smo prišli do zelo pomembne ugotovitve. V primeru večne rente je velikost posameznega izplačila ravno enaka obrestim, ki so se nabrale za začetni glavnici v enem kapitalizacijskem obdobju.

Primer 3.34
Neko trgovsko podjetje želi ustanoviti sklad, iz katerega bo vsako leto najboljši prodajalec prejel ob koncu leta denarno nagrado v višini 230 tisoč DE. Koliko mora podjetje danes vložiti v banko, če banka upošteva letno kapitalizacijo in 12,5% nominalno dekurzivno letno obrestno mero?

Na zastavljeno vprašanje bomo odgovorili postopoma. V prvem koraku narišemo sliko, ki nam bo v pomoč pri računanju:



Ker bo denarna nagrada najboljšemu trgovcu izplačana ob koncu leta, si bomo pri odgovoru na zastavljeno vprašanje pomagali z enačbo za izračun sedanje vrednosti postnumerando izplačil večne rente, ki je:

$$S_{\infty}^{`} = \frac{b}{r-1}$$

Podatki so:
b = 230 tisoč DE

$$p = 12{,}5\% \Rightarrow r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{12{,}5}{100} = 1{,}125$$

Tako dobimo:

$$S_{\infty}^{'} = \frac{b}{r-1} = \frac{230000DE}{1{,}125-1} = 1840000DE$$

Če želi podjetje izplačati vsako leto ob koncu leta najboljšemu prodajalcu nagrado v višini 230 tisoč DE, mora danes vložiti v banko 1840 tisoč DE.

Izračunajmo sedanjo vrednost postnumerando izplačil večne rente še s pomočjo ekvivalentne enačbe, ki je:

$$S_{\infty}^{'} = \frac{100 \cdot b}{p} = \frac{100 \cdot 230000DE}{12{,}5} = 1840000DE$$

Primer 3.35

Nominalna dekurzivna letna obrestna mera je 14%. Kolikšna bi bila sedanja vrednost postnumerando izplačil večne rente v višini 100 tisoč DE, ki jo dobi posameznik na koncu vsakega meseca, če banka upošteva mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero?

Če banka uporablja mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero, potem je mesečni obrestovalni faktor enak:

$$r_{12} = \sqrt[12]{1 + \frac{14}{100}} = 1{,}011$$

Ker velja:

$$\frac{p_{12}}{100} = r_{12} - 1 = 0{,}011 \Rightarrow p_{12} = 1{,}1\%$$

Velja tudi:

$$S_{\infty}^{'} = \frac{100 \cdot b}{p}$$

Podatki so:
b = 100 tisoč DE

Zato lahko izračunamo:

$$S_{\infty}^{'} = \frac{100 \cdot b}{p} = \frac{100 \cdot 100000DE}{1{,}1} = 9090909DE$$

Sedanja vrednost postnumerando izplačil večne rente na koncu vsakega meseca v višini 100 tisoč DE je enaka 9090909 DE.

3.8 Amortizacijski račun

Amortizacijski račun ima sam po sebi zelo širok pomen, v finančni praksi pa ga uporabljamo pri odplačevanju kredita. Pri tem si pomagamo z amortizacijskim načrtom, ki nam v tabelarični obliki pove način odplačevanja kredita. Kot osnova pri kreditnih poslih nastopa obrestnoobrestni račun, teoretično pa v tem okviru uporabljamo tako dekurzivno obrestovanje kot tudi anticipativno obrestovanje. Pri nas bomo obravnavali primer pri dekurzivnem obrestovanju.

3.8.1 Osnovni pojmi

Pri odplačevanju kredita v praksi obstajata dva možna načina:

- obročni način odplačevanja kredita, z enakimi razdolžninami ali odplačilnimi kvotami kredita, temu znesku se prištejejo obresti glede na stanje dolga;

- anuitetni način odplačevanja kredita, kjer je anuiteta fiksna, z vsakim naslednjim plačilom anuitete pa se spreminja njena struktura: zmanjšuje se del za plačilo obresti in povečuje del odplačila kredita - razdolžnina.

Razdolžnina, odplačilna kvota kredita, odplačilo glavnice (dolga) je tisti denarni znesek, za katerega se po vsakokratnem plačilu anuitete ali obroka kredita zmanjša dolg.

Obresti se računajo od osnove, ki jo predstavlja ostanek dolga po prejšnjem plačilu. Ker se osnova z vsakim odplačilom kredita zmanjša, se posledično zmanjšujejo tudi obresti. Anuiteta se nanaša na poljubno časovno obdobje, ki pa mora biti v času odplačevanja dolga stalno. Izbranemu časovnemu obdobju, na katero se plačuje obrok ali anuiteta, pa mora biti ustrezno prilagojena tudi obrestna mera.

3.8.1.1 Obročni način odplačila kredita

Razdolžnina je tu konstantna in se ne spreminja, njena vrednost je enaka n- temu delu začetnega dolga D_0 , če je n število obrokov. Označevali bomo z:

q - razdolžnina, odplačilo dolga,

o_i - obresti,

a_i - anuiteta, obrok,

D_i - preostanek dolga (kredita) po plačilu obroka a_i dolg (kredit).

Obrazce za odplačilo dolga q in obresti o_i zapišimo po njihovih definicijah:

$$q = \frac{D_0}{n},$$

$$o_i = D_{i-1} \frac{p}{100}.$$

Vrednost prvega obroka a_1 je enaka:

$$a_1 = q + D_0 \frac{p}{100}.$$

Vrednost drugega obroka je:

$$a_2 = q + D_1 \frac{p}{100} = q + (D_0 - q) \frac{p}{100}.$$

Splošna enačba pa je

$$a_i = q + (D_0 - (i-1)q) \frac{p}{100}. \tag{3.3.8}$$

3.8.1.2 Anuitetni način odplačila kredita

Izhodišča:

- kredit D_0 kreditojemalec vrne (amortizira) z n enakimi anuitetami a, v enakih časovnih razmikih - obračunskih obdobjih,
- anuiteta a je za podobdobje i (i= 1,2,...,n) sestavljena iz obresti o_i in razdolžnine q_i,
- anuiteta a je znesek, ki pri nespremenjenih pogojih vračanja dolga ostaja enaka - konstantna, sestavljajo jo obresti za vrednost kredita v obdobju pred plačilom anuitete in razdolžnino, za katero se zmanjša stanje kredita,
- prva anuiteta se plača po preteku prvega obračunskega obdobja.

Po načelu ekvivalence glavnic diskontiramo vrednosti kredita D_0 in anuitet a, plačanih v zaporednih obračunskih obdobjih na skupni časovni trenutek, ko se odplača zadnja anuiteta.

Prihodnja vrednost dolga D_0, po n kapitalizacijskih obdobjih, pri dekurzivnem obrestovanju in obrestovalnem faktorju r: $D_0 r^n$.

Pri izračunu prihodnje vrednosti anuitet preračunamo vrednosti anuitet na konec zadnjega obračunskega obdobja. Na koncu zadnjega obračunskega obdobja plačamo anuiteto, pri preračunu vseh anuitet na ta isti trenutek pa zadnje anuitete ne naobrestimo, vse ostale anuitete pa naobrestimo.

Prihodnjo vrednost anuitet bomo pri navedenih pogojih računali po obrazcu:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

Pri tem mora biti prihodnja vrednost dolga enaka prihodnji vrednosti anuitet v istem časovnem trenutku.

Izenačimo diskontirane vrednosti in dobimo:

$$D_0 r^n = \frac{a \cdot (r^n - 1)}{r - 1}.$$

Izrazimo iz gornje enačbe anuiteto a:

$$a = \frac{D_0 r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1}. \qquad (3.3.9)$$

Pri tej anuiteti znašajo:

– obresti v obdobju i (i= 1,2,.. .,n), pri stanju neodplačanega kredita D_{i-1}:

$$o_i = \frac{D_{i-1} p}{100},$$

– odplačilo dolga q_i pa:

$$q_i = a - o_i.$$

Pri tem pa je novo stanje dolga D_i po odplačilu anuitete konec obdobja i enako:

$$D_i = D_{i-1} - q_i.$$

Primer 3.36
Kreditodajalec ponuja kredit v višini 1000 DE pod naslednjimi pogoji: letna obrestna mera 5%, vračanje s petimi enakimi letnimi anuitetami.

Izračunajmo amortizacijski načrt.
Anuiteta se izračuna po obrazcu (3.3.9), tako da vstavimo ustrezne vrednosti:
n = 5
r = 1,05
D_0= 1000

$$a=\frac{D_0 r^n \cdot (r-1)}{r^n-1}=\frac{1000 \cdot 1{,}05^5(1{,}05-1)}{1{,}05^5-1}=231{,}0$$

Zapišimo amortizacijski načrt:

Obdobje	Anulteta	Obresti	Odplačilo glavnice	Stanje kredita po odplačani anuiteti
i	a	o_i	q_i	D_i
				1000
1	231,0	50,0	181,0	819,0
2	231,0	41,0	190,0	629,0
3	231,0	31,4	199,6	429,4
4	231,0	21,5	209,5	219,9
5	231,0	11,0	220,0	-0,1
SKUPAJ	**1154,9**	**154,9**	**1000,0**	

3.8.2 Zvezno obrestovanje

Pri nekaterih naravnih pojavih (demografija, lesna masa v gozdu,...) ali gospodarskih (inflacija, ...) se srečamo s pojavom neprestanega obrestovanja. V takih primerih uporabljamo obrazec:

$$G_n = G_0 e^{\frac{np}{100}}, \qquad (3.3.10)$$

kjer pomenijo:

G_0 - vrednost pojava v izbranem trenutku,

G_n - vrednost pojava n-let po izbranem trenutku, za katerega velja vrednost G_0,

p% - letna obrestna mera ali stopnja naravne rasti.

Za pojav, ki se spreminja skladno z obrazcem (3.3.9), pravimo, da se spreminja po zakonu naravne rasti.

Obrazec (3.3.10) uporabimo vedno, kadar poznamo tri parametre in nas zanima vrednost četrtega. Zato se poleg oblike (3.3.10) pogosto uporabljajo tudi oblike:

$$G_0 = \frac{G_n}{e^{\frac{np}{100}}},$$

$$p = \frac{100}{n} \ln \frac{G_n}{G_0},$$

$$n = \frac{100}{p} \ln \frac{G_n}{G_0}.$$

Primer 3.37

V občini so ugotovili, da število občanov narašča po zakonu naravne rasti, s stopnjo naravne rasti 2%. Zanima nas število občanov čez pet let, če je v sedanjem trenutku v občini 3500 občanov.

Poznamo naslednje podatke:
$G_0 = 3500$
p% = 2%
n = 5
Zanima nas G5.
Vstavimo podatke v obrazec (3.3.9) in dobimo:

$$G_n = G_0 e^{\frac{np}{100}} = 3500 e^{\frac{52}{100}} = 3868.$$

Pri načrtovanju komunalnih objektov nas zanima čez koliko časa (n) lahko pričakujemo v občini 4000 občanov pri nespremenjeni 2% letni stopnji naravne rasti, če je v sedanjem trenutku v občini 3500 občanov.

$$n = \frac{100}{p} \ln \frac{G_n}{G_0} = \frac{100}{2} \ln \frac{4000}{3500} = 50.0{,}134 = 6{,}67$$

Prebivalstvo se bo povečalo v občini na 4000 v 6,67 leta.

V občini se zanimajo, koliko je bilo občanov pred desetimi leti, če je v danem trenutku v občini 3500 občanov, letna stopnja naravne rasti pa 2%.
V tem primeru upoštevamo podatke na naslednji način:
p % = 2%
G_{10} = 3500
n = 10
G_0 = ?

Na vprašanje bomo našli odgovor, če bomo opravili naslednji izračun:

$$G_0 = \frac{G_n}{e^{\frac{np}{100}}} = \frac{3500}{e^{\frac{10.2}{100}}} = 2866.$$

V občini je bilo pred desetimi leti 2866 občanov.

Primer 3.38
Leta 1961 je bilo v Sloveniji 1592 tisoč prebivalcev, leta 1971 pa 1727 tisoč prebivalcev (Vir: Statistični letopis RS 1994, stran 64). Določimo letno stopnjo naravne rasti za prebivalstvo v Sloveniji v obdobju 1961-1971.

Uporabimo obrazec (3.3.10) v obliki:

$$p = \frac{100}{n} \ln \frac{G_n}{G_0}.$$

Pri tem bodo uporabljeni podatki:
$G_{61}=G_0$ = 1592 tisoč
$G_{71}=G_{10}$ = 1727 tisoč
n= 10

$$p = \frac{100}{n} \ln \frac{G_n}{G_o} = \frac{100}{10} \ln \frac{G_{71}}{G_{61}} = 10.\ln \frac{1727}{1592} = 10.\ln 1{,}0848 = 0{,}814\%.$$

V Sloveniji je v obdobju 1961-1971 prebivalstvo naraščalo s povprečno letno stopnjo naravne rasti 0,81%.

3.9 Vrednotenje investicij

3.9.1 Izhodišče

Investicije so dolgoročne naložbe s pričakovanim dolgoročnim donosom. Ločimo dva tipa investicij:

– investicije v finančne instrumente (obveznice, delnice),
– investicije v realne naložbe (zgradbe, oprema).

V finančne instrumente investirajo predvsem finančne institucije, ker so za to specializirane, v realne naložbe pa investirajo predvsem podjetja. Podjetja pa kupujejo delnice drugih podjetij predvsem z namenom pridobitve manjšega ali večjega lastniškega deleža in s tem udeležbe v dobičku.

Pri investicijah se pojavljajo investicijski izdatki, ki so lahko enkratni zneski ali pa večkratni denarni zneski, ki nastopajo v posameznih časovnih trenutkih. Poleg investicijskih izdatkov se pojavljajo še investicij ski prejemki. Investicij ski izdatki - vlaganja so vsi tisti izdatki, ki so potrebni za izvedbo investicije, investicijski prejemki - donosi pa so tisti denarni zneski, ki jih kot posledica investicije prejmejo investitorji.

Pri investicijah se srečujemo s finančnim tokom in s spremembo stanja, ne glede na to, ali gre za realno ali finančno investicijo. Investitorji vlagajo vselej z namenom, da se v obdobju življenjske dobe investicije investitorju realno poveča premoženje. V kolikor se premoženje zmanjša, ocenimo, da je investicijska odločitev z ekonomskega vidika slaba, v kolikor pa se realno premoženje investitorjev poveča, pravimo, da je za investitorja investicijska odločitev z ekonomskega vidika dobra.

Da bi bila ocena uspešnosti investicije čim boljša, uporabimo pri ocenjevanju investicijske odločitve kriterije.

Obstaja več različnih investicijskih kriterijev, kot npr.:

- neto sedanja vrednost (NSV[15]),
- notranja stopnja donosa (ISD[16]),
- popravljena notranja stopnja donosa (MIRR[17]),
- metoda dobe povračila (DP),
- metoda indeksa dobičkonosnosti (x).

Opisali bomo postopek izračuna prvih dveh kriterijev.

[15] Po angleško NPV (Net present value).

[16] Po angleško IRR (Internal rate of return).

[17] Po angleško MIRR (Modifyed IRR).

3.9.2 Neto sedanja vrednost

Kriterij neto sedanje vrednosti je med vsemi investicijskimi kriteriji najpomembnejši, izpolnjen pa je tedaj, ko so investicijski izdatki (vlaganja) manjši od investicijskih donosov. Pri tem se srečujemo z denarnimi tokovi v času, ki neposredno niso primerljivi med seboj, zato jih moramo preračunati na isti časovni trenutek[18]. Običajno primerjamo vrednosti donosov in vlaganj, diskontirane na časovni trenutek pred investicij skim vlaganjem.

Celotna vsebina tega kriterija leži v naslednji neenačbi:

sedanja vrednost donosov > sedanja vrednost vlaganj

Uporabimo naslednje oznake:

D_i - vrednost donosa v času i (i = 1,2,3,...n)

V_i - vrednost vlaganja v času (i = 1,2,3,...n)

n - obdobja obravnavane investicije

r - diskontni faktor

p% - obrestna mera (diskontna stopnja) SVD - sedanja vrednost donosov

SVV - sedanja vrednost vlaganj

NSV - neto sedanja vrednost investicije.

Neto sedanja vrednost investicije je razlika med sedanjo vrednostjo donosov in sedanjo vrednostjo vlaganj:

$$NSV = SVD - SVV$$

Pri računanju sedanjih vrednosti donosov ali vlaganj, bomo uporabljali obrazec (3.3.6). Diskontni faktor r računamo tudi v tem primeru po obrazcu:

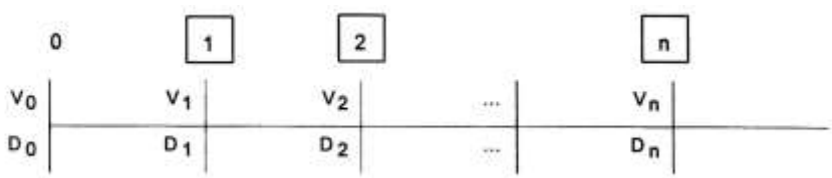
[18] Upoštevamo načelo ekvivalence glavnic.

$$r = 1 + \frac{p}{100}.$$

Problem denarnega toka pri vrednotenju investicije lahko prikažemo s tabelo:

Čas i	0	1	2	...	n
Vlaganja V_i	V_0	V_1	V_2	...	V_n
Donosi D_i	D_0	D_1	D_2	...	D_n

ali časovno premico



Sedanjo vrednost donosov SVD in sedanjo vrednost vlaganj SVV lahko izrazimo z gornjimi oznakami v naslednji obliki:

$$SVD = \sum_{i=0}^{n} \frac{D_i}{r^i},$$

$$SVV = \sum_{i=0}^{n} \frac{V_i}{r^i}.$$

Za neto sedanjo vrednost investicije NSV zato velja enačba:

$$NSV = \sum_{i=0}^{n} \frac{D_i}{r^i} - \sum_{i=0}^{n} \frac{V_i}{r^i}. \qquad (3.3.11)$$

Odločitve investitorja o sprejemljivosti investicije glede na vrednost kriterija neto sedanje vrednosti NSV so:

- če je NSV>0, potem je investicijski projekt sprejemljiv,
- če je NSV=0, potem so investitorji indiferentni,
- če je NSV<0, potem investicijski projekt ni sprejemljiv.

Podjetje pa navadno ocenjuje več investicijskih projektov hkrati. Podjetje ocenjuje posamezne investicijske projekte (variante) in na samem začetku zavrne vse tiste, ki imajo negativno NSV. Vsi tisti investicij ski projekti, ki pa imajo pozitivno NSV, pa gredo v nadaljnjo analizo. Prednost imajo projekti z večjo NSV.

3.9.3 Notranja stopnja donosa (ISD)

Podjetje ima v svoji bilanci stanja določena sredstva in določene obveznosti do virov sredstev. Pri investiranju pa podjetje potrebuje sredstva za investiranje. Investicijska sredstva so lahko lastna sredstva, največkrat pa podjetja potrebujejo tudi zunanja sredstva, ki jih pridobijo pri banki v obliki kredita. Podjetje banki za najeti kredit plačuje določene obresti glede na obrestno mero. To so stroški, povezani z investicijo, po drugi strani pa podjetje zanima, katera je tista stopnja donosa, ki jo zagotavlja investicija. Slednja stopnja donosa se imenuje notranja ali interna stopnja donosa ISD in je enaka obrestni meri p%, pri kateri je neto sedanja vrednost investicije enaka nič.

Drugače povedano: ISD je tista obrestna mera p%, pri kateri je NSV=0.

Z enačbami zapišemo kriterij za izračun ISD v naslednji obliki:

NSV = 0

ali izraženo z obrazcem za izračun NSV:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{D_i}{r^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{V_i}{r^i} \qquad (3.3.12)$$

Vrednost ISD ima naslednji pomen:

- če je ISD>p, je investicijski projekt zanimiv,
- če je ISD=p, so investitorji indiferentni,
- če je ISD<p, investicijski projekt po tem kriteriju ni zanimiv.

Pri tem je p bančna obrestna mera kot osnova za obresti, ki jih podjetje plačuje banki, ali bi jih dobilo, če bi investicijska sredstva vezalo pod bančnimi pogoji.

Podjetje v prvi fazi sprejme tisto investicijo, kjer je stopnja donosa investicije večja od obrestne mere, ki jo podjetje plačuje banki. V drugi fazi lahko podjetje sprejme tudi investicijo, ki ne izpolnjuje navedenih kriterijev, je pa za podjetje pomembna iz drugih razlogov - kriterijev.

Pri metodi interne stopnje donosa ne vemo, za koliko se poveča premoženje investitorjev, zato je ta metoda manj primerna za ocenjevanje investicij in se v praksi večinoma uporablja le kot dopolnilni kriterij neto sedanji vrednosti.

Primer 3.39
Pod jetje se pripravlja na investicijsko vlaganje v nove proizvodne zmogljivosti. Začetek vlaganja bi po terminskem planu bil lahko v letu 2000. Investicijska gradnja bi potekala dve leti, donose pa pričakujejo v podjetju pet let po zaključeni investiciji. Finančni tok vlaganj in donosov prikazuje naslednja tabela:

LETO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Vlaganja (000 DE)	160	30					
Donosi (000 DE)			40	50	60	60	60

Za navedene podatke o finančnem toku obravnavane investicije nas zanima:
1. NSV investicijskega projekta pri 6% letni obrestni meri,
2. ISD - interna stopnja donosa investicije.

Izračun NSV

Za izračun NSV uporabimo obrazec (3.3.11) in za naše podatke zapišimo:

$$NSV=\sum_{i=0}^{n}\frac{D_i}{r^i}-\sum_{i=0}^{n}\frac{V_i}{r^i}=\left(\frac{40}{1{,}06^3}+\frac{50}{1{,}06^4}+\frac{60}{1{,}06^5}+\frac{60}{1{,}06^6}+\frac{60}{1{,}06^7}\right)-\left(\frac{160}{1{,}06}+\frac{30}{1{,}06^2}\right),$$

$$NSV=(33{,}6+39{,}6+44{,}8+42{,}3+39{,}9)-(150{,}9+26{,}7)=200.2-177{,}6=22{,}6.$$

NSV= 22,6, kar pomeni, da pri obravnavanem investicijskem vlaganju pričakujemo pri 6% diskontni stopnji povečanje premoženja investitorja za 22,6 tisoč DE.

Izračun ISD

V našem primeru bomo ISD ocenili na ta način, da bomo izračunali NSV pri različnih diskontnih stopnjah. Ko bo interval (za vrednost diskontne stopnje p%), v katerem je tista vrednost p%, pri kateri bo NSV =0 dovolj ozek, bomo postopek zaključili. To je metoda poizkusov in napak.

Ugotovili smo, da je pri p% =6% vrednost NSV = 22,6.

Ker velja enačba: NSV = SVD-SVV
bo NSV<0, ko bodo SVD<SVV.

Če je pri p%=6% NSV>0, pričakujemo, da bo NSV postala negativna pri p% > 6%, ker se pri dviganju p% SVD bolj zmanjšujejo, kot se zmanjšujejo SVV. Zato preverimo NSV pri diskontni stopnji p% =10%

$$NSV = \sum_{i=0}^{n} \frac{D_i}{r^i} - \sum_{i=0}^{n} \frac{V_i}{r^i} = \left(\frac{40}{1{,}10^3} + \frac{50}{1{,}10^4} + \frac{60}{1{,}10^5} + \frac{60}{1{,}10^6} + \frac{60}{1{,}10^7} \right) - \left(\frac{160}{1{,}10} + \frac{30}{1{,}10^2} \right)$$

$$NSV = (30{,}1 + 34{,}2 + 37{,}3 + 33{,}9 + 30{,}8) - (145{,}5 + 24{,}8) = 166{,}1 - 170{,}2 = -4{,}1$$

Iz rezultata NSV = -4,1 lahko ugotovimo, da se interna stopnja donosa investicije nahaja v intervalu:
6% < ISD < 10% .

Da bi natančneje določili vrednost ISD, računajmo vrednost NSV pri p%=9%.

$$NSV = \sum_{i=0}^{n} \frac{D_i}{r^i} - \sum_{i=0}^{n} \frac{V_i}{r^i} = \left(\frac{40}{1{,}09^3} + \frac{50}{1{,}09^4} + \frac{60}{1{,}09^5} + \frac{60}{1{,}09^6} + \frac{60}{1{,}09^7} \right) - \left(\frac{160}{1{,}09} + \frac{30}{1{,}09^2} \right)$$

$$NSV = (30{,}9 + 35{,}4 + 39{,}0 + 35{,}8 + 32{,}8) - (146{,}8 + 25{,}2) = 173{,}9 - 172{,}0 = 1{,}9$$

Ker je NSV=1,9, pri p%=9% lahko ugotovimo, da je vrednost ISD v intervalu:
9%< ISD < 10%.

V kolikor bi morali natančneje opredeliti vrednost ISD, bi nadaljevali s prikazanim postopkom.

Primeri za urtjevanje

Primer 3.40

Želimo kupiti avtomobil, vendar pa imamo danes na razpolago le 470 tisoč DE. Cena avtomobila danes je 2,6 mio DE, zato želimo avtomobil financirati tudi s zakupom (leasingom). V tem primeru bo moral kupec poleg pologa 470 tisoč DE financirati preostali znesek v višini 2,3 mio DE v obliki zakupa. Privarčevani znesek nam bo za ta način financiranja zadostoval za začetni polog, ki ga zahteva prodajalec. Banka nam je zakup odobrila in sicer bomo naš kredit odplačevali 5 let v fiksnem znesku vsak mesec v višini 45 tisoč DE. Za vlogo v domači valuti banka ponuja 6% letno obrestno mero. Kolikšna je pri takem načinu financiranja cena avtomobila danes?

Podatki so naslednji:
p = 12%
m = 12
a = 51 tisoč DE

Pri tem imamo opraviti z anuiteto. Zapišimo(3.3.9) v obliki:

$$D_0 \cdot r^n = \frac{a \cdot (r^n - 1)}{r - 1}.$$

Zanima nas vrednost dolga danes, zato iz gornje enačbe izrazimo D_0:

$$D_0 = \frac{a \cdot (r^n - 1)}{r^n \cdot (r - 1)},$$

n je število kapitalizacijskih obdobij. V našem primeru je:
n = št.let · m = 5 · 12 = 60

Obrestovalni faktor r pa izračunamo po obrazcu:

$$r = 1 + \frac{p}{m} = 1 + \frac{6\%}{12} = 1{,}005.$$

Vstavimo vrednosti v enačbo za izračun vrednosti dolga iz naslova zakupa danes:

$$D_0 = \frac{a \cdot (r^n - 1)}{r^n \cdot (r - 1)} = \frac{51000DE \cdot \left(1{,}005^{60} - 1\right)}{1{,}005^{60} \cdot \left(1{,}005 - 1\right)} = 2.638.004DE$$

Dejanska vrednost avtomobila danes = D_0+začetni polog = 2.638.004 DE + 470.000 DE = 3.108.004 DE

Primer 3.41

Kolikšna je vrednost dvoletne obveznice podjetja danes, če je njena nominalna vrednost (vrednost, ki jo podjetje izplača ob dospetju) 1000 DE, trg zahteva 15% donosnost, podjetje pa vsako leto izplača 80 DE obresti na obveznico?

Rešitev:
Vrednost obveznice bomo izračunali tako, da bomo njeno nominalno vrednost diskontirali na danes, prav tako pa bomo diskontirali na današnji trenutek tudi vse izplačane obresti.

Podatki so:
G_2 = 1000 DE
o = 80 DE
n = 2 leti

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{15}{100} = 1{,}15.$$

Za diskontiranje bomo uporabili enačbo:

$$G_0 = \frac{G_n}{r^n}.$$

Najprej diskontirajmo vrednost glavnice:

$$G_0 = \frac{G_n}{r^n} = \frac{G_2}{r^2} = \frac{1000DE}{1{,}15^2} = 756DE$$

Sedaj pa diskontirajmo še vrednosti obresti. Pri tem uporabimo obrazec za diskontiranje anuitet, saj podjetje izplača vsako leto enak znesek:

$$D_0 = \frac{a \cdot (r^n - 1)}{r^n \cdot (r-1)} = \frac{80DE \cdot (1{,}15^2 - 1)}{1{,}15^2 \cdot (1{,}15 - 1)} = 130DE$$

D0 je vrednost obresti danes.

Vrednost obveznice = Vrednost glavnice + Vrednost obresti = 756 DE+130 DE=886 DE

Primer 3.42

Odločamo se za nakup delnice nekega podjetja, za katerega vemo, da bo čez leto dni izplačalo 600 DE dividend, čez dve leti 900 DE in čez tri leta 1400 DE. Na trgu velja 2% zahtevana donosnost, kar v našem primeru pomeni diskontni faktor. Kolikšno ceno smo pripravljeni plačati za tako delnico?

Rešitev:

Dividende na to delnico nam predstavljajo prihodnje vrednosti, ki jih moramo diskontirati na sedanji trenutek, da bi na ta način kot rezultat vsote sedanjih vrednosti dobili ceno delnice.

Podatki so naslednji:
dividenda 1 = 600 DE
dividenda 2 = 900 DE
dividenda 3 = 1400 DE
p = 2%

Najprej izračunajmo r:

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{2\%}{100} = 1{,}02.$$

Iz osnovne enačbe, ki jo bomo uporabili za izračun, sestavimo eno enačbo za izračun cene delnice po opisanem postopku:

$$Cena = \frac{dividenda1}{r} + \frac{dividenda2}{r^2} + \frac{dividenda3}{r^3}$$

Vstavimo podatke in izračunajmo ceno delnice:

$$Cena = \frac{600DE}{1{,}02} + \frac{900DE}{1{,}02^2} + \frac{1400DE}{1{,}02^3} = 2.772{,}5DE$$

Cena delnice danes = 2.772,5 DE

Primer 3.43

Kolikšna je donosnost delnice, če je podjetje izplačalo 26 DE dividende v tekočem letu, nominalna vrednost delnice (knjižna vrednost) pa je 1000 DE?

Donosnost delnice $= \frac{26DE}{1000DE} \cdot 100\% = 2{,}6\%$

V tem poglavju ste spoznali naslednje pojme:

- **teoretično osnovo in praktično vrednost zmesnega računa, delitvenega računa, sklepnega računa in procentnega računa,**
- **osnovne pojme in postopke obrestnega računa,**
- **uporabo obrestnega računa v razmerah, ko ni inflacije,**
- **uporabo obrestnega računa v razmerah inflacije,**
- **vsebino rentnega varčevanja in večne rente,**
- **amortizacijski račun in pa**
- **kriterije za investicijsko odločanje.**

4 MREŽNO PLANIRANJE [19]

4.1 Pojmi in definicije

Mrežno planiranje (načrtovanje) je kvantitativna metoda za vodenje projektov. Razumemo jo kot pomoč pri optimiranju izvajanja projektov.

Projekt je večje število aktivnosti (dejavnosti, naloge, opravila), ki so medsebojno logično povezane - usklajene in morajo biti opravljene za uresničitev ciljev - namena projekta. Za uspešnost projekta je bistvena dobra definicija cilja projekta in aktivnosti, ki so potrebne za dosego tega cilja.

Elementi mrežnega planiranja so aktivnosti in dogodki.

Aktivnost se prične z izvajanjem v trenutku, ko se zgodi dogodek “začetek aktivnosti”, in zaključi z izvajanjem v trenutku, ko se zgodi dogodek “konec aktivnosti”.

Pomembna dogodka v projektu sta: začetek projekta in konec projekta.

Predhodne aktivnosti so za obravnavano aktivnost tiste aktivnosti, katerih zaključek je pogoj za začetek obravnavane aktivnosti. Aktivnosti, ki nimajo funkcije pogoja za izvajanje katere od drugih aktivnosti ali zaključka projekta, ne sodijo med samostojne aktivnosti projekta.

4.2 Vodenje projektov in uporaba metode mrežnega planiranja

4.2.1 Controling in analize pri vodenju projektov

Večina avtorjev opredeljuje controlling kot funkcijo managementa - poslovodenja in ločuje controlling na: operativni controlling in strateški

[19] *Podrobnejšo razlago vsebine tega poglavja lahko bralec najde v:*
Bastič, M.: Mrežno planiranje in Super project, Univerza v Mariboru, Ekonomsko poslovna fakulteta 1991.
Meško, I.: Metode optimiranja I. in II.del, Univerza v Mariboru, Maribor 1989.

controlling. Veliko avtorjev za razlago pojma controlling uporabi pojem navigatorja “sistema”, ki skrbi, da ladja ne nasede na nevarne čeri.

Avtorji so si enotni, da je osrednja naloga controllinga zagotavljanje uresničevanja ciljev sistema.

Naloge controllinga v zgoščeni obliki povzemamo po Ossadnik (Ossadnik, 1998, str.26), ki jih deli v tri skupine:

- naloge koordinacije,
- podpore (metodološke, analitične) managementu,
- razvoju informacijske podpore.

V kolikor upoštevamo gornja spoznanja, lahko ocenimo, da je projektno vodenje način izvajanja funkcije controllinga pri tiste vrste procesih, kjer lahko njihove sestavine obravnavamo po proj ektnih načelih.

Naloge controllinga se pri projektnem načinu vodenja procesa z metodo mrežnega planiranja uresničujejo v naslednjih oblikah:

- koordinacijska naloga: v okviru projekta ali med projekti, z namenom celovitega obravnavanja in usmerjanja delovanja celotnega procesa;
- podpore managementu za potrebe odločanja: mrežno planiranje temelji na modelu (informacijskem) celotnega projekta in omogoča simuliranje potekov projekta pri različnih variantah pogojev izvajanja projekta, kriterijev in omejitev;
- razvoj informacijske podpore za potrebe odločanja je neposredni rezultat uporabe metode mrežnega planiranja, z namenom, da bi spoznali možne načine in pogoje izvajanja projekta. Metoda po svoji osnovni lastnosti, da je optimizacijska, določa vse tiste informacije, ki so odločujoče pri optimiranju izvajanja projektov.

Controlling pri projektnem vodenju je pomembna sestavina uspešnega vodenja projekta. Poteka v vseh fazah projekta, njena naloga je ocenjevanje usklajenosti izvajanja projekta z načrtovanim potekom projekta in omogoča pravočasno odkrivanje dejavnikov, ki spreminjajo potek izvajanja projekta, njihov vpliv na celoten projekt in s tem pravočasno odklanjanje motenj. Ob zaključku projekta se s podrobno analizo oceni prednosti in slabosti, ki kot element izkušnje preprečuje ponavljanje ugotovljenih motenj in napak pri podobnih novih projektih.

Zato je metoda mrežnega planiranja lahko osnovna metoda vodenja projekta in prav tako controllinga pri vodenju procesov.

Projektno vodenje in uporabo metode mrežnega planiranja je treba obravnavati fazno. V splošnem nastopata pri projektnem vodenju dve fazi, ki izhajata iz postopka oblikovanja modela in optimizacije reševanja problema. Tako lahko celoten projektni pristop členimo v dve fazi:

- analizo sestavin, ciljev in pogojev izvedbe projekta,
- analizo optimalne izvedbe projekta.

Rezultat prve faze bo struktura projekta z elementi za sestavo modela projekta. Rezultatov druge faze je lahko več, odvisno od ciljev definiranega projekta. Te lahko razvrstimo v tri skupine:

- časovno analizo projekta,
- analizo stroškov projekta in
- analizo porabe kritičnih resursov (zmogljivosti, izbrane vrste materiala, finančnih sredstev, ipd.)

Mi se bomo omejili le na časovne analize projekta.

4.2.2 Analize sestavin, ciljev in pogojev izvedbe projekta

V okviru te faze se opredelijo bistveni dejavniki za uspešno izvedbo projekta. Opredelijo se osnovni cilji in stranski cilji v projektu, ki so osnova za definiranje aktivnosti in primernih podatkov. Prav tako se v tej fazi določijo zakonitosti, ki odločujoče vplivajo na potek projekta in organizacijski pogoji (notranji in zunanji) za izvajanje projekta. Rezultat te faze je struktura celotnega projekta z ustreznimi podatki za njegovo sestavo.

Konkretne naloge v okviru sestave modela razporedimo v nekaj skupin:

- opredelitev aktivnosti,
- opredelitev izvajalcev aktivnosti,
- trajanje aktivnosti, časovni in materialni normativi porabe zmogljivosti in normativi porabe drugih resursov,
- medsebojna odvisnost in logično zaporedje izvajanja aktivnosti.

Opredeljevanje aktivnosti projekta je naloga, ki se različno izvaja v različnih fazah projekta.

Z vidika časovnega razvoja projekta in poznavanja njegovih lastnosti pri projektu nastopajo:

- faza načrtovanja projekta,
- faza projektiranja izvedbe projekta,
- faza izvajanja projekta in
- faza analiziranja projekta.

V fazi načrtovanja projekta podrobnosti projekta še niso definirane, pogosto je to faza priprave projekta, priprave so pogosto povezane z ocenjevanjem zmogljivosti, časovnega poteka in predvsem potrebnih finančnih sredstev. Pogosto je to faza, ko se: opredeljujejo razpisni pogoji za zbiranje ponudb izvajalcev projekta; pripravljajo ponudbe za pridobivanje razpisanih projektov, ocenjevanje učinkov raznih tehnoloških postopkov, organiziranje raznih koordinacijskih projektov. Ker je to faza, ko še sodelujoči niso prepričani, da bo prišlo do realizacije projekta, ne obstajajo potrebe po podrobni razčlenitvi postopkov izvajanja projekta, ampak so pomembne le bistvene aktivnosti v projektu, ki opredeljujejo časovni, materialni in ekonomski vidik izvajanja projekta.

Faza projektiranja izvedbe projekta nastopi, ko je verjetnost izvedbe projekta velika. V tej fazi se opredelijo izvedbene aktivnosti v okviru bistvenih aktivnostih projekta, rešujejo se različni problemi optimiranja projekta in iskanja rešitev, ki bodo zagotavljale optimalno izvedbo celotnega projekta. Podrobneje se razporedijo odgovornosti v projektu, kot tudi organizacij ski, motivacij ski in koordinacij ski pogoji za doseganje projektnega cilja.

V fazi izvajanja projekta potekajo naloge priprave izvajanja aktivnosti, spremljanja izvajanja aktivnosti in dopolnitve pri nastalih spremembah v poteku izvajanja projekta. Predvsem ta faza je najbolj odvisna od nepredvidenih vplivov na potek projekta. Uspešno odpravljanje motenj zmanjšuje njihov negativni vpliv na projekt in opravičuje dobro organizacijo in metodologijo projekta.

Faza analiziranja projekta se izvaja ob zaključku projekta. Podrobna analiza omogoča sprejemanje ukrepov, ki bodo ovrednotili celoten projekt in učinke organizacijskih, motivacijskih in koordinacijskih vplivov na potek projekta. V tej fazi spoznamo sposobnost uresničevanja projektnih ciljev in napovedovanja pogojev izvajanja projektov.

Analize sestavin, ciljev in pogojev izvedbe projekta se iz vsebinskih razlogov poglobljeno izvaja predvsem v prvih dveh fazah časovnega poteka projekta (fazi načrtovanja in fazi projektiranja izvedbe).

Pri opredelitvi strukture projekta mora biti za definirane aktivnosti določeno:

1. aktivnosti D_i (i= 1,2,. ..,I) ali skupine aktivnosti, ki jim lahko definiramo:
   - pogoje izvajanja (organizacijske, druge),
   - morebitne začetke ali zaključke izvajanja aktivnosti,
   - trenutek pričetka projekta in trenutek zaključka projekta;

2. izvajalci aktivnosti ter vse tiste prostorske, strojne ali kadrovske zmogljivosti, od katerih je odvisno trajanje aktivnosti, in čas, ko se ta aktivnost lahko izvaja;
3. trajanje aktivnosti t_i (i=1,2,...,I); to so časovne opredelitve izvajanja projekta, opredeljujejo potek izvajanja aktivnosti, če ni dodatnih pogojev izvajanja aktivnosti (čas med pričetkoma dveh aktivnosti, časovno vnaprej opredeljen termin zaključevanja ali izvajanja katere od aktivnosti ipd.);
4. časovni in materialni normativi; to so elementi o izrabi zmogljivosti, materiala in elementi kalkulacije projekta;
5. zaporedje izvajanja aktivnosti: določanje povezav med aktivnostmi, odvisnosti izvajanja ene aktivnosti glede na zaključevanje drugih aktivnosti; opredelitev predhodnih aktivnosti;
6. razlike med pričetki izvajanja aktivnosti (D_j) in predhodnimi aktivnostmi (D_i), ki jih označujemo z dij in dodatno določajo najmanjši čas, ki mora preteči od začetka izvajanja aktivnosti D_i do pričeta izvajanja aktivnosti D_j.

Rezultat faze analize projekta in opredelitve njegove strukture se prikaže s seznamom aktivnosti in opredeljenimi pogoji njihovega izvajanja.

Zbirni prikaz naredimo tabelarično, v njem pa predstavimo:

– aktivnosti z opisom in njihovim označevanjem,
– trajanje aktivnosti in zaporedje njihovega izvajanja,
– izvajalce aktivnosti (tiste, ki lahko omejujejo potek projekta),
– časovne omejitve (pogoji) izvedbe določenih aktivnosti,
– normative porabe zmogljivosti, stroške ali druge podatke o porabi zmogljivosti za izvajanje aktivnosti.

Preglednica 4.1: Seznama aktivnosti in pogoji izvajanja projekta

Oznaka aktivnosti	Opis aktivnosti	Trajanje	Predhodna aktivnost	Izvajalci	Časovne omejitve	Materialni in časovni normativi	Izdelki, dokumenti	Drugi pogoji
D_i		t_i	D_i					
1	2	3	4	5	6	7	8	9
…								
…								

Običajno se pri enostavnejših projektih da določiti aktivnosti na tak način, da je odnos med njimi opredeljen s predhodnimi aktivnostmi in njihovimi trajanji. Kadar nas zanima predvsem časovni potek izvajanja projekta, opuščamo v tabeli podatke za koloni (7) in (8).

Primer 4.1

V naslednji preglednici prikazujemo potek odpreme potniškega letala, ki je (zaradi preglednosti) poenostavljen; sestavljen je iz 10 aktivnosti.

Preglednica 4.2: Prikaz trajanja in zaporedja izvajanja aktivnosti pri odpremi potniškega letala.

Oznaka aktivnosti D_j	Opis aktivnosti	Trajanje (min.) t_j	Predhodna aktivnost D_i
D_1	Prijava potnikov	50	-
D_2	Sortiranje prtljage	40	-
D_3	Priprava letala	50	-
D_4	Pregled potnikov	15	D_1
D_5	Vodenje potnikov	10	D_3, D_4
D_6	Izdelava dokumentacije	15	D_1
D_7	Dostava dokumentov	5	D_6
D_8	Odvoz prtljage	10	D_2
D_9	Nakladanje prtljage	10	D_8
D_{10}	Zaključne operacije	5	D_5, D_7, D_9

4.2.3 Analiza optimalne izvedbe projekta

4.2.3.1 Vsebinska opredelitev faze

Za izvajanje te faze mora biti opredeljena vrsta aktivnosti prve faze. V primeru slabo izvedenih nalog prve faze ne moremo pričakovati dobrih rezultatov druge faze in celotnega vodenja projekta. V tej fazi se ugotavlja potek projekta in ugotavljajo pogoji izvajanja tako zamišljene izvedbe projekta. Prav tako so izredno pomembne simulacije možnih variant izvajanja projekta. Predvsem s tega vidika so učinki te faze lahko izjemni, ker omogočajo laboratorijsko ocenjevanje pričakovanih variant poteka obravnavanega projekta. Glede na rezultate in potrebe te faze se lahko pristopi k spreminjanju v prvi fazi določenih pogojev izvajanja kritičnih aktivnosti projekta.

Naloge, ki jih v tej fazi izvajamo, razporedimo v naslednje skupine:

- opredelitev vnaprej določenih rokov,
- načrtovanje časovnega izvajanja in kritične poti,
- načrtovanje stroškov,
- načrtovanje zasedenosti uporabljenih zmogljivosti projekta.

V okviru časovne analize projekta, na podatkih in opredelitvah, izdelanih v okviru analize strukture projekta, opredelimo odločilne dejavnike, ki vplivajo na potek izvajanja projekta. Ti se določajo z:

- opredelitvijo vnaprej določenih rokov kot rezultatov uporabljene metode za izvajanje časovne analize, s katero se določijo za vse aktivnosti in projekt časovni okviri njihovega izvajanja,
- načrtovanjem časovnega izvajanja in kritične poti: ugotovljena kritična pot in časovne rezerve so elementi, bistveni za analizo, načrtovanje in vodenje časovnega poteka projekta,

- načrtovanjem stroškov: pogosto vpliva na časovni potek in organizacijo izvajanja projekta,
- načrtovanjem zmogljivosti projektov: rezultat usklajevanja časovnega, finančnega in stroškovnega vidika izvajanja projekta.

Izvajanje nalog v okviru časovne analize projekta in ugotavljanja pogojev izvajanja projekta poteka v vseh fazah projekta, seveda z ustreznimi vsebinskimi posebnostmi:

- v fazi načrtovanja projekta je projekt opredeljen grobo, poudarek je na ugotavljanju: pogojev koordiniranega poteka projekta, ekonomskih učinkov, potrebnih materialnih ali tehnoloških sredstev,
- v fazi projektiranja izvedbe projekta: podrobnejše opredeljevanje aktivnosti in preskušanje variant, ki bi omogočale različne optimizacijske učinke izvajanja projekta,
- v fazi izvajanja projekta: spremljanje poteka projekta, dopolnjevanje in iskanje optimalnih rešitev za primere spremenjenih pogojev pri iz¬vajanju projekta, minimiziranje stroškov,
- v fazi analiziranja projekta: analiza realizacije načrtovane izvedbe projekta, v primerih odstopanja iskanje optimalnih ukrepov za odpravo motenj, ocenjevanje vzrokov za odmike od pričakovanih rezultatov projekta.

4.2.3.2 Metode za izvajanje časovne anal ize projekta

Učinkovitost metode mrežnega planiranja je v razvitih postopkih analize proučevanih projektov in predvsem v učinkovitih metodah grafičnega prikazovanja rezultatov analiz.

Grafični prikaz mrežnega plana projekta se imenuje mrežni diagram. Obstajajo tri vrste mrežnih diagramov:

- časovni mrežni diagrami,

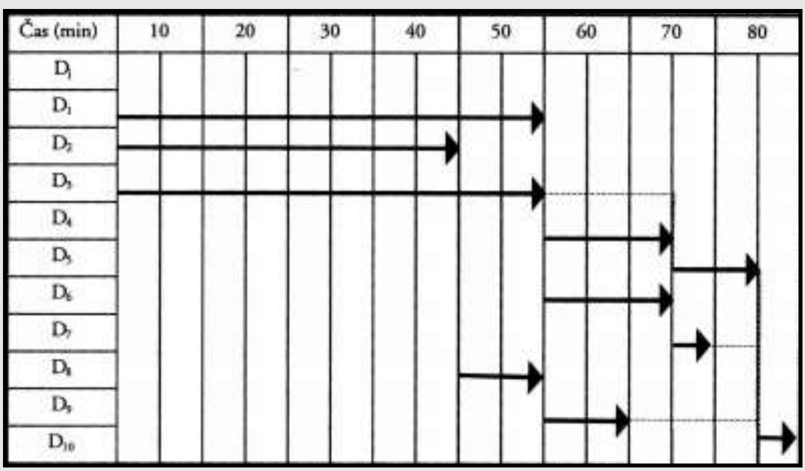
– dogodkovni mrežni diagrami in
– aktivnostni mrežni diagrami.

4.2.4 Časovni mrežni diagram

Aktivnostim priredimo povezave, dogodkom pa vozlišča. Dolžina povezave je prirejena trajanju aktivnosti. Odvisnost med aktivnostmi pri njihovem izvajanju predstavimo z navideznimi aktivnostmi.

Primer 4.2
Prikaz časovnega mrežnega diagrama za podatke v primeru 4.1

Diagram 4.1: Časovni mrežni diagram za odpremo potniškega letala.



4.2.5 Dogodkovni mrežni diagram

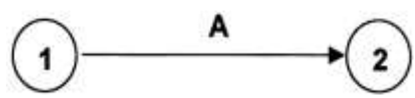
Ta oblika se uporablja, kadar je treba podrobneje analizirati medsebojno odvisnost izvajanja aktivnosti. Teoretična izhodišča za to metodo so razvita v sklopu teorije grafov. Grafi so grafični modeli, tvorijo jih vozlišča in povezave (veje, loki). Grafi so usmerjeni, če imajo povezave določena začetna in končna vozlišča) ali neusmerjeni, kadar je vsako od vozlišč povezave lahko začetno ali končno. Mrežni diagram je usmerjen graf. Ima eno začetno vozlišče (začetek) in eno končno vozlišče (zaključek).

Mrežni diagram zato sestavimo tako, da dogodkom priredimo vozlišča grafa, aktivnostim pa povezave. V tem diagramu dolžina povezave ne odraža dolžine trajanja aktivnosti. Odvisnost med dogodki prikazujemo z navideznimi povezavami. Časovni diagram je poseben primer dogodkovnega diagrama.

Pravila grafičnega prikazovanja

1. Povezave so usmerjene od leve proti desni.

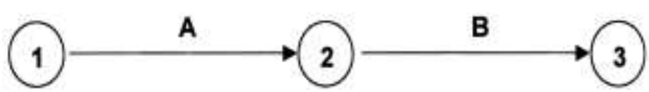
Slika 4.1:



2. Vsaka aktivnost se začenja in zaključuje z dogodkom - vozliščem.

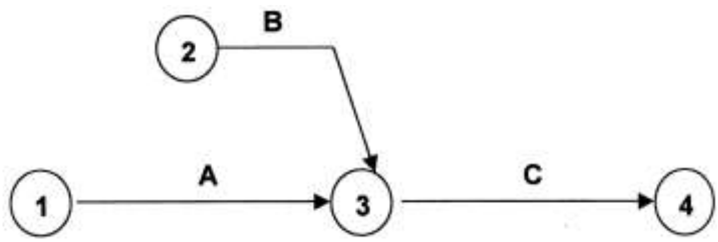
3. Če je izvajanje neke aktivnosti pogojeno z zaključkom neke druge aktivnosti, je končno vozlišče predhodne aktivnosti (predhodnikov) istočasno začetno vozlišče naslednje aktivnosti.

Slika 4.2:



4. Če začetek neke aktivnosti pogojuje zaključek predhodnih aktivnosti, se ujemajo končno vozlišče predhodnih aktivnosti (predhodnikov) z začetnim vozliščem naslednje aktivnosti (naslednika).

Slika 4.3:



5. Če začetek več aktivnosti pogojuje zaključek predhodne aktivnosti, se ujema končno vozlišče predhodne aktivnosti z začetnim vozliščem naslednikov.

6. Če imata dve ali več aktivnosti skupno začetno in končno vozlišče, se jih ne da identificirati, zato se vpeljejo navidezne aktivnosti.

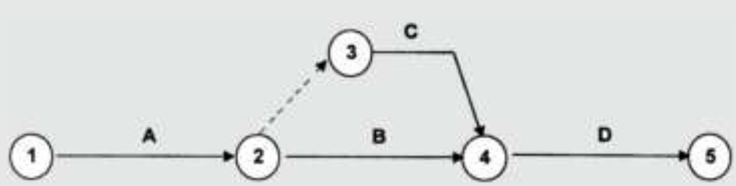
Primer 4.3

Primer uvajanja navidezne aktivnosti zaradi natančnejšega prikazovanja odnosov med aktivnostmi A, B, C in D. Odnosi med aktivnostmi so prikazani tabelarično:

Aktivnost	Vozlišča m-n	Predhodnik
A	1-2	-
B	2-4	A
C	3-4	A
D	4-5	B,C

Grafično prikažemo odnose med aktivnostmi z uporabo navidezne aktivnosti (2-3):

Slika 4.4:



7. Kadar preko enega vozlišča nastopa odvisnost z več vozlišči, se to prikaže z navideznimi aktivnostmi.

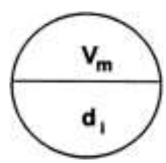
8. V mrežni plan se lahko vključi poljubno število navideznih aktivnosti, kar je pomembno z vidika razstavljanja mrežnih diagramov.

9. V primeru, da se začenja izvajanje aktivnosti z realizacijo določenega dela predhodne aktivnosti, se ta aktivnost deli na podaktivnosti.

10. V mrežnem planu se ne smejo pojavljati zanke.

11. V začetnih vozliščih aktivnosti D_i opisujemo dogodek V_m in njegov najzgodnejši trenutek d_i. Nad aktivnostmi vpisujemo kratek naziv aktivnosti, pod aktivnostmi pa njihovo trajanje.

Slika 4.5:



Časovna analiza v dogodkovnem mrežnem diagramu

Postopek določanja najzgodnejših trenutkov dogodkov V_j:

- začetnemu dogodku projekta priredimo vrednost d_0=0,
- za vozlišče V_j poiščemo vsa začetna vozlišča aktivnosti, za katere je V_j končno vozlišče,
- med temi vozlišči označimo z V_i tistega, pri katerem ima $d_i + t_i$ največjo vrednost.

To lahko zapišemo v obliki izraza:

$$d_j = \max_{i \in P_j}(d_i + t_i) \tag{4.1}$$

S P_j smo označili vozlišča za vsa začetna vozlišča tistih aktivnosti, za katere je vozlišče V_i končno vozlišče. Vrednost d_i za končni dogodek projekta je najkrajši čas trajanja projekta.

Primer 4.4

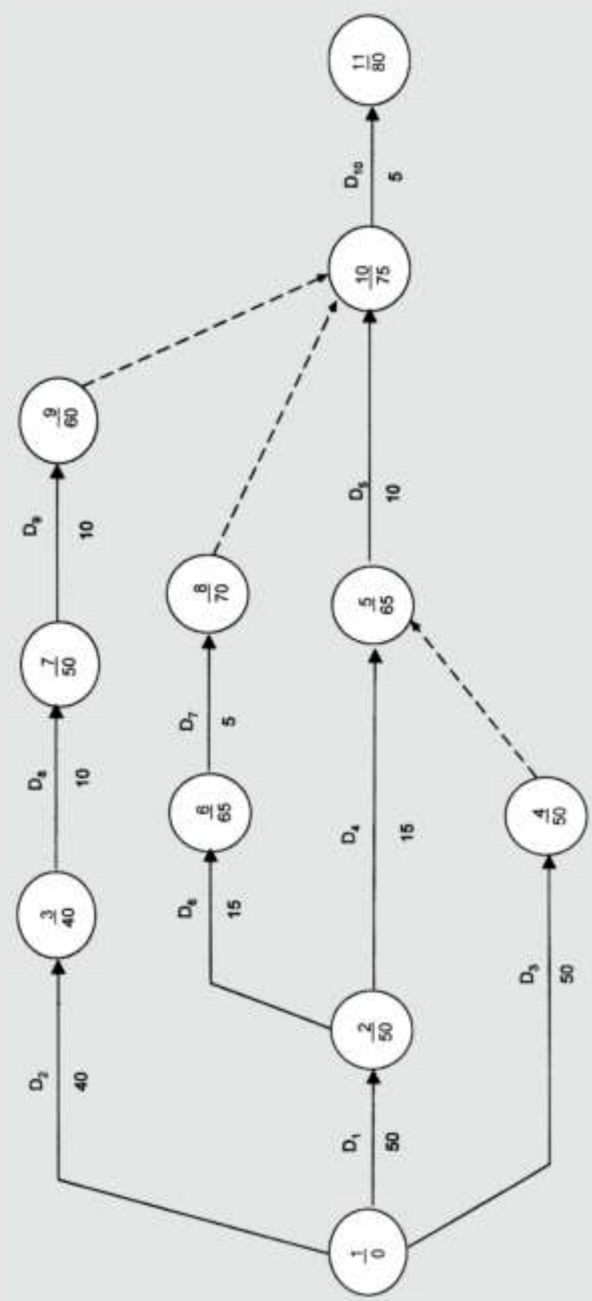
Za podatke v primeru 4.1, določimo:
- dogodkovni mrežni diagram,
- najkrajši čas izvedbe projekta,
- preglednico oznak dogodkov v dogodkovnem mrežnem diagramu.

Dogodkovni mrežni diagram je prikazan v diagramu 4.2. Vključene so tri navidezne aktivnosti. Dogodkovni mrežni diagram vsebuje 11 dogodkov. Najkrajši čas izvedbe projekta je 80 minut. Preglednico oznak dogodkov izdelamo tako, da dopolnimo preglednico 4.2 z oznakami dogodkov iz dogodkovnega mrežnega diagrama, kar je razvidno v preglednici 4.3. Pri označevanju dogodkov upoštevamo le, da oznaka končnega dogodka aktivnosti ne sme biti nižja od oznake začetnega dogodka.

Preglednica 4.3: Aktivnosti in dogodki mrežnega plana odpreme potniškega letala

Oznaka aktivnosti D_j	Dogodki		Opis aktivnosti	Trajanje (min.) t_j	Predhodna aktivnost D_i
	Začetni m	Končni n			
D_1	1	2	Prijava potnikov	50	-
D_2	1	3	Sortiranje prtljage	40	-
D_3	1	4	Priprava letala	50	-
D_4	2	5	Pregled potnikov	15	D_1
D_5	5	10	Vodenje potnikov	10	D_3, D_4
D_6	2	6	Izdelava dokumentacije	15	D_1
D_7	6	8	Dostava dokumentov	5	D_6
D_8	3	7	Odvoz prtljage	10	D_2
D_9	7	9	Nakladanje prtljage	10	D_8
D_{10}	10	11	Zaključne operacije	5	D_5, D_7, D_9

Diagram 4.2: Dogodkovni diagram za podatke v primeru 4.1.



4.2.6 Aktivnostni mrežni diagram

Aktivnostni mrežni diagram ima obliko, ki omogoča v zbirni obliki prikazovati največ podatkov. Njegova prednost je v enostavnem prikazovanju odvisnosti med aktivnostmi mrežnega programa.

Postopek sestavljanja aktivnostnega mrežnega diagrama:

– aktivnosti prikazujemo tabelarično - vozlišča grafičnega prikaza,
– odvisnosti med aktivnostmi prikažemo s premicami, ki se začenjajo v vozlišču predhodne aktivnosti in končajo v vozlišču odvisne aktivnosti,
– vrednosti povezav so minimalni časi (d_{ij}) med pričetki predhodne D_i in obravnavane aktivnosti D_j,
– trajanje aktivnosti D_j označimo s t_j,
– dodamo dogodek "začetek izvajanja projekta" in ga označimo s črko "S" in dogodek "konec izvajanja projekta", ki ga označimo s črko "F",
– vozlišča, ki predstavljajo aktivnosti, rišemo s pravokotniki, vozlišči, ki pripadata dogodkoma za začetek in konec projekta, pa rišemo s krogi.

Metode časovne analize

Metode časovne analize mrežnih planov je možno deliti v dve skupini:

– metode CPM ali metode kritične poti (CPM - Critical Path Method) in
– metode PERT ali metoda ocenjevanja in revizije programa (PERT - Program Evalution and Review Technique), kjer se aktivnosti prireja po tri vrednosti: realno, optimistično in pesimistično.

Mi bomo v nadaljevanju obravnavali metodo CPM - metodo kritične poti, kot posebno varianto metode PERT (s po eno vrednostjo za vsako aktivnost).

Določanje kritične poti v mrežnem planu - metoda CPM

Kritična pot je skupina aktivnosti, ki določajo najkrajši možni čas izvedbe projekta.

Osnovni časovni parametri se delijo v dve skupini:

- časovni trenutki - roki začetkov ali zaključkov aktivnosti,
- časovni intervali - trajanja aktivnosti in časovne rezerve.

Označujemo z:

Z_j - začetek j-te aktivnosti,

ZZ_j - najzgodnejši začetek j-te aktivnosti,

PZ_j - najpoznejši začetek j-te aktivnosti,

K_j - konec j-te aktivnosti,

ZK_j - najzgodnejši zaključek (konec) j-te aktivnosti,

PK_j - najpoznejši zaključek (konec) j-te aktivnosti,

T_f - rok zaključka (končnega dogodka) projekta,

t_j - trajanje j-te aktivnosti,

r_j - skupna časovna rezerva j-te aktivnosti.

$$ZZ_j = \max_{i \in P_j}\left(ZZ_i + t_i\right) \tag{4.2}$$

S P_j je označena množica predhodnikov aktivnosti j, ZZ_j so za aktivnosti, ki nimajo predhodnih aktivnosti enake 0.

Najzgodnejši zaključek ZK_j dobimo tako, da k najzgodnejšemu začetku ZZ_j prištejemo trajanje aktivnosti t_j:

$$ZK_j = ZZ_j + t_j \tag{4.3.}$$

Projekt je končan, ko so končane vse aktivnosti, zato je najzgodnejši zaključek projekta možen v trenutku T_f, ki ga računamo po obrazcu:

$$T_f = \max_j ZK_j = \max_j (ZZ_j + t_j) \tag{4.4}$$

Najpoznejši rok začetka j-te aktivnosti določimo za aktivnosti, ki imajo naslednike (niso zaključne aktivnosti proj ekta) po obrazcu:

$$PZ_j = \min_{k \in N_j} (PZ_k - t_j) \tag{4.5.}$$

Z N_j je označena množica naslednikov aktivnosti j.

Za zaključne (zadnje) aktivnosti projekta se PZ_j računa po postopku:

$PZ_j = T_f - t_j$

Najpoznejši zaključek PZ_j dobimo tako, da k najpoznejšemu začetku PZ_j prištejemo trajanje aktivnosti t_j:

$$PK_j = PZ_j + t_j. \tag{4.6}$$

Opomba: zaključki predhodnih aktivnosti so za pričetkom izbrane aktivnosti.

Skupna časovna rezerva j-te dejavnosti pove, za koliko smemo z začetkom izvajanja dejavnosti odlašati po njenem najzgodnejšem začetku, da odlašanje še ne bo povzročilo podaljšanja trajanja projekta .

Zato je:

$$r_j = PZ_j - ZZ_j = PK_j - ZK_j . \tag{4.7}$$

Dejavnost je kritična, če je njena skupna časovna rezerva enaka 0.

Vozlišča, ki so prirejena aktivnostim, pišemo v obliki, ki omogoča zapis vseh navedenih rezultatov časovne analize.

j	Opis dejavnosti in ostali podatki	
t_j	ZZ_j	ZK_j
r_j	PZ_j	PK_j

Primer 4.5

Za primer, podan v preglednici 4.2. Prikaz trajanja in zaporedja izvajanja aktivnosti pri odpremi potniškega letala, naredimo aktivnostni mrežni diagram in določimo:

- kritično pot,
- za aktivnosti najzgodnejše (najpoznejše) začetke izvajanja in časovne rezerve.

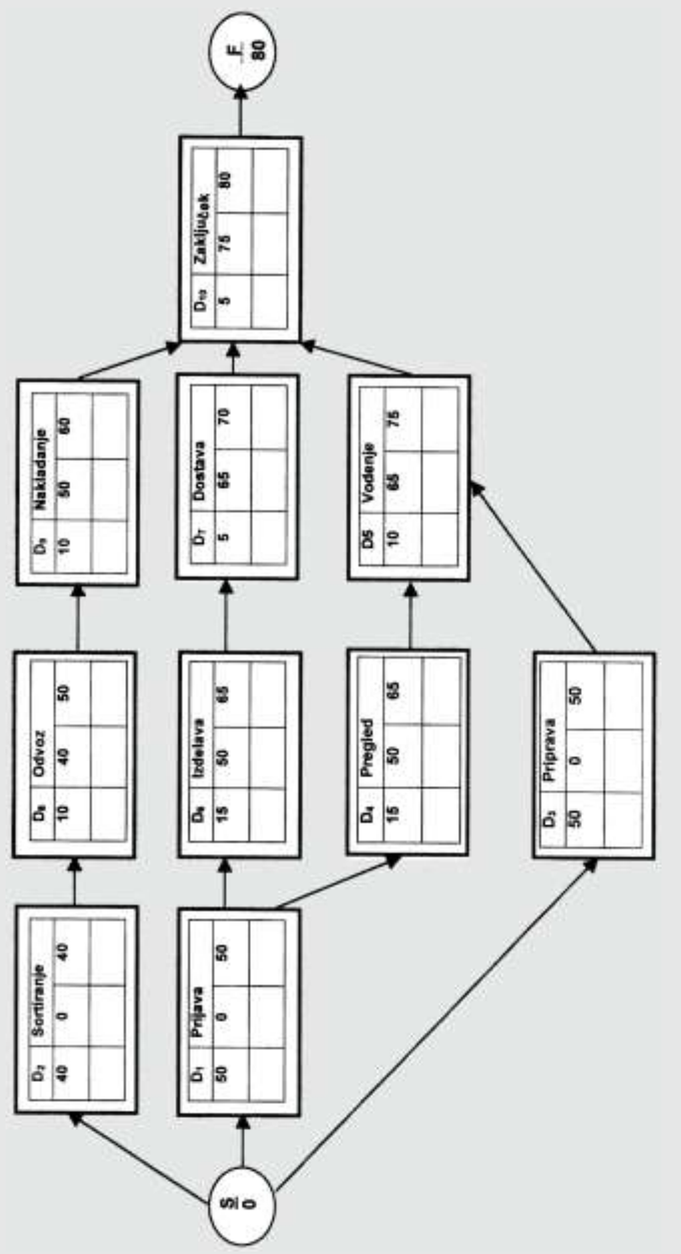
Postopek izvedemo v dveh fazah:

I.FAZA - določanje najzgodnejših začetkov (zaključkov) aktivnosti,

II.FAZA - določanje najpoznejših začetkov (zaključkov) aktivnosti.

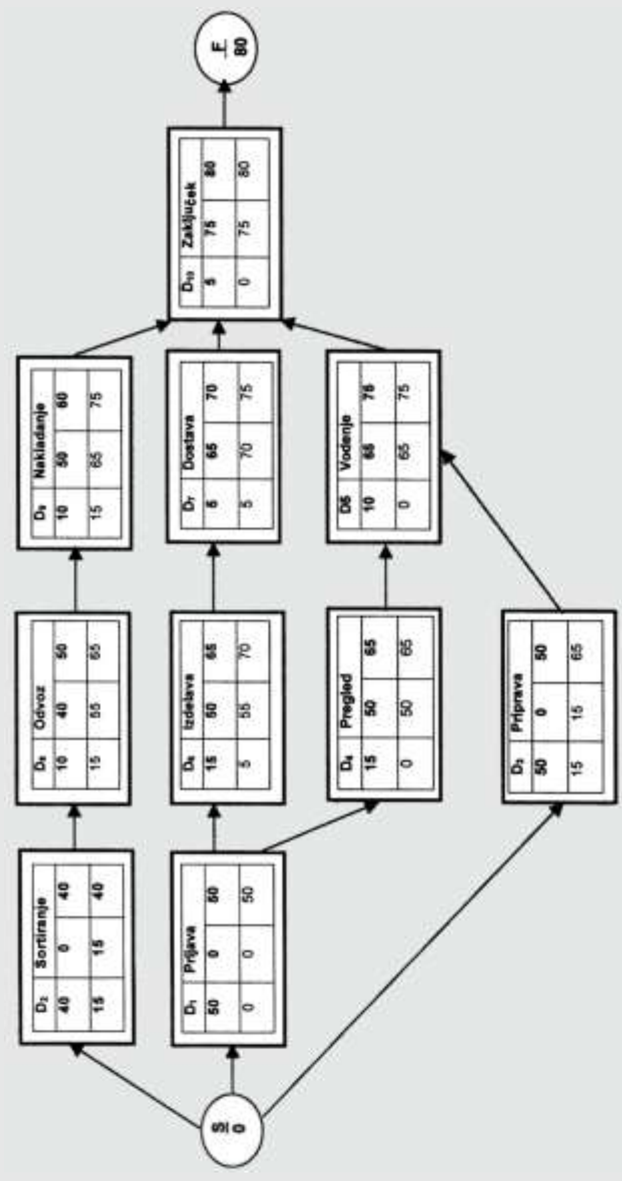
V diagramu 4.3. Dejavnostni mrežni diagram za podatke v primeru 4.1. - I.FAZA, so razvidni rezultati postopka določanja najzgodnejših začetkov izvajanja aktivnosti mrežnega diagrama. Uporabljeni so obrazci: (4.2), (4.3) in (4.4).

Diagram 4.3: Aktivnostni mrežni diagram za podatke v primeru 4.1 - I.FAZA



V diagramu 4.4 so razvidni rezultati postopka določanja najpoznejših zaključkov, začetkov in časovnih rezerv za izvajanje aktivnosti obravnavanega projekta. Uporabljeni so obrazci: (4.5), (4.6), (4.7).

Diagram 4.4: Aktivnostni mrežni diagram za podatke v primeru 4.1. - I.FAZA



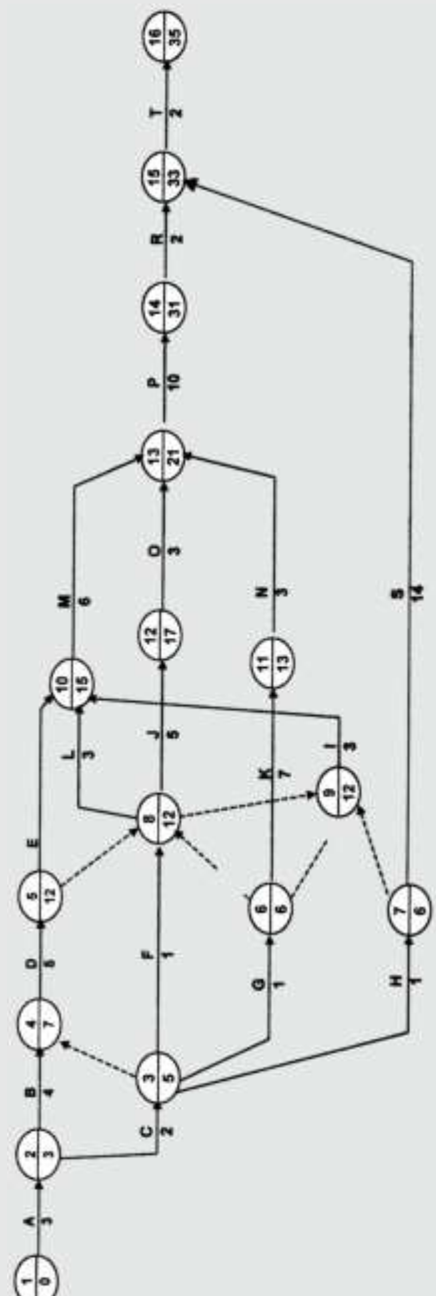
Primeri za utrjevanje

Primer 4.6

Za projekt - Preselitev gradbišča, je prikazan dogodkovni mrežni diagram. Opravite ostale analize projekta.

Oznaka	Opis aktivnosti	Trajanje (dni)	Predhodna aktivnost
A	Poučevanje naloge na novem gradbišču	3	-
B	Ugotavljanje potrebne opreme novega gradbišča	4	A
C	Ugotavljanje razpoložljive opreme na obstoječem gradbišču	2	A
D	Sestavljanje seznama nove opreme	5	B,C
E	Planiranje selitve	3	D
F	označevanje opreme za selitev	1	C
G	Označevanje opreme za popravilo	1	C
H	Označevanje opreme za vračilo v skladišče opreme	1	C
I	Demontiranje opreme	3	D,F,G,H
J	Nabava nove opreme	5	D,F,G
K	Popravilo opreme	7	G
L	Pakiranje opreme za selitev na novo gradbišče	3	D,F,G
M	Transport opreme na novo gradbišče	6	E,L,I
N	Transport popravljene opreme na gradbišče	3	K
O	Transport nove opreme na gradbišče	3	J
P	Montaža opreme	10	M,N,O
R	Pregled izvršene montaže	2	P
S	Pospravljanje stare lokacije, vračanje nepotreben opreme v skladišče	14	H
T	Zaključek dela na novi lokaciji	2	R,S

Diagram 4.5: Dogodkovni diagram za projekt Preselitev gradbišča

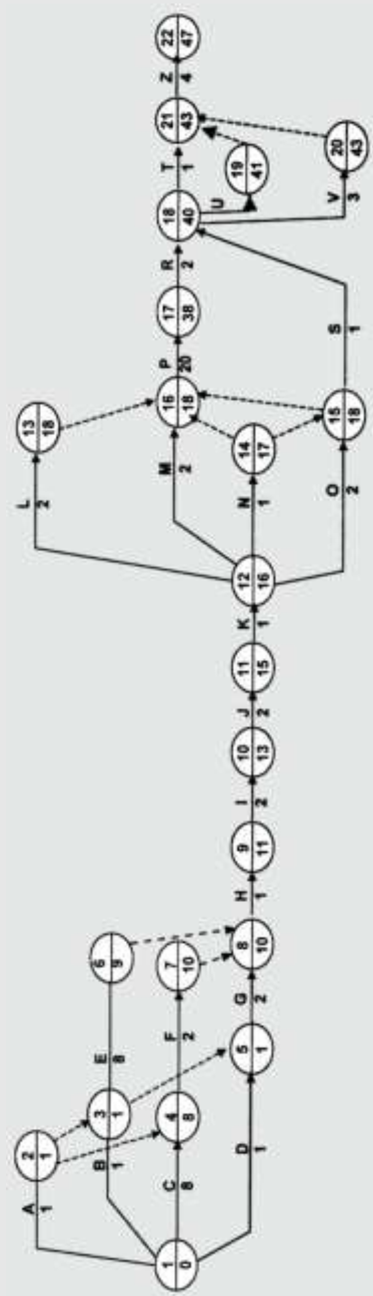


Primer 4.7

Za projekt – Izračun plač, je prikazan dogodkovni mrežni diagram. Opravite ostale analize projekta.

Oznaka D_i	Opis aktivnosti	Trajanje (ur)	Predhodna aktivnost
A	Zbiranje dokumentacije o prisotnosti na delu	1	-
B	Zbiranje proizvodnih stroškov	1	-
C	Zbiranje bolniških listov	8	-
D	Zbiranje nadurnih nalogov	1	-
E	Obdelava proizvodnih stroškov	8	A,B
F	Obdelava bolniških listov	2	A,C
G	Obdelava nadurnih nalogov	2	A,B,D
H	Poskusni obračun plač	1	E,F,G
I	Poskusni izpis	2	H
J	Kontrola poskusnega izpisa	2	I
K	Popravki in ponovni izračun	1	J
L	Izpis plačilnih kuvert	2	K
M	Izpis rekapitulacij	2	K
N	Izpis davka na izplačane plače	1	K
O	Izračun prispevkov in davkov po stopnjah	2	K
P	Priprava rekapitulacij	20	L,M,N,O
R	Vnos in izpis prenosnih nalogov za APP	2	P
S	Izdelava temeljnic	1	N,O
T	Prenos drugim uporabnikom	1	R,S
U	Arhiviranje	1	R,S
V	Priprava plačilnih kuvert za delitev	3	R,S
Z	Delitev	4	T,U,V

Diagram 4.6: Dogodkovni diagram za projekt Izračun plač

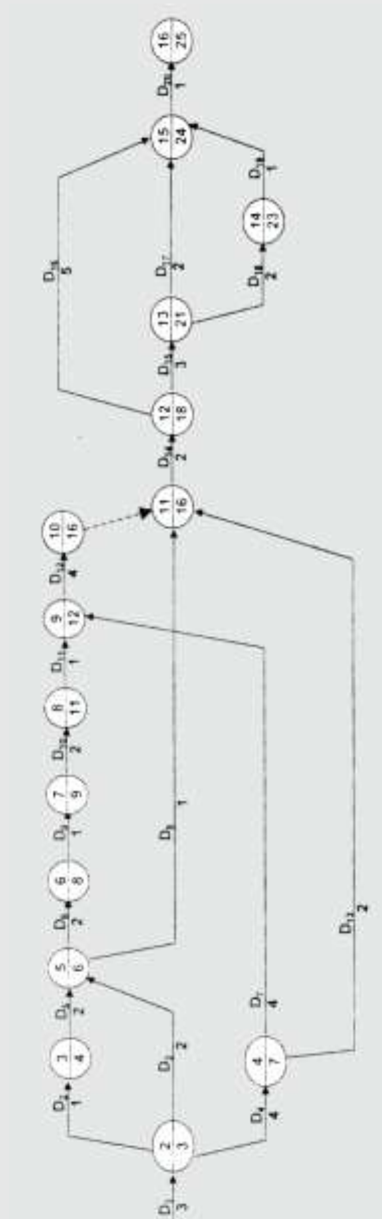


Primer 4.8

Za projekt – Turistično potovanje, je prikazan dogodkovni mrežni diagram. Opravite ostale analize projekta.

Oznaka D_i	Opis aktivnosti	Trajanje (ur)	Predhodna aktivnost D_i
D_1	Izdelava aranžmaja	3	-
D_2	Razpis aranžmaja	1	D_1
D_3	Priprava časovnic	2	D_1
D_4	Rezervacija hotela	4	D_1
D_5	Booking	2	D_2
D_6	Pošiljanje časovnic	2	D_3 ,D_5
D_7	Rezervacija let. kart	4	D_4
D_8	Določitev turističnega vodnika	1	D_3 ,D_5
D_9	Seznam potnikov	1	D_6
D_{10}	Preverjanje pravilnosti seznama	2	D_9
D_{11}	Priprava sedežnega reda	1	D_{10}
D_{12}	Izpis letalskih vozovnic	4	D7 ,D_{11}
D_{13}	Rooming lista	2	D_4
D_{14}	Priprava mape za vodiča	2	D_8, D_{12}, D_{13}
D_{15}	Izvedba aranžmaja	3	D_{14}
D_{16}	Dejavnosti in stroški po poslovnih enotah	5	D_{15}
D_{17}	Obračun vozovnic	2	D_{15}
D_{18}	Zbir in evidiranje stroškov (računi)	2	D_{15}
D_{19}	Plačilni pogoji, storitve	1	D_{18}
D_{20}	Pokalkulacija in izračun ostanka	1	D_{16}, D_{17}, D_{19}

Diagram 4.7: Dogodkovni diagram za projekt Turistično potovanje



4.3 Minimizacija trajanja projekta

Proučevanje možnosti minimizacije trajanja projekta vedno odpira vprašanja:

- ali obstajajo možnosti krajšanja trajanja projekta in
- kakšne bodo posledice - učinki krajšanja trajanja projekta.

Trajanje projekta lahko spremenimo, če opravimo spremembe na aktivnostih kritične poti. To so:

- organizacijske spremembe zaporedja izvajanja aktivnosti projekta ali
- skrajševanje trajanja aktivnosti na kritični poti.

Organizacijske spremembe trajanja projekta lahko zajemajo:

- spremembo celotnega koncepta izvajanja projekta,
- spreminjanje vrstnega reda izvajanja posameznih aktivnosti (na kritični poti) projekta,
- spreminjanje izvajalcev (vključevanje večjega števila zunanjih izvajalcev) projekta.

Skrajševanje trajanja aktivnosti na kritični poti lahko izvajamo le pri aktivnostih, kjer je tako krajšanje (iz tehnoloških pogojev, povezanosti projekta z drugimi projekti, ipd.) dopustno. Upoštevati moramo, da se s tem spremeninjajo optimalni pogoji izvajanja aktivnosti in projekta in da bodo nastopile posledice, ki so za načrtovani cilj projekta dovoljene, lahko pa so posledice krajšanja nedopustne. V primeru krajšanja aktivnosti na kritični poti lahko nastajajo nove kritične poti, ki uvajajo dodatne omejitve optimalne izvedbe projekta.

Predstavili bomo postopek skrajševanja trajanja projekta s pospeševanjem izvajanja aktivnosti na kritični poti. V postopku upoštevamo dejstvo, da se s krajšanjem trajanja aktivnosti povečujejo stroški njenega izvajanja. Zato imajo pri krajšanju trajanja prednost aktivnosti, pri katerih je povišanje stroškov na enoto skrajšanega trajanja minimalno. Kriterij določanja vrstnega reda krajšanja aktivnosti je zato koeficient povišanja stroškov za časovno enoto krajšanja trajanja aktivnosti. Za j-to aktivnost kriterij zapišemo v obliki:

$$\frac{S_{jm} - S_{jn}}{t_{jn} - t_{jm}} = \frac{\delta S_j}{\delta t_j} = k_j . \tag{4.8}$$

V obrazcu (4.8) imajo uporabljene oznake naslednji pomen:

S_{jm} - stroški pri minimalnem času izvajanja j-te aktivnosti - pospešen način izvajanja aktivnosti,

S_{jn} - stroški pri normalnem (optimalnem načinu) času izvajanja j-te aktivnosti, t_{jn}- trajanje j-te aktivnosti pri normalnih (optimalnih) pogojih izvedbe, t_{jm} - minimalen čas trajanja j-te aktivnosti,

k_j - koeficient povišanja stroškov za časovno enoto krajšanja trajanja j-te aktivnosti,

δS_j - povišanje stroškov izvajanja j-te aktivnosti zaradi izvedbe aktivnosti v minimalnem namesto v normalnem času,

δt_j - razlika med normalnim in minimalnim časom izvajanja j -te aktivnosti.

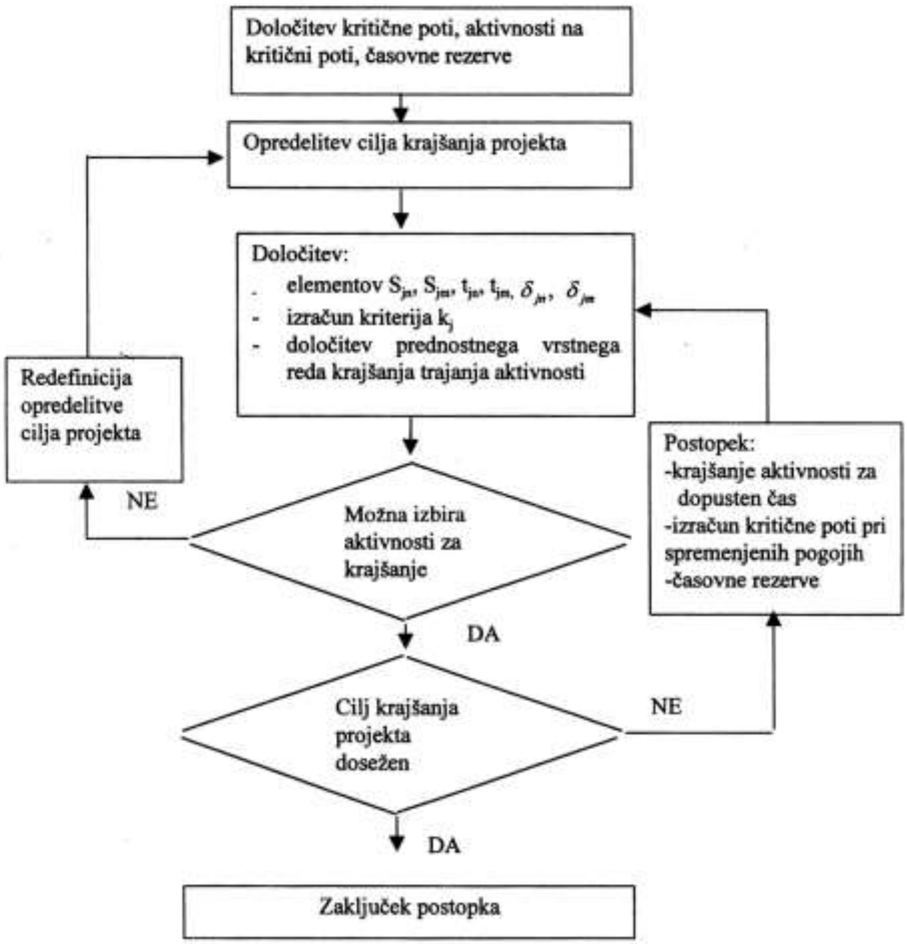
Postopek krajšanja trajanja projekta izvajamo v naslednjem zaporedju:

- določitev kritične poti, aktivnosti na kritični poti, časovne rezerve,
- opredelitev cilja krajšanja projekta - določitev željenega (dopustnega) trajanja projekta in stroškovnih omejitev projekta,
- ocena normalnega t_{jn} in minimalnega (pospešenega) t_{jm} trajanja izvedbe j-te aktivnosti projekta,

- ocena stroškov izvajanja aktivnosti pri normalnem izvajanju S_{jn} in pri pospešenem izvajanju (izvajanje v minimalnem času) S_{jm},
- določitev koeficientov k_j,
- krajšanje aktivnosti na kritični poti, za katero je k_j-min (upoštevamo omejitve aktivnosti, ki se lahko zaradi krajšanja obravnavane aktivnosti vključujejo v kritično pot) in izračun kritične poti pri spremenjenih pogojih,
- ocena rezultata krajšanja trajanja izbranih aktivnosti in ponovitev postopka v primeru, ko pogoji kritičnih poti in časovnih rezerv dopuščajo popravljanje dobljenega rezultata,
- redefinicija cilja krajšanja projekta (lahko tudi organizacijske spremembe izvajanja projekta) v primeru, ko možnosti časovnih rezerv ne dopuščajo željenega krajšanja izvajanja celotnega projekta.

Postopek je grafično predstavljen v Diagramu 4.8. Postopek krajšanja trajanja projekta

Diagram 4.8: Postopek krajšanja trajanja projekta



Primer 4.9

Projekt Posodobitev laboratorijske opreme

Podatki za projekt so prikazani v preglednici 4.8. Za izvedbo projekta imamo na razpolago 42 dni. Opravimo potrebno krajšanje projekta ob pogoju: povišanje stroškov zaradi načrtovanega krajšanja projekta naj bo minimalno.

Preglednica 4.8: Podatki za projekt Posodobitev laboratorijske opreme.

A	Odstranjevanje in prestavljanje opreme v prostoru	-	5	3	20	30
B	Priprava podlage za montiranje nove opreme v prostoru	A	8	8	14	14
C	Pleskanje podlage in sten	B	5	5	6	6
D	Pleskanje in obdelava sten	A	15	5	1	15
E	Prestavitev vodovodne napeljave	A	15	5	1	6
F	Priprava nosilcev za montažo nove opreme	C, D	15	10	35	55
G	Namestitev klimatskih naprav	F	5	5	15	15
H	Montaža nove opreme	C, D	8	5	17	29
I	Povezava nove opreme z obstoječo opremo	C, D	8	4	18	32
J	Montaža stavbnega pohištva	I	10	5	12	22
K	Zaključna opravila v prostoru	E, G, H, J	6	6	10	10

Za aktivnosti obravnavanega projekta izračunajmo koeficiente stroškov krajšanja k_j po postopku, določenem z obrazcem (4.8). Rezultati izračunov so podani v preglednici 4.9. Koeficienti k_j za projekt Posodobitev laboratorijske opreme. Iz preglednice vidimo, da je možno krajšati trajanje vseh tistih aktivnosti, pri katerih je $\delta_t \neq 0$, torej za krajšanje trajanja ne pridejo v poštev aktivnosti B, C, G in K. Najugodnejše z vidika povišanja stroškov bi bilo krajšanje trajanja aktivnosti E (k_E=0,5), najmanj ugodna je za krajšanje trajanja aktivnost A (k_A=5).

Preglednica 4.9: Koeficienti k_j za projekt- Posodobitev laboratorijske opreme.

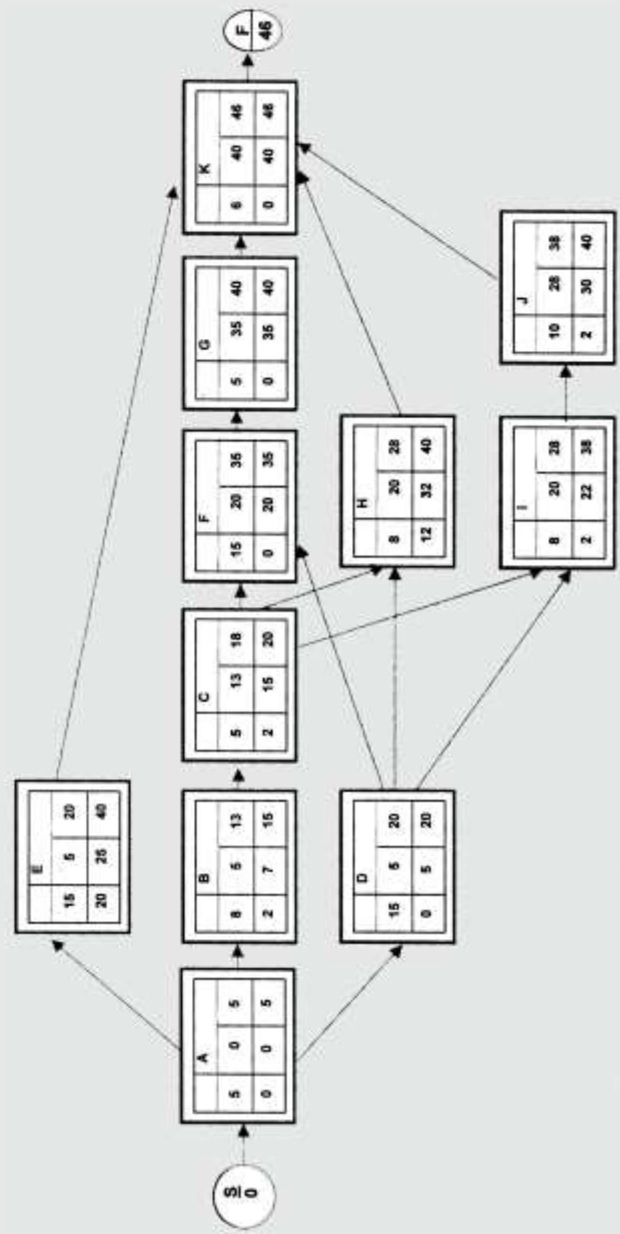
Aktivnost j	t_{jn} (dni)	t_{jm} (dni)	δt_j (dni)	S_{jn} (DE)	S_{jm} (DE)	δS_j (DE)	k_j (DE/dan)
A	5	3	2	20	30	10	+5
B	8	8	0	14	14	0	
C	5	5	0	6	6	0	
D	15	5	+10	1	15	14	+1,4
E	15	5	+10	1	6	5	+0,5
F	15	10	+5	35	55	20	+4
G	5	5	0	15	15	0	
H	8	5	+3	17	29	12	+4
I	8	4	+4	18	32	14	+3,5
J	10	5	+5	12	22	10	+2
K	6	6	0	10	10	0	

Za obravnavani primer določimo kritično pot in časovne rezerve. Kritično pot najprej določimo za normalno trajanje aktivnosti z dejavnostnim mrežnim diagramom. Rezultat analize je prikazan v diagramu 4.9.

V diagramu 4.9 razberemo kritično pot in časovne rezerve. Za aktivnosti kritične poti proučimo koeficiente stroškov krajšanja in pogoje za krajšanje (preglednica 4.10) in ugotovimo:

- trajanje projekta je pri normalnih pogojih 46 dni, zato je projekt treba skrajšati za 4 dni,
- kritično pot tvorijo aktivnosti A, D, F, G, K,
- najnižji strošek krajšanja je pri aktivnosti D, kjer znaša 1,4 DE/dan in
- dovoljeno krajšanje te aktivnosti je sicer 10 dni, vendar zaradi aktivnosti B ni smiselno krajšanje za več kot 2dni, ker že takrat nastopi B kot nova omejitev na kritični poti.

Diagram 4.9: Aktivnostni mrežni diagram za projekt "Posodobitev laboratorijske opreme"



Preglednica 4.10: Analiza pogojev krajšanja – I. postopek krajšanja projekta

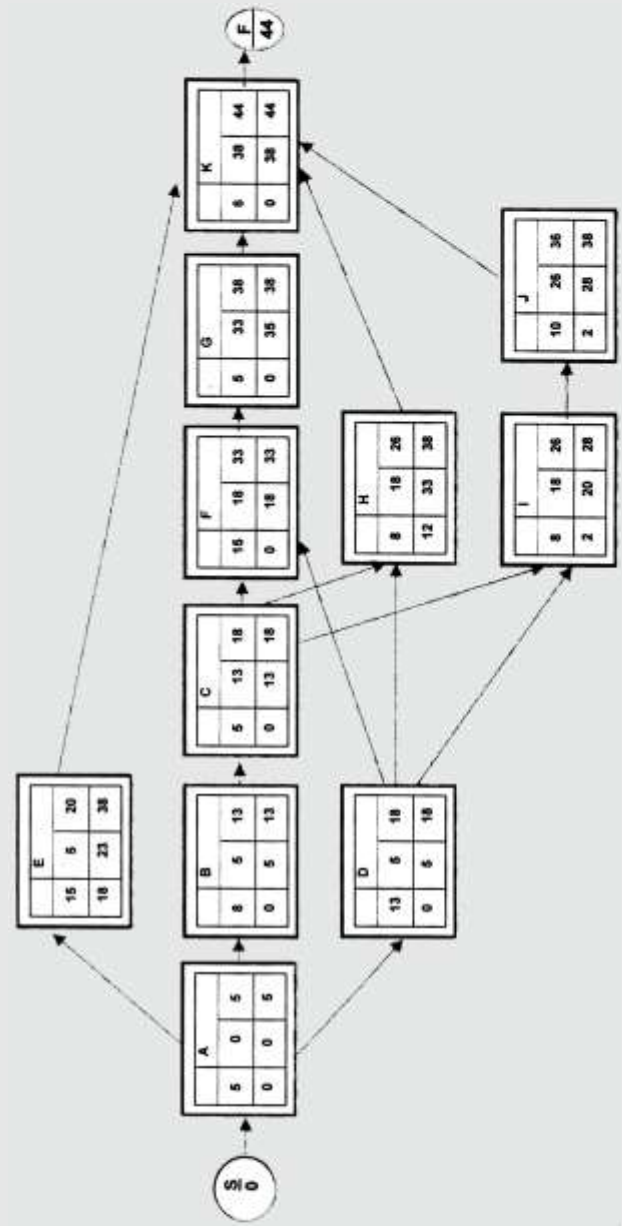
Aktivnost j	t_{jn} (dni)	t_{jm} (dni)	δt_j (dni)	S_{jn} (DE)	S_{jm} (DE)	δS_j (DE)	k_j (DE/dan)
A	5	3	2	20	30	10	+5
D	15	5	+10	1	15	14	+1,4
F	15	10	+5	35	55	20	+4
G	5	5	0	15	15	0	
K	6	6	0	10	10	0	

Po upoštevanem krajšanju aktivnosti D za 2 dni, naredimo časovno analizo projekta, ki jo prikazujemo v diagramu 4.10.

V diagramu 4.10 razberemo novo kritično pot in časovne rezerve. Za aktivnosti kritične poti proučimo koeficiente stroškov krajšanja in pogoje za krajšanje (preglednica 4.11) in ugotovimo:

- trajanje projekta je po I. postopku krajšanja 44 dni, projekt bo potrebno skrajšati še za 2 dni,
- kritično pot tvorijo aktivnosti A, B, C, D, F, G, K,
- najnižji strošek krajšanja je pri aktivnosti F, kjer znaša 4 DE/dan in
- dovoljeno krajšanje te aktivnosti je sicer 5 dni, vendar bo naš cilj dosežen že, če skrajšamo F za 2 dni, tega krajšanja ne omejuje katera od preostalih aktivnosti.

Diagram 4.10: Aktivnostni mrežni diagram za projekt "Posodobitev laboratorijske opreme"- po I. postopku krajšanja.



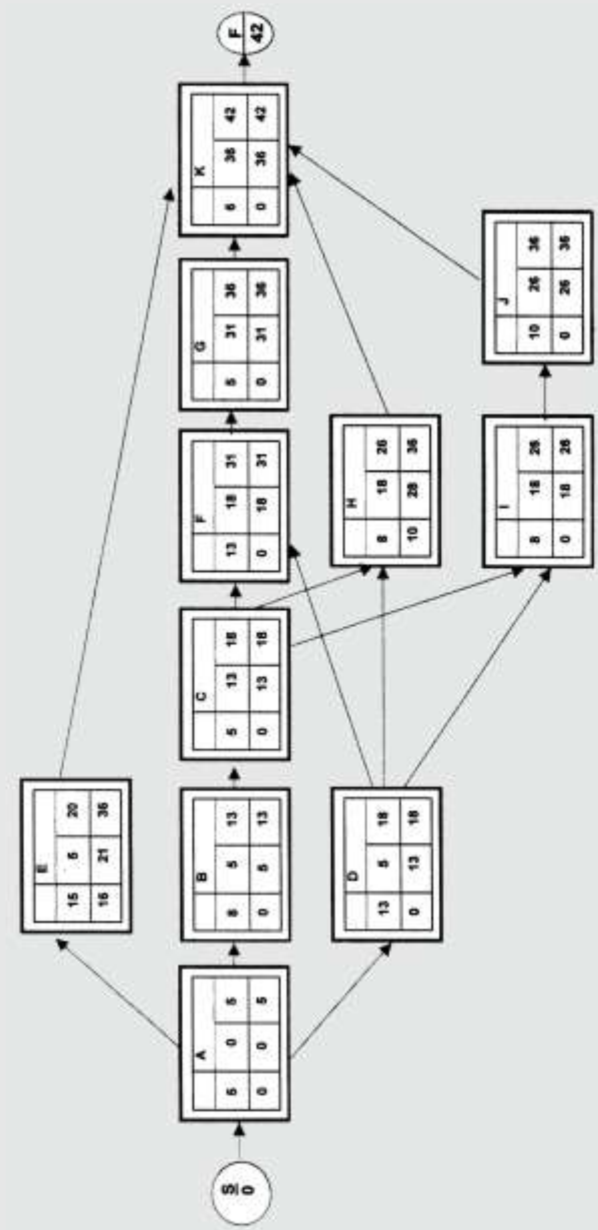
Preglednica 4.11: Analiza pogojev krajšanja – II. postopek krajšanja projekta

Aktivnost j	t_{jn} (dni)	t_{jm} (dni)	δt_j (dni)	S_{jn} (DE)	S_{jm} (DE)	δS_j (DE)	k_j (DE/dan)
A	5	3	2	20	30	10	5
B	8	8	0	14	14	0	
C	5	5	0	6	6	0	
D	15	5	10	1	15	14	1,4
F	15	10	5	35	55	20	4
G	5	5	0	15	15	0	
K	6	6	0	10	10	0	

V diagramu 4.11: razberemo novo kritično pot in časovne rezerve. Za izvajanja projekta ugotovimo:

- trajanje projekta je po II. postopku krajšanja 42 dni, trajanje projekta je usklajeno s cilji projekta,
- kritično pot tvorijo aktivnosti: A, B, C, D, F, G, I, J, K,
- pri normalnem izvajanju aktivnosti bi projekt trajal 46 dni, stroški projekta bi znašali 1332 DE, krajšanje projekta za 4 dni bi povišalo stroške projekta na najmanj 1342,8 DE, kar je prikazano v preglednici 4.12 Stroški projekta,
- zaradi pospešenega izvajanja so se stroški izvedbe projekta povišali za 10,8 DE.

Diagram 4.11: Aktivnostni mrežni diagram za projekt "Posodobitev laboratorijske opreme"- po I. postopku krajšanja



Preglednica 4.12: Stroški podjetja

Aktivnost	Opis aktivnosti	t_{jn} (dni)	t_{jm} *(dni)*	S_{jn} *(DE)*	S_{jm} *(DE)*	NORMALNO *(DE)*	I. POSTOPEK *(DE)*	II. POSTOPEK *(DE)*
A	Odstranjevanje in prestavljanje opreme v prostoru	5	3	20	30	100	100	100
B	Priprava podlage za montiranje nove opreme v prostoru	8	8	14	14	112	112	112
C	Pleskanje podlage in sten	5	5	6	6	30	30	30
D	Pleskanje in obdelava sten	15	5	1	15	15	17,8	17,5
E	Prestavitev vodovodne napeljave	15	5	1	6	15	15	15
F	Priprava nosilcev za montažo nove opreme	15	10	35	55	525	525	533
G	Namestitev klimatskih naprav	5	5	15	15	75	75	75
H	Montaža nove opreme	8	5	17	29	136	136	136
I	Povezava nove opreme z obstoječo opremo	8	4	18	32	144	144	144
J	Montaža stavbnega pohištva	10	5	12	22	120	120	120
K	Zaključna opravila v prostoru	6	6	10	10	60	60	60
SKUPAJ (DE)						**1332**	**1334,8**	**1342,8**
TRAJANJE SKUPAJ (dni)						**46**	**44**	**42**

4.4 Uporaba mrežnega plana v praksi

Mrežni plan ali načrt se v praksi uporablja kot sredstvo za definiranje, sintezo in analizo vseh dogodkov, aktivnosti-dejavnosti, ki se morajo zgoditi, da bo nek projekt (dejavnost, delo) končano pravočasno oziroma na najboljši možni način.

Uporaba mrežnega plana je odvisna predvsem od prepričanja uporabnikov, da jim pri odločanju pomaga, zato je izredno pomembno, kako podrobno (analitično) je mrežni plan pripravljen za posameznega uporabnika.

Podrobnost določanja dejavnosti - aktivnosti v projektu, ki jih z mrežnim planiranjem analiziramo, je zato odvisna od faze, v kateri se projekt načrtuje in komu je predstavitev namenjena.

V preglednici 4.13 je podan način prikaza projekta za uporabnike glede na upravljalsko raven uporabnikov:

- vodstvo podjetja ali ustanove potrebuje informacije v zgoščeni obliki, poudarjeno mora biti bistvo sporočila, zato se za ta namen prikazuje mrežni program v sintetični "grobi" obliki z bistvenimi skupinami dejavnosti - običajno so to projekti, ki so povezani s strateškimi odločitvami podjetja, tako obliko uporablja vodstvo podjetja v vseh fazah projekta,
- vodstvo projekta je odgovorno za uspešno izvedbo projekta, spremlja projekt v "grobi" varianti mrežnega plana, v primerih ko nastopijo nepredvidljive okoliščine, uporablja tudi podrobni mrežni plan (v fazah, ko je podrobna oblika mrežnega plana na razpolago)- problemi vodenja projekta se povezujejo s problemi taktičnih odločitev v podjetju,
- izvajalci uporabljajo najbolj podrobne oblike mrežnega plana, kot jih je možno sestavljati glede na faze projekta; njihov interes je pravočasno odkrivanje odmikov od načrtovane izvedbe projekta in iskanje optimalnih izhodov iz nepričakovanih pogojev pri izvajanju projekta - problemi se uvrščajo med probleme operativne ravni upravljanja, operativnega controllinga.

Preglednica 4.13: Oblike mrežnega plana za posamezne faze projekta po vrstah uporabnikov

UPRAVLJANJE RAVNI POSLOVNEGA SISTEMA	F NAČRTOVANJE	A PROJEKTIRANJE	Z IZVEDBA	E ANALIZA
STRATEŠKA RAVEN VODSTVO PODJETJA - USTANOVE	grobo	grobo	grobo	grobo
TAKTIČNA RAVEN VODSTVO PROJEKTA	grobo	grobo in podrobno	grobo in podrobno	grobo in podrobno
OPERATIVNA RAVEN IZVAJALCI	grobo	podrobno	podrobno	podrobno

Prednosti mrežnega planiranja

Mrežno planiranje je metoda, ki je med uporabniki priljubljena zaradi enostavnosti in preglednosti. Razširjeno uporabo te metode pripisujemo predvsem naslednjim prednostim, ki jih metoda mrežnega planiranja pri vodenju projektov omogoča:

- celovit pregled nad projektom,
- enoznačen prikaz odvijanja in medsebojne povezanosti delnih procesov ter posameznih aktivnosti projekta,
- terminske ocene trajanja, začetkov in zaključkov procesov ali aktivnosti projekta,
- ugotovitev kritične poti, najkrajšega možnega trajanja projekta,
- pravočasno odklanjanje motenj, ki lahko vplivajo na potek projekta,
- uporaba računalnika in zato obravnavanje različnih variant poteka projekta (simulacije različnih okoliščin in variant izvajanja projekta),
- natančna proučitev projekta iz različnih vidikov (časovni, ekonomski ipd.) pred njegovim pričetkom,

- določitev izvajalcev in s tem odgovornosti za izvajanje posameznih aktivnosti in podprojektov.

Področja uporabe mrežnega planiranja

Področja, kjer vse je bila ta metoda že uporabljena in kje bi se lahko uporabljala, je zaradi razširjenosti te metode težko našteti. Zato navajamo samo nekatera, kjer se je metoda najbolj uveljavila:

- ekonomsko - organizacij ski projekti: plani, proračuni, reorganizacije,
- vodenje individualne proizvodnje ali storitvene dejavnosti: gradbeništvo, strojegradnja, individualna proizvodnja, raziskovalna dejavnost, interdisciplinarni projekti, ipd.
- enkratni projekti: investicije, vzdrževanje, rekonstrukcije, prireditve, začetki obratovanja ali ukinjanje dejavnosti (rudniki, elektrarne ipd.),
- vodenje projektov razvoja dobrin: razvijanje novih proizvodov ali storitev, uvajanje novih proizvodov ali storitev, snemanje filma, priprava gledališke predstave, ipd.

Uporaba metode mrežnega planiranja se povečuje zaradi razširjene primerne računalniške programske opreme, ki deluje na osebnih računalnikih običajnih zmogljivosti.

Uporabniki metode mrežnega planiranja se delijo v dve skupini:

- uporabniki, ki so dobri poznavalci metode in načina njene aplikacije, ki uvajajo metodo zaradi uspešnejšega vodenja projekta,
- uporabniki, ki poznajo in razumejo rezultate metode (pasivno poznavanje metode) in jih znajo upoštevati pri sodelovanju v projektu.

Obe skupini lahko koristno uporabljata učinke metode mrežnega planiranja in s tem povečujejo učinkovitost vodenja projektov.

Iz navedenih razlogov opažamo stalno naraščanje števila uporabnikov in priljubljenost metode mrežnega planiranja.

V tem poglavju ste spoznali naslednje pojme:

- **definicijo in sestavine projekta,**
- **oblikovanje modela mrežnega plana kot metode vodenja projekta,**
- **časovno analizo projekta, kritično pot, analize drugih pogojev izvajanja projekta,**
- **smisel računalniških simulacij za informacijske potrebe funkcije controllinga projekta,**
- **osnovna področja uporabe teorije projektnega vodenja.**

Literatura in viri

Artenjak, J.: Poslovna statistika. Maribor: Ekonomsko poslovna fakulteta, 1997.

Bastič, M.: Mrežno planiranje in Super project. Maribor: Ekonomsko poslovna fakulteta, 1991.

Blejec, M.: Statistične metode za ekonomiste. Ljubljana: Ekonomska fakulteta Borisa Kidriča, 1976.

Blejec, M.: Uvod v statistiko. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 1990.

Blejec, M.: Statistične metode v gozdarstvu in lesarstvu. Ljubljana: BTF, 1969.

Čibej, J. A.: Matematika za poslovneže, 1. del. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 2000.

Čibej, J. A.: Matematika za poslovneže, 2. del. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 2000.

Čibej, J. A.: Matematika za računovodje in finančnike, druga izdaja. Ljubljana: Zveza računovodij, finančnikov in revizorjev Slovenije, 1996.

Devjak, S.: Kvantitativne metode za podporo upravljanju. Ljubljana: Visoka upravna šola, 1999.

Devjak, S.: Matematične metode v managementu, statistika. Koper: Visoka šola za management v Kopru, 1997.

Douglas, D., Clark, J.: Quantitative methods. New York: Barron's educational series, inc., 1988.

Indihar, S., Kavkler, I., Mastinšek, M.: Matematika za ekonomiste, 1. del. Maribor: Ekonomsko poslovna fakulteta, 1997.

Košmelj, B.: Statistične metode, 2. del. Ljubljana: Višja upravna šola Ljubljana, 1989.

Košmelj, B.: Statistika 2, 1 .del. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 1993.

Lucey, T.: Quantitative Techniques, 5th Edition. London: Letts Educational, 1996.

Meško, I.: Metode optimiranja, 1. del. Maribor: Visoka Ekonomsko-komercialna šola, 1989.

Meško, I.: Metode optimiranja, 2. del. Maribor: Visoka Ekonomsko-komercialna šola, 1989.

Ossadnik: Controlling. München, Wien, Ossadnik, 1998.

Rant, M., Jeraj, M., Ljubič, T.: Vodenje projektov. Radovljica: POIS, 1995.

Rupnik, V.: Oris operacijskih raziskav. Kranj: Moderna organizacija, 1974.

Seljak, J.: Statistika v javni upravi. Ljubljana: Visoka upravna šola, 2000.

Turk, I.: Podatki in informacije v poslovnem sistemu. Kranj: Moderna organizacija, 1979.

Usenik, J.: Matematične metode v managementu, poslovni račun. Koper: Visoka šola za management v Kopru, 1997.

Vadnal, A.: Uvod v Matematiko za ekonomiste, druga izdaja. Ljubljana: Državna založba Slovenije, 1974.

Dodatek

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998

Stvarno kazalo

A

B

C

Č

D

E

F

G

H

I

K

L

M

N