Priporočeno predznanje iz srednješolske matematike

Priročnik za študente FGG

Mojca Premuš

FGG
UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Priporočeno predznanje iz srednješolske MATEMATIKE

Priročnik za študente FGG

Mojca Premuš

Ljubljana, 2024

Kazalo

Kazalo preglednic in slik

Kazalo animacij

Predgovor

STEM bo vedno z nami. Nekatere stvari bodo izginile iz javnosti in odšle, vendar bodo vedno obstajale znanost, inženirstvo in tehnologija. In vedno, vedno bo obstajala matematika.

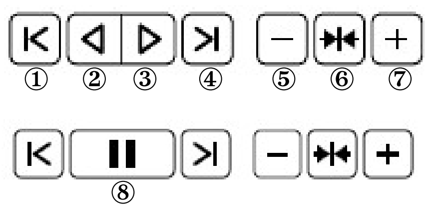
Katherine Johnson, ameriška matematičarka

Kratica STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) združuje področja znanosti, tehnologije, inženirstva in matematike. V poučevanju skozi področja, ki jih pokriva STEM, študenti razvijajo ključne sposobnosti, kot so reševanje problemov, ustvarjalnost in kritično razmišljanje. Osnova za vse te znanosti in veščine je vsekakor matematika. V citatu omenjena ameriška matematičarka je odigrala ključno vlogo pri misijah, ki so jih izvajali pri NASI (ameriška vesoljska agencija). S svojimi ročnimi izračuni in pozneje kot članica ekipe, ki je uvajala uporabo računalnikov pri teh izračunih, je dnevno spoznavala uporabo višje matematike pri reševanju problemov.

Matematika je na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo močno prisotna pri večini strokovnih predmetov, zato naši študenti potrebujejo dobre matematične osnove. Študenti vseh smeri imajo zato na predmetniku prvih letnikov tudi obsežne matematične predmete. Vendar pa je brez dobrih osnov srednješolske matematike težko graditi kompleksnejše matematične pojme in kontekste. Zato smo na katedri za matematiko in fiziko pripravili veliko učnega materiala ter e-učilnico, ki so osredotočeni na obnovitev znanj, ki so jih študenti usvojili pri pouku matematike v srednjih šolah. Vsako leto za bodoče študente pripravimo t.i. *pripravljalni tečaj*, na katerem en teden pred začetkom pouka na fakulteti ponovimo pomembne teme srednješolske matematike. Za potrebe tega tečaja je nastala najprej skripta (ki jo je spisal dr. Mitja Lakner), naknadno pa še priročnik, ki je bil izdan v svoji prvi različici leta 2021. Sedaj je pred vami prenovljena inačica tega priročnika. Poleg vsebine, ki jo zajema že prejšnja izdaja, nova izdaja vsebuje še dodatne snovi. Največja pridobitev pa so gotovo animacije, s katerimi je obogatena razlaga raznih matematičnih pojmov in postopkov. V tej knjigi boste našli jasno in sistematično razlago matematičnih konceptov, ki ste jih spoznali v srednji šoli. Naš cilj je, da vam pomagamo utrditi te osnove, da boste lahko samozavestno stopili naprej in se soočili z izzivi, ki jih prinaša študij na naši fakulteti.
Priročnik je zasnovan za uporabo v svoji elektronski obliki in ni namenjen tiskanju. Seveda tiskanje ni prepovedano, vendar pa je uporabna vrednost priročnika zagotovo večja, če ga uporabljate na svojih računalnikih, tablicah ali celo mobilnih napravah. Poleg animacij, ki seveda ne delujejo v tiskani obliki, je prednost elektronske oblike izjemno enostavno krmiljenje po priročniku. V kazalu so namreč aktivne hiperpovezave, s katerimi se v trenutku premaknete na tisto stran v priročniku, ki vas trenutno zanima. Na straneh s tekstom najdete tudi zelo priročno povezavo, ki vas vedno, z enim samim klikom, prestavi nazaj na kazalo. Prav take priročne hiperpovezave najdete tudi na

kazalu slik in preglednic ter na kazalu animacij.

Animacije
V tej izdaji priročnika sem ustvarila prej omenjene animacije, ki pomagajo študentom bolje razumeti razlage raznih matematičnih pojmov in postopkov. Animacije so zasnovane tako, da vizualno prikažejo kompleksne matematične koncepte ali zapletene postopke, s čim olajšajo njihovo razumevanje. Upam, da bodo te animacije pripomogle k boljši učni izkušnji in poglobljenemu razumevanju snovi.
Animacije v času izdaje tega priročnika (oktober 2024) delujejo le tako, da shranite datoteko (s končnico .pdf) tega priročnika na svoj računalnik. Če datoteko odprete v programu Adobe Acrobat Reader, boste lahko predvajali posamezne animacije, jih ustavili na željenem mestu ali pa povečali ali zmanjšali hitrost prikaza animacije. Trenutno animacije ne delujejo, če jih odprete v spletnem brskljalniku, vendar se to lahko v prihodnosti še spremeni.
Vsaka animacija je opreljena z krmilno vrstico, v kateri lahko nadzorujete aktivnosti animacije. Na sliki 1 so razloženi vsi elementi krmilne vrstice.



Slika 1: V krmilni vrstici lahko uporabimo gumb ①, da se vrnemo na začetek animacije. Z gumbom ② se bo animacija začela predvajati, ampak se bo predvajala v obratni smeri. Z gumbom ③ se bo animacija začela predvajati (v normalni smeri). Z gumbom ⑤ upočasnimo hitrost animacije, z gumbom ⑥ povrnemo hitrost na tisto, ki jo je določila avtorica, z gumbom ⑦ pa povečamo hitrost predvajanja animacije. Ko animacija teče, gumba ② in ③ nadomesti gumb ⑧, s katerim lahko animacijo začasno ustavimo. Ko animacijo ustavimo, se ponovno pojavila gumba ② in ③.

Na kazalo

1 Računanje z ulomki in potencami, razstavljanje izrazov

Dogovor: Simboli, ki jih bomo uporabljali za označevanje množic števil:

- *množica naravnih števil:* števila s katerimi štejemo, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- *množica celih števil:* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- *množica racionalnih števil:* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$;
- *množica realnih števil:* $\mathbb{R}$;
- *množica nenegativnih realnih števil:* $\mathbb{R}_0^+$;
- *množica pozitivnih realnih števil:* $\mathbb{R}^+$.

Opomba: Za zgoraj omenjene množice števil velja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$.

1.1 Računanje z realnimi števili

Osnovni računski operaciji v množici realnih števil sta **seštevanje** in **množenje**. Pravimo, da sta ti dve operaciji notranji za množico realnih števil, saj sta vsota in produkt dveh realnih števil prav tako realni števili.

Lastnosti: Za števila a, b, $c \in \mathbb{R}$ velja:

- $a + b = b + a$, (zakon komutativnosti seštevanja)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, (zakon asociativnosti seštevanja)
- $a + 0 = a$, (obstoj nevtralnega elementa za seštevanje)
- $a \cdot b = b \cdot a$, (zakon komutativnosti množenja)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, (zakon asociativnosti množenja)
- $a \cdot 1 = a$, (obstoj nevtralnega elementa za množenje)
- $(a + b)c = ac + bc$. (distributivnostni zakon)

Dogovor: V produktu dveh števil množenje pišemo

$$2 \cdot 3,$$

v produktu dveh abstraktnih števil a in b pa pišemo

$$a \cdot b = ab\,.$$

Na kazalo

Opomba: Za realno število a velja $a \cdot 0 = 0$. Še več, če za realni števili a in b velja $ab = 0$, potem mora veljati $a = 0$ ali $b = 0$.

Definicija: Rečemo, da število $b \in \mathbb{Z}$ **deli** neničelno število $a \in \mathbb{Z}$ natanko tedaj, ko obstaja $c \in \mathbb{Z}$, da velja $a = bc$. Rečemo tudi, da je a **deljivo** z b.
Število a imenujemo **večkratnik** števila b, število b pa je **delitelj** števila a. Če velja $a = bc$ in je $b, c \neq \pm 1$, potem rečemo, da je b **pravi delitelj** števila a, število a pa je **netrivialni večkratnik** števila b.
Če je celo število deljivo z 2, ga imenujemo **sodo**, če ni, pa ga imenujemo **liho**.

Dogovor: Če število b deli število a to zapišemo

$$b|a\,.$$

Definicija: Število $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$, imenujemo **praštevilo** natanko tedaj, ko je deljivo le samo s seboj in z 1.

Opomba: Formula za računanje praštevil ne obstaja. Praktičen pripomoček za iskanje manjših praštevil pa je npr. **Eratostenovo sito**. Eratostenovo sito je algoritem, kjer v preglednici zaporednih naravnih števil črtamo netrivialne večkratnike neprečrtanih števil v preglednici, začenši z 2. Števila, ki ostanejo neprečrtana so praštevila. Eratostenov algoritem je predstavljen v animaciji 1.

Definicija: **Prafaktorji** naravnega števila a so vsa praštevila, ki število a delijo. **Razcep števila a na prafaktorje** je zapis $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, kjer so p_i, $i \in \{1, 2, \ldots k\}$, prafaktorji števila a in n_i, $i \in 1, 2, \ldots, k$ naravna števila.

Primer: Razcep na prafaktorje lahko naredimo tako, da dano število delimo s praštevili, začenši[1] z 2. Poglejmo na primer razcep števila 504.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7

Razcep na prafaktorje: $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

1.2 Računanje s potencami (z naravnimi eksponenti)

Definicija: Naj bosta $a \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$, potem definiramo n-to potenco števila a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - krat}}.$$

[1]V resnici je popolnoma vseeno s katerim praštevilom začnemo.

Eratostenovo sito

1. korak: Števila od 2 . . . 100

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

Animacija 1: Z Eratostenovim sitom poiščemo praštevila med prvimi 100 naravnimi števili. Uporabite navigacijsko vrstico, s katero poženete animacijo in uravnavate hitrost. Animacija je prirejena po [3].

V potenci a^n imenujemo število a **osnova**, število n pa **eksponent**.

Dogovor: Pišemo
$$a^1 = a.$$

Lastnosti: Za $a, b \in \mathbb{R}$ in $m, n \in \mathbb{N}$ velja:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,
- $(ab)^n = a^n b^n$.

Formule: Za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja:

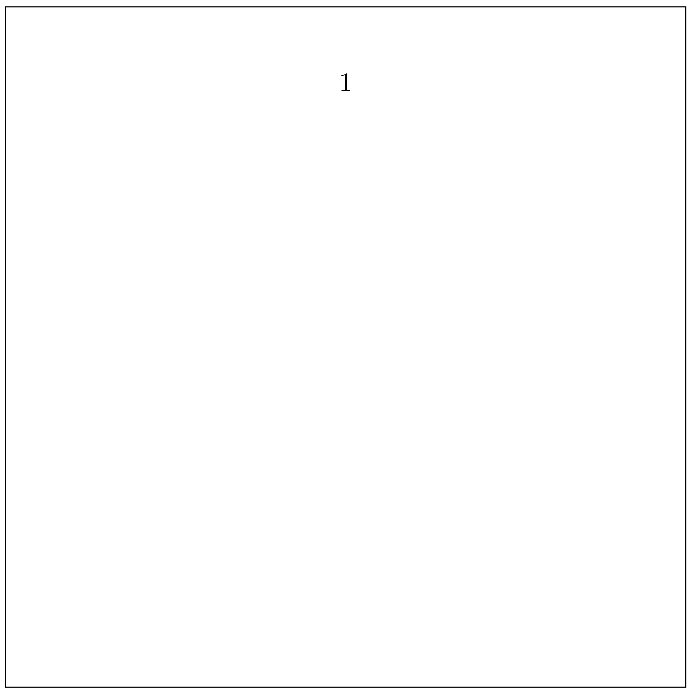
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, (kvadrat dvočlenika)
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, (kub dvočlenika)
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, (razlika kvadratov)
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, (razlika kubov)

Na kazalo

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, (vsota kubov)
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. (razlika potenc)

Definicija: **Pascalov trikotnik** je skupina števil, urejena v trikotno shemo. V prvi vrstici je zgolj ena enica, v drugi vrstici poševno levo in poševno desno pod enico iz prve vrstice sta dve enici. V vsaki naslednji vrstici sta skrajno levo in skrajno desno enici, ostala števila pa dobimo tako, da seštejemo števili, ki sta poševno levo in poševno desno nad iskanim številom.

Pascalov trikotnik



Animacija 2: Algoritem, s katerim ustvarimo Pascalov trikotnik. Uporabite navigacijsko vrstico s katero poženete animacijo in uravnavate hitrost.

Binomski izrek: Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ in poljuben $n \in \mathbb{N}$, velja

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

kjer vrednost t.i. **binomskega simbola** $\binom{n}{k}$ $(k \in \mathbb{N} \cup 0,\ n \geq k)$ po vrstnem redu odčitamo iz n-te vrstice Pascalovega trikotnika.

Opomba: Binomski izrek za $n = 1$ razumemo kot $(a+b)^1 = a + b$, za $n = 2$ kot $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (kvadrat dvočlenika) za $n = 3$ pa kot $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (kub dvočlenika).

Na kazalo

Vrednost binomskega simbola $\binom{n}{k}$ (za $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$) lahko izračunamo tudi s pomočjo formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, kjer je $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ in $0! = 1$.

1.3 Računanje z racionalnimi števili

Definicija: Racionalna števila so števila, ki jih lahko zapišemo v obliki ulomka $\frac{a}{b}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{Z}$ in $b \neq 0$.
Število a imenujemo **števec**, število b pa **imenovalec**[2] ulomka $\frac{a}{b}$.

Opomba: Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ $(b, d \neq 0)$ predstavljata isto racionalno število natanko tedaj, ko velja $ad = bc$.

Lastnosti: (v vseh formulah, ki vsebujejo ulomke, je število v imenovalcu ulomka različno od 0)

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$, (seštevanje ulomkov)
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, (množenje ulomkov)
- $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, (razširjanje oz. krajšanje ulomka)
- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. (deljenje ulomkov)

Opomba: Naštete lastnosti veljajo tudi v primeru, ko so števila v števcu in imenovalcu poljubna realna števila (za število v imenovalcu mora seveda veljati še neničelnost).

1.4 Računanje s potencami (z racionalnimi eksponenti)

Definicija: Za realni števili $a, b \geq 0$ in naravni števili m, n definiramo

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, če je $a \neq 0$,
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b$, če velja $b^n = a$.

Opomba: Za liho število n velja $(-1)^n = -1$, zato lahko definiramo $\sqrt[n]{-1} = -1$ in tako lahko definicijo lihega n-tega korena razširimo še na poljubni (ne nujno nenegativni) realni števili a in b.

Lastnosti računanja s potencami (z racionalnimi eksponenti, $m, n \in \mathbb{Z}$ in $r, s \in \mathbb{Q}$):

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$,
- $a^r b^r = (ab)^r$,
- $a^0 = 1$, če $a \neq 0$,

[2] Števec "šteje" koliko koščkov imamo, imenovalec pa ulomku daje ime (npr. polovica, tretjina, četrtina,...).

- 0^0 ni definirano,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (kjer je $b \neq 0$),
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ (kjer sta $a, b \neq 0$),
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (kjer je $a^m \geq 0$, če je n sodo),
- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$,
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$.

Definicija: Za naravno število a pravimo, da ga **delno korenimo** natanko tedaj, ko ga zapišemo v obliki $a = b\sqrt{c}$, kjer sta b in c naravni števili in noben pravi delitelj števila c ni kvadrat nekega naravnega števila.

Primer: Delno korenjenje najlažje izvedemo tako, da dano število razcepimo na prafaktorje. Poglejmo primer delnega korenjenja števila 504.

$$\sqrt{504} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7} = \sqrt{2^2}\sqrt{2}\sqrt{3^2}\sqrt{7} = 2\sqrt{2}3\sqrt{7} = 6\sqrt{14}$$

Definicija: Za ulomek $\frac{a}{b}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ in $b \neq 0$, pravimo, da je **racionaliziran**, kadar ga zapišemo v obliki $\frac{c}{d}$, kjer je $d \in \mathbb{Z}$.

Primer: Racionalizirajmo ulomke $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ in $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. Prvi ulomek razširimo z $\sqrt{2}$, drugega z $1-\sqrt{3}$, tretjega pa z $\sqrt[3]{5^2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{1-9} = -\frac{1-\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

1.5 Naloge

1. Izpostavi skupni faktor:
   (a) $ab + ac + b^2 + bc$,
   (b) $acd - ace + bcd - bce$,
   (c) $abc + bda - eba$.
2. Razstavi izraz:
   (a) $49a^2 - 4b^2$,
   (b) $a^3 + 27$,
   (c) $x^5 - 8x^2$,
   (d) $4x^3 + 20x^2 + 24x$.
3. Okrajšaj ulomke:
   (a) $\frac{ac+bc}{cd}$,
   (b) $\frac{a^5-3a^4+9a^3-27a^2}{a^4-81}$.
4. Poenostavi:
   (a) $\frac{3x}{x^2-4} : \frac{x^3}{x^2-2x}$,
   (b) $\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x^2-y^2}\right) \cdot \left(\frac{x^2y^2-y^4}{4x^2-1}\right)$,
   (c) $\frac{1-\frac{x}{x-y}}{\frac{y}{x}-\frac{y}{x-y}}$.
5. Izrazi kot potenco z racionalnim eksponentom:
   (a) $\sqrt[4]{x^3}$,
   (b) $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^3}\sqrt[6]{x^{-5}}$.
6. Delno koreni:
   (a) $\sqrt{175}$,
   (b) $\sqrt{32} + \sqrt{98} + \sqrt{18}$.
7. Racionaliziraj ulomek:
   (a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$,
   (b) $\frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

2 Linearna funkcija, linearna enačba in neenačba, enačbe premic, sistemi linearnih enačb

2.1 Linearna funkcija

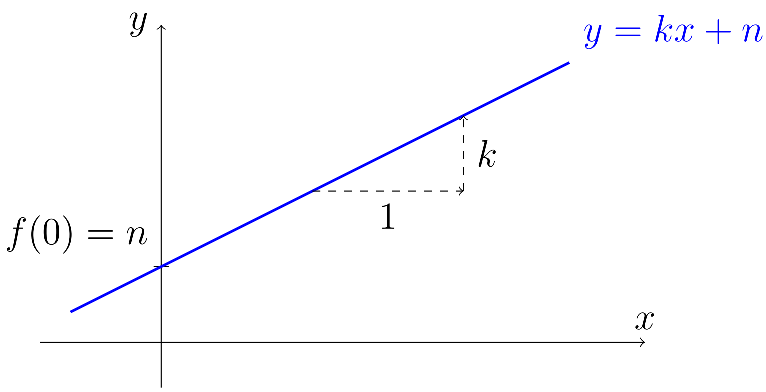
Definicija: **Linearna funkcija** je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = kx + n, \text{ kjer sta } k, n \in \mathbb{R}.$$

Konstanto n imenujemo **začetna vrednost**, konstanto k pa **smerni koeficient funkcije.**

Opomba: Imena v zgornji definiciji so naravna, če se zavedamo, da je graf linearne funkcije premica (lat. *linea*), ki seka ordinatno os pri $f(0) = n$.

Graf:



Slika 2: Graf linearne funkcije $f(x) = kx + n$. Parameter n pove kje graf linearne funkcije seka ordinatno os, parameter k pa pove kakšen je naklon premice. Preprosto: če izberemo točko na premici in se od te točle premaknemo za eno enoto v desno (tj. v pozitivni smeri abscisne osi) in za k enot navpično (navzgor, če je $k \geq 0$, oz. navzdol, če je $k < 0$), spet pristanemo na premici.

Izračun smernega koeficienta: Za izračun smernega koeficienta premice, ki poteka skozi (različni) točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ (kjer $x_1 \neq x_2$), lahko uporabimo formulo:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pravokotnost in vzporednost premic: Za premici p_1, z enačbo $y = k_1 x + n_1$ in p_2 z enačbo $y = k_2 x + n_2$ velja:

- p_1 in p_2 sta vzporedni natanko tedaj, ko velja $k_1 = k_2$,
- p_1 in p_2 sta pravokotni natanko tedaj, ko velja $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Opomba: Iz geometrijskega pomena smernega koeficienta in iz zgornje formule je razvidno, da so grafi vseh linearnih funkcij premice, vse premice pa niso grafi linearnih funkcij. Če vzamemo npr. premico skozi točki $T_1(1, 0)$ in $T_2(1, 1)$ dobimo premico z enačbo $x = 1$, ki pa ni graf nobene linearne funkcije.

Na kazalo

2.2 Linearna enačba in neenačba

Definicija: **Linearna enačba** je enačba oblike $kx + n = 0$ $(k \neq 0)$. Njena rešitev je $x = -\frac{n}{k}$.

Opomba: Geometrijski pomen linearne enačbe: sprašujemo se po točki v kateri graf linearne funkcije seka abscisno os.

Definicija: **Linearna neenačba** je vsaka neenačba oblike $kx + n > 0$, $kx + n \geq 0$, $kx + n < 0$ ali $kx + n \leq 0$ $(k \neq 0)$.

Opomba: V spodnji preglednici so predstavljene različne oblike linearnih neenačb in njihovih rešitev (glede na predznak koeficienta $k \neq 0$).

		$k > 0$	$k < 0$
(I)	$kx + n > 0$	$x > -\frac{n}{k}$	$x < -\frac{n}{k}$
(II)	$kx + n \geq 0$	$x \geq -\frac{n}{k}$	$x \leq -\frac{n}{k}$
(III)	$kx + n < 0$	$x < -\frac{n}{k}$	$x > -\frac{n}{k}$
(IV)	$kx + n \leq 0$	$x \leq -\frac{n}{k}$	$x \geq -\frac{n}{k}$

Preglednica 3: Štiri različni tipi linearnih neenačb in njihove rešitve.

Opomba: Geometrijski pomen linearne neenačbe: sprašujemo se po točkah v katerih graf linearne funkcije $f(x) = kx + n$ leži nad abscisno osjo (I), nad ali na abscisni osi (II), pod abscisno osjo (III) in pod ali na abscisni osi (IV).

2.3 O (različnih) oblikah enačb premic

Dogovor: **Eksplicitna oblika enačbe premice:**

$$y = kx + n, \text{ kjer sta } k,\, n \in \mathbb{R}.$$

Lastnosti: Geometrijski pomen koeficientov k in n je opisan že na prejšnjih straneh. Eksplicitna enačba premice je enolično določena. Videli smo, da so grafi linearnih funcij premice. Izkaže se, da se pa vseh premic ne da predstaviti kot graf neke linearne funkcije. Protiprimer so vse premice, ki so vzporedne y osi. Njihove enačbe so $x = a$, za nek $a \in \mathbb{R}$, kar pa ni eksplicitna oblika enačbe premice.

Dogovor: **Implicitna oblika enačbe premice:**

$$ax + by = c, \text{ kjer so } a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$$

Lastnosti: Z implicitno obliko enačbe lahko predstavimo vse premice v ravnini. Medtem ko geometrijski pomen parametrov a in b ni očiten (njun geometrijski pomen bomo spoznali pri analitični geometriji), je pomen parametra c kategorizacija premic na tiste, ki potekajo skozi izhodišče koordinatnega sistema in tiste ki ne. Konkretneje: če je $c = 0$, potem premica poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema, če pa je $c \neq 0$, pa ne. Implicitna enačba premice ni enolično določena.

Dogovor: **Odsekovna oblika enačbe premice:**

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \text{ kjer sta } m, n \in \mathbb{R}, m, n \neq 0.$$

Lastnosti: Tudi z odsekovno obliko enačbe premice ne moremo predstaviti vseh premic v ravnini. Izjeme so premice, ki so vzporedne osi x, tiste, ki so vzporedne osi y in tiste, ki potekajo skozi izhodišče koordinatnega sistema. Geometrijski pomen parametra n je enak kot pri eksplicitni obliki enačbe premice: opisana premica seka y-os pri vrednosti n. Parameter m nam pove, da premica seka x-os pri vrednosti m.

2.4 Sistem linearnih enačb z dvema neznankama

Definicija: **Sistem (dveh) linearnih enačb z dvema neznankama** je sistem

$$\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1, \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2, \end{array}$$

kjer so $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rešitev sistema je par $x, y \in \mathbb{R}$, ki ustreza obema enačbama. Pogosto rešitev zapišemo v obliki (x, y), kar predstavlja točko v ravnini.

Opomba: Reševanje sistema dveh linearnih enačb za dve neznanki je ekvivalentno iskanju presečišča premic $a_1x + b_1y = c_1$ in $a_2x + b_2y = c_2$. Za dve premici imamo le tri možnosti:

- premici sta vzporedni in ne sovpadata; v tem primeru sistem enačb nima rešitev,
- premici se sekata v eni točki; v tem primeru ima sistem natanko eno rešitev,
- premici ležita ena na drugi, rečemo, da sovpadata; v tem primeri ima sistem neskončno mnogo rešitev.

Primer: Katera izmed premic $p_1 : 2x + 3y = 3$, $p_2 : 2x + 4y = 1$ in $p_3 : x + 2y = 0$ seka premico $q : 2x + 4y = 0$?

- Preverimo kje se sekata premici p_1 in q. Rešimo sistem enačb tako, da iz enačbe premice q (spodaj označena z (II)) izrazimo $x = -2y$ ter nastavek vstavimo v enačbo premice p_1 (spodaj označeno z (I)).

  $$\left.\begin{array}{lrcrcr} \text{(I)} & 2x & + & 3y & = & 3 \\ \text{(II)} & 2x & + & 4y & = & 0 \end{array}\right\} \text{(II) } x = -2y \Rightarrow \text{ v (I): } -4y + 3y = 3 \Rightarrow y = -3,\ x = 6$$

  Premici se sekata v točki $(6, -3)$.

Na kazalo

- Poiščimo sečišče premic p_2 in q. Sistem rešimo tako, da prvo enačbo pomnožimo z -1 in jo prištejemo drugi enačbi.
$$\left.\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & = & 1 \quad \big/ \cdot (-1) \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array}\right\} (+) \Rightarrow 0 = -1$$
Ker smo dobili protislovje $0 = -1$ se premici ne sekata.

- Poiščimo sečišče premic p_3 in q. Ta sistem rešimo tako, da drugo enačbo delimo z -2 in jo prištejemo prvi enačbi.
$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \quad \big/ : (-2) \end{array}\right\} (+) \Rightarrow 0 = 0$$
Ker smo dobili enakost $0 = 0$, ki je vedno resnična, vidimo, da premici sovpadata. Na to bi lahko sklepali že, če drugo enačbo delimo z 2 in dobimo prvo enačbo.

2.5 Naloge

8. Določi parametra k in n v funkcijskem predpisu $f(x) = kx + n$, če velja $f(-1) = 2$ in $f(1) = -4$.

9. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točko $T(2, 3)$ in je:

   (a) vzporedna premici $y = x$,

   (b) pravokotna na premico $x + 2y = 1$.

10. Prepričaj se, da so točke $A(1, 3)$, $B(4, 7)$, $C(2, 8)$ in $D(-1, 4)$ oglišča paralelograma.

11. Reši enačbo:

    (a) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$,

    (b) $(2x - 5)^2 - (5 + x)(5 - x) = (5x + 16)(x + 12)$.

12. Obravnavaj enačbo $ax + 3 = a + 3x$ glede na vrednost parametra a (tj. razišči rešljivost enačbe v odvisnosti od parametra a) in poišči njene rešitve.

13. Reši neenačbo $4x - 1 < 2x + 3$.

14. Obravnavaj neenačbo glede na vrednost parametra a:

    (a) $ax - 2 < 3x + 2$,

    (b) $ax + 4 \leq 2x + a^2$.

15. Reši sistem enačb.

    (a) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -7 \\ 2x & + & y & = & 5 \end{array}$

    (b) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 3 \\ 5x & + & 4y & = & 1 \end{array}$

16. Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od parametra a.

    (a) $\begin{array}{rcrcr} x & + & ay & = & -2 \\ ax & + & y & = & a \end{array}$

    (b) $\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & 3 \\ 4x & + & ay & = & 6 \end{array}$

3 Kvadratna funkcija, enačba in neenačba. Polinomi, polinomska enačba in neenačba. Racionalna funkcija, racionalna enačba in neenačba. Enačba krožnice, elipse in hiperbole.

3.1 Kvadratna funkcija, enačba in neenačba

Definicija: **Kvadratna funkcija** je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

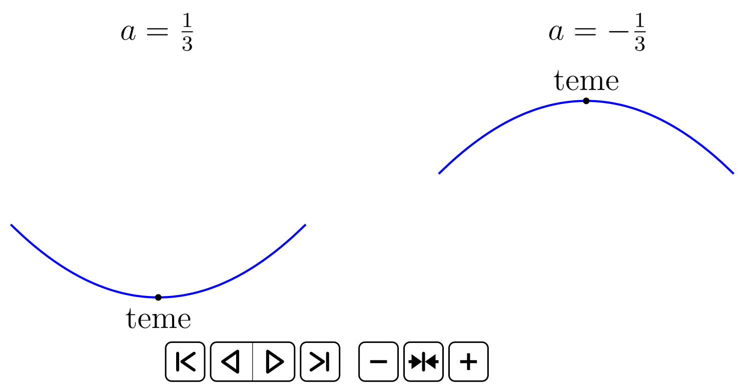
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ kjer so } a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \text{ in } a \neq 0.$$

Konstanto a imenujemo **kvadratni (ali vodilni) koeficient**, konstranto b **linearni koeficient** in konstanto c **prosti člen** kvadratne funkcije.

Graf: Graf kvadratne funkcije je **parabola**. Smer odprtosti kvadratne parabole je odvisna od predznaka kvadratnega koeficienta a.

Slika 4: Če je $a > 0$, je parabola odprta v pozitivni smeri osi y. V tem primeru ima kvadratna funkcija minimum v točki, ki jo imenujemo **teme parabole**. Če je $a < 0$, je parabola odprta v smeri negativnega dela y osi, v temenu pa funkcija f doseže maksimum. Koordinatni sistem ni vključena v skici, ker njegov položaj tukaj ni bistven.

Vpliv kvadratnega koeficienta na zaprtost parabole



Animacija 3: Poleg predznaka vpliva na odprtost parabole tudi absolutna vrednost kvadratnega koeficienta a. Če je a po absolutni vrednosti velik, je parabola bolj zaprta, če je pa manjši tj. blizu 0, potem pa je parabola širše odprta. Tudi tukaj je položaj koordinatnega sistema nepomemben.

Na kazalo

Opomba: Če bi izbrali kvadratni koeficient $a = 0$, bi dobili linearno funkcijo.

Dogovor: **Temenska oblika** kvadratne funkcije je

$$f(x) = a(x-p)^2 + q,\ a, p, q \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Lastnosti: V temenski obliki je a vodilni koeficient, (p, q) pa teme.

Dopolnjevanje do popolnega kvadrata

$$x^2 + Ax$$

Animacija 4: Postopek s katerim dvočlenik $x^2 + Ax$ dopolnimo do popolnega kvadrata.

Primer: Zapiši funkcijski predpis $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ v temenski obliki ter odčitaj koordinati temena.
Najprej iz kvadratnega in linearnega člena izpostavimo 2, potem dvočlenik $x^2 + 2x$ dopolnimo do popolnega kvadrata.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x + 3 = 2(x^2 + 2x) + 3 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 = \\ &= 2((x+1)^2 - 1) + 3 = 2(x+1)^2 - 2 + 3 = 2(x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

Teme parabole je v točki $T(-1, 1)$.

Definicija: **Kvadratna enačba** je enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Enačba je rešljiva, če je $b^2 - 4ac \geq 0$. Njeni rešitvi sta

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Izraz $D = b^2 - 4ac$ imenujemo **diskriminanta**.

Opomba: Kvadratna enačba ima lahko dve različni realni rešitvi, eno dvojno realno rešitev ali pa nima realnih rešitev. Katera izmed možnosti drži za posamezno enačbo, je hitro razvidno iz diskriminante $D = b^2 - 4ac$. Če je $D > 0$, je njen kvadratni koren pozitivno realno število, zato dobimo dve različni realni rešitvi kvadratne enačbe. Če je $D = 0$, dobimo eno samo (dvojno) rešitev, saj je $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Če pa velja $D < 0$, pa enačba nima realnih[3] rešitev.

[3] Dobimo dve konjugirani kompleksni rešitvi kvadratne enačbe, saj je $\sqrt{D}$ imaginarno število.

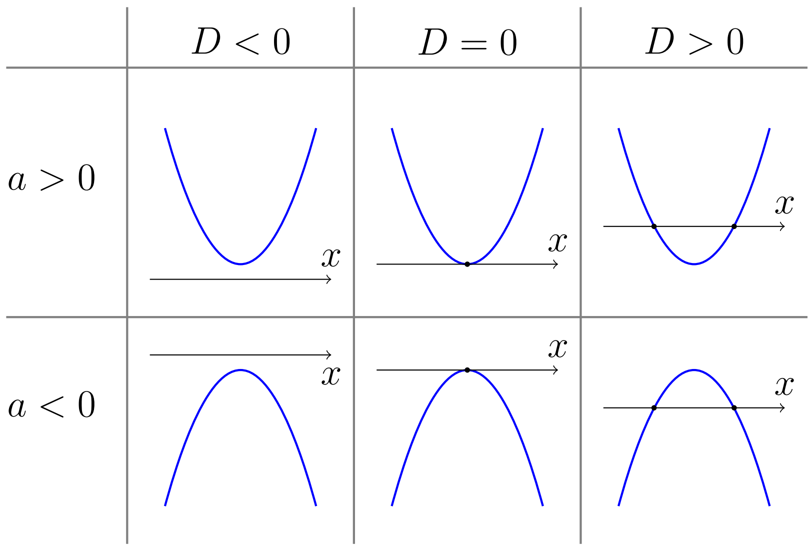
Na kazalo

Vietovo pravilo: Pri reševanju kvadratne enačbe si lahko pomagamo tudi s t.i. Vietovim pravilom:

$$x^2 - (A+B)x + A \cdot B = (x-A)(x-B).$$

Rešitvi kvadratne enačbe $x^2 - (A+B)x + A \cdot B = 0$ sta tako $x_1 = A$ in $x_2 = B$.

Graf-natančneje: Prejšnjo preglednico, v kateri smo predstavili obliki grafa v odvisnosti od kvadratnega koeficienta funkcije, lahko zdaj dopolnimo s slikami, ki orišejo vpliv diskriminante D na graf kvadratne funkcije.



Preglednica 5: Poleg odprtosti parabole navzgor (ko je $a > 0$) in navzdol (ko je $a < 0$) nam o postavitvi grafa glede na abscisno os pove predznak diskriminante. Če je diskriminanta pozitivna, parabola seka abscisno os v dveh točkah, če je enaka nič, se parabola dotika abscisne osi v eni točki, če je pa negativna, pa se parabola abscisne osi ne dotika. Ordinatna os ni vključena v skice, ker njen položaj tukaj ni bistven.

Definicija: **Kvadratne neenačbe** so neenačbe naslednjih oblik:
(I) $ax^2 + bx + c > 0$,
(II) $ax^2 + bx + c \geq 0$,
(III) $ax^2 + bx + c < 0$,
(IV) $ax^2 + bx + c \leq 0$.
V vseh primerih je $a \neq 0$.
Reševanje kvadratne neenačbe:
Reševanja kvadratne neenačbe se lahko lotimo računsko ali grafično. Pri obeh načinih potrebujemo najprej rešitvi kvadratne enačbe $ax^2+bx+c = 0$, če le obstajata (tj. če nista kompleksni), torej $x_{1,2}$.

I. način (računsko): Če kvadratna enačba, ki pripada kvadratni neenačbi nima (realnih) rešitev, je izraz $ax^2 + bx + c$ vedno istega predznaka (saj kvadratna funkcija menja predznak le v realnih enkratnih rešitvah kvadratne enačbe). Rešitve za ta primer so predstavljene v preglednici 6.

Na kazalo

tip neenačbe	$a > 0$	$a < 0$
(I) in (II)	$x \in \mathbb{R}$	$\emptyset$
(III) in (IV)	$\emptyset$	$x \in \mathbb{R}$

Preglednica 6: Rešitve kvadratne neenačbe so v primeru $D < 0$.

Če obstajata realni ničli pripadajoče kvadratne enačbe $x_{1,2}$, lahko desno stran neenačb (vseh tipov) razcepimo:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

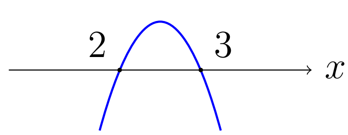
Ko rešujemo neenačbe zgoraj opisanih tipov se lahko vprašamo, za katera realna števila x bo produkt dveh števil $(x - x_1)$ in $(x - x_2)$:

- pozitiven (I), nenegativen (II), negativen (III) ali nepozitiven (IV), ko je $a > 0$,
- negativen (I), nepozitiven (II), pozitiven (III) ali nenegativen (IV), ko je $a < 0$.

Primer: Rešimo neenačbo $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$. Levo stran razcepimo s pomočjo Vietovih pravil $-x^2 + 5x - 6 = -(x^2 - 5x + 6) = -(x - 2)(x - 3)$. Ker želimo, da je produkt števil na levi strani neenačbe nenegativen, mora veljati $(x - 2)(x - 3) \leq 0$. Produkt dveh realnih števil ($(x - 2)$ in $(x - 3)$) je nepozitiven, ko veljata $x - 2 \geq 0$ in $x - 3 \leq 0$ ali pa $x - 2 \leq 0$ in $x - 3 \geq 0$. Prvi pogoj velja, ko veljata neenačbi $x \geq 2$ in $x \leq 3$, torej, ko je $x \in [2, 3]$. Drugi pogoj pa velja, ko veljata neenačbi $x \leq 2$ in $x \geq 3$, kar pa ne drži za nobeno realno število x (ne obstaja realno število x, ki je hkrati manjše ali enako 2 in večje ali enako 3).
Rešitev neenačbe je $x \in [2, 3]$.

II. način (grafično): Levo stran neenačbe predstavimo z grafom kvadratne funkcije. Rešitve neenačbe so tisti x (abscise točk), za katere graf kvadratne funkcije leži strogo nad abscisno osjo (I), nad ali na abscisni osi (II), strogo pod abscisno osjo (III) ali pa pod ali na abscisni osi (IV).

Primer: Rešimo neenačbo $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$. Že zgoraj smo ugotovili, da lahko levo stran zapišemo v razcepljeni obliki $-(x - 2)(x - 3)$, od koder odčitamo ničli kvadratne funkcije $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$. Skicirajmo graf kvadratne funkcije (slika 7).
Rešitev kvadratne neenačbe so tista realna števila x, za katera je graf parabole nad ali na abscisni



Slika 7: Skica grafa parabole z ničlama $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$ in kvadratnim koeficientom $a = -1$. Položaj ordinatne osi nas v tem primeru ne zanima.

osi, to je med obema ničlama (vključno z ničlama).
Rešitev neenačbe je $x \in [2, 3]$.

Na kazalo

3.2 Polinomi, polinomska enačba in neenačba

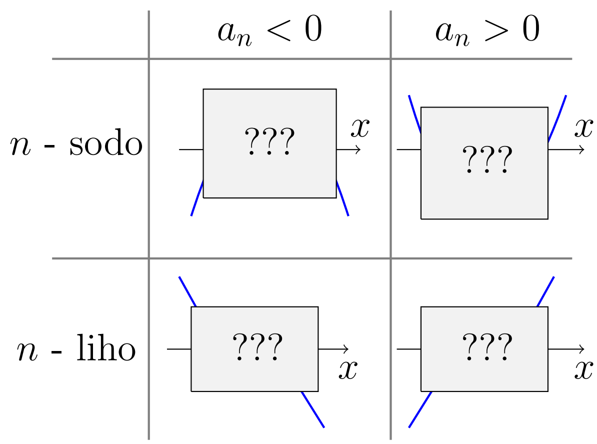
Definicija: **Polinom stopnje n** ($n \in \mathbb{N}$) je vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere funkcijski predpis je oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ kjer so } a_n,\ a_{n-1},\ \ldots, a_1,\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ in } a_n \neq 0.$$

Konstanto a_n imenujemo **vodilni koeficient**, konstranto a_0 pa **prosti člen** polinoma.

Opomba: Konstantna funkcija $p(x) = C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$, je polinom stopnje 0.

Graf: Graf polinoma je predvsem odvisen od njegove stopnje (še posebej od dejstva ali je n sodo ali liho število) in od predznaka vodilnega koeficienta. V preglednici 8 so predstavljeni grafi za štiri različne možnosti.



Preglednica 8: Na grafih so vidni le kraki grafov za skrajne vrednosti spremenljivke x. Vmesni deli grafov (prekriti s sivim pravokotnikom) so neznanka, odvisni so od preostalih koeficientov polinoma. Položaj ordinatne osi nas v tem primeru ne zanima.

Definicija: **Polinomska enačba stopnje n** je enačba oblike $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$). Polinomska enačba ima lahko največ n različnih rešitev. Medtem ko poznamo rešitve polinomskih enačb reda 2 (to so ravno kvadratne enačbe), za enačbe višjih redov ne bomo podali formul (za enačbe stopenj 5 ali več formule sploh ne obstajajo).

Definicija: **Hornerjev algoritem** je algoritem za iskanje ničel polinoma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

S pomočjo tega algoritma iščemo ničle med deljitelji prostega člena a_0. Postopek si poglejmo na primeru:
Primer: Reši enačbo $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.
Kandidati za ničle, po Hornerjevem algoritmu, so 2, 1, -1 in -2. V animaciji 5 uporabimo Hornerjev algoritem za $x = 2$, za katerega se izkaže, da ni ničla danega polinoma. V animaciji 6 pa ga uporabimo za $x = 1$, ki se pa izkaže za ničlo.

Na kazalo

Hornerjev algoritem za poljubno število

	1	2	-1	-2
2				

Animacija 5: Hornerjev algoritem za preverjanje ali je 2 ničla polinoma $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Dobljena vrstica nam pove, da je kvocient pri deljenju polinomov $x^3 + 2x^2 - x - 2$ in $x - 2$ polinom $x^2 + 4x + 7$, ostanek pri tem deljenju pa je 12. Z drugimi besedami, zapišemo lahko $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x-2} = x^2 + 4x + 7 + \frac{12}{x-2}$. Hornerjev algoritem nam pove tudi to, da je $p(2) = 12$.

Hornerjev algoritem za ničlo polinoma

	1	2	-1	-2
1				

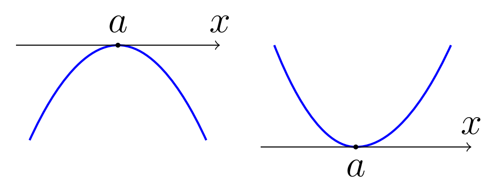
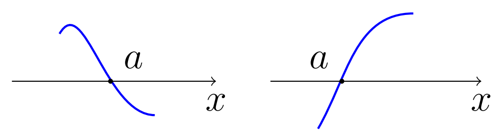
Animacija 6: Hornerjev algoritem za preverjanje ali je 1 ničla polinoma $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Dobljena vrstica nam pove, da je kvocient pri deljenju polinomov $x^3 + 2x^2 - x - 2$ in $x - 1$ polinom $x^2 + 3x + 2$.

Število 1 je ničla danega polinoma, 1, 3 in 2 pa so koeficienti kvadratnega polinoma, ki ga dobimo pri razcepu danega polinoma: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$. Da rešimo polinomsko enačbo, razcepimo še kvadratni polinom (npr. s pomočjo Vietovih formul):

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x^2 + 3x + 2) &= 0 \\ (x-1)(x+2)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Rešitve polinomske enačbe so $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ in $x_3 = -1$.

Graf-natančneje: Opišimo še vpliv stopnje ničle polinomske enačbe na obliko grafa polinoma v okolici te ničle. Če je a ničla sode stopnje (tj., če se v razcepljeni obliki polinoma pojavi a le v členu $(x-a)^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$), potem polinom v a ne spreminja predznaka. Graf polinoma se v a osi x le dotakne. Če je a ničla lihe stopnje (tj., če se v razcepljeni obliki polinoma pojavi a le v členu $(x-a)^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$), potem polinom v a spremeni predznak. Graf polinoma v a seka os x. Te možnosti so predstavljene v preglednici 9 .

v a je ničla sode stopnje	
v a je ničla lihe stopnje	

Preglednica 9: V okolici ničle sode stopnje polinom ne spremeni predznaka oz. graf funkcije se v celoti nahaja pod (ali nad) abscisno osjo. V ničli lihe stopnje polinom spremeni predznak oz. graf v ničli preide iz ene polravnine, določene z abscisno osjo, na drugo polravnino.

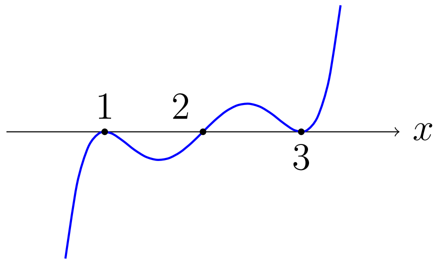
Definicija: **Polinomske neenačbe** so neenačbe naslednjih oblik:
(I) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 > 0$,
(II) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \geq 0$,
(III) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 < 0$,
(IV) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \leq 0$.
V vseh primerih velja $a_n \neq 0$.
Reševanje polinomske neenačbe:
I. način (računsko): Če poznamo vse ničle polinoma, zapišemo polinom v razcepljeni obliki in potem sklepamo na predznak polinoma. Lahko pa tudi izračunamo vrednost polinoma v neki točki (ne ničli), potem pa sklepamo na predznake polinoma v intervalih med različnimi ničlami po principu: v ničlah lihe stopnje polinom spremeni predznak, v ničlah sode stopnje pa ne.

Primer: Reši neenačbo $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 \geq 0$.
Rešitve enačbe $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 = 0$ so $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$ in $x_{4,5} = 3$. Ker je v teh točkah $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 = 0$, so te točke tudi v množici rešitev dane neenačbe. Ker sta faktorja $(x-1)^2$ in $(x-3)^2$ vedno nenegativna, bo produkt na levi strani neenakosti pozitiven, ko bo pozitiven $(x-2)$, to pa je za $x > 2$. Rešitev neenačbe so tako vsa števila iz množice $\{1\} \cup [2, \infty)$.

II. način (grafično): Skiciramo graf polinoma in rešitev odčitamo iz grafa.

Primer: Reši neenačbo $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2 \geq 0$.
Vodilni koeficient danega polinoma je 1, njegove ničle pa $x_{1,2} = 1$ (2. stopnje), $x_3 = 2$ (1. stopnje) in $x_{4,5} = 3$ (2. stopnje). Iz skice grafa, prikazane v sliki 10, odčitamo rešitve polinomske neenačbe.

Na kazalo



Slika 10: Skica grafa polinoma stopnje 5 z ničlami $x_{1,2} = 1$ (2. stopnje), $x_3 = 2$ (1. stopnje) in $x_{4,5} = 3$ (2. stopnje) in vodilnim koeficientom $a = 1$. Položaj ordinatne osi nas v tem primeru ne zanima.

Rešitve dane neenačbe sovpadajo z abscisami točk, kjer graf polinoma leži nad ali na x osi, torej: $\{1\} \cup [2, \infty)$.

3.3 Racionalna funkcija, enačba in neenačba

Definicija: **Racionalna funkcija** je vsaka funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

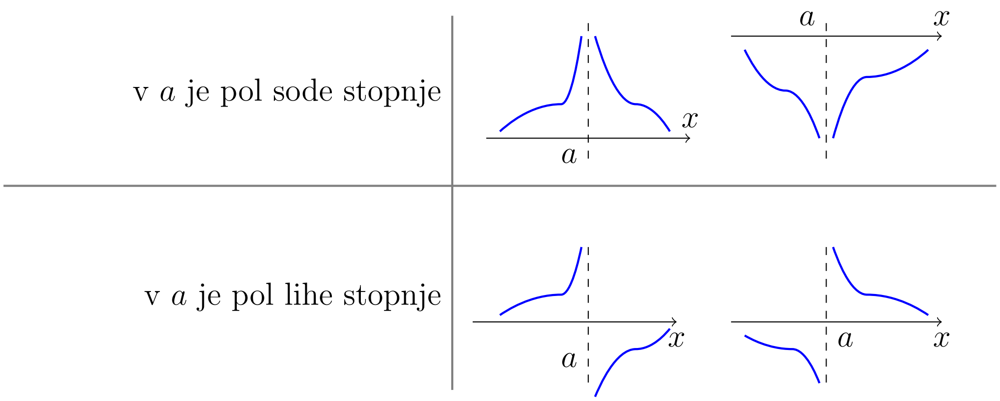
kjer sta $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ polinoma, ki nimata skupnih ničel, in $q(x) \neq 0$. Naravno definicijsko območje D_f funkcije f vsebuje vsa realna števila razen ničel polinoma $q(x)$. Ničle polinoma $q(x)$ imenujemo **poli** racionalne funkcije f.
Racionalna enačba je enačba oblike $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$. Rešitve racionalne enačbe imenujemo **ničle** racionalne funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
Krivuljo, h kateri se bliža graf funkcije, ko se spremenljivka x bliža ekstremnim vrednostim (bodisi ∞, bodisi $-\infty$), imenujemo .

Opomba: Vsaka racionalna funkcija ima asimptoto, ki je polinom.

Graf: Na obliko grafa racionalne funkcije vplivajo ničle (in njihova stopnja), poli (in njihova stopnja) ter asimptote.

- Ničle: Ničle racionalne funkcije sovpadajo z ničlami polinoma p. Za vpliv stopnje ničle na graf poglejte vpliv stopnje ničle na graf polinoma.

- Poli: Poli racionalne funkcije sovpadajo z ničlami polinoma q. Če je v a pol lihe stopnje, funkcija pri prehodu čez pol menja predznak, če pa je v a pol sode stopnje, pa ne. V preglednici 11 so prikazane štiri možnosti za obliko grafa v odvisnosti od stopnje pola.



Preglednica 11: V okolici pola sode stopnje racionalna funkcija ne spremeni predznaka oz. graf funkcije se v celoti nahaja pod ali nad abscisno osjo. V okolici pola lihe stopnje racionalna funkcija spremeni predznak oz. graf priprehodu cez pol preide iz ene polravnine, določene z abscisno osjo, na drugo polravnino.

- Asimptote: Pri asimptoti racionalne funkcije ločimo tri primere, odvisne od stopenj polinomov v števcu in imenovalcu.

Na kazalo

1. Stopnja polinoma v števcu je manjša od stopnje polinoma v imenovalcu (torej $n < m$): vodoravna asimptota je x os.
2. Stopnji polinomov sta enaki ($n = m$): vodoravna asimptota je premica $y = \frac{a_n}{b_m}$.
3. Stopnja polinoma v števcu je večja od stopnje polinoma v imenovalcu ($n > m$): asimptota je kvocient, ki ga dobimo, ko delimo $p(x) : q(x)$.

   Opomba: Ničla ostanka pri deljenju $p(x) : q(x)$ nam pove, kje graf racionalne funkcije seka asimptoto.

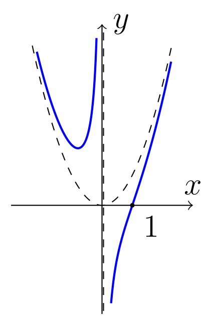
Primer: Določi ničle, pole in asimptote racionalne funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$ ter skiciraj njen graf.

- Ničle: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$
  Vidimo, da je ena ničla enaka $x_1 = 1$ (1. stopnje). Preostale ničle dobimo iz enačbe $x^2+x+1 = 0$, ker pa je diskriminanta kvadratne funkcije, ki nastopa na levi strani kvadratne enačbe, enaka $D = 1 - 4 = -3$, je 1 edina ničla racionalne funkcije.

- Poli: $x = 0$

- Asimptota:
  $$\begin{array}{l} \left(x^3 - 1\right) : x = x^2 + \dfrac{-1}{x}. \\ \underline{-x^3} \\ \quad -1 \end{array}$$
  Enačba asimptote: $y = x^2$.

  Opomba: Ostanek -1 nam pove, da graf racionalne funkcije ne seka asimptote, saj ta ostanek nikoli ni enak 0.



Slika 12: Graf racionalne funkcije z ničlo $x = 1$ (1. stopnje), s polom v $x = 0$ (1. stopnje) in z asimptoto $y = x^2$.

Definicija: **Racionalne neenačbe** so neenačbe oblik $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ ali $\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$. V vseh primerih je $\frac{p(x)}{q(x)}$ racionalna funkcija.

Reševanje racionalne neenačbe:
Pri reševanju racionalnih enačb se je treba zavedati, da v rešitvi ne moremo imeti števil, za katera je vrednost v imenovalcu ulomka $\frac{p(x)}{q(x)}$ enaka 0.

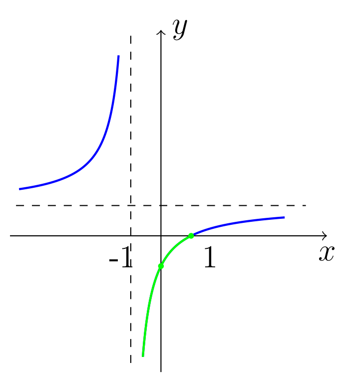
Na kazalo

I. način (računsko): Neenakost $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ drži za tista realna števila x, za katera sta števec in imenovalec hkrati pozitivna, ali hkrati negativna. Torej $p(x) > 0$ in $q(x) > 0$ ali $p(x) < 0$ in $q(x) < 0$. Analogno sklepamo še pri preostalih tipih neenačb (vrednost ulomka je negativna, ko sta števec in imenovalec nasprotno predznačena). Pri neenačbah, ki vsebujejo nestrogo neenakost, npr. $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$, moramo upoštevati $p(x) \geq 0$ in $q(x) > 0$ ali $p(x) \leq 0$ in $q(x) < 0$, saj v rešitvi ne smemo imeti realnih števil, za katera je $q(x) = 0$.

Primer 1: Reši neenačbo: $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$.
Prva možnost: $x - 1 \leq 0$ (oz. $x \leq 1$) in $x + 1 > 0$ (oz. $x > -1$) nam vrne rešitev $x \in (-1, 1]$.
Druga možnost: $x - 1 \geq 0$ (oz. $x \geq 1$) in $x + 1 < 0$ (oz. $x < -1$) nima rešitev.
Rešitev neenačbe: $x \in (-1, 1]$.

Primer 2: Reši neenačbo: $\frac{x^3-1}{x} > 0$.
Prva možnost: $x^3 - 1 > 0$ in $x > 0$. Rešimo neenačbo $x^3 - 1 > 0$ tako, da levo stran razcepimo in neenačbo prepišemo v obliko $(x - 1)(x^2 + x + 1) > 0$. Ko smo risali graf funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$ smo ugotovili, da je $(x^2 + x + 1) > 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Torej je produkt polinomov $(x - 1)$ in $(x^2 + x + 1)$ pozitiven natanko tedaj, ko velja $(x - 1) > 0$ oz. $x > 1$. Ker je imenovalec pozitiven, ko je $x > 0$, je ulomek pozitiven, ko je $x \in (1, \infty)$.
Druga možnost: $x^3 - 1 < 0$ in $x < 0$. Prvo neenačbo prepišemo v obliko $(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$. Ker je $(x^2 + x + 1) > 0$, je produkt danih polinomov negativen le, ko velja $(x - 1) < 0$ oz. $x < 1$. Imenovalec je negativen, ko je $x < 0$, zato je ulomek pozitiven, ko je $x \in (-\infty, 0)$.
Rešitev neenačbe: $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

II. način (grafično): Skiciramo graf racionalne funkcije in rešitev odčitamo iz grafa.
Primer 1: Reši neenačbo: $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$.
Za graf potrebujemo naslednje podatke: <u>ničle:</u> $x = 1$ (1. st.), <u>poli:</u> $x = -1$ (1. st.), <u>asimptota:</u> $y = 1$ in <u>začetna vrednost:</u> $f(0) = -1$ (vrednost, ki jo hitro izračunamo in večkrat pride prav pri skici grafa). Skicirajmo graf (slika 13) in odčitamo rešitev: $x \in (-1, 1]$.



Slika 13: Graf racionalne funkcije $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, na katerem smo z zeleno označili del grafa, ki leži pod in na x osi.

Primer 2: Reši neenačbo: $\frac{x^3-1}{x} > 0$.
Ker smo graf skicirali že prej (slika 12), rešitev enostavno odčitamo (gledamo abscise točk grafa

Na kazalo

funkcije $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$, ki ležijo nad osjo x): $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

III. način (prehod na polinomsko neenačbo): Racionalno neenačbo $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ na obeh straneh pomnožimo s (pozitivnim) polinomom $q^2(x)$. Rešimo dobljeno polinomsko neenačbo in iz množice rešitev odstranimo števila x, za katera je $q(x) = 0$, če so vsebovana v rešitvi. Na enak način postopamo pri vseh tipih racionalnih neenačb.

Primer 1: Reši neenačbo: $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} &\leq 0 \quad / \cdot (x+1)^2 \\
(x-1)(x+1) &\leq 0
\end{aligned}
$$

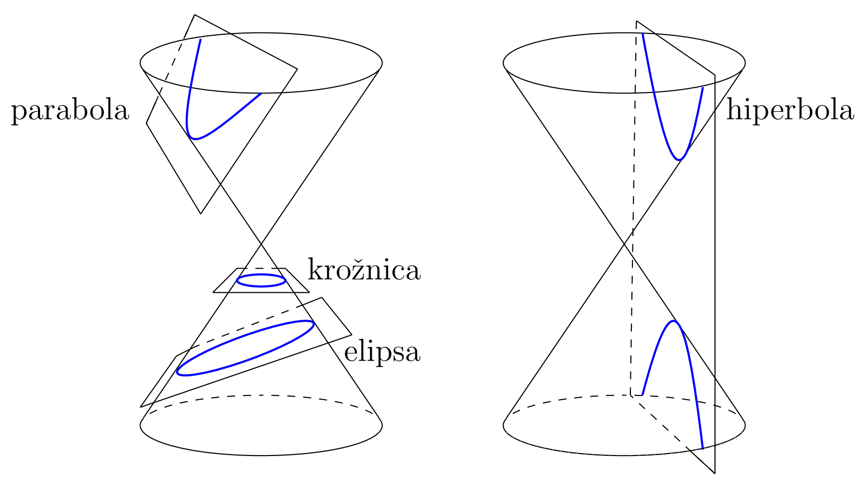
Dobljena polinomska neenačba ima rešitev $x \in [-1, 1]$. Za rešitev prvotne, racionalne, neenačbe odstranimo $x = -1$ (ničla polinoma $x + 1$). Tako dobimo $x \in (-1, 1]$.
Primer 2: Reši neenačbo: $\frac{x^3-1}{x} > 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3-1}{x} &\leq 0 \quad / \cdot x^2 \\
x(x^3-1) &\leq 0
\end{aligned}
$$

Rešitev polinomske neenačbe je $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Ker ničle polinoma x ni v rešitvi, je dobljena množica hkrati tudi rešitev racionalne neenačbe.

3.4 Enačbe krožnice, elipse in hiperbole

Stožnice so ravninske krivulje, ki jih dobimo tako, da sekamo dvojni stožec (tj. dva stožca z isto osjo simetrije, ki se stikata v vrhu) z različno postavljenimi ravninami. Če sekamo stožec z ravnino, ki je pravokotna na os simetrije, dobimo krožnico. Če sekamo stožec z ravnino, ki z osjo simetrije oklepa kot manjši od pravega, a večji od kota, ki ga z osjo simetrije oklepa stranica stožca, dobimo elipso. Če sekamo stožec z ravnino, ki je vzporedna stranici stožca dobimo parabolo, ki pa smo jo že obravnavali v poglavju 3.1 in je ne bomo ponovno obravnavali tukaj. Če sekamo stožca z ravnino, ki je vzporedna osi simetrije, pa dobimo hiperbolo. Vse omenjene ravnine naj ne potekajo skozi vrh stožca, saj v tem primeru dobimo izrojene primere (bodisi zgolj eno točko, bodisi premico, bodisi dve nevzporedni premici). V tem poglavju bomo obravnavali le enačbe stožnic katerih osi simetrije sta vzporedni koordinatnima osema.



Slika 14: Stožnice: krožnica, elipsa, parabola in hiperbola. Slika je povzeta po [4].

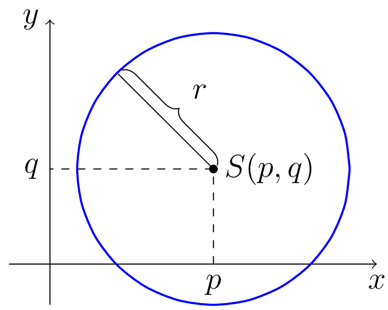
3.4.1 Krožnica

Definicija: **Krožnica** je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od neke točke. To točko imenujemo **središče krožnice**.
Enačba krožnice s polmerom r v izhodiščni legi (tj. središče krožnice je v izhodišču koordinatnega sistema):

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Enačba krožnice s polmerom r in središčem v točki $S(p, q)$ (slika 15):

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{1}$$

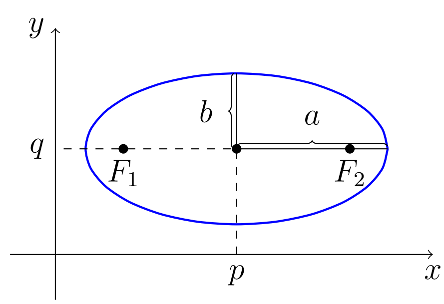


Slika 15: Krožnica s središčem v točki $S(p,q)$ in polmerom r. Ker je vsaka točka $T(x,y)$ na krožnici od točke $S(p,q)$ oddaljena za r, velja (po Pitagorovem izreku) $d(T,S) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$. Ker je izraz pod korenom vedno nenegativen, je dana enakost ekvivalentna enačbi krožnice (1).

3.4.2 Elipsa

Definicija: **Elipsa** je množica točk v ravnini, za katere je vsota razdalj do dveh točk enaka. Ti dve točki imenujemo **gorišči elipse**. **Središče elipse** je razpolovišče daljice med gorišči. **Velika polos** je razdalja od središča do točke na elipsi, ki je od središča najbolj oddaljena, **mala polos** pa je razdalja od središča do točke na elipsi, ki je središču najbližja.
Enačba elipse s polosema a in b, središčem v točki $S(p,q)$ in postavitvijo kot na sliki 16:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$



Slika 16: Elipsa s središčem v točki $S(p,q)$, veliko polosjo a in malo polosjo b. Na sliki sta označeni tudi gorišči elipse F_1 in F_2. Izpeljava enačbe je malce daljša kot izpeljava za krožnico in jo bomo tukaj izpustili. Vsak študent lahko izpeljavo poišče na internetu npr. v [5]

Opomba: Krožnica je poseben primer elipse, v kateri gorišči sovpadata.

3.4.3 Hiperbola

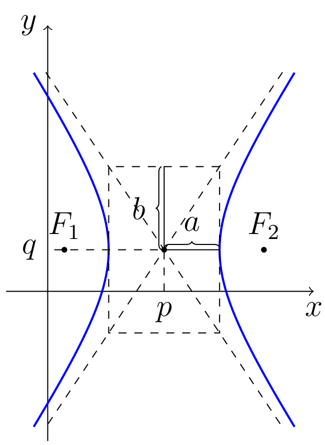
Definicija: **Hiperbola** je množica točk v ravnini, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj do dveh točk enaka. Ti dve točki imenujemo **gorišči hiperbole**. **Središče hiperbole** je

razpolovišče daljice med gorišči. **Realna polos** je razdalja od središča do točke na hiperboli, ki je središču najbližja. **Imaginarna polos** je dolžina katete v pravokotnem trikotniku s kateto dolžine realne polosi in hipotenuzo dolžine razdalje gorišča od središča hiperbole.
Enačba hiperbole z realno polosjo a, imaginarno polosjo b in središčem v točki $S(p,q)$ ter postavitvijo kot v sliki 17a:

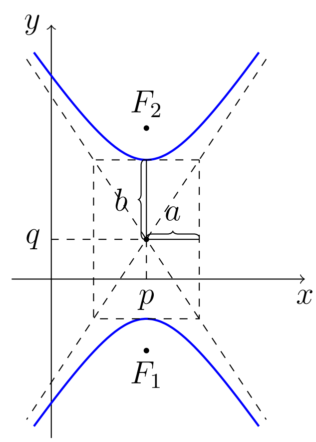
$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

Hiperbolo lahko postavimo tudi tako, da sta kraka odprta v smeri y osi. Enačba hiperbole z realno polosjo a, imaginarno polosjo b in središčem v točki $S(p,q)$ ter postavitvijo kot v sliki 17b:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1.$$



(a) Hiperbola, odprta v smeri x osi.



(b) Hiperbola, odprta v smeri y osi.

Slika 17: Hiperbola s polosema a in b, središčem v točki $S(p,q)$, z odprtostjo krakov v smeri x osi, kot na sliki (a), ali odprtostjo krakov v smeri y osi kot na sliki (b). Na sliki sta označeni tudi gorišči iperbole F_1 in F_2. Izpeljava enačbe je malce daljša kot izpeljava za krožnico in jo bomo tukaj izpustili. Vsak študent lahko izpeljavo poišče na internetu npr. v [6].

Primer: Ali je krivulja z enačbo $x^2 + x = 2 - y^2$ krožnica, elipsa ali hiperbola? Določite njeno središče.

Najprej dopolnimo izraz $x^2 + x$ do popolnega kvadrata. Pri tem se naslonimo na formulo $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Če je v našem izrazu x enak a, potem je b enak $\frac{1}{2}$, zato računamo

$$x^2 + x = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Enačba naše krivulje se zdaj glasi

$$\begin{aligned} x^2 + x &= 2 - y^2, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 2, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Prepoznamo, da gre za krožnico s središčem v točki $S\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ in polmerom $\frac{3}{2}$.

Na kazalo

3.5 Naloge

17. V kvadratni funkciji $f(x) = ax^2 + bx + 8$ določi parametra a in b tako, da bo njen graf potekal skozi točko $A(2, 5)$ in bo abscisa temena $x = -2$.

18. Reši enačbe:

    (a) $7x^2 + 12x = 0$,

    (b) $x^2 - 6x - 9 = 0$,

    (c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

19. Skiciraj graf funkcije $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

20. Okrajšaj ulomek $\frac{3x^2-11x-4}{x^2-x-12}$.

21. Določi presečišča parabole $y = x^2 + 3x - 1$ in premice $y = 6x - 3$.

22. Reši enačbo $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$.

23. Reši neenačbo:

    (a) $x^2 < 1$,

    (b) $x^2 - x - 2 \geq 0$,

    (c) $x - 2x^2 < 4$.

24. Reši enačbo $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

25. Določi ničle, začetno vrednost in nariši graf funkcije $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x+1)^2$.

26. Izračunaj $(x^4 + 1) : (x^2 + x)$.

27. Določi ničle, pole, asimptoto in skiciraj graf funkcije:

    (a) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+4x+4}$,

    (b) $f(x) = \frac{1}{x}$,

    (c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

    (d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

28. Za podane enačbe zapišite katero množico točk določa.

    (a) $x^2 + 2x + y^2 + 2 = 0$

    (b) $3x^2 - 2y^2 + 8y - 14 = 0$

    (c) $x^2 - x + y^2 + 6y + 9 = 0$

    (d) $2x^2 - 4x + y^2 - 2 = 0$

4 Eksponentna in logaritemska funkcija

4.1 Eksponentna funkcija, enačba in neenačba

Definicija: **Eksponentna funkcija** je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblike

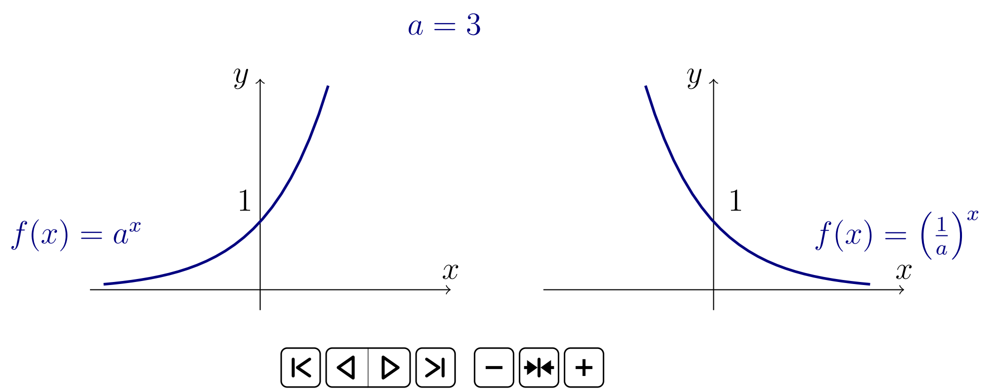
$$f(x) = a^x,\ a > 0 \text{ in } a \neq 1\,.$$

Parameter a imenujemo **osnova**.

Opomba: Če v zgornji definiciji izberemo $a = 1$, dobimo konstantno funkcijo $f(x) = 1$. Ta spada med linearne funkcije.

Graf: Oblika grafa je odvisna od osnove a. Če velja $0 < a < 1$, eksponentna funkcija pada (proti nič), če je $a > 1$ pa narašča (od nič). Vsi grafi potekajo skozi točko $(0, 1)$.

Vpliv osnove eksponentne funkcije na graf



Animacija 7: Animacija pokaže vpliv velikosti osnove eksponentne funkcije na graf.

Opomba: Pod pojmom eksponentna funkcija razumemo tudi funkcije s predpisom

$$f(x) = Aa^{Bx+C} + D.$$

Graf take funkcije dobimo s pomočjo premikov in raztegov grafa funkcije $f(x) = a^x$. Več o tem najdete v poglavju 6.

Definicija: (Preprostejša) **eksponentna enačba** je enačba oblike

$$a^x = b, \text{kjer velja } a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 0.$$

Eksponentno enačbo rešujemo s preoblikovanjem enačbe na obliko $a^s = a^t$, saj je ta enakost ekvivalentna enakosti $s = t$. Enačba ni rešljiva kadar je $b \leq 0$, saj velja $a^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

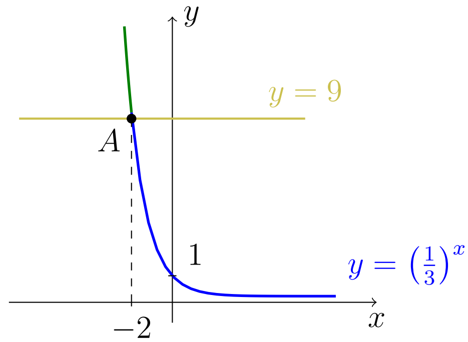
Opomba: Eksponentna neenačba je definirana analogno, kot so definirane preostale neenačbe v predhodnjih poglavjih. Rešujemo jo tako, da rešimo pripadajočo eksponentno enačbo (tj. enačbo, ki jo dobimo iz neenačbe tako, da neenakost zamenjamo z enakostjo), skiciramo graf eksponentne funkcije, ki nastopa v neenačbi, ter odčitamo rešitev neenačbe.

Na kazalo

Primer: Reši eksponentno neenačbo $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9$.
Enačba, ki pripada dani neenačbi, je $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$. Opazimo, da se data tako leva kot desna stran enačbe zapisati v obliki 3^a:

$$\text{leva stran: } \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(3^{-1}\right)^x = 3^{-x},$$
$$\text{desna stran: } 9 = 3^2.$$

Dobimo enačbo $3^{-x} = 3^2$. Ker sta osnovi enaki, velja $-x = 2$ oziroma $x = -2$.
Zdaj skiciramo krivuljo $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (ki predstavlja levo stran neenačbe) in premico $y = 9$ (ki predstavlja desno stran neenačbe). Na grafu označimo rešitev pripadajoče eksponentne enačbe, tj. točko $A(-2, 9)$ in odčitamo rešitev, tj. zapišemo abscise tistih točk, za katere ležijo točke na grafu funkcije nad premico $y = 9$. Točke, ki ležijo nad premico, skiciramo z zeleno. Rešitev neenačbe je $x \in (-\infty, -2]$.



Slika 18: Točke na krivulji $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, ki ležijo nad premico $y = 9$, so obarvane zeleno. Abscise teh točk so rešitev dane neenačbe.

4.2 Logaritemska funkcija, enačba in neenačba

Preden se lotimo definicije logaritemske funkcije, si poglejmo definicijo logaritma kot računske operacije ter nekaj njenih osnovnih lastnosti.

Definicija: Naj bo $a > 0$, $a \neq 1$ in $b > 0$. **Logaritem** števila b pri osnovi a je tako število c, za katerega velja $a^c = b$. Označimo ga $c = \log_a b$. Parameter b imenujemo **logaritmand**, parameter a pa **osnova**.

Lastnosti logaritma: Za logaritme pri osnovi $a > 0$, $a \neq 0$, za realni števili $b, c > 0$ in realno število r velja:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$,
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$,
- $r \log_a b = \log_a b^r$,
- $\log_a 1 = 0$.

Na kazalo

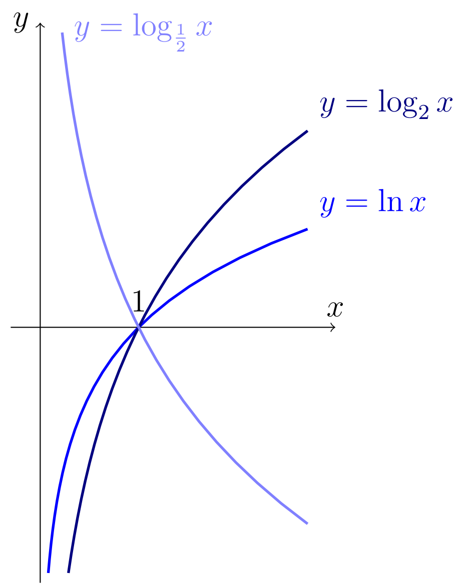
Dogovor: Za logaritma pri osnovah e in 10 uporabljamo oznaki:

- $\log_e b = \ln b$,
- $\log_{10} b = \log b$.

Definicija: **Logaritemska funkcija** je vsaka funkcija $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ oblike

$$f(x) = \log_a x,\ a > 0 \text{ in } a \neq 1\,.$$

Graf: Oblika grafa je odvisna od osnove a. Če velja $0 < a < 1$, logaritemska funkcija pada (od ∞ proti $-\infty$), če je $a > 1$ pa narašča (od $-\infty$ do ∞). Graf seka x os v 1.



Slika 19: Pri logaritemski osnovi med 0 in 1 je logaritemska funkcija padajoča, pri osnovi večji od 1 pa naraščajoč.

Definicija: (Preprostejša) **logaritemska enačba** je vsaka enačba oblike

$$\log_a x = b.$$

Logaritemsko enačbo rešujemo s preoblikovanjem enačbe na ekvivalentno obliko $x = a^b$. Logaritemska enačba je vedno rešljiva, vendar je treba vedno upoštevati, da mora biti $x > 0$, da je logaritem sploh definiran.

Opomba: Logaritemska neenačba je definirana analogno, kot so definirane preostale neenačbe v predhodnjih poglavjih. Rešujemo jo tako, da rešimo pripadajočo logaritemsko enačbo (tj. enačbo, ki jo dobimo iz neenačbe tako, da neenakost zamenjamo z enakostjo), skiciramo graf logaritemske funkcije, ki nastopa v neenačbi ter odčitamo rešitev neenačbe. Ponovno moramo upoštevati, da mora biti logaritmand pozitiven.

Na kazalo

4.3 Naloge

29. Reši enačbo:

    (a) $12^{x-8} = \frac{1}{144}$,

    (b) $5^{2x-1} = 1$,

    (c) $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x-1} = 5$.

30. Reši neenačbo:

    (a) $12^{x-8} > \frac{1}{144}$,

    (b) $5^{2x-1} \leq 1$.

31. Izrazi z $\log a$ in $\log b$:

    (a) $\log(a^3 b^4)$,

    (b) $\log \sqrt[5]{\frac{2a^3}{3b^2}}$.

32. Reši enačbo:

    (a) $\log(3x + 1) = 1$,

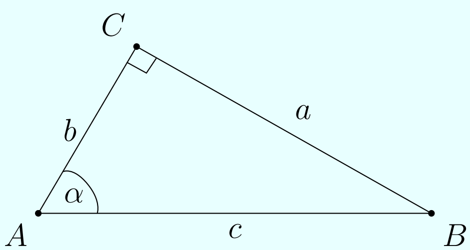
    (b) $\ln(x - 3) = 0$,

    (c) $\ln(x^2 + 2) = 0$.

5 Trigonometrija in kotne funkcije

Definicija: V pravokotnem trikotniku s katetama a in b ter hipotenuzo c definiramo **sinus kota** kot razmerje med kotu nasprotno kateto in hipotenuzo, **kosinus kota** kot razmerje med priležno kateto in hipotenuzo, **tangens kota** kot razmerje med nasprotno in priležno kateto ter **kotangens kota** kot razmerje med priležno in nasprotno kateto.

Dogovor: Za trikotnik na spodnji skici so vse definicije zapisane simbolno.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (sinus kota α)

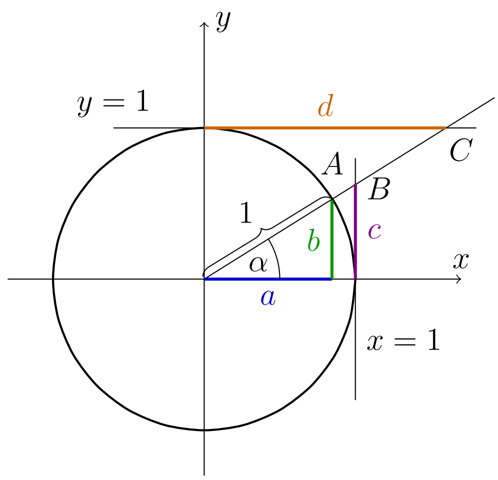
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ (kosinus kota α)

$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$ (tangens kota α)

$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$ (kotangens kota α)

Opomba: Z zgornjo definicijo definiramo sinus, kosinus, tangens in kotangens le za ostre kote. Definicijo razširimo na poljuben kot s pomočjo enotske krožnice.

Definicija: V koordinatni sistem narišimo enotsko krožnico (tj. krožnica s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom 1). Naj bo α kot z vrhom v izhodišču koordinatnega sistema, z enim krakom na pozitivnem delu abscisne osi in drugim krakom odmerjenim v nasprotni smeri urinega kazalca (tj. pozitivna smer)[4]. Točka A, v kateri drugi krak seka enotsko krožnico, ima koordinate (a, b), točka, v kateri drugi krak seka premico $x = 1$, je $B(1, c)$ in točka, v kateri seka premico $y = 1$, $C(d, 1)$. Kotne funkcije za poljuben kot definiramo s pomočjo spodnjih formul.



$\sin\alpha = b$ (sinus kota α)

$\cos\alpha = a$ (kosinus kota α)

$\mathrm{tg}\ \alpha = c$ (tangens kota α)

$\mathrm{ctg}\ \alpha = d$ (kotangens kota α)

Slika 20: Z definicijami sinusa, kosinusa, tangensa in kotangensa v enotski krožnici razširimo definicije na poljubne kote.

[4] Če je kot α negativen, ga odmerimo v smeri urinega kazalca tj. v negativni smeri.

Opomba: Vrednosti tg $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ in ctg $(k\pi)$ nista definirani, če je $k \in \mathbb{Z}$.
Lastnosti:

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ in $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,
- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ in
  $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, (adicijska izreka)
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ in $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, (dvojni koti)
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ in $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$, (komplementarni koti)
- $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ in $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, (suplementarni koti)
- $\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha$ in $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$ ter
  tg $(\alpha+\pi) =$ tg α in ctg $(\alpha+\pi) =$ ctg α (periodičnost)
- tg $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ in ctg $\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Preglednica vrednosti sinusa, kosinusa, tangensa in kotangensa nekaterih kotov:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/
ctg α	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

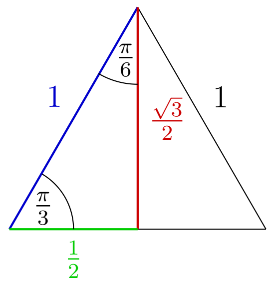
Preglednica 21: Preglednica vrednosti kotnih funkcij za kote 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ in $\frac{\pi}{2}$. Vrednosti, ki niso definirane so označene s simbolom /.

Nekaj receptov za pomnenje vrednosti iz tabele
1. recept
Za kota $\frac{\pi}{3}$ in $\frac{\pi}{6}$ uporabimo polovico enakostraničnega trikotnika, s stranico dolžine 1 (slika 22), za kot $\frac{\pi}{4}$ pa uporabimo polovico (po diagonali razrezanega) kvadrata s stranico dolžine 1 (slika 23).
2. recept
Dovolj je, da znamo izračunati vrednosti za sinus petih kotov iz tabele, vrednosti kosinusov dobimo s pomočjo formule $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, vrednosti tangensa in kotangensa pa s formulama tg $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ in ctg $\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Da izračunamo vrednosti sinusov za kote iz tabele pa si zapolnimo zgolj formulo

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{N}}{2}, \tag{2}$$

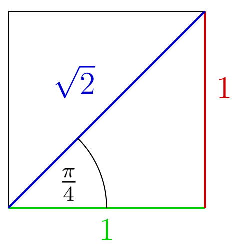
kjer je vrednost N odvisna od kota α, kot je razloženo na naslednji sliki. Vrednost N-ja za posamezen kot je označena z modro barvo.

Na kazalo



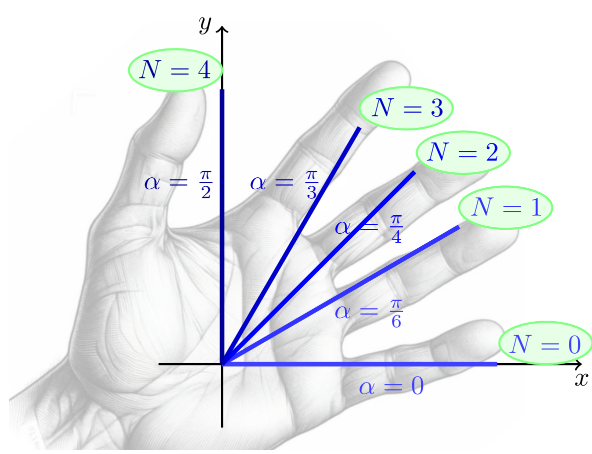
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{1}{2}$$

Slika 22: Za vrednosti sinusa, kosinusa, tangensa in kotangensa kotov $\frac{\pi}{6}$ in $\frac{\pi}{3}$ uporabimo definicije za ostre kote in gledamo ustrezne stranice. Na tej sliki sta za primer preračunana $\sin\frac{\pi}{3}$ in $\sin\frac{\pi}{6}$, na podoben način izračunamo še ostale vrednosti.



$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}} = 1$$

Slika 23: Za vrednosti sinusa, kosinusa, tangensa in kotangensa kota $\frac{\pi}{4}$ uporabimo definicije za ostre kote in gledamo ustrezne stranice. Na tej sliki sta za primer izračunana $\sin\frac{\pi}{4}$ in $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, na podoben način izračunamo še ostale vrednosti.



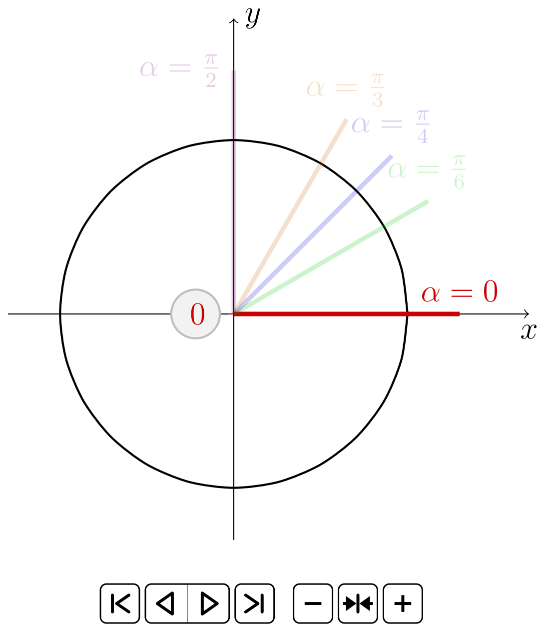
Slika 24: Za kote 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ in $\frac{\pi}{2}$ izberemo primeren N in ga vstavimo v formulo (2), da izračunamo sinus izbranega kota. Slika roke v ozadju je nastala s pomočjo umetne inteligence (MS Copilot).

3. recept

Tudi pri tem receptu je dovolj, da si zapomnimo le vrednosti za sinus omenjenih petih kotov, ostale vrednosti pridobimo s prej zapisanimi formulami. Tokrat uporabimo enotsko krožnico. V animaciji 8 so označene zgolj vrednosti za sinuse. Preostale vrednosti izračunamo s pomočjo v 1. receptu zapisanih formul. Pri določanju vrednosti na y osi si pomagamo z neenakostjo

$0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.$

Recept 3



Animacija 8: Za vsakega izmed kotov 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ in $\frac{\pi}{2}$ na osi y odčitamo vrednost, ki sovpada s sinusom izbranega kota.

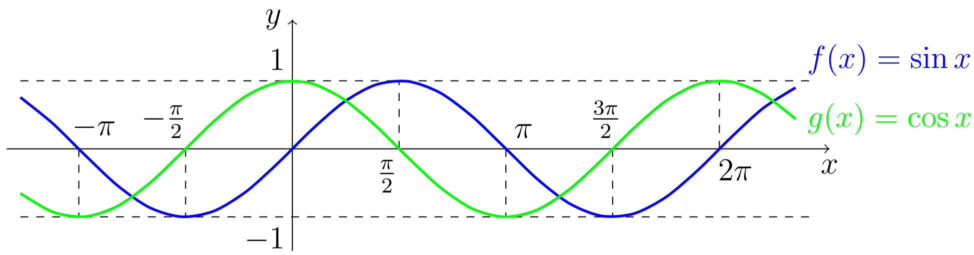
Definicija: **Trigonometrične funkcije** so vse funkcije[5] $f, g, h, k : D \to \mathbb{R}$ s predpisi $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \operatorname{tg} x$ in $k(x) = \operatorname{ctg} x$. Prvi dve funkciji sta definirani za vsa realna števila. Funkcija $h(x) = \operatorname{tg} x$ je definirana za vsa realna števila, razen za tiste x, v katerih je vrednost $\cos x$ enaka 0. To pomeni, da je definicijsko območje $D = D_h$ funkcije h enako $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Definicijsko območje $D = D_k$ funkcije $k(x) = \operatorname{ctg} x$ je (po podobnem premisleku) enako $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Grafi trigonometričnih funkcij: Grafa funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$ bomo narisali v prvi koordinatni sistem (slika 25), grafa funkcij $h(x) = \operatorname{tg} x$ (slika 26) in $k(x) = \operatorname{ctg} x$ (slika 27) pa vsakega v svoj koordinatni sistem.

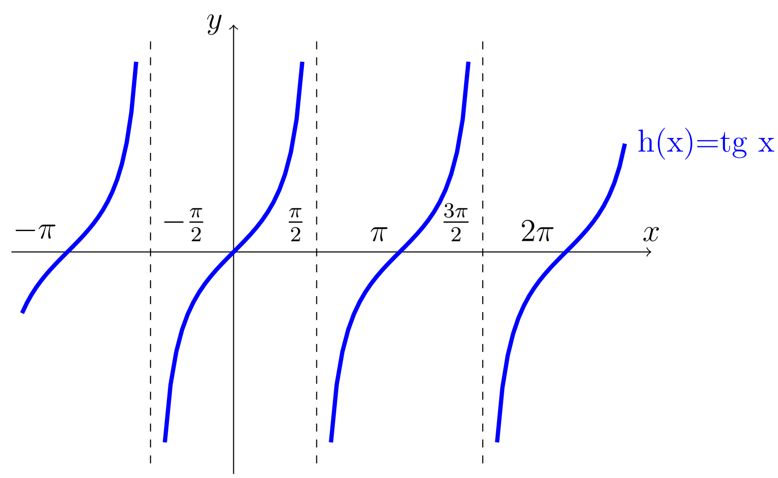
Definicija: **Trigonometrična enačba** je vsaka enačba oblike $f(x) = b$, kjer je $f(x)$ ena izmed kotnih funkcij. Enačba je pri $f(x) = \sin x$ ali $f(x) = \cos x$ rešljiva le za $-1 \leq b \leq 1$, pri $f(x) = \operatorname{tg} x$ ali $f(x) = \operatorname{ctg} x$ pa je rešljiva za vsak $b \in \mathbb{R}$.

Opomba: Definicije za trigonometrične neenačbe tukaj ne bomo zapisali, vendar sta tako sama definicija kot način reševanja neenačbe analogna prejšnjim.

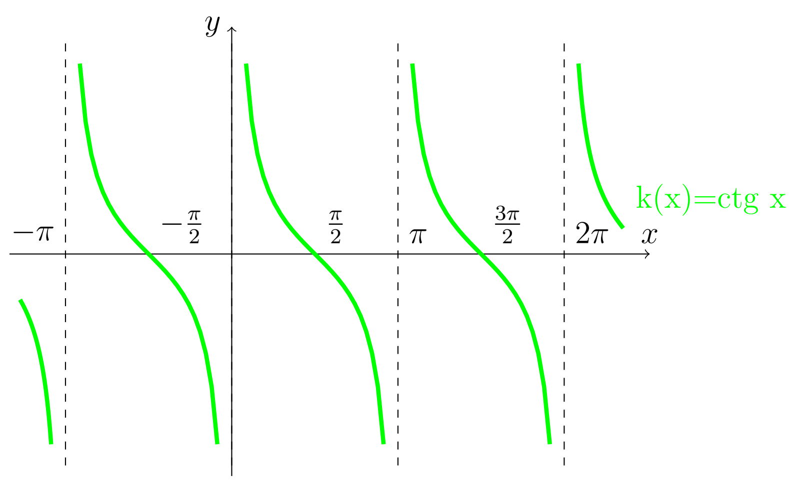
[5]Opisane funkcije so podane v najpreprostejši obliki. Za grafe funkcij kompleksnejših oblik poglejte poglavje 6.



Slika 25: Graf funkcije $f(x) = \sin x$ je narisan z modro, graf funkcije $g(x) = \cos x$ pa z zeleno barvo.



Slika 26: Graf funkcije $h(x) = \text{tg } x$.



Slika 27: Graf funkcije $k(x) = \text{ctg } x$.

5.1 Naloge

33. Izrazi s funkcijami kotov med 0 in $\frac{\pi}{4}$:

    (a) $\sin \frac{4\pi}{3}$,

    (b) $\cos \frac{50\pi}{7}$,

    (c) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

34. Poenostavi izraz $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

35. Reši enačbo:

    (a) $\sin x = \frac{1}{2}$,

    (b) $\cos \frac{3x}{5} = 0$.

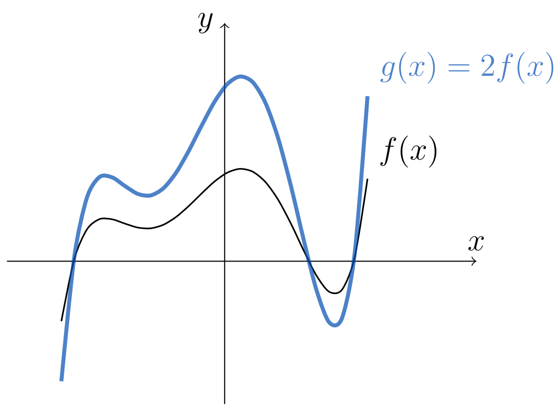
Na kazalo

6 Operacije na grafih funkcij

V prejšnjih poglavjih smo videli nekaj grafov funkcij v njihovih preprostejših oblikah. V tem poglavju bomo pogledali nekaj preprostih operacij, s katerimi bomo spremenili funkcijski predpis ter pogledali še, kako se te operacije odražajo na grafih.

6.1 $\mathbf{g(x) = Af(x)}$

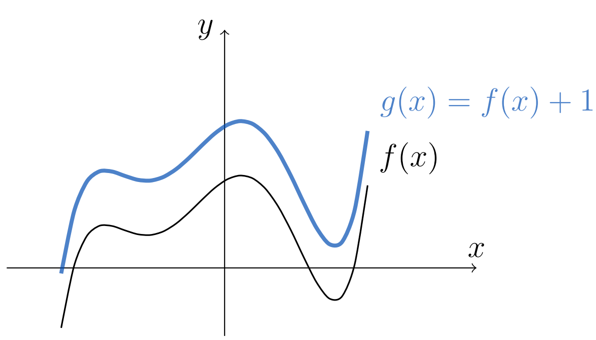
Ko funkcijski predpis pomnožimo z neničelnim realnim številom A, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ raztegnemo v smeri y osi za faktor A. Če je A negativno število, gre za negativen razteg, tj. razteg za $|A|$ ter zrcaljenje čez os x. Če je $0 < A < 1$, gre za skrčitev grafa. Primer za $A = 2$ je prikazan v sliki 28. Če je $A = 0$, potem dobimo ničelno funkcijo.



Slika 28: Razteg grafa funkcije v smeri osi y za faktor 2.

6.2 $\mathbf{g(x) = f(x) + B}$

Ko funkcijskemu predpisu prištejemo neničelno realno število B, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ premaknemo v smeri y osi za B. Če je B pozitivno število, gre za premik navzgor, če je B negativno, pa gre za premik navzdol. Primer za $B = 1$ je prikazan v sliki 29.

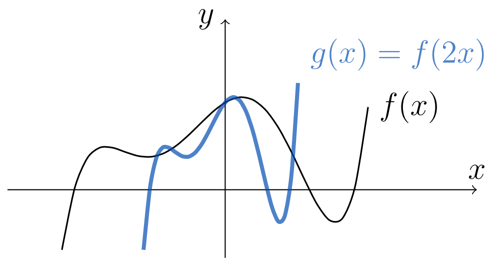


Slika 29: Premik grafa funkcije v smeri osi y za 1.

Na kazalo

6.3 $\mathbf{g(x) = f(ax)}$

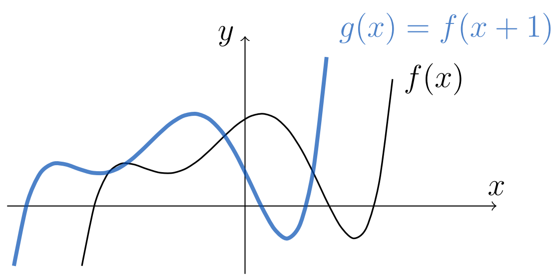
Ko v funkcijskemu predpisu spremenljivko x pomnožimo z neničelnim realnim številom a, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ skrčimo v smeri osi x za faktor a. Če je $0 < a < 1$ gre za razteg v smeri osi x. Primer za $a = 2$ je predstavljen v sliki 30. Če je $a = 0$, potem gre za konstantno funkcijo $g(x) = f(0) = C$.



Slika 30: Skrčitev grafa funkcije v smeri osi x za faktor 2.

6.4 $\mathbf{g(x) = f(x + b)}$

Ko v funkcijskem predpisu spremenljivki x prištejemo neničelno realno število b, dobimo graf nove funkcije tako, da graf funkcije $f(x)$ premaknemo v smeri osi x za b. Če je b pozitiven, gre za premik v levo, če je b negativen, pa gre za premik v desno. Primer za $b = 1$ je predstavljen v sliki 31.



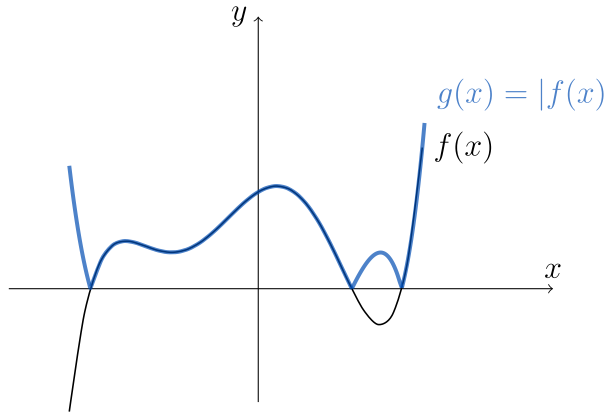
Slika 31: Premik grafa funkcije v levo za 1.

Pri funkcijskih predpisih kompleksnejših oblik, npr. $\mathbf{k(x) = Af(a(x + b)) + B}$ se je najbolje držati vrstnega reda: razteg v smeri osi x za a, premik v smeri osi x za b, razteg v smeri osi y za A ter premik v smeri osi y za B.

6.5 $\mathbf{g(x) = |f(x)|}$

Ko rišemo graf absolutne vrednosti neke funkcije, ga dobimo tako, da tiste dele grafa funkcije $f(x)$, ki ležijo pod osjo x, zrcalimo čez os x, dele grafa, ki ležijo nad osjo x, pa pustimo pri miru. Tak primer je predstavljen na sliki 32.

Na kazalo

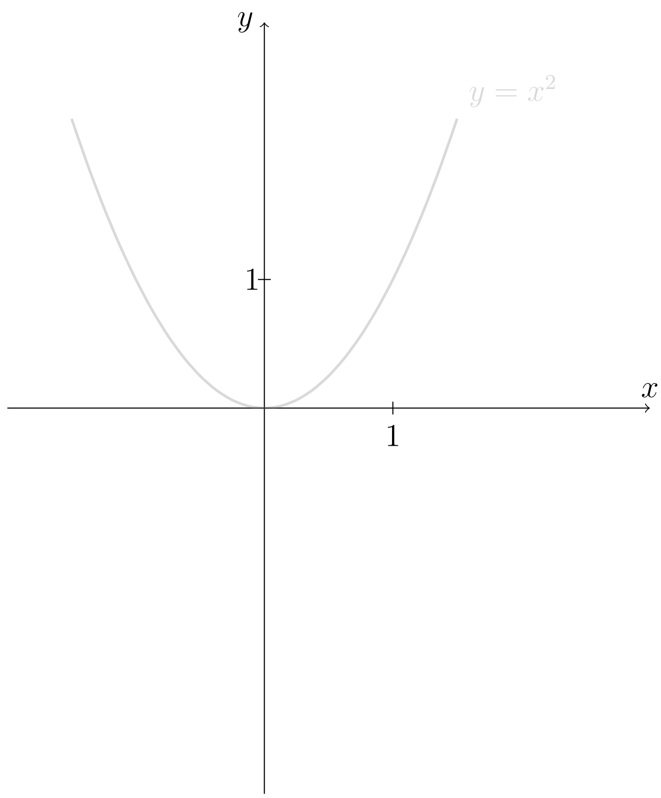


Slika 32: Zrcaljenje dela grafa funkcije, ki leži pod osjo x, čez njo.

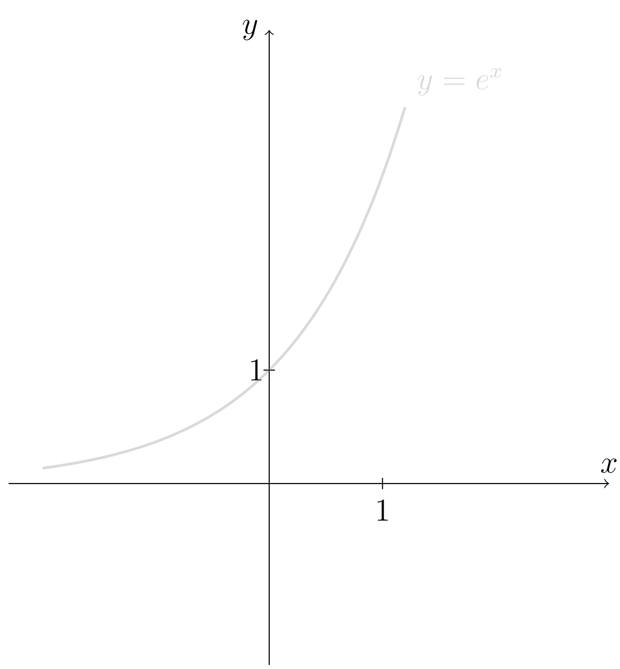
6.6 Naloge

36. Skiciraj graf dane funkcije. Za pomoč so v sivi barvi skicirani grafi osnocnih funkcij.

(a) $f(x) = 1 - x^2$

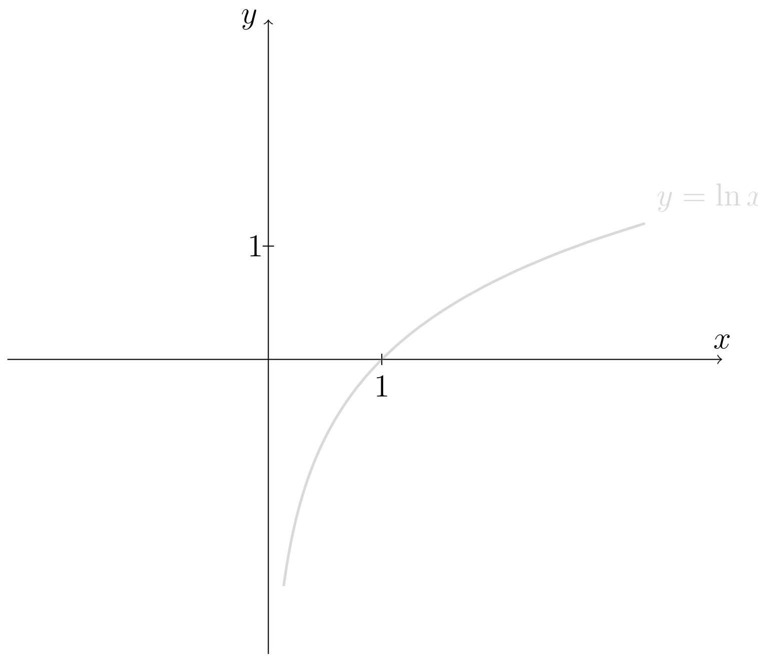


(b) $f(x) = e^{2-x} - 1$

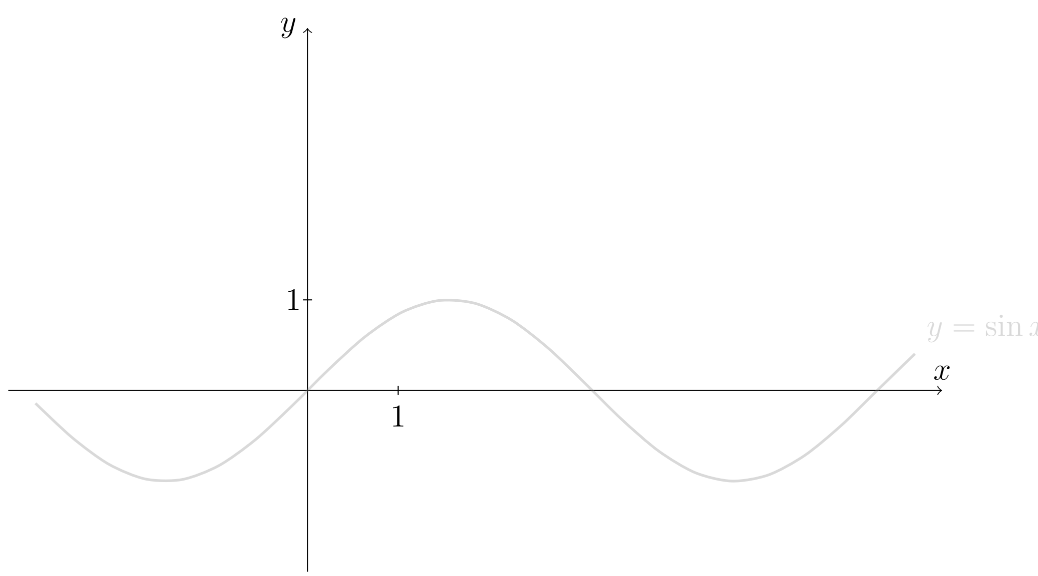


Na kazalo

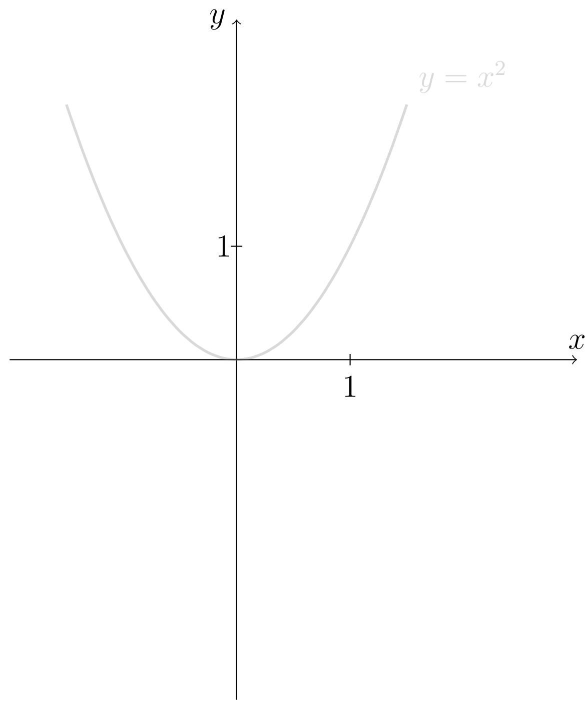
(c) $f(x) = 1 - \ln(2x)$



(d) $f(x) = 2\sin(x - \pi) + 1$



(e) $f(x) = |2 - x^2|$



7 Rešitve nalog

1. (a) $(b+c)(a+b)$
   (b) $(a+b)c(d-e)$
   (c) $ab(c+d-e)$

2. (a) $(7a-2b)(7a+2b)$
   (b) $(a+3)(a^2-3a+9)$
   (c) $x^2(x-2)(x^2+2x+4)$
   (d) $4x(x+2)(x+3)$

3. (a) $\frac{a+b}{d}$
   (b) $\frac{a^2}{a+3}$

4. (a) $\frac{3}{x(x+2)}$
   (b) $\frac{y^2}{2x+1}$
   (c) $\frac{x}{y}$

5. (a) $x^{\frac{3}{4}}$
   (b) $x^{\frac{5}{12}}$

6. (a) $5\sqrt{7}$
   (b) $14\sqrt{2}$

7. (a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
   (b) $-\frac{\sqrt{2}+4}{7}$

8. $k=-3$, $n=-1$

9. (a) $y=x+1$
   (b) $y=2x-1$

10. Premica skozi A, B je vzporedna premici skozi D, C ter premica skozi A, D je vzporedna premici skozi B, C.

11. (a) $x=-\frac{5}{2}$
    (b) $x=-2$

12. Če je $a=3$, enačbo rešijo vsa realna števila x, če pa je $a\neq 3$, pa je rešitev $x=1$.

13. $x<2$

14. (a) Za $a=3$ neenačbo rešijo vsa realna števila, za $a>3$ jo rešijo $x<\frac{4}{a-3}$, za $a<3$ pa $x>\frac{4}{a-3}$.
    (b) Za $a=2$ neenačbo rešijo vsa realna števila, za $a>2$ jo rešijo $x\leq a+2$, za $a<2$ pa $x\geq a+2$.

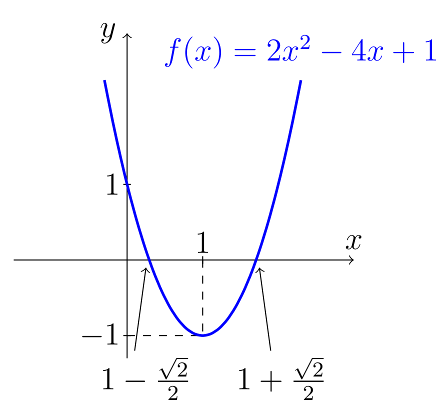
15. (a) $x=1$, $y=3$
    (b) $x=5$, $y=-6$

16. (a) Pri $a\neq\pm1$ je rešitev $x=-\frac{2+a^2}{1-a^2}$ in $y=\frac{3a}{1-a^2}$, pri $a=\pm1$ pa sistem nima rešitev.
    (b) Pri $a\neq\pm2$ je rešitev $x=\frac{3}{2+a}$ in $y=\frac{6}{2+a}$, pri $a=2$ sistem rešijo vsi pari $x\in\mathbb{R}$ in $y=3-2x$, pri $a=-2$ pa sistem nima rešitev.

17. $a=-\frac{1}{4}$, $b=-1$

18. (a) $x_1=0$, $x_2=-\frac{12}{7}$
    (b) $x_{1,2}=3\pm3\sqrt{2}$
    (c) Enačba nima realnih rešitev.

19.



20. $\frac{3x+1}{x+3}$

21. $T_1(2,9)$, $T_2(1,3)$

22. $x=0$

Na kazalo

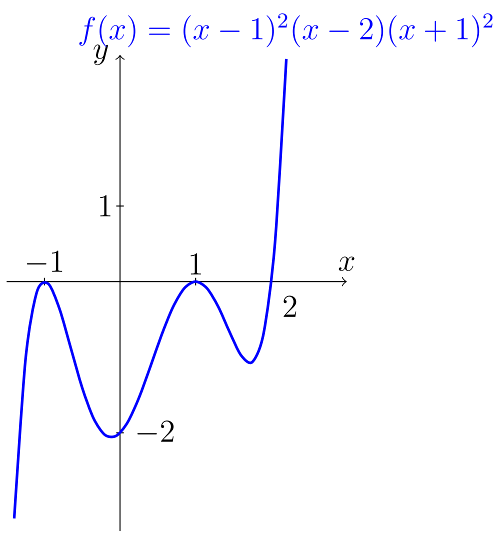
23. (a) $x \in (-1, 1)$

(b) $x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

(c) Vsi realni x.

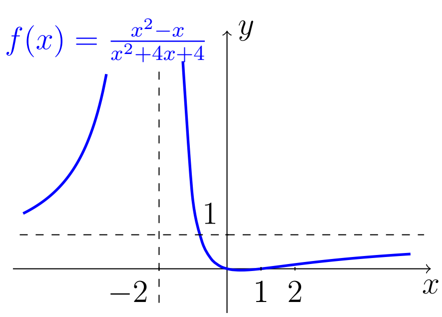
24. $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm 1$

25. <u>ničle:</u> $x_{1,2} = -1$, $x_{3,4} = 1$, $x_5 = 2$, <u>začetna vrednost:</u> $f(0) = -2$

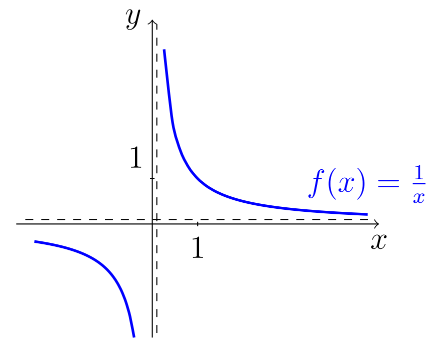


26. $x^2 - x + 1 + \frac{1-x}{x^2+x}$

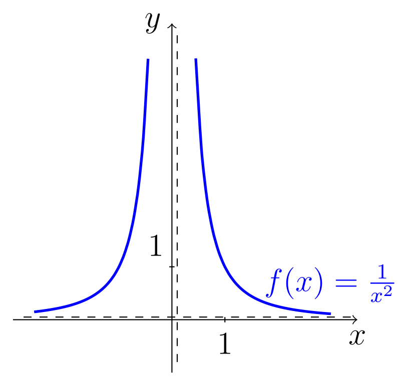
27. (a) <u>ničle:</u> $x_1 = 0$ (1. st.) in $x_2 = 1$ (1. st.), <u>poli:</u> $x = -2$ (2. st.), <u>asimptota:</u> $y = 1$ in <u>začetna vrednost:</u> $f(0) = 0$



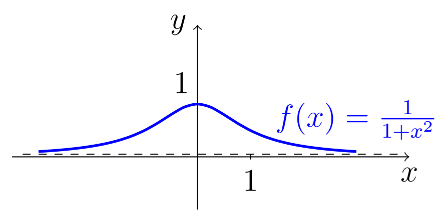
(b) <u>ničle:</u> jih ni, <u>poli:</u> $x = 0$ (1. st.) in <u>asimptota:</u> $y = 0$



(c) <u>ničle:</u> jih ni, <u>poli:</u> $x = 0$ (2. st.) in <u>asimptota:</u> $y = 0$



(d) <u>ničle:</u> jih ni, <u>poli:</u> jih ni, <u>asimptota:</u> $y = 0$ in <u>začetna vr.:</u> $f(0) = 1$



28. (a) Prazna množica.

(b) Hiperbola s središčem v $S(0, 2)$, realno polosjo $\sqrt{2}$, imaginarno polosjo $\sqrt{3}$, odprto v smeri osi x.

(c) Krožnica s središčem $S\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ in polmerom $r = \frac{1}{2}$.

(d) Elipsa s središčem $S(1, 0)$, veliko polosjo (vzporedna osi y) 2 in malo polosjo (vzporedna osi x) $\sqrt{2}$.

29. (a) $x = 6$

(b) $x = \frac{1}{2}$

(c) $x = 1$

30. (a) $x > 6$
   (b) $x \leq \frac{1}{2}$

31. (a) $3 \log a + 4 \log b$
   (b) $\frac{1}{5} \left(\log \frac{2}{3} + 3 \log a - 2 \log b \right)$

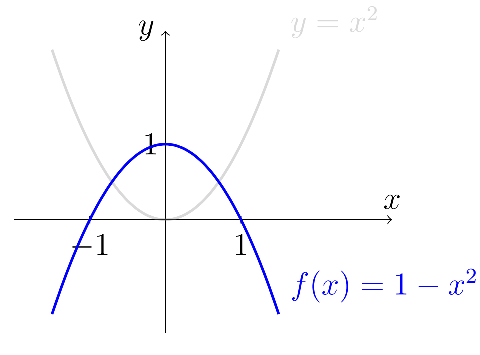
32. (a) $x = 3$
   (b) $x = 4$
   (c) Enačba ni rešljiva.

33. (a) $-\cos \frac{\pi}{6}$
   (b) $-\cos \frac{\pi}{7}$
   (c) $\sin \frac{\pi}{6}$

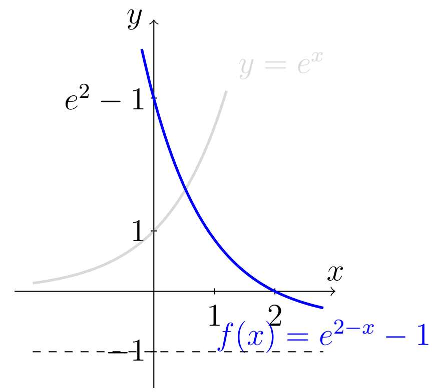
34. ctg x

35. (a) $x_{1,k} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_{2,k} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   (b) $x_k = \frac{5\pi}{6} + \frac{5k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

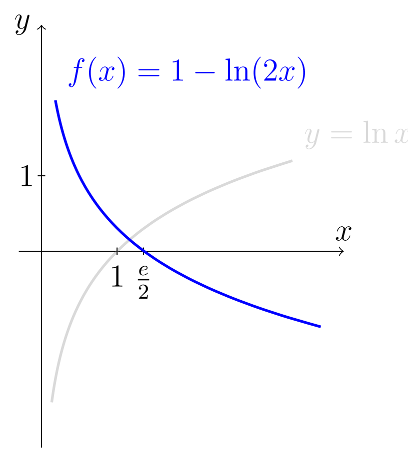
36. (a)



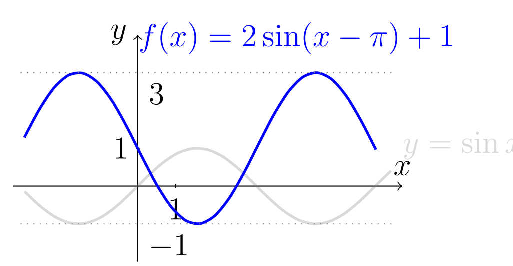
(b)



(c)

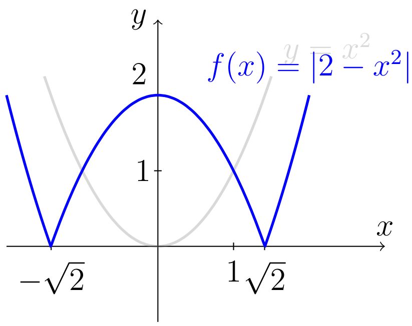


(d)



(e)

Na kazalo


y
$y = x^2$
$f(x) = |2 - x^2|$
2
1
x
$-\sqrt{2}$
1
$\sqrt{2}$

Literatura

[1] Horst Stöcker, *Matematični priročnik z osnovami računalništva*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 2006.

[2] Peter Legiša, *Matematika: prvi letnik. Realna števila, linearna funkcija*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.

[3] `https://tex.stackexchange.com/questions/44673/sieve-of-eratosthenes-in-tikz`, pridobljeno 9.7.2024.

[4] `https://github.com/ridlo/tikz_by_example/blob/master/conicSection.tex`, pridobljeno 4.9.2024.

[5] `https://si.openprof.com/wb/elipsa?ch=108`, pridobljeno 5.9.2024.

[6] `https://si.openprof.com/wb/hiperbola?ch=109`, pridobljeno 5.9.2024.

Stvarno kazalo

Priporočeno predznanje iz srednješolske matematike
Priročnik za študente FGG
Univerzitetni učbenik

Avtorica: Mojca Premuš
Recenzenta: Ganna Kudryavtseva, Nik Stopar
Oblikovalec naslovnice: Niko Fabiani

Založnik: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdajatelj: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo UL

Ljubljana, 2024
Druga e-izdaja.
Publikacija je brezplačna.

Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na https://ebooks.uni-lj.si
DOI: 10.15292/9789612974329

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 212658947
ISBN 978-961-297-432-9 (PDF)