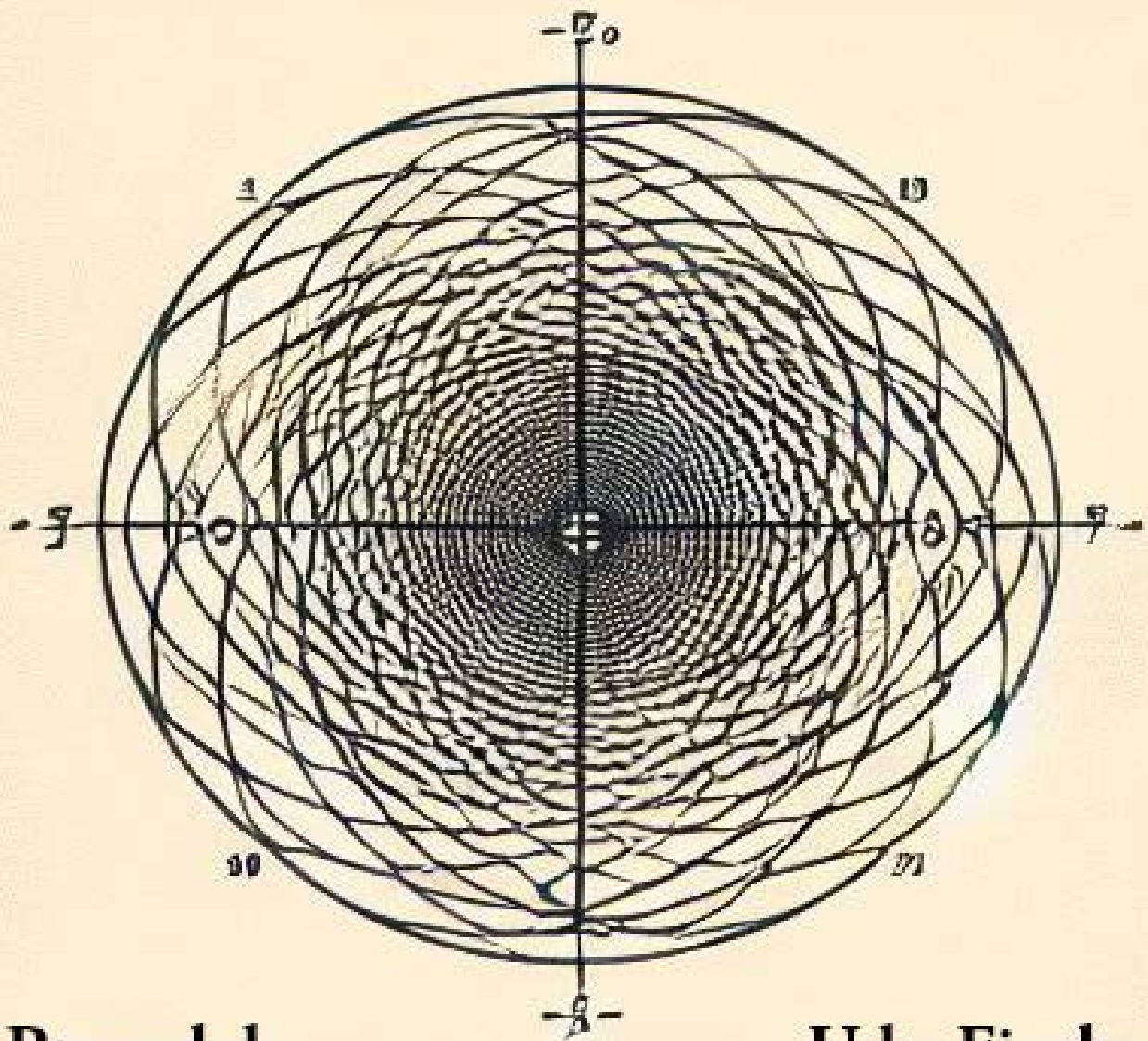


Načela in metode dinamike

Njihova uporaba za sisteme s
koničnim številom prostorskih stopenj



Prevedel:
Milan Batista

Udo Fischer
Wolfgang Stephan



UNIVERZA
V LJUBLJANI

FPP

Fakulteta za pomorstvo
in promet

Načela in metode dinamike

Njihova uporaba za sisteme
s končnim številom prostostnih stopenj

Udo Fischer
Wolfgang Stephan

(1972)

2024

Načela in metode dinamike: njihova uporaba za sisteme s končnim številom prostostnih stopenj

Avtorja: Udo Fischer, Wolfgang Stephan

Prevajalec in urednik: prof. dr. Milan Batista

Oblikovanje naslovnih strani: Microsoft Copilot

Založnik: Založba Univerze v Ljubljani (University of Ljubljana Press)

Za založnika: prof. dr. Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani

Izdajatelj: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

Za izdajatelja: prof. dr. Peter Vidmar, dekan Fakultete za pomorstvo in promet Univerze v Ljubljani

© Udo Fischer; Wolfgang Stephan

Portorož, Ljubljana, 2024

Publikacija je brezplačna.

Prva e-izdaja.

Publikacija je izšla s podporo Javne agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

Prva e-izdaja. Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na:
<https://ebooks.uni-lj.si/>

DOI: 10.70587/9789612974503

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 214417411
ISBN 978-961-297-450-3 (PDF)

To delo je prevod prvih štirih poglavij ter delov petega in šestega poglavja knjige *Prinzipien und Methoden der Dynamik*, ki sta jo napisala Prof. Dr. Udo Fisher in Doc. Dr. Wolfgang Stephan s Tehniške univerze Otto von Guericke v Magdeburgu, izdane leta 1972 pri založbi Fachbuchverlag iz Leipziga.

Omenjena poglavja obravnavajo aksiome in izreke mehanike, metode analize vezanih sistemov ter uporabo teh metod pri reševanju praktičnih problemov. Izpuščena poglavja se osredotočajo na metode reševanja diferencialnih enačb gibanja, stabilnost in naključne obremenitve.

Še nekaj o samem prevodu. Slike so povzete iz izvirnika. Oznaki za gibalno količino \mathbf{G} , vrtilno količino \mathbf{D} in vztrajnostni tenzor J so v prevodu spremenjene v \mathbf{p} , \mathbf{L} in \mathcal{J} . Ničelne vektorske količine so namesto z 0 označene kot $\mathbf{0}$. Diferencialni operator je v prevodu namesto z d označen z d . Stvarno kazalo je prilagojeno spremenjeni vsebini prevoda. Opombe, ki niso del izvirnika, so posebej označene z (OP).

Vsaka pripomba ali predlog za izboljšanje prevoda je dobrodošla.

Milan Batista

Portorož, avgust 2023

Predgovor

Razvoj znanosti in tehnologije postavlja vse večje zahteve glede znanstvene usposobljenosti inženirjev, ki delujejo v industriji. Zaradi zahtev po učinkoviti izrabi materialov in uvajanju novih visoko zmogljivih materialov postaja raziskovanje vse bolj zapletenih mehanskih modelov vse pomembnejše. Razvoj elektronske računalniške tehnologije je bistveno razširil možnosti za raziskovanje modelov, ki se približujejo dejanskemu obnašanju mehanskih sistemov. Ta razvoj zahteva globlje teoretično razumevanje tehnične mehanike.

S to knjigo želiva podati jedrnat prikaz osnov mehanike, ki jih znanstveno delujoči inženir potrebuje v praksi. Knjige, ki so s tega področja na voljo pri nas, so bodisi bolj namenjene fizikom kot inženirjem in zato vsebujejo le malo tehničnih primerov uporabe, bodisi so zasnovane kot učbeniki za študente in temeljijo na induktivnem pristopu. Takšni učbeniki, ki v svoji zasnovi napredujejo od preprostega k zahtevnejšemu, so za študij posameznega znanstvenega področja nepogrešljivi. Vendar pa je za naprednejšega strokovnjaka velika prednost, če ima svoje področje, ki ga v posameznih delih že pozna, pregledno predstavljeno na enotni osnovi.

Zato sva knjigo zasnovala deduktivno ter v ospredje obravnave postavila temeljne aksiome mehanike. Prepričana sva, da ta pristop bralcu omogoča jasen pregled nad osnovnimi metodami analize mehanskih sistemov, oblikovanjem enačb gibanja in njihovim reševanjem. Hkrati upava, da bo bralcu na ta način olajšan dostop do strokovne literature.

Brez prikaza zgodovinskega razvoja mehanike sva najpomembnejša načela izpeljala iz vrste aksiomov, ki zadostujejo za enotno zasnovo klasične mehanike¹. Iz teh načel sva za sisteme s končnim številom prostostnih stopenj po različnih poteh izpeljala diferencialne enačbe gibanja, prilagojene različnim vrstam problemov. Nato sva obravnavala nekaj splošnih metod za reševanje teh diferencialnih enačb in podala kratek pregled teorije stabilnosti. Primeri, ki sva jih zbrala v ločenem poglavju, so namenjeni boljšemu razumevanju teorije.

¹Bralec lahko najde pregled zgodovinskega razvoja pomembnih fizikalnih pojmov in idej v KUSNECOV [1].

V skladu z zgoraj navedenim ciljem je ta knjiga namenjena študentom tehniških fakultet v okviru strokovnega in raziskovalnega študija ter diplomantom inženirskih šol, visokih tehniških šol in tehniških univerz. Pri pripravi rokopisa sva imela pogosto priložnost razpravljati o posebnih problemih s kolegi s področja mehanike trdnih teles na oddelku za strojništvo, težko industrijo, transportno tehniko in gradbene stroje Tehniške univerze Otto von Guericke Magdeburg. Ob tej priložnosti bi se rada iskreno zahvalila za dragocene pobude, pridobljene v teh pogovorih. Posebno zahvalo dolgujeva dr. inž. L. Sperlingu za kritični pregled rokopisa.

Kazalo

1	Uvod	1
2	Osnovni pojmi in definicije	3
2.1	Prostor in čas	3
2.2	Kinematične osnove	4
2.2.1	Kinematika materialne točke	4
2.2.2	Virtualni pomiki	10
2.3	Masa	11
2.4	Sila	16
3	Aksiomi mehanike	21
3.1	Temeljni aksiom mehanike	21
3.2	Newtonovi aksiomi mehanike	22
3.2.1	Newtonov prvi aksiom: zakon vztrajnosti	22
3.2.2	Drugi Newtonov aksiom: temeljna enačba dinamike	23
3.2.3	Newtonov tretji aksiom: zakon vzajemnega učinka	23
3.3	D'Alembertov aksiom	25
3.4	Neinercialni sistemi, Galilejevo načelo relativnosti	26
4	Izreki mehanike	29
4.1	Izreki o skupni gibalni količini, vrtilni količini in energiji mehanskega sistema	29
4.1.1	Izrek o masnem središču	29
4.1.2	Izrek o ohranitvi gibalne količine in izrek o ohranitvi vrtilne količine	30
4.1.3	Izrek o kinetični energiji (zakon o ohranitvi energije)	31
4.2	Načela	33
4.2.1	Uvodna pojasnila	33
4.2.2	d'Alembertovo načelo	34
4.2.3	Načelo virtualnega dela	35
4.2.4	Hamiltonovo načelo	36
4.2.5	Jourdainovo načelo in Gaussovo načelo najmanjše prisile	38

5	Sistemi s končnim številom prostostnih stopenj	41
5.1	Modeli s končnim številom prostostnih stopenj	41
5.2	Kinematika sistemov s končnim številom prostostnih stopenj	41
5.2.1	Kinematika holonomnih in linearno neholonomnih sistemov	41
5.2.2	Splošne pogojne enačbe	45
5.2.3	Kvazihitrosti, kvazikoordinate	46
5.3	Ravnotežne lege sistemov s končnim številom prostostnih stopenj	47
5.4	Enačbe gibanja sistemov s končnim številom prostostnih stopenj	53
5.4.1	Lagrangeve enačbe gibanja prve vrste	53
5.4.2	Lagrangeve enačbe gibanja druge vrste	55
5.4.3	Kanonične enačbe gibanja za holonomne sisteme s konservativnimi vtisnjenimi silami	59
5.4.4	Hamiltonova-Jacobijeva parcialna diferencialna enačba	61
5.4.5	Predstavitev Lagrangevih enačb gibanja s pomočjo kvazikoordinat	64
5.4.6	Lagrangeve enačbe gibanja druge vrste brez uporabe Lagrangevih množiteljev	69
5.4.7	Appellove enačbe gibanja	70
5.4.8	Enačbe gibanja za sisteme z nelinearnimi neholonomnimi vezmi	72
5.5	Enačbe gibanja za togo telo	74
5.5.1	Kinetična energija in kotni moment togega telesa, vztrajnostni momenti	74
5.5.2	Eulerjevi koti	84
5.5.3	Eulerjeve enačbe	87
5.5.4	Ravninsko gibanje togega telesa	90
5.6	Metode reševanja diferencialnih enačb gibanja (izpuščeno)	92
5.7	Stabilnost gibanja sistemov s končnim številom prostostnih stopenj (izpuščeno)	92
6	Primeri uporabe	93
6.1	Ravnotežna lega vrteče elastične gredi	94
6.2	Dvigalo	98
6.3	Prostorsko preprosto nihalo s premikajočim se obesiščem	103
6.4	Ravninsko nihalo s premikajočim se obesiščem	106
6.5	Bič	109
6.6	Vibracijska igla	112
6.7	Težka os na nagnjeni ravnini	117
6.8	Pogonski sistem z nenadno začetno konstantno obremenitvijo	126
6.9	Linearni nihajni sklop z dvema prostostnima stopnjama (izpuščeno)	131
6.10	Dinamični utrjevalnik tal z ekscentričnim vzbujanjem	131

6.11 Nelinearni pogonski sistem s tremi prostostnimi stopnjami (izpuščeno)	135
6.12 Rotor centrifuge z ekscentričnostjo (izpuščeno)	135
6.13 Stohastično vzburjan linearni pogonski sistem (izpuščeno)	135
6.14 Stabilnost vertikalnih nihanj elastičnega nihala (izpuščeno)	135
7 Priloga: Teorija naključnih funkcij (izpuščeno)	137
Literatura	139

Uvod

Mehanika je študij gibanja materialnih teles in fizikalnih vzrokov zanj. Pri tem gibanje pomeni mehansko gibanje, tj. spremembo lege makroskopskih teles kot celote ali njihovo deformacijo. Gibanje vključuje tudi stanje mirovanja. V tem primeru mehanika določa pogoje, pod katerimi lahko materialna telesa mirujejo. V splošnem pa je mehanika veja fizike.

Razvoj fizikalnega znanja v 19. in 20. stoletju je porušil predstavo o absolutnem prostoru in absolutnem času, ki sta bila del osnovnih pojmov *klasične mehanike*, ter spodbudil razvoj relativnostne teorije in kvantne mehanike. Zakoni relativnostne teorije se združijo z zakoni klasične mehanike, kadar se uporabljajo za telesa, katerih hitrosti so majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Uporaba kvantne mehanike je potrebna le, če so mase preučevanih teles tako majhne, da so po velikosti primerljive z masami atomov.

Tehnični sistemi so praviloma sestavljeni iz teles, katerih dimenzije presegajo atomski velikostni red, in se gibljejo s hitrostmi, ki so majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Zato za preučevanje gibanja tehničnih sistemov zadoščajo osnovna načela klasične mehanike.

Če predpostavimo, da je klasična mehanika popolna v svoji osnovni strukturi, potem je očitno, da jo lahko zgradimo kot *deduktivni sistem*. Po [2] je deduktivni sistem vsaka množica izjav, ki vsebuje vse njihove posledice. V skladu s tem bi morala tako zasnovana mehanika vsebovati vse izreke, ki so potrebne za izračun gibanja tehničnih enot. Vendar pa raznolikosti možnih interakcij med deli mehanskega sistema in njegovo okolico na splošno ni mogoče razumeti. Vzajemno delovanje med deli teles, katerih učinek je pospeševanje, imenujemo *sile*. V mehaniki je pomembno le to medsebojno delovanje. Funkcijsko odvisnost sile od geometrijskih in fizikalnih parametrov ter časa imenujemo *zakon sile*. Ker je nemogoče v celoti in na splošno zajeti vse zakone sil, ki delujejo v mehanskem sistemu, se bistvene mehanske lastnosti realnega sistema prenesejo na *model sistema*. Takšno modeliranje vključuje opredelitev posebnih zakonov sil in nekatere

geometrijske poenostavitve. Deduktivno izgradnjo mehanike je tako mogoče izvesti le za celoto vseh modelnih teles, za katera so podani zakoni sil. Pri tem sile ne smejo biti odvisne od fizikalnih količin, ki mehaniko povezujejo z drugimi fizikalnimi zakoni (npr. z zakoni termodinamike ali elektrodinamike).

Ko zakone sil obravnavamo kot dane, lahko vse druge izjave reduciramo na nekaj nedokazljivih temeljnih zakonov, ki jih imenujemo aksiomi. Vse izjave deduktivnega sistema, ki izhajajo iz teh aksiomov, imenujemo *izreki*. Celota aksiomov tvori sistem aksiomov. Izbor določenega števila izjav kot aksiomov iz množice izjav deduktivnega sistema je mogoč na različne načine. V naslednjih poglavjih nas bodo pri izbiri aksiomatskih sistemov, primernih za gradnjo mehanike, vodili razlogi namenskosti.

Načela mehanike so tisti splošno veljavni izreki, ki so v povezavi s temeljnim pojmom virtualnih pomikov še posebej primerni za izpeljavo enačb gibanja. Njihova prednost je najizrazitejša pri modelih s togimi vezmi, ki se pogosto uporabljene v inženirskih sistemih.

Kot *tehniško mehaniko* označujemo inženirsko vedo, ki se ukvarja s preučevanjem gibanja tehničnih sistemov, kot so mehanizmi, stroji in podporne konstrukcije, ter sil, ki delujejo med njihovimi elementi. Poleg tega obravnava napetosti in deformacije, ki jih te sile povzročajo.

Vsebina tehniške mehanike v različnih pogledih presega vsebino klasične mehanike.

Prvič, ponuja jasne in smiselne metode za analizo tehničnih sistemov in vključuje dodatne predpostavke za poenostavitve, ki jih klasična mehanika ne vsebuje.

Drugič, vsebuje navedbe glede tega, katere lastnosti realnega sistema mora ponazoriti model, tako, da je pri izračunu z zadostno natančnostjo zajeto delovanje dejanskega sistema.

Tretjič, vsebuje merila za to, ali so ugotovljene vrednosti napetosti in deformacije v takšnih mejah, da je

1. je zagotovljeno ustrezno delovanje, da je
2. skladnost med modelom in dejanskim sistemom dovolj natančna in da je
3. zagotovljena zadostna varnost pred zlomom sestavnih delov.

V skladu z razmišljanji v predgovoru, smo poskušali klasično mehaniko zgraditi tako, da so povezave s tehnično mehaniko jasno prepoznavne. Poleg tega smo v obravnavo vključili nekatere bistvene posebnosti tehnične mehanike.

Osnovni pojmi in definicije

2.1 Prostor in čas

Klasična mehanika opisuje dogajanja v *absolutnem prostoru* in *absolutnem času*. Oznaka »absolutno« pomeni, da so lastnosti prostora in časa neodvisne od fizikalnih procesov; ostajajo nespremenljive.

Vsaka točka v prostoru je v kartezičnem koordinatnem sistemu določena s tremi koordinatami x , y , z . Prostor je torej tridimenzionalen. Je *evklidski*, saj ima element loka prostorske krivulje dolžino

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Prostor je *homogen* in *izotropen*, kar pomeni, da potek mehanskih dogajanj v zaprtem sistemu ni odvisen od tega, v katerem delu prostora se sistem nahaja, niti od njegove usmerjenosti glede na osi koordinatnega sistema. *Zaprte sistemi* so tisti, za katere lahko domnevamo, da nanje okolica praktično ne vpliva. Pri sistemih, ki niso zaprti pa lahko njihova lokacija in lega vplivata na potek mehanskih dogajanj le toliko, kolikor lahko sprememba razdalje in usmerjenosti takega sistema spremeni njegovo medsebojno delovanje z bližnjimi sistemi. To pa ni v nasprotju s homogenostjo in izotropnostjo prostora.

Prostor je *zvezen* in *neomejen*, tj. koordinate x , y , z lahko zavzamejo katero koli vrednost, ki je realni mnogokratnik dolžinske enote.

Časovne vrednosti omogočajo enoznačno opredelitev zaporedja dogodkov in njihovega trajanja. Čas poteka enosmerno – iz sedanjosti v prihodnost. Dogodki so ponovljivi v tem smislu, da se lahko v različnih časovnih obdobjih in ob enakih pogojih odvijajo na enak način. To izraža homogenost časa. Tako kot prostor je tudi čas zvezen in neomejen, kar pomeni, da lahko časovni koordinati t kot vrednosti pripišemo vse realne mnogokratnike časovne enote..

Navedene lastnosti prostora in časa ter vse iz njih izpeljane posledice so na področju

klasične mehanike skladne z izkušnjami. Zaradi njihove splošnosti jih je treba postaviti pred vse nadaljnje zakone mehanike in jih obravnavati kot aksiome. Na kratko jih lahko opišemo takole:

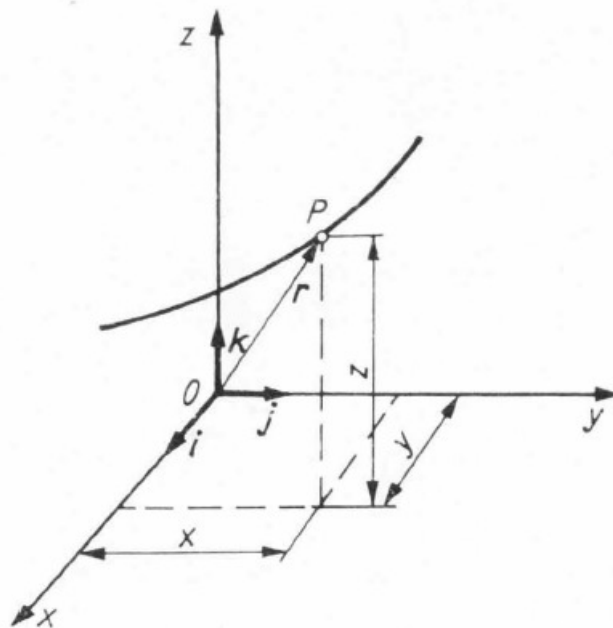
- Prostor je absoluten, tridimenzionalen, evklidski, zvezen, neomejen, homogen in izotropen.
- Čas je absoluten, enodimenzionalen, zvezen, neomejen, homogen.

Homogenost in izotropnost prostora ter homogenost časa veljajo ne le v klasični mehaniki, temveč v celotni fiziki.

2.2 Kinematične osnove

2.2.1 Kinematika materialne točke

Za nedvoumen opis gibanja materialne točke je potreben ustrezen opazovalni sistem. Prva možnost je Kartezični koordinatni sistem. Lega materialne točke P enoznačno določimo z navedbo njenih projekcij na koordinatne osi x , y in z , glej sliko 2/1.



Slika 2/1. Lega materialne točke P v kartezičnem koordinatnem sistemu

Glede na uveden koordinatni sistem je lega točke P enolično določena s *krajevnim vektorjem* \mathbf{r} , ki je odvisen od projekcij x , y , z na naslednji način:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (2.1)$$

Vektorji \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} so enotski vektorji v smeri koordinatnih osi.

V nadaljevanju bomo privzeli, da je krajevni vektor dvakrat odvedljiv po času. Vektor hitrosti \mathbf{v} opredelimo kot odvod krajevnega vektorja po času, vektor pospeška \mathbf{a} pa kot odvod vektorja hitrosti po času:

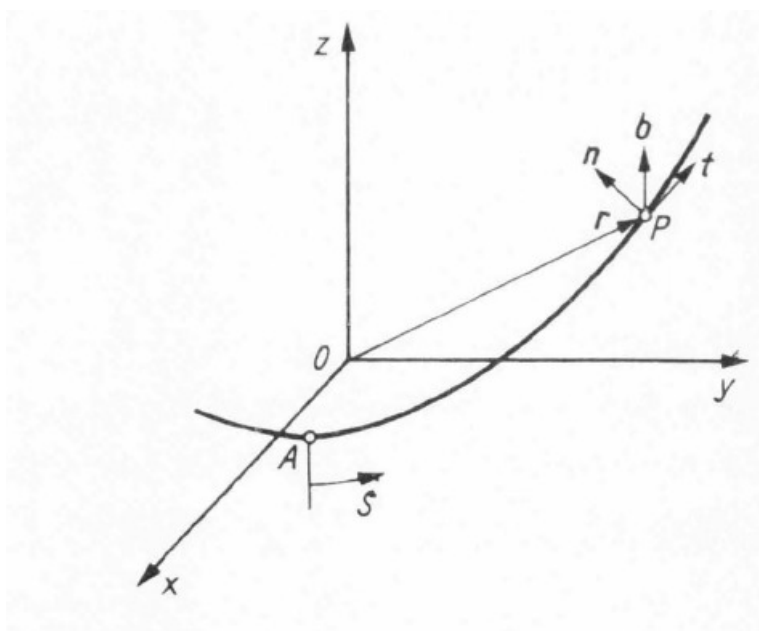
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.3)$$

V običajnem, skrajšanem zapisu, ki se uporablja v mehaniki, je odvod po času označen s piko. Komponente vektorja hitrosti in vektorja pospeška dobimo s primerjavo enačbe (2.1) z enačbama (2.2) in (2.3):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \dot{x}, & v_y &= \dot{y}, & v_z &= \dot{z} \\ a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x}, & a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y}, & a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Poleg zapisa krajevnega vektorja v skladu z enačbo (2.1) s konstantnimi enotskimi vektorji, je zelo uporaben tudi zapis, kjer se enotski vektorji spreminjajo skupaj z krajevnim vektorjem. Posebej pomemben je zapis krivulje tira s pomočjo tako imenovanega potujočega triedra (slika 2/ 2).



Slika 2/2. Tir materialne točke P s potujočim triedrom

Dolžino loka s krivulje merimo od začetne točke A . Tangencialno na krivuljo skozi P v smeri naraščajoče dolžine loka leži *tangenta* \mathbf{t} , ki je enotski vektor in je podana kot

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (2.5)$$

Pravokotno nanjo, v ravnini ukrivljenosti krivulje tira, leži še enotski vektor \mathbf{n} , *vektor glavne normale*. Ta je definiran kot:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|}.$$

Ker je $\left|\frac{ds}{dt}\right|$ ukrivljenost krivulje, κ , dobimo

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Enotski vektor \mathbf{n} je vedno usmerjen proti središču ukrivljenosti. Zveze, ki smo jih tukaj navedli brez dokaza, so znane iz diferencialne geometrije prostorskih krivulj; zadnja med njimi je na primer ena od FERNETOVIH formul [3]. *Vektor binormale* \mathbf{b} , ki je pravokoten na \mathbf{t} in \mathbf{n} , izhaja iz zveze

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (2.7)$$

Z uporabo verižnega pravila odvajanja dobimo

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \mathbf{t}. \quad (2.8)$$

Torej je

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

velikost vektorja hitrosti, \mathbf{t} pa kaže njegovo smer. S ponovnim odvajanjem sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{t}}{dt} \dot{s} + \mathbf{t} \frac{d\dot{s}}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} \dot{s} + \mathbf{t} \ddot{s}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem enačbe (2.6) dobimo

$$\mathbf{a} = \kappa \dot{s}^2 \mathbf{n} + \ddot{s} \mathbf{t}. \quad (2.9)$$

Pospešek lahko torej izrazimo kot vsoto normalnega pospeška

$$\mathbf{a}_n = \kappa \dot{s}^2 \mathbf{n} \quad (2.10)$$

in tangencialnega pospeška

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s} \mathbf{t}. \quad (2.11)$$

Iz enačb (2.8) in (2.9) je razvidno, da vektor hitrosti in vektor pospeška ležita v ravnini, ki jo določata \mathbf{t} in \mathbf{n} , tako imenovani *pritisnjeni ravnini* krivulje tira.

Kot preprosta primera uporabe zgoraj izpeljanih odvisnosti si oglejmo premočrtno in krožno gibanje točke. Za premočrtno gibanje je značilno, da je

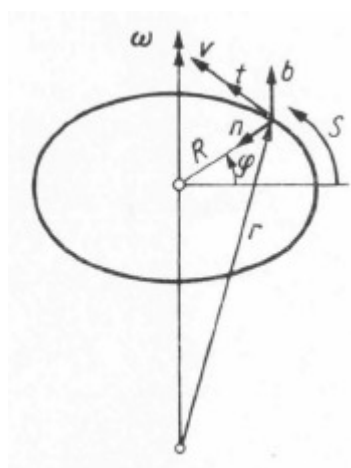
$$\mathbf{t}(s) = \text{const.} \quad (2.12)$$

Če to odvajamo, dobimo iz enačbe (2.9)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t = \dot{\mathbf{s}} \mathbf{t}. \quad (2.13)$$

Normalni pospešek je torej enak nič.

Pri krožnem gibanju sta ukrivljenost $\kappa = \frac{1}{R}$ in vektor binormale \mathbf{b} konstantna (slika 2/3).



Slika 2/3. Gibanje materialne točke po krožnici

Gibanje je smiselno opisati s pomočjo vektorja $\boldsymbol{\omega}$. Velikost $\boldsymbol{\omega}$, tako imenovana *kotna hitrost* ω , je določena kot časovna sprememba kota φ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}. \quad (2.14)$$

Če vektorju $\boldsymbol{\omega}$ pripišemo še smer in usmerjenost binormale \mathbf{b} , potem v skladu s sliko 2/3 velja:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Veljavnost te zveze preprosto preverimo z upoštevanjem definicije vektorskega produkta in enačbe (2.14)

$$\mathbf{v} = v \mathbf{t} = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| \mathbf{t} = \omega r \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) \mathbf{t} = \omega R \mathbf{t}.$$

Iz enačbe (2.15) dobimo pospešek

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.16)$$

Vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ imenujemo *kotni pospešek*. Ko v (2.16) vstavimo

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{b}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{b}.$$

dobimo

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \varepsilon \mathbf{b} \times \mathbf{r} + \omega^2 \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \\ &= \varepsilon r \sin(\mathbf{b}, \mathbf{t}) \mathbf{t} + \omega^2 \mathbf{b} \times r \sin(\mathbf{b}, \mathbf{t}) \mathbf{t} \\ &= \varepsilon R \mathbf{t} + \omega^2 R \mathbf{b} \times \mathbf{t} \\ &= \varepsilon R \mathbf{t} + \omega^2 R \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Če označimo

$$\kappa = \frac{1}{R}, \quad \dot{s} = R\omega, \quad \ddot{s} = R\varepsilon,$$

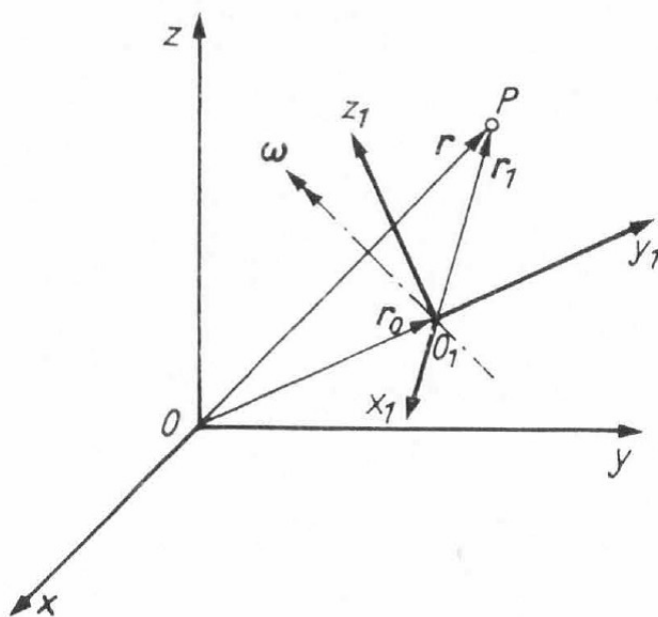
potem lahko ta rezultat dobimo tudi neposredno iz enačbe (2.9). Pri krožnem gibanju

$$\mathbf{a}_t = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = \varepsilon R \mathbf{t}$$

imenujemo *tangencialni pospešek* in

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 R \mathbf{n}$$

centripetalni pospešek.



Slika 2/4. Gibanje materialne točke P glede na gibljiv koordinatni sistem (relativno gibanje)

Za opis gibanja materialne točke se pogosto izkaže za smiselno, da iz danega koordinatnega sistema x, y, z izhodiščem v O preidemo v drug koordinatni sistem $x_1,$

y_1, z_1 z izhodiščem v O_1 . Pri tem je treba določiti zvezo med krajevnima vektorjema te točke v obeh koordinatnih sistemih ter njunima prvima in drugima odvodoma. Gibanje koordinatnega sistema O_1 glede na sistem O je običajno sestavljeno iz translacijskega gibanja izhodišča O_1 in kroženja okoli poljubne osi, ki poteka skozi O_1 .

Med krajevnima vektorjema, ki določata lego točke P , obstaja v skladu s sliko 2/4 zveza

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1. \quad (2.18)$$

Če v sistemu O za označitev odvoda po času uporabimo piko, potem sta

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}_1 \quad (2.19)$$

in

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (2.20)$$

Vektorja $\dot{\mathbf{r}}_0$ in $\ddot{\mathbf{r}}_0$ predstavljata hitrost in pospešek izhodišča O_1 glede na O . Količini $\dot{\mathbf{r}}_1$ in $\ddot{\mathbf{r}}_1$ je treba še pojasniti. Najprej si oglejmo poseben primer, ko je \mathbf{r}_0 konstanten in P v sistemu O_1 miruje. Potem se točka P glede na O giblje po krožnici okoli osi $\boldsymbol{\omega}$ (slika 2/4), kjer je $\boldsymbol{\omega}$ na splošno spremenljiv vektor kotne hitrosti sistema O_1 . Iz tega za ta primer sledi

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1.$$

Če se po drugi strani točka P glede na O_1 giblje, je treba v tem sistemu upoštevati tudi časovni odvod \mathbf{r}_1 , ki ga bomo označili z \mathbf{r}'_1 . Tako dobimo

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'_1. \quad (2.21)$$

Enačbo (2.21) lahko razumemo kot pravilo za odvajanja vektorja \mathbf{r}_1 v gibajočem sistemu. Jasno je, da to pravilo velja za kateri koli vektor \mathbf{w} :

$$\dot{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \mathbf{w}'. \quad (2.22)$$

Iz enačb (2.19) in (2.21) je hitrost točke P glede na sistem O

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1, \quad (2.23)$$

kjer je

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$$

hitrost koordinatnega izhodišča O_1 in

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}'_1$$

hitrost točke P glede na O_1 . Če sistem O miruje, potem \mathbf{v} imenujemo *absolutna hitrost* P , \mathbf{v}_1 *relativna hitrost* in

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 \quad (2.24)$$

sistemska hitrost. Torej je

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_1. \quad (2.25)$$

S ponovnim odvajanjem enačbe (2.23) ob upoštevanju enačbe (2.22) dobimo:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}'_1 \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}') \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'_1) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}''_1 \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}''_1 \\ &= \mathbf{a}_f + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_c. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Pri tem je

$$\mathbf{a}_f = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \quad (2.27)$$

sistemski pospešek, ki izhaja iz enačbe (2.26) za absolutni pospešek \mathbf{a} pri $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}''_1 \quad (2.28)$$

je *relativni pospešek* in

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 \quad (2.29)$$

tako imenovani *Coriolisov pospešek*.

2.2.2 Virtualni pomiki

V mehaniki se je pojem virtualnih pomikov izkazal za izjemno pomembnega. Virtualni pomiki so poljubna, neskončno majhna odstopanja od dejanske lege sistema. Krivulja, ki jo opisuje krajevni vektor \mathbf{r} materialne točke, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, je dejanska krivulja tira ali preprosto dejanski »tir« točke. Virtualni tir, ki ustreza virtualnim pomikom, »meji« na dejanski tir, sicer pa poteka povsem poljubno. Virtualni tir na splošno ne izpolnjuje zakonov mehanike. Virtualno spremembo krajevnega vektorja označimo z $\delta\mathbf{r}$. Če so x , y , z komponente krajevnega vektorja \mathbf{r} , potem so δx , δy in δz komponente $\delta\mathbf{r}$. Ker je $\delta\mathbf{r}$ po definiciji neskončno majhen, lahko δ obravnavamo tudi kot poseben simbol za odvajanje po krajevem vektorju. Virtualni pomik je zgolj navidezna in ne nujno dejanska sprememba lege. Zato čas prehoda iz dejanske lege v sosednjo virtualno lego ni pomemben. Virtualni pomiki so torej brezčasni (potekajo z neskončno hitrostjo).

V nadaljevanju bomo kot virtualne označevali tudi spremembe fizikalnih količin, ki nastanejo pri prehodu mehanskega sistema v namišljeno sosednjo lego. Nove pojme in posledice, ki iz tega izhajajo, bomo podrobneje obravnavali pri njihovi uporabi.

2.3 Masa

Doslej smo obravnavali osnovne kinematične pojme, s pomočjo katerih lahko določimo lego, hitrost in pospešek poljubne točke telesa v poljubnem času t , če poznamo njen krajevni vektor kot funkcijo časa. Pri tem ni bilo pomembno, ali je točka dejansko telo ali le geometrijska točka. Ker pa mehanika raziskuje gibanje materialnih teles, pri določanju zakonov mehanike nikakor ne moremo zanemariti materialnosti teles. Izkušnje nas učijo, da je v omejeni prostornini ΔV bistvenega pomena »količina snovi« in njena porazdelitev v njej. »Količina snovi« telesa je opisana s pojmom *masa* telesa. Z ustrezno izbrano enoto mase lahko torej »količino snovi« katerega koli telesa – njegovo maso m – izmerimo s primerjavo s to enoto.

V okviru klasične mehanike veljajo za maso naslednji aksiomi (HAMEL [4]):

1. Masa m telesa je vedno pozitivna: $m > 0$.
2. Masa m telesa se s časom ne spreminja:

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

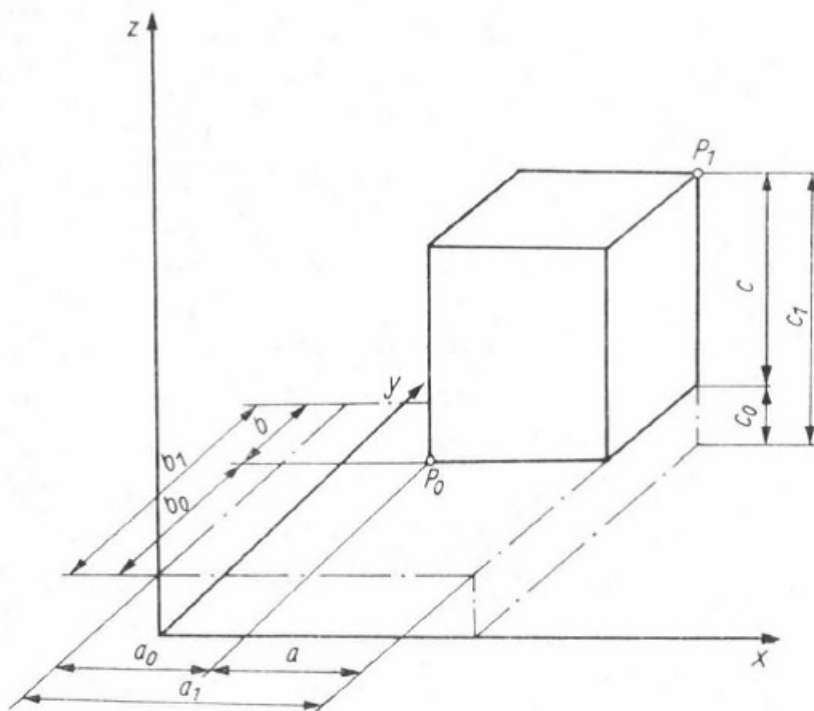
3. Telo sestavljeno iz dveh drugih teles z masama m_1 in m_2 , ima skupno maso $m = m_1 + m_2$ (aditivnost mase).

Iz tretjega aksioma neposredno izhaja:

Če telo z maso m zavzame prostornino V , potem ga lahko s poljubno delitvijo te prostornine na delne prostornine ΔV_i razdelimo na delna telesa z masami Δm_i , tako da velja:

$$m = \sum_i \Delta m_i.$$

Zaradi raznolikosti fizikalnih lastnosti in geometrijskih oblik dejanskih teles je v mehaniki vedno potrebno preučevanje gibanja omejiti na ustrezne modele teles. Najpreprostejši model telesa je *masna točka*. Pri tem modelu – kar je pod določenimi pogoji dopustno – zanemarimo geometrijske razsežnosti dejanskega telesa; telo si predstavljamo skrčeno v točko, kateri je pripisana celotna masa m telesa (zgoščena točkovna masa). Posplošitev tega modela je *sistem točk*, ki ga sestavlja končno ali neskončno število masnih točk. Drugačen model telesa je *togo telo*, pri katerem je razdalja med katerima koli točkama telesa absolutno nespremenljiva. Če telesa ne moremo obravnavati kot *sistem točk* ali *togo telo*, moramo preiti na splošnejši model *deformabilnih teles*. Ti modeli so poenostavitve (idealizacije) dejanskih teles, kar se izraža v predpostavljenih fizikalnih lastnostih. Teh tu ne bomo obravnavali. V vsakem primeru pa lahko dejansko strukturo snovi (atomska zgradbo) zanemarimo. Naši modeli teles tako izkazujejo bodisi diskretno (masna točka, sistem masnih točk) bodisi zvezno (togo telo, deformabilno telo) porazdelitev mase.



Slika 2/5. Kvader napolnjen z maso v kartezičnem koordinatnem sistemu

Za enotno matematično predstavitev zakonov mehanike se izkaže smiselna uvedba masnega elementa dm , tako da je razlikovanje med diskretnim in zveznim sprva nepotrebno. Da bi lahko izpeljali potrebne pojme, v kartezičnem koordinatnem sistemu z osmi x, y, z , obravnavamo kvader katerega robovi z dolžinami

$$a = a_1 - a_0; \quad b = b_1 - b_0; \quad c = c_1 - c_0 \quad (2.30)$$

ležijo vzporedno s koordinatnimi osmi, tako kot kaže slika 2/5. Točka P_0 , ki je najbližje koordinatnemu izhodišču, ima koordinate a_0, b_0, c_0 , diagonalno nasprotno oglišče P_1 pa ima koordinate a_1, b_1, c_1 . Potem lahko vsako točko P znotraj kvadra (vključno s točkami na mejnih ploskvah, robovih in ogliščih) določimo s koordinatami x, y, z kjer je

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\leq x \leq a_1 \\ b_0 &\leq y \leq b_1 \\ c_0 &\leq z \leq c_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Naj bo v prostornini $V = abc$ kvadra porazdelitev mase poljubna. Potem $m(x, y, z)$ pomeni maso, ki je v prostornini

$$V_x = (x - a_0)(y - b_0)(z - c_0). \quad (2.32)$$

Masa $m(a_0, b_0, c_0)$ je npr. enaka posamični masi, zgoščeni v oglišču P_0 . Če te mase ni, je $m(a_0, b_0, c_0) = 0$. Skupno maso v kvadru označimo z $m(a_1, b_1, c_1)$. Upoštevamo tudi, da je funkcija $m(x, y, z)$ iz fizikalnih razlogov nepadajoča funkcija, saj se, ko se omejena prostornina poveča, masa v njej ne more zmanjšati. V točkah nezveznosti (točkah skoka) funkcije $m(x, y, z)$ predpostavimo zveznost z desne v skladu z zvezami

$$\left. \begin{aligned} m(x+0, y+0, z+0) &= m(x, y, z) \\ m(x+0, y+0, z) &= m(x, y, z) \\ m(x+0, y, z+0) &= m(x, y, z) \\ m(x, y+0, z+0) &= m(x, y, z) \\ m(x+0, y, z) &= m(x, y+0, z) = m(x, y, z+0) = m(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Sedaj si predstavljamo, da je kvader z ravnimi rezi, vzporednimi s koordinatnimi ravninami, razdeljen na poljubno število manjših kvadrov. Upoštevamo takšen delni kvader, pri katerem se dolžine robov $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ nahajajo v celoti znotraj kvadra. Oglišče $P_{i,j,k}$, ki je najbližje koordinatnemu izhodišču, ima koordinate x_i, y_j, z_k , diagonalno nasprotno oglišče, tj. točka $Q_{i,j,k}$ pa ima koordinate $x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k$. S $\Delta m_{i,j,k}$ označimo maso, ki se nahaja na območju

$$\left. \begin{aligned} x_i < x &\leq x_i + \Delta x_i \\ y_j < y &\leq y_j + \Delta y_j \\ z_k < z &\leq z_k + \Delta z_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

in je

$$\left. \begin{aligned} \Delta m_{i,j,k} &= m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &- m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) - m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &- m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) + m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k) \\ &+ m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) + m(x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &- m(x_i, y_j, z_k). \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Pri tem vedno velja

$$m_{i,j,k} \geq 0. \quad (2.36)$$

Iz neenačb (2.34) je razvidno, da točke na ravninah $x = x_i, y = y_j$ in $z = z_k$ ne spadajo v obravnavano območje. To zagotavlja enolično porazdelitev mase posameznim kvadrom tudi v primeru, ko so posamezne mase zgoščene na presečnih ploskvah, robovih ali ogliščih. Za preprostejšo obravnavo lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da na mejnih ploskvah celotnega kvadra ni zgoščene porazdelitve mase (posamičnih mas). To je vedno mogoče doseči, če mejne ploskve kvadra izberemo tako, da je masa v celoti porazdeljena v njegovi notranjosti. Poleg tega naj bo podana funkcija $f(x, y, z)$, ki je

zvezna na območju

$$\begin{aligned} a_0 &\leq x \leq a_1 \\ b_0 &\leq y \leq b_1 \\ c_0 &\leq z \leq c_1. \end{aligned}$$

Tvorimo vsoto

$$\left. \begin{aligned} S_{i,j,k} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta m_{i,j,k} \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot \\ &\cdot [m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &- m(x_i + \Delta x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) - m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &- m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) + m(x_i + \Delta x_i, y_j, z_k) \\ &+ m(x_i, y_j + \Delta y_j, z_k) + m(x_i, y_j, z_k + \Delta z_k) \\ &- m(x_i, y_j, z_k)] , \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

kjer je

$$\left. \begin{aligned} x_i &\leq \xi_i \leq x_i + \Delta x_i \\ y_j &\leq \eta_j \leq y_j + \Delta y_j \\ z_k &\leq \zeta_k \leq z_k + \Delta z_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Če zdaj z ustrezno izbiro vse bolj drobne delitve kvadra na prostornine $\Delta V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ preidemo v limito (za več podrobnosti o natančni izvedbi tega limitnega prehoda glej npr. v SMIRNOV, vol. 5 [5]), potem pod zgoraj navedenimi pogoji limitna vrednost obstaja in velja

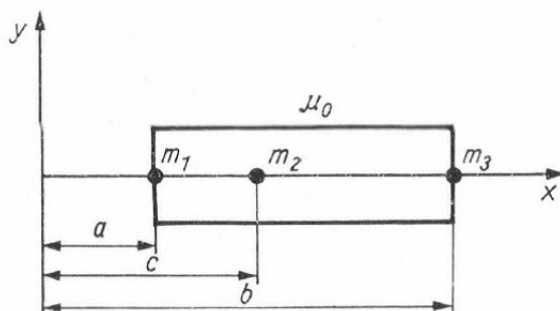
$$\left. \begin{aligned} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) &= f(P_{i,j,k}), \quad f(x, y, z) = f(P) \\ \lim \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q f(P_{i,j,k}) \Delta m_{i,j,k} &= \int_{(V)} f(P) dm(P) \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

V tem primeru pravimo, da je funkcija $f(P)$ integrirana glede na funkcijo $m(P)$, sam integral pa imenujemo STIELTJESOV integral. Za $f(P) = 1$ je z enačbo (2.39) podana celotna masa, ki je v prostornini V :

$$\int_{(V)} dm = m. \quad (2.40)$$

Če na obravnavanem območju obstaja zvezna porazdelitev mase, obstaja tudi limita

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} = \rho,$$



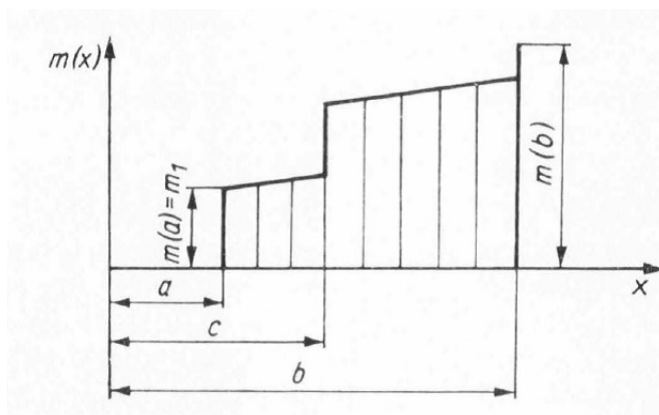
Slika 2/6. Nosilec z zvezno porazdelitvijo mase in tremi posameznimi masami

izraz $dm = \rho dV$ pa je integrabilen po RIEMANNU. Tu je $\rho(x, y, z)$ gostota mase ali preprosto gostota kontinuuma, ki je odsekoma zvezna funkcija lege. V tem primeru se masa masnega elementa z dV enakomerno približuje ničli.

Kot primer si oglejmo nosilec s konstantno linijsko porazdelitvijo mase $\mu_0 = \rho F$ in tremi posameznimi masami, v skladu s sliko 2/6. Potek funkcija $m(x)$ je prikazan na sliki 2/7. Pri tem je

- $m(x)$ masa na intervalu $[a, x]$,
- $m(a)$ zgoščena enojna masa m_1 ,
- $m(b)$ skupna masa.

Zaradi zveznosti z desne, izražene z $m(x+0) = m(x)$, je $m(c) - m(c-0) = m_2$ (zgoščena enojna masa pri $x = c$) in $m(b) - m(b-0) = m_2$ (zgoščena enojna masa pri $x = b$). Ker je $\Delta m_i = m(x_i + \Delta x_i) - m(x_i)$ masa v intervalu $x_i < x \leq x_i + \Delta x_i$,

Slika 2/7. Porazdelitev mase $m(x)$ za primer na sliki 2/6

skupna masa m izhaja iz

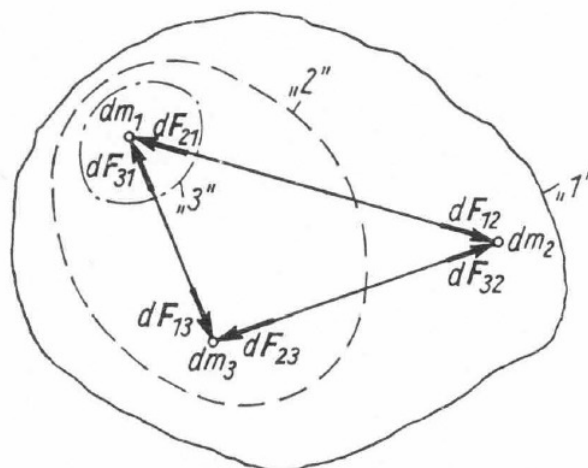
$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^b dm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [m(b) - m(a - \varepsilon)] = m(b). \quad (2.41)$$

V dosedanji obravnavi smo uporabljali kartezični koordinatni sistem. Jasno pa je, da je mogoče na enak način uporabiti katere koli druge krivočrtne koordinate (α, β, γ) , če so te takšne, da omogočajo nedvoumen opis vsakega prostorninskega elementa $\Delta V_{i,j,k}$ ali masnega elementa $\Delta m_{i,j,k}(\alpha, \beta, \gamma)$ v skladu z enačbo (2.35). Pri tem koordinatni sistem obravnavanih območij ne sme pokriti več kot enkrat.

2.4 Sila

Enako temeljnega pomena za strukturo mehanike, kot so kinematični pojmi in pojem mase je pojem sile, ki ga bomo obravnavali v nadaljevanju. Pri odkrivanju zakonov mehanike moramo predpostaviti, da vsak mehanski sistem (sistem materialnih teles) vzajemno deluje z drugimi materialnimi telesi, ki so v njegovi bližnji ali daljni okolici. Posamezni elementi znotraj sistema prav tako medsebojno vplivajo drug na drugega. Pri tem je treba opozoriti, da je razmejitev med obravnavanim mehanskim sistemom in njegovo okolico vedno povsem svobodna in namišljena ter je na splošno določena zgolj glede na namenskost raziskave. Namreč, da bi bil mehanski sistem dostopen raziskavi, ga je treba ločiti od okolice, ga iz nje »izrezati«. Izkušnje kažejo, da ni pomembno, ali je namišljeni »rez« narejen skozi »prazen prostor«, ki obdaja materialna telesa, ali skozi sama materialna telesa. Zato lahko rez v celoti leži tudi v materialnem telesu. Na podlagi te predpostavke si lahko vsako telo predstavljamo kot telo, razdeljeno na masne elemente dm , kot je predstavljeno v razdelku 2.3, z ustreznimi »rezi«. Mehansko obnašanje podsistema, ločenega od okolice, je seveda mogoče smiselno raziskati le, če se upošteva vpliv okolice na sistem. Od vseh možnih interakcij med mehanskimi sistemi nas zanimajo le tiste, ki skušajo pospešiti masne elemente obravnavanega sistema. Za opis takšnih interakcij se uporablja izraz *sila*.

Vsak vpliv masnega elementa na kateri koli drug mehanskega sistema, ki skuša povzročiti pospešeno spremembo lege slednjega, lahko predstavimo s silo. Vendar pospešek masnega elementa ni nujen za obstoj sile. Možno je, da obravnavani masni element deluje z drugimi masnimi elementi, ki navzven povsem izničijo vpliv prvega elementa in tako preprečijo njegov pospešek. Iz izkušenj vemo, da so sile vektorji, ki so na splošno vezani na točko delovanja. Iz tega sledi, da lahko sile, ki delujejo v isti točki, vektorsko seštevamo (izrek o paralelogramu sil). To ni zgolj geometrijska, temveč fizikalna lastnost, ki izraža, da prisotnost drugih sil ne vpliva na učinek posamezne sile. Predpostavimo torej, da je mogoče učinek okoliških masnih elementov na obravnavani

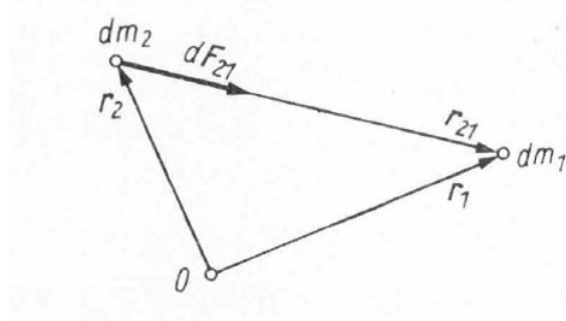


Slika 2/8. Primer razmejitve med mehanskim sistemom in okolico

masni element nadomestiti z eno samo silo $d\mathbf{F}$. Sile, ki delujejo na mehanski sistem od zunaj, imenujemo zunanje sile in jih označujemo z $d\mathbf{F}_a$ ali \mathbf{F}_a . Sile, s katerimi podsk sistemi znotraj obravnavanega sistema delujejo drug na drugega, se imenujejo notranje sile $d\mathbf{F}_i$ ali \mathbf{F}_i . Katere sile so notranje in katere zunanje, je odvisno izključno od razmejitve med mehanskim sistemom in njegovo okolico. S spremembo meja sistema lahko vsaka zunanja sila postane notranja in obratno. Na primer, obravnavajmo sistem treh masnih elementov (glej sliko 2/8), ki drug na drugega delujejo s silami $d\mathbf{F}_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, 3$). V sistemu "1" so vse sile notranje, medtem ko v sistemu "2" le sili $d\mathbf{F}_{31}$ in $d\mathbf{F}_{13}$ spadata med notranje sile. Nasprotno pa sta $d\mathbf{F}_{21}$ in $d\mathbf{F}_{23}$ postali zunanji sili, ker na ta sistem delujeta masna elementa dm_2 , ki ne pripadata sistemu "2". V tem primeru nas sili $d\mathbf{F}_{12}$ in $d\mathbf{F}_{32}$ ne zanimata več, ker ne delujeta na sistem "2". Pomembni sta le pri obravnavi mehanskega obnašanja masnega elementa dm_2 . Nazadnje, v sistemu "3" obstajata le zunanji sili $d\mathbf{F}_{21}$ in $d\mathbf{F}_{31}$, ki izhajata iz masnih elementov dm_2 in dm_3 , ki ne pripadata sistemu. Sisteme, na katere ne delujejo zunanje sile, imenujemo zaprti sistemi. Vsi drugi sistemi so nezaprti.

Predpostavimo, da so sile, ki delujejo na masni element, odvisne le od njegove lege in hitrosti ter lege in hitrosti drugih masnih elementov, časa in fizikalnih konstant, ne pa tudi od pospeška ali višjih odvodov krajevnega vektorja. Ker iz homogenosti prostora izhaja, da je določitev lege in hitrosti masnega elementa smiselna le glede na drugo telo, tj. da obstajajo le relativne lege in hitrosti, so zato sile odvisne le od razlik v koordinatah in hitrostih. Če masni element dm_2 deluje s silo $d\mathbf{F}_{21}$ na masni element dm_1 , je ta sila na splošno lahko odvisna od \mathbf{r}_{21} , $\dot{\mathbf{r}}_{21}$ in t (slika 2/9):

$$d\mathbf{F}_{21} = d\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_{21}, \dot{\mathbf{r}}_{21}, t) = d\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2, t).$$



Slika 2/9. Učinek sile med dvema masnima elementoma

Poleg tega se v tem zakonu sile lahko pojavijo še druge fizikalne konstante. Če nastala sila $d\mathbf{F}$ deluje na masni element dm mehanskega sistema in se ta elementi navidezno premakne za $\delta\mathbf{r}$, potem izraz

$$\delta(dW) = d\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (2.42)$$

imenujemo virtualno delo, ki bi ga ta sila opravila na obravnavanem masnem elementu pri pomiku $\delta\mathbf{r}$. Z integracijo tega izraza po vseh masnih elementih sistema dobimo virtualno delo vseh notranjih in zunanjih sil, ki delujejo na sistem pri virtualnih pomikih vseh masnih elementov:

$$\delta W = \int_{(S)} d\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}. \quad (2.43)$$

Dejansko delo dW , ki ga opravijo sile $d\mathbf{F}$ pri diferencialnem pomiku masnih elementov, dobimo iz enačbe (2.43), če vzamemo, da so virtualni pomiki $\delta\mathbf{r}$ enaki dejanskim pomikom $d\mathbf{r}$:

$$dW = \int_{(S)} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.44)$$

Posebej pomemben je primer, ko so sile odvisne le od lokacije masnega elementa, ne pa tudi od njegove hitrosti in časa:

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (2.45)$$

Pri tem je \mathbf{r} krajevni vektor obravnavanega masnega elementa, na katerega deluje $d\mathbf{F}$. (Morebitna odvisnost te sile od krajevnih vektorjev elementov, ki so v interakciji z njo, tu ni navedena). V tem primeru je mogoče, da obstaja *potencialna funkcija* $dU(\mathbf{r})$, na kratko imenovana tudi *potencial*, ki je z $d\mathbf{F}$ povezana takole

$$d\mathbf{F} = -\nabla(dU) = -\text{grad}(dU). \quad (2.46)$$

Potreben pogoj za obstoj takšne potencialne funkcije je, da velja

$$\nabla \times d\mathbf{F} = \text{rot } d\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (2.47)$$

to pa izhaja iz enačbe (2.46)

$$\nabla \times d\mathbf{F} = -\nabla \times \nabla (dU) ,$$

ki zaradi $\nabla \times \nabla = 0$ izgine. Toda pogoj (2.47) je tudi zadosten, saj iz enačb (2.43) in (2.46) sledi:

$$\left. \begin{aligned} \delta (dW) &= d\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = -\nabla (dU) \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= -\left(\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) (dU) = -\delta (dU) . \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Operator

$$\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z} = \delta$$

uporabljen na dU , daje popolno spremembo te spremenljivke pri virtualnem pomiku $\delta \mathbf{r}$ masnega elementa. Pri integraciji enačbe (48) po virtualni poti masnega elementa vzdolž krivulje C je torej rezultat odvisen le od končnih točk integracijske poti, ne pa tudi od same integracijske poti. Tako za silo $d\mathbf{F}$, ki izpolnjuje pogoj (2.47), obstaja potencial dU

$$dU(\mathbf{r}) = dU(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} . \quad (2.49)$$

Iz tega je razvidno, da je razlika potencialov $dU(\mathbf{r}) - dU(\mathbf{r}_0)$ enaka negativnemu delu sile $d\mathbf{F}$, ki ga opravi pri virtualnem pomiku točke njenega delovanja \mathbf{r}_0 v točko \mathbf{r} . Zato $dU(\mathbf{r})$ imenujemo tudi potencialna energija sile $d\mathbf{F}$ glede na začetno točko, ki jo določa \mathbf{r}_0 . Poseben primer, ko je virtualni pomik $\delta \mathbf{r}$ enak dejanskemu pomiku $d\mathbf{r}$, je vsebovan v enačbi (2.49) in v prejšnji izpeljavi. Sile $d\mathbf{F}$, ki jih je mogoče na tak način izpeljati iz enolične potencialne funkcije $dU(\mathbf{r})$, imenujemo konservativne sile.

Pri tem je treba še posebej poudariti razliko med splošnim znakom δ v $\delta(dW)$ in tistim uporabljenim v enačbi (2.48). Medtem ko v izrazu $\delta(dU)$ lahko razumemo δ kot diferencialni operator, ki se uporablja za funkcijo dU , ki je odvisna samo od krajevnega vektorja, je takšno razumevanje v izrazu $\delta(dW)$ mogoče le, če imajo obravnavane sile potencial. V splošnem primeru znaka δ ni mogoče ločiti od dW , saj $\delta(dW)$ kot celota pomeni virtualno delo sile $d\mathbf{F}$ pri pomiku $\delta \mathbf{r}$.

Posplošitev pojma potencial dobimo, kadar lahko silo $d\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, ki je eksplicitno odvisna od lege in časa, izpeljemo iz skalarne funkcije $dU(\mathbf{r}, t)$, torej časovno odvisnega potenciala, in sicer po enačbi

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla (dU(\mathbf{r}, t)) . \quad (2.50)$$

Za obstoj takšnega potenciala je ponovno potrebna in zadostna veljavnost enačbe (2.47). V nasprotju s potencialom, ki je odvisen samo od lege, je tukaj zveza (2.49) smiselna

zgolj za virtualne premike. Za dejanski pomik $d\mathbf{r}$ namreč iz enačbe (2.48) sledi

$$\left. \begin{aligned} d(dW) &= d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla(dU) \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z}\right)(dU) \\ &= -\left(d - \frac{\partial}{\partial t} dt\right) dU. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Iz enačbe (2.51) pa ni več mogoče določiti dU kot funkcijo, ki bi bila neodvisna od integracijske poti. Zato količina $dU(\mathbf{r}, t)$ nima več prej omenjenega preprostega fizikalnega pomena kot potencialna energija. Sile, ki so odvisne od časovno odvisnega potenciala, ne spadajo med konservativne sile.

3

Aksiomi mehanike

3.1 Temeljni aksiom mehanike

Na začetek tega poglavja postavimo aksiom, ki v povezavi z aksiomatičnimi lastnostmi prostora in časa, mase ter sile, navedenimi v drugem poglavju, omogoča izpeljavo vseh splošnih zakonov klasične mehanike. Ta aksiom lahko izrazimo na naslednji način.

Obstaja vsaj en koordinatni sistem (*inercialni sistem*), v katerem za vse mehanske sisteme S veljata zvezi

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - dm \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

in

$$\int_{(S)} \mathbf{r} \times (d\mathbf{F}_a - dm \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Integracijski simbol pomeni, da je treba integrirati preko vseh masnih elementov, ki pripadajo sistemu. Integrale je treba razumeti kot STIELTJESove integrale v smislu, pojasnjenem v razdelku 2.3. V teh enačbah predstavlja \mathbf{r} krajevni vektor obravnavanega masnega elementa, dm pa njegovo maso. Sila $d\mathbf{F}_a$ označuje rezultanto vseh sil, ki delujejo na obravnavani masni element in so posledica interakcij s telesi zunaj sistema S .

Produkt mase dm masnega elementa in njegove hitrosti določa njegovo *gibalno količino*

$$d\mathbf{p} = dm \dot{\mathbf{r}}.$$

Izraz $dm \dot{\mathbf{r}}$ je torej časovna sprememba gibalne količine. Zato enačbo (3.1), ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - d\dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

imenujemo tudi *zakon o gibalni količini*.

Vrtilna količina masnega elementa je definirana z izrazom

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}.$$

Njen odvod po času je

$$d\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times dm \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times dm \ddot{\mathbf{r}}.$$

Prvi člen na desni strani je v skladu z definicijo vektorskega produkta identično enak nič. Zato enačbo (3.2), zapisana v obliki

$$\int_{(S)} (\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a - d\dot{\mathbf{L}}) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

imenujemo tudi *zakon o vrtilni količini*.

3.2 Newtonovi aksiomi mehanike

Iz pravkar obravnavanega aksioma lahko izpeljemo sklepe, ki sami po sebi, če jih razumemo kot aksiome, odražajo zgodovinski razvoj mehanike. Takšna razčlenitev zakona o gibalni količini in zakona o vrtilni količini na vrsto delnih aksiomov je poleg tega zelo koristna za razumevanje in uporabo zakonov mehanike. V nadaljevanju bomo zato obravnavali te delne aksiome.

3.2.1 Newtonov prvi aksiom: zakon vztrajnosti

Če zakon o gibalni količini (3.1) uporabimo na masni element, na katerega ne delujejo sile, sledi:

$$dm \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

tj.

$$d\mathbf{p} = dm \dot{\mathbf{r}} = \text{const.} \quad (3.6)$$

To pomeni, da je v inercialnem sistemu gibalna količina masnega elementa konstantna, če nanj ne delujejo sile. Ker je masa konstantna, sledi, da tudi hitrost ostaja nespremenjena. NEWTON je to ugotovitev izrazil takole:

Vsako telo ostane v svojem stanju mirovanja ali enakomernega premočrtnega gibanja, dokler ga zunanje sile ne prisilijo, da to stanje spremeni.

Kot vidimo, je NEWTONovo »telo« identično z našim masnim elementom, kadar za določitev njegove lege zadostuje krajevni vektor \mathbf{r} .

3.2.2 Drugi Newtonov aksiom: temeljna enačba dinamike

Če zakon o gibalni količini uporabimo na masni element, ne da bi posebej zahtevali, da sile izginejo, dobimo iz enačbe (3.1) naslednje

$$d\mathbf{F}_a - dm \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

Za posamezni masni element lahko opustimo označevanje sile in mase kot diferencialnih količin ter prav tako indeks a pri sili, saj notranjih sil masnega elementa ne upoštevamo. Tako dobimo zvezo:

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}} \equiv m \dot{\mathbf{v}} \equiv m \mathbf{a}, \quad (3.7)$$

ali

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.8)$$

To je tako imenovana *temeljna enačba dinamike* (masne točke). Če opustimo dobesedni prevod NEWTONove formulacije¹, lahko drugi NEWTONov aksiom podano v obliki (3.7), izrazimo takole:

Sila, ki deluje na masni element, je enaka produktu njegove mase in pospeška.

Zapis (3.8) izraža naslednjo trditev:

Sila, ki deluje na masni element, je enaka časovni spremembi njegove gibalne količine.

3.2.3 Newtonov tretji aksiom: zakon vzajemnega učinka

Obravnavamo mehanski sistem S , ki je z namišljenim rezom razdeljen na dva podsistema S_1 in S_2 , glej sliko 3/1. Iz vsakega podsistema izberemo masni element. Z $d\mathbf{F}_{a1}$ in $d\mathbf{F}_{a2}$ označimo rezultanti zunanjih sil, ki delujejo na ta masna elementa glede na sistem S . Z $d\mathbf{F}_2$ označimo rezultanto vseh sil, s katerimi sistem S_2 deluje na obravnavani element v S_1 . Temu ustrezno $d\mathbf{F}_1$ predstavlja rezultanto vseh sil, s katerimi sistem S_1 deluje na obravnavani element v S_2 . Če uporabimo zakon o gibalni količini v obliki (3.1) na podsistema S_1 in S_2 , dobimo naslednje:

$$\int_{(S_1)} (d\mathbf{F}_{a1} + d\mathbf{F}_2 - dm \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}; \quad \int_{(S_2)} (d\mathbf{F}_{a2} + d\mathbf{F}_1 - dm \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}.$$

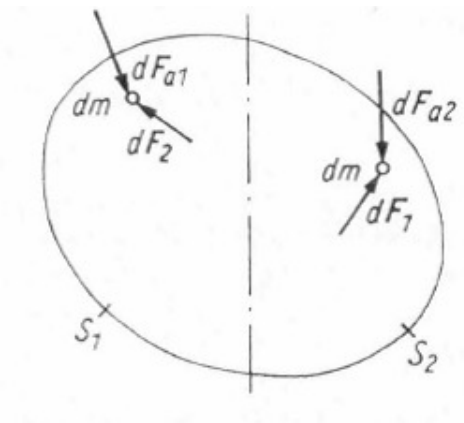
Če obe enačbi seštejemo ter upoštevamo, da veljata zvezi

$$\int_{(S_1)} d\mathbf{F}_{a1} + \int_{(S_2)} d\mathbf{F}_{a2} = \int_{(S)} d\mathbf{F}_a; \quad \int_{(S_1)} dm \ddot{\mathbf{r}} + \int_{(S_2)} dm \ddot{\mathbf{r}} = \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}},$$

¹NEWTONova formulacija je naslednja: *Sprememba gibanja je vedno sorazmerna z vtisnjeno gibalno silo in poteka v smeri ravne črte, na kateri je ta sila vtisnjena.* (OP)

dobimo

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - dm\ddot{\mathbf{r}}) + \int_{(S_1)} d\mathbf{F}_2 + \int_{(S_2)} d\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$



Slika 3/1. Mehansko vzajemno delovanje med dvema podsistemoma

Prvi integral je zaradi veljavnosti zakona o gibalni količini za celoten sistem enak nič. Če skupno silo, s katero S_2 deluje na S_1 , označimo z

$$\mathbf{F}_{21} = \int_{(S_1)} d\mathbf{F}_2,$$

skupno silo, s katero S_1 deluje na S_2 , pa z

$$\mathbf{F}_{12} = \int_{(S_2)} d\mathbf{F}_1,$$

potem iz enačbe (3.9) sledi

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (3.10)$$

Uporaba zakona o vrtilni količini na podsistema nam daje:

$$\int_{(S)} \mathbf{r} \times (d\mathbf{F}_a - dm\ddot{\mathbf{r}}) + \int_{(S_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_2 + \int_{(S_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Prvi integral odpade zaradi veljavnosti zakona o vrtilni količini (3.2) za celotni sistem. Iz tega sledi

$$\int_{(S_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_2 + \int_{(S_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 = \mathbf{0},$$

tj. moment sil

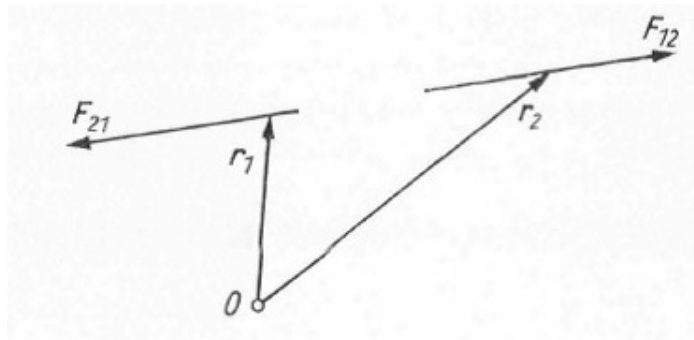
$$\mathbf{M}_{21} = \int_{(S_1)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} \quad (3.12)$$

s katerimi sistem 2 deluje na sistem 1, je nasprotno enak momentu sil

$$\mathbf{M}_{12} = \int_{(S_2)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} \quad (3.13)$$

s katerimi sistem 1 deluje na sistem 2:

$$\mathbf{M}_{21} = -\mathbf{M}_{12}. \quad (3.14)$$



Slika 3/2. Skupna smernica sil vzajemnega delovanja

Zvezi (3.12) in (3.13) določata premici opisani s krajevnima vektorjema \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 ; glej sliko 3/2. Iz tega, z upoštevanjem enačb (3.10) in (3.14), sledi

$$\mathbf{F}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

tj. sili \mathbf{F}_{21} in \mathbf{F}_{12} ležita na isti smernici. Izraza (3.10) in (3.15) zajemata tako imenovani zakon vzajemnega učinka, imenovan tudi načelo akcije in reakcije²:

Sila, s katero telo 2 deluje na telo 1, in sila, s katero telo 1 deluje na telo 2, sta enako veliki, nasprotno usmerjeni in ležita na skupni smernici.

3.3 D'Alembertov aksiom

Če zakona o gibalni količini in vrtilni količini uporabimo na sisteme, katerih elementi v inercialnem sistemu mirujejo ali se gibljejo enakomerno premočrtno, dobimo za te sisteme naslednji temeljni enačbi statike:

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}_a = \mathbf{0}; \quad \int_{(S)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

To pomeni, da sistem ohranja stanje mirovanja ali enakomernega gibanja le tedaj in samo tedaj, ko sta vsoti zunanjih sil in njihovih momentov za ta sistem in vse njegove

²NEWTONova formulacija: *Vsaki akciji je vedno nasprotna enaka reakcija; ali vzajemno delovanje med dvema telesoma je vedno enako in usmerjeno v nasprotni strani.* (OP)

podсистeme enaki nič. To stanje na splošno imenujemo statično, saj je obravnava ravnotežnih stanj v mehanskih sistemih naloga statike.

Če sistem ni v statičnem ravnotežju, tj. če niso vsi $dm \ddot{\mathbf{r}}$ enaki nič, potem lahko količino $-dm \ddot{\mathbf{r}}$ obravnavamo kot silo, ki jo imenujemo *vztrajnostna* ali *masna* sila, in postavimo

$$d\mathbf{F}_a^* = d\mathbf{F}_a - dm \ddot{\mathbf{r}}. \quad (3.17)$$

S tem lahko enačbi (3.1) in (3.2) zapišemo v obliki

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}; \quad \int_{(S)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

ki formalno ustrezata enačbama (3.16). Če torej uvedemo pojem dinamičnega ravnotežja, potem enačbi (3.17) in (3.18) izražata naslednje:

Če silam, ki se pojavijo v sistemu, dodamo vztrajnostne sile $-dm \ddot{\mathbf{r}}$, potem lahko vsak mehanski problem obravnavamo kot problem ravnotežja.

To je *d'Alembertov aksiom*, ki ga imenujemo tudi *d'Alembertovo načelo*.

D'ALEMBERTOV aksiom je enakovreden temeljnemu aksiomu, obravnavanemu v razdelku 3.1. Izkaže se, da sta pri obravnavi mehanskih sistemov možna dva bistveno različna pogleda. Prvi, imenovan *dinamični pogled* (BUDÓ [6]), temelji na načelu, da sile povzročajo pospeške, kar je najbolj jasno izraženo v NEWTONovem temeljnem zakonu. Drugi, tako imenovani *statični pogled*, obravnava količine $-dm \ddot{\mathbf{r}}$ kot sile, imenovane vztrajnostne sile, ki skupaj z drugimi silami vzpostavljajo ravnotežje. To je osnovna ideja D'ALEMBERTovega aksioma. Naš temeljni aksiom mehanike dopušča oba pogleda. V primerjavi z NEWTONovimi aksiomi, obravnavanimi v razdelku 3.2, je naš širši, saj vključuje tudi *načelo rezov*, ki je postulirano v razdelku 2.4. To načelo je nujno za obravnavo poljubnih mehanskih sistemov z uporabo NEWTONovih aksiomov.

3.4 Neinercialni sistemi, Galileievo načelo relativnosti

Zdaj raziščimo, kakšno obliko imata zakon o gibalni količini in zakon o vrtilni količini, v koordinatnem sistemu, ki se giblje glede na inercialni sistem. Naj bo \mathbf{r} krajevni vektor masnega elementa v inercialnem sistemu z izhodiščem v O , \mathbf{r}_1 krajevni vektor istega masnega elementa, v sistemu, ki se giblje glede na inercialni sistem z izhodiščem v O_1 in naj bo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ krajevni vektor izhodišča O_1 , glede na inercialni sistem. Vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ označuje vrtenje gibljivega sistema, glej sliko 2/4. Za $\ddot{\mathbf{r}}$ dobimo skladno z enačbo (2.26) izraz

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}''_1. \quad (3.19)$$

Zakon o gibalni količini (3.1) tako dobi obliko:

$$\int_{(S)} \{d\mathbf{F}_a - dm [\ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}''_1]\} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Ta zveza se za poljubne sisteme poenostavi na enačbo

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}_a - dm \mathbf{r}''_1) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

le v primeru, ko sta $\ddot{\mathbf{r}}_0$ in $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ identično enaka nič. V tem primeru iz zakona o vrtilni količini sledi

$$\int_{(S)} (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1) \times (d\mathbf{F}_a - dm \mathbf{r}''_1) = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Če od te enačbe odštejemo enačbo (3.21), vektorsko pomnožimo z \mathbf{r}_0 , dobimo

$$\int_{(S)} \mathbf{r} \times (d\mathbf{F}_a - dm \mathbf{r}''_1) = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Razen uporabljenega simbola za časovno odvajanje krajevnega vektorja in indeksa 1, se enačbi (3.21) in (3.23) ne razlikujeta od enačb (3.1) in (3.2). Za $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$ in $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ sta torej oba koordinatna sistema enakovredna; oba sta inercialna sistema. Z drugimi besedami:

Vsak opazovalni sistem, ki se glede na inercialni sistem giblje enakomerno premočrtno ($\dot{\mathbf{r}}_0 = \text{const.}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$), je prav tako inercialni sistem.

To je vsebina *Galileievega načela relativnosti*. Iz pogojev enakomernega gibanja

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \text{const.}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0},$$

dobimo iz enačbe (3.19) po dvakratnem integriranju

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0(0) + \mathbf{r}_1, \quad (3.24)$$

ali v koordinatnem zapisu

$$\left. \begin{aligned} x &= v_{x0}t + x_0(0) + x_1 \\ y &= v_{y0}t + y_0(0) + y_1 \\ z &= v_{z0}t + z_0(0) + z_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Tu je

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0 = [v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}]$$

konstantna hitrost translacije sistema O_1 glede na sistem O in

$$\mathbf{r}_0(0) = [x_0(0), y_0(0), z_0(0)]$$

krajevni vektor koordinatnega izhodišča O_1 v času $t = 0$. Enačbe (3.24) oz.(3.25) predstavljata tako imenovano *Galilejevo transformacijo*.

Kadar pogoja $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$ in $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ nista izpolnjena hkrati, tj. ne velja GALILEJEVA transformacija, se v zakonu o gibalni količini in zakonu o vrtilni količini pojavijo dodatni členi pospeška, ki jih je treba upoštevati za sistem, ki je pospešen glede na inercialni sistem. Toda tudi v tem primeru lahko zakona o gibalni količini in vrtilni količini formalno izrazimo v obliki (3.1) in (3.2), če dodatne člene pospeška v enačbe (3.19), pomnožene z $-dm$, obravnavamo kot sile, tako imenovane *navidezne sile*, in jih dodamo k $d\mathbf{F}_a$. Izraz

$$-dm [\ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)]$$

imenujemo *sistemska sila*. Če je $\boldsymbol{\omega}$ konstanten in izhodišče gibljivega sistema miruje, jo imenujemo *centrifugalna sila*. CORIOLISOV pospešek, pomnožen z $-dm$

$$-dm (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_1)$$

pa imenujemo *Coriolisova sila*.

Izreki mehanike

4.1 Izreki o skupni gibalni količini, vrtilni količini in energiji mehanskega sistema

Aksiomi, obravnavani v poglavju 3, omogočajo neposredno izpeljavo splošnih izrekov o obnašanju celotnega sistema. Iz teh izrekov bo jasno razviden velik pomen gibalne količine, vrtilne količine in energije sistema.

4.1.1 Izrek o masnem središču

Masno središče, pogosto imenovano tudi *težišče* mehanskega sistema, je definirano s svojim krajevnim vektorjem \mathbf{r}_m :

$$\mathbf{r}_m = \frac{\int_{(S)} dm \mathbf{r}}{\int_{(S)} dm} \equiv \frac{1}{m} \int_{(S)} dm \mathbf{r}, \quad (4.1)$$

kjer m označuje skupno maso sistema. Iz enačbe (4.1) po odvajanju po času in ob upoštevanju nespremenljivosti mase sledi:

$$\mathbf{p} = \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} = m \dot{\mathbf{r}}_m. \quad (4.1)$$

Skupna gibalna količina sistema je torej enaka produktu skupne mase in hitrosti težišča. Nadaljnji odvod da

$$\dot{\mathbf{p}} = \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} = m \ddot{\mathbf{r}}_m. \quad (4.3)$$

Označimo \mathbf{F}_a rezultanto vseh zunanjih sil, ki delujejo na sistem, potem po enačbi (3.1) velja

$$\mathbf{F}_a = \int_{(S)} d\mathbf{F}_a = \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} = m \ddot{\mathbf{r}}_m$$

in s tem

$$\mathbf{F}_a = m \ddot{\mathbf{r}}_m. \quad (4.4)$$

Če primerjamo enačbo (4.4) z NEWTONovim temeljnim zakonom, enačbo (3.7), pridemo do izreka o masnem središču (težiščni izrek):

Masno središče (težišče) mehanskega sistema se giblje, kot da bi bila v njem združena celotna masa in bi nanj delovale vse zunanje sile.

Ta izrek pod določenimi pogoji omogoča, da telesa končnih razsežnosti obravnavamo kot masne točke.

4.1.2 Izrek o ohranitvi gibalne količine in izrek o ohranitvi vrtilne količine

Iz enačb (4.3) in (4.4) za $\mathbf{F}_a = \mathbf{0}$ sledi tako imenovani *izrek o ohranitvi gibalne količine*

$$\dot{\mathbf{p}} = m \ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}_m = \text{const.} \quad (4.5)$$

za celoten mehanski sistem. To pomeni, da če zunanjih sil ni ali če njihova rezultanta enaka nič, skupna gibalna količina ostaja konstanta, masno središče pa se giblje enakomerno premočrtno. Ta izrek ne pove ničesar o gibanju posameznih masnih elementov sistema. Ti se lahko gibljejo tudi drugače.

Podoben izrek lahko izpeljemo iz enačbe (3.4) za skupno vrtilno količino mehanskega sistema. Če označimo

$$\mathbf{M}_a = \int_{(S)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_a \quad (4.6)$$

kot rezultanto momentov vseh zunanjih sil in

$$\mathbf{L} = \int_{(S)} d\mathbf{L} = \int_{(S)} \mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}} \quad (4.7)$$

kot vrtilno količino sistema, ter upoštevamo, da velja

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_{(S)} d\dot{\mathbf{L}} = \int_{(S)} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}}) = \int_{(S)} (\dot{\mathbf{r}} \times dm \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times dm \ddot{\mathbf{r}}) = \int_{(S)} \mathbf{r} \times dm \ddot{\mathbf{r}},$$

dobimo iz enačbe (3.4):

$$\mathbf{M}_a = \dot{\mathbf{L}}. \quad (4.8)$$

Če zunanjih sil ni ali pa je njihov moment enak nič, sledi iz enačbe (4.8) *izrek o ohranitvi vrtilne količine*

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L} = \text{const.} \quad (4.9)$$

4.1.3 Izrek o kinetični energiji (zakon o ohranitvi energije)

Izhajamo iz zakona o gibalni količini, enačba (3.1), ki ga za posamezni masni element zapišemo v obliki

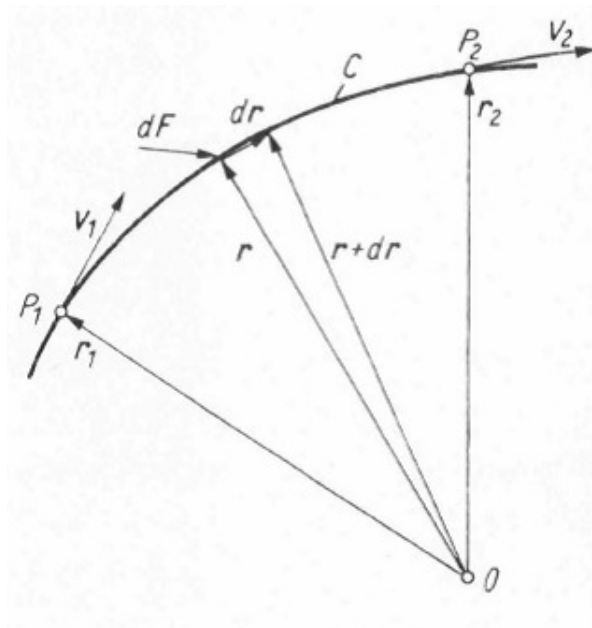
$$d\mathbf{F} = dm \ddot{\mathbf{r}}. \quad (4.10)$$

Indeks a pri sili je tukaj izpuščen iz istega razloga kot pri razlagi NEWTONovega aksioma v razdelku 3.2. Po množenju enačbe (4.10) z diferencialno majhnim pomikom $d\mathbf{r}$ masnega elementa na levi strani dobimo delo sile $d\mathbf{F}$ pri pomiku $d\mathbf{r}$:

$$d(dW) = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.11)$$

Če se masni element pod vplivom sile $d\mathbf{F}$ premika po krivulji C (slika 4/1), potem je delo, ki ga sila $d\mathbf{F}$ opravi na masnem elementu na poti od P_1 do P_2 , skladno z enačbo (4.11)

$$dW = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dm \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.12)$$



Slika 4/1. Delo sile $d\mathbf{F}$ pri gibanju masnega elementa po krivulji C

Desno stran lahko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{aligned} dm \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} &= dm \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = dm \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = dm \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} dm \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d(\mathbf{v}^2) \\ &= \frac{1}{2} dm (\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2) = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Količino

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 \quad (4.14)$$

imenujemo *kinetična energija* masnega elementa. Iz enačb. (4.12), (4.13) in (4.14) sledi izreka o kinetični energiji:

$$dW = dT_2 - dT_1. \quad (4.15)$$

Z besedami:

Delo, ki ga sila $d\mathbf{F}$ opravi na masnem elementu, je enako spremembi kinetične energije tega masnega elementa.

Z integracijo enačbe (4.15) čez vse masne elemente sistema dobimo izrek o kinetični energiji za celoten sistema:

$$W = \int_{(S)} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1, \quad (4.16)$$

tj.

$$W = T_2 - T_1. \quad (4.17)$$

Enačba (4.16) definira delo in kinetične energije celotnega sistema. Pri določanju celotnega dela je treba pri integraciji upoštevati vse sile $d\mathbf{F}$, ki delujejo na masne elemente, tj. vse notranje in zunanje sile celotnega sistema.

Zdaj obravnavamo primer, ko so vse sile, ki opravljajo delo na sistemu, v skladu z enačbo (2.50) izhajajo iz potencialne funkcije. Potem za delo po enačbi (4.16) sledi:

$$\begin{aligned} W &= \int_S \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla U(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_S \int_{P_1}^{P_2} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) dU \\ &= - \int_S \int_{P_1}^{P_2} \left(d - dt \frac{\partial}{\partial t} \right) dU = - \int_S \int_{P_1}^{P_2} \left[d(dU) - \frac{\partial dU}{\partial t} dt \right] \\ &= - \int_S \left[dU_2 - dU_1 - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial dU}{\partial t} dt \right] = -(U_2 - U_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Z vstavitvijo enačbe (4.18) v enačbo (4.17) dobimo

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (4.19)$$

V primeru konservativnih sistemov, za katere velja

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

sledi

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

oz.

$$T + U = E = \text{const.} \quad (4.20)$$

To je *zakon o ohranitvi mehanske energije*, ki ga imenujemo tudi *zakon o ohranitvi energije* ali na kratko *energijski zakon*.

4.2 Načela

4.2.1 Uvodna pojasnila

Kot je bilo že pojasnjeno v poglavju 3, zakona o gibalni količini in vrtilni količini, vzeta kot temeljna aksioma skupaj z upoštevanjem osnovnih pojmov prostora, časa, mase in sile (poglavje 2), zadostujeta za obravnavo vseh problemov klasične mehanike, če poznamo posebne zakone sile $d\mathbf{F} = d\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$.

Nalogo obravnave mehanskega sistema brez kakršnihkoli idealizacij je treba šteti za praktično nerešljivo. Če že zanemarimo dejstvo, da klasična mehanika temelji na idealiziranem modelu fizikalne realnosti, pa predvsem raznolikosti učinkov notranjih in zunanjih sil ni mogoče na splošno zajeti. Obravnava posebnega problema s pomočjo splošno veljavnih aksiomov je mogoča šele po nadaljnji idealizaciji sistema.

Eden temeljnih pojmov v modelih mehanskih sistemov je *toga vez*. Ta pojem temelji na predpostavki, da med posameznimi masnimi elementi ali med neskončnim številom teh elementov ter njihovo okolico obstajajo prostorske vezi, ki so povsem nespremenljive. Upravičenost takšne predpostavke izhaja iz dejstva, da v določenih mehanskih sistemih med nekaterimi masnimi elementi nastopajo le majhne spremembe leg, saj sile med njimi preprečujejo večje medsebojne premike. Pri idealizaciji takšne majhne spremembe leg izenačimo z nič. Sile, ki na ta način vzpostavljajo toge vezi med masnimi elementi, imenujemo *vezne sile*. Teh sil ni mogoče določiti na podlagi zakonov sil, ki veljajo za dejanski sistem, saj njihova odvisnost od fizikalnih lastnosti ni določena. Da jih ločimo od ostalih sil, vse sile, ki niso vezne, imenujemo *vtisnjene sile*.

Uvedba veznih sil ima za virtualno delo v celotnem sistemu posledice, ki jih bomo podrobneje obravnavali v nadaljevanju. Če virtualni pomiki zadoščajo predpisanim togim vezem, velja za virtualno delo veznih sil naslednja zveza

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta\mathbf{r} \geq 0. \quad (4.21)$$

Virtualno delo vtisnjenih sil, ki pri prehodu v togo vez postanejo vezne sile, lahko ob poznavanju posebnih zakonov sil dokažemo kot pravilno. Vendar pa splošen dokaz ni

mogoč. Veljavnost neenakosti (4.21) je zato za sisteme s togimi vezmi treba obravnavati kot aksiom.

Pri togih vezeh je treba razlikovati med tako imenovanimi *enostranskimi* in *dvostranskimi* vezmi.

Naj bo dan poljuben nabor virtualnih pomikov $\delta\mathbf{r}$, ki pripadajo masnim elementom in so združljivi z vezmi. Če je ta nabor možen tudi v nasprotni smeri ($-\delta\mathbf{r}$), govorimo o *dvostranskih vezeh*. Če pa $-\delta\mathbf{r}$ ni združljiv z vezmi za vse možne nabore $\delta\mathbf{r}$, takšne vezi imenujemo *enostranske vezi*.

V primeru dvostranskih vezi v izrazu (4.21) velja enakost. Pravilnost tega izreka je razvidna, če predpostavimo, da je leva stran neenakosti (4.21) za neko $\delta\mathbf{r}$ pozitivna. Če nato $\delta\mathbf{r}$ zamenjamo z $-\delta\mathbf{r}$, integral dobi negativno vrednost, kar vodi v protislovje. Pri enostranskih vezeh pa izraza (4.21) ni mogoče bolj natančno opredeliti.

Izkaže se, da neposredna uporaba temeljnega aksioma, tj. enačb (3.1) in (3.2), še posebej ob prisotnosti togih vezi, ni vedno najbolj ugodna. Vendar pa je iz njega mogoče izpeljati izreke, ki so zaradi svoje matematične dodelanosti bolj prilagojeni določenim nalogam. Ti izreki so splošno znani kot *načela mehanike*. V nadaljevanju jih bomo, skupaj z njihovo uporabo, podrobno obravnavali.

4.2.2 d'Alembertovo načelo

Eno od temeljnih načel mehanike je *d'Alembertovo načelo*. Za njegovo izpeljavo izhajamo iz temeljnega aksioma tj. enačbe (3.1) za posamezen masni element dm :

$$d\mathbf{F} - dm\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

Če ta izraz skalarno pomnožimo z virtualnim pomikom $\delta\mathbf{r}$, potem seveda velja

$$(d\mathbf{F} - dm\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0.$$

To enačbo nato integriramo v STIELTJESovem smislu prek vseh masnih elementov sistema in dobimo

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F} - dm\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \quad (4.22)$$

Pri tem so $d\mathbf{F}$ vse notranje in zunanje sile, ki delujejo na posamezni masni element sistema. Če te sile nadalje razdelimo na vtisnjene sile $d\mathbf{F}^{(e)}$ in vezne sile $d\mathbf{F}^{(z)}$, potem iz (4.22) ob upoštevanju aksioma (4.21) dobimo:

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}^{(e)} - dm\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = - \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta\mathbf{r} \leq 0$$

oz.

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} \leq 0. \quad (4.23)$$

Enačba (4.23) je D'ALEMBERTOVO načelo v LAGRANGEVI obliki (HAMEL [4]). V njej se pojavljajo virtualni pomiki, ki niso več povsem poljubni; ustrezati morajo togim vezem sistema. Prav tako kot v zvezi (4.21) velja znak enakosti, če so prisotne zgolj dvostranske vezi. V nadaljevanju bomo vedno predpostavljali prisotnost dvostranskih vezi, razen če bo navedeno drugače. Če torej ni enostranskih vezi, velja D'ALEMBERTOVO načelo v obliki

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (4.24)$$

Za izpeljavo tega načela smo iz temeljnega aksioma uporabili zgolj zvezo (3.1). Zato enačba (4.24) sama ni enakovredna celotnemu temeljnemu aksiomu, tj. enačbama (3.1) in (3.2). To se kaže v tem, da je pri preučevanju sistemov običajno treba uporabiti tudi zakon vzajemnega delovanja za notranje sile (glej 3.2). Zveza (4.24) je sama po sebi zadostna le v primeru, ko so vse notranje sile vezne sile, saj aksiom (4.21) vključuje zakon vzajemnega delovanja za vezne sile.

Iz povedanega sledi, da sta D'ALEMBERTOVO načelo v obliki (4.24) skupaj z izrekom o vzajemnem učinku za notranje sile povsem enakovredno temeljnemu aksiomu tj. enačbama (3.1) in (3.2). Če ta dva izreka obravnavamo kot aksioma, potem na enak način kot zakona o gibalni in vrtilni količini omogočata izgradnjo mehanike.

4.2.3 Načelo virtualnega dela

Za sisteme, katerih masni elementi niso pospešeni, iz D'ALEMBERTOVEGA načela v LAGRANGEVI obliki izhaja načelo virtualnega dela :

$$\delta W^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (4.25)$$

V statiki preučujemo sisteme, ki glede na inercialni sistem mirujejo ali pa so v stanju enakomerno premočrtnega gibanja. Načelo virtualnega dela lahko torej razumemo kot splošno načelo statike.

Posebej pomembni so sistemi, pri katerih vtisnjene sile izhajajo iz potenciala. Zanje velja, skladno z $d\mathbf{F}^{(e)} = -\text{grad}(dU)$ [gl.enačbo (2.46)]:

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} &= \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \text{grad}(dU) \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \delta(dU) \\ &= - \int_{(S)} d(\delta U) = -\delta U = 0 \end{aligned}$$

tj.

$$\delta U = 0. \quad (4.26)$$

Pri tem je treba tukaj simbol δ razumeti kot znak variacije v smislu variacijskega računa. δU torej predstavlja prvo variacijo potencialne energije U .

4.2.4 Hamiltonovo načelo

Iz D'ALEMBERTovega načela (4.24) lahko izpeljemo še eno načelo, ki ima pomembno vlogo pri uporabi in temelji na osnovnih pojmih dela in energije. Za njegovo izpeljavo začnemo z enačbo (4.24), ki jo lahko zapišemo v obliki:

$$\int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (4.27)$$

Desna stran enačbe (4.27) predstavlja virtualno delo, ki ga vtisnjene sile opravijo na celotnem sistemu pri virtualnih pomikih posameznih masnih elementov celotnega sistema. Označimo ga z $\delta W^{(e)}$:

$$\delta W^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (4.28)$$

Levo stran enačbe (4.27) lahko preoblikujemo na naslednji način:

$$\int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2 + \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\delta d\mathbf{r} - d\delta \mathbf{r}}{dt}. \quad (4.29)$$

Veljavnost te zveze zlahka preverimo z odvajanjem prvega integrala na desni strani. Ker pa je v skladu z (4.14) integral

$$\int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2$$

kinetična energija celotnega sistema, je

$$\delta \int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2 = \delta T \quad (4.30)$$

sprememba kinetične energije sistema. Skladno z enačbami (4.28), (4.29) in (4.30), dobimo iz enačbe (4.27) tako imenovano splošeno *Lagrangevo centralno enačbo*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} &= \delta \int_{(S)} \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{r}}^2 + \int_{(S)} d\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} - \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\delta \dot{\mathbf{r}} - \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} \right) \\ &= \delta T + \delta W^{(e)} - \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\delta \dot{\mathbf{r}} - \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Integracija LAGRANGEve centralne enačbe po času med dvema poljubno izbranima časoma t_1 in t_2 privede do naslednjega rezultata:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W^{(e)}) dt = \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\delta \dot{\mathbf{r}} - \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} \right) dt. \quad (4.32)$$

To je najsplošnejša oblika *Hamiltonovega načela*.

Virtualni pomiki predstavljajo poljubno diferencialno spremembo lege sistema, ki je v vsakem trenutku znotraj intervala $t_1 \leq t \leq t_2$ povsem poljubna. Torej, v splošnem vsakemu času t pripada drugačna vrednost $\delta \mathbf{r}$. Dogovorimo se, da v časih t_1 in t_2 ni virtualnih pomikov, tj. postavimo

$$\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

pri čemer prvi člen na desni strani enačbe (4.32) izgine. Poleg tega predpostavimo, da sta za krajevni vektor zamenljivi operaciji δ in d :

$$\delta d\mathbf{r} - d\delta \mathbf{r} = \left(\delta \dot{\mathbf{r}} - \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} \right) dt = \mathbf{0}. \quad (4.34)$$

Pri uporabi prikazani v nadaljevanju, bomo videli, da ima nezamenljivost obeh operatorjev pomembno vlogo pri določenih sistemih s končnim številom prostostnih stopenj. Pogoji za zamenljivost so podrobno opisani v poglavju 5.2. Z upoštevanjem (4.33) in (4.34) dobimo iz enačbe (4.32) HAMILTONovo načelo v obliki

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W^{(e)}) dt = 0. \quad (4.35)$$

Kot je razvidno iz izpeljave, se tu razlikuje pomen simbola δ v izrazih δT in $\delta W^{(e)}$. V prvem primeru ima δ natanko tak pomen kot znak variacije v variacijskem računu. Tako je δT prva variacija kinetične energije T sistema. Nasprotno pa $\delta W^{(e)}$ označuje virtualno delo vtisnjenih sil in ga je treba razumeti kot enoten simbol. Na splošno ni mogoče obravnavati $\delta W^{(e)}$ kot variacijo dela $W^{(e)}$ vtisnjenih sil. Da bi poudarili te razlike, nekateri avtorji, na primer HAMEL [4] in BUDÓ [6], v izrazu za virtualno delo vtisnjenih sil namesto δ uporabljajo znak δ' , za samo virtualno delo pa $\delta' W^{(e)}$.

Posebne pomena so sistemi, pri katerih je vtisnjene sile mogoče izpeljati iz potenciala. Z upoštevanjem enačbe (2.26) izhaja iz enačbe (4.28)

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} &= \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \text{grad}(dU) \cdot \delta \mathbf{r} = - \int_{(S)} \delta(dU) \\ &= - \int_{(S)} d(\delta U) = -\delta U. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Poudarjamo, da ta predstavitev velja tako za konservativne sisteme kot tudi za sisteme, v katerih imajo vtisnjene sile časovno odvisen potencial (za več podrobnosti glej poglavje 2.4.). V enačbi (4.36) predstavlja δU prvo variacijo potencialne energije U sistema. Iz enačbe (4.35) sledi z enačbo (4.36) HAMILTONovo načelo za sisteme, v katerih imajo vtisnjene sile potencial:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W^{(e)}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - U) dt = 0. \quad (4.37)$$

Če uvedemo tako imenovano *Lagrangevo funkcijo* (imenovano tudi kinetični potencial)

$$L = T - U \quad (4.38)$$

in uporabimo zamenljivost integracije in variacije, dobimo

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (4.39)$$

ozi.

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{stac.} \quad (4.40)$$

V obliki enačb (4.39) oziroma (4.40) HAMILTONovo načelo postane problem ekstremnih vrednosti v smislu variacijskega računa, tj. variacijsko načelo.

4.2.5 Jourdainovo načelo in Gaussovo načelo najmanjše prisile

Za sisteme z zapletenimi vezmi D'ALEMBERTovo načelo ni primerno (za več podrobnosti glej 5.2.2.). Bolj primerna sta *Jourdainovo načelo* in *Gaussovo načelo najmanjše prisile*.

Namesto aksioma (4.21), ki v primeru dvostranskih vezi zahteva ničnost skupnega virtualnega dela veznih sil, JOURDAINovo načelo predpostavlja

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta' \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad (4.41)$$

GAUSSovo načelo pa

$$\int_{(S)} d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \delta'' \mathbf{r} = 0. \quad (4.42)$$

Za oznako *Jourdainove variacije* uporabljamo simbol δ' za katero velja

$$\delta' \mathbf{r} = 0, \quad \delta' \dot{\mathbf{r}} \neq 0, \quad \delta' t = 0. \quad (4.43)$$

Simbol δ'' je oznaka *Gaussove variacije* za katero je

$$\delta'' \mathbf{r} = \delta'' \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \delta'' \ddot{\mathbf{r}} \neq 0, \quad \delta'' t = 0. \quad (4.44)$$

To pomeni, da JOURDAINova variacija primerja sisteme z enako lego, vendar različnimi hitrostmi, medtem ko GAUSSova variacija primerja sisteme z enako lego in hitrostjo, vendar različnimi pospeški.

Podobno kot pri izpeljavi D'ALEMBERTovega načela v razdelku 4.2.2, v enačbo (4.22) namesto $\delta \mathbf{r}$ vstavimo $\delta' \dot{\mathbf{r}}$ oziroma $\delta'' \ddot{\mathbf{r}}$. Za dvostranske vezi ob upoštevanju enačb (4.41) in (4.42) dobimo JOURDAINovo načelo

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta' \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad (4.45)$$

oziroma GAUSSovo načelo

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (4.46)$$

Očitno je, da sta obe načeli za proste sisteme zaradi poljubnosti $\delta' \dot{\mathbf{r}}$ oziroma $\delta'' \ddot{\mathbf{r}}$ identični z D'ALEMBERTovim načelom. Kot bomo videli v razdelku 5.2.2, se dodatne možnosti uporabe za vezane sisteme pojavijo le, ko so prisotne tako imenovane nelinearne neholonomne vezi.

Neodvisnost sil od pospeškov, obravnavana v razdelku 2.4, omogoča formulacijo GAUSSovega načela (4.46) kot ekstremalnega načela. Če simbol δ'' razumemo kot variacijski simbol in ga uporabimo na vtisnjene sile, potem velja na podlagi GAUSSove variacijske predpostavke (4.44)

$$\delta'' d\mathbf{F}^{(e)} = \delta'' d\mathbf{F}^{(e)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial d\mathbf{F}^{(e)}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta'' \mathbf{r} + \frac{\partial d\mathbf{F}^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta'' \dot{\mathbf{r}} = 0. \quad (4.47)$$

Zaradi tega je v enačbi (4.46) mogoče znak variacije zapisati pred integral, kar izrazimo kot:

$$\begin{aligned} \delta'' \int_{(S)} dm \left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{F}^{(e)}}{dm} \right)^2 &= 2 \int_{(S)} dm \left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{F}^{(e)}}{dm} \right) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} \\ &= -2 \int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ta ugotovitev je enakovredna zahtevi, da mora imeti integral na levi strani enačbe (4.48) ekstrem. Ker ta izraz predstavlja pozitivno definitno kvadratno formo, je to minimum. Načelo je torej mogoče zapisati v obliki

$$Z \equiv \int_{(S)} dm \left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{F}^{(e)}}{dm} \right)^2 = \min, \quad (4.49)$$

oz.

$$\delta'' Z = 0. \quad (4.50)$$

Količino Z imenujemo *prisila*, načelo v obliki (4.49) ali (4.50) pa GAUSSovo načelo najmanjše prisile. Ponovno poudarjamo, da je pri oblikovanju Z nujno upoštevati pravila variiranja, podana z enačbama (4.44).

Sistemi s končnim številom prostostnih stopenj

5.1 Modeli s končnim številom prostostnih stopenj

V poglavju 2.3 je bilo že pojasnjeno, da se raziskovanje gibanja mehanskih sistemov vedno nanaša na modele teles. Med drugim so bili omenjeni masna točka in togo telo. Te modele bomo zdaj podrobneje obravnavali.

Realno telo je mogoče idealizirati kot masno točko, kadar so njegove dimenzije glede na sistem kot celoto zadostno majhne ali kadar ne izvajajo rotacijskega gibanja okoli svojega masnega središča in kadar medsebojno gibanje njegovih elementov ni pomembno. V takih primerih je vrtilna količina, povezana z masnim središčem, zanemarljivo majhna ali enaka nič. V skladu z enačbo (4.4) je to enakovredno redukciji telesa na njegovo masno središče. Več takšnih teles, ki medsebojno delujejo, je mogoče obravnavati kot sistem masnih točk.

Telo, katerega mere glede na celotni sistem niso majhne in katerega vrtenja okoli osi skozi masno središče ni mogoče zanemariti, je mogoče reducirati na model togega telesa, če so spremembe razdalj med njegovima poljubnima elementoma tako majhne, da jih lahko pri obravnavi problema privzamemo kot enake nič.

Če je sistem sestavljen iz več teles, za katera so izpolnjeni navedeni pogoji, je možna redukcija na sistem togih teles. V takšnem primeru lahko med togimi telesi sistema obstajajo brezmasne vezi, ki praviloma niso toge, na primer elastične vzmeti. Pogosto se uporabljajo tudi sistemi, sestavljeni iz togih teles in masnih točk.

5.2 Kinematika sistemov s končnim številom prostostnih stopenj

5.2.1 Kinematika holonomnih in linearno neholonomnih sistemov

Naj bo dan mehanski sistem, sestavljen iz končnega števila masnih elementov ali neskončno mnogih masnih elementov, med katerimi obstajajo takšne vezi, ki omogočajo,

da je lega sistema v vsakem trenutku enolično določena s končnim številom parametrov q_i . Krajevni vektor vsakega masnega elementa je nato mogoče izraziti kot funkcijo teh parametrov, tako imenovanih *posplošenih koordinat*, v obliki:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_f, t). \quad (5.1)$$

Posplošene koordinate q_i so sprva neznane funkcije časa.

Gibanje vsakega masnega elementa in s tem gibanje celotnega sistema je popolnoma opisano, če je mogoče posplošene koordinate q_i izraziti kot funkcije časa, saj so krajevni vektorji \mathbf{r} podani z enačbo (5.1).

Če je za popoln opis gibanja sistema potrebnih natanko f posplošenih koordinat q_1, q_2, \dots, q_f , potem je f število prostostnih stopenj sistema. Včasih je smiselno uvesti več posplošenih koordinat, kot ima sistem prostostnih stopenj:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \quad (5.2)$$

V tem primeru med posplošenimi koordinatami obstajajo pogojne enačbe – imenovane tudi vezi – ki imajo obliko

$$f_p(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0; \quad p = 1, 2, \dots, r = n - f. \quad (5.3)$$

Z izračunom totalnih diferencialov f_p dobimo linearne zveze med diferenciali posplošenih koordinat:

$$df_p = \frac{\partial f_p}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} dt = a_{pi} dq_i + a_{p0} dt = 0, \quad (5.4)$$

$$p = 1, 2, \dots, r; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kjer velja

$$\frac{\partial f_p}{\partial q_i} = a_{pi}(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \quad \frac{\partial f_p}{\partial t} = a_{p0}(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Za poenostavitev zapisa smo uporabili EINSTEINOV dogovor o seštevanju. Ta določa, da je v primerih, ko se indeks v zmnožku pojavi večkrat, treba sešteti po tem indeksu v predpisanih mejah. V nadaljevanju bomo ta dogovor o seštevanju vedno uporabljali. V izjemnih primerih bomo indekse, ki se ne seštevajo, navedli v oklepajih.

Koeficienta a_{pi} in a_{p0} izpolnjujeta pogoje integrabilnosti, tj. velja:

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial t} - \frac{\partial a_{p0}}{\partial q_i} = 0. \quad (5.5)$$

To izhaja iz veljavnosti SCHWARZOVEGA pravila o enakosti mešanih odvodih za funkcije f_p .

Pogojne enačbe v obliki (5.3), v katerih se poleg časa t pojavljajo le posplošene koordinate q_i , ne pa tudi njihovi odvodi po času, imenujemo *holonomne pogojne enačbe*. Poleg tega jih imenujemo *skleronomne*, če v njih čas ne nastopa eksplicitno, sicer jih imenujemo *reonomne*. Mehanski sistem pa lahko imenujemo skleronomen le, če ni reonomnih pogojnih enačb in če krajevni vektorji masnih elementov niso eksplicitno odvisni od časa.

V splošnem primeru se v pogojnih enačbah poleg posplošenih koordinat lahko pojavijo tudi njihovi prvi časovni odvodi \dot{q}_i , tako imenovane *posplošene hitrosti* ali *koordinate hitrosti*. Takrat imajo obliko

$$\varphi_p(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0; \quad p = 1, 2, \dots, s. \quad (5.6)$$

in jih imenujemo *neholonomne pogojne enačbe*. Razlikujemo tudi med *skleronomnimi* in *reonomnimi* neholonomnimi pogojnimi enačbami. Med neholonomnimi pogojnimi enačbami so posebej zanimive tiste, ki so linearne v koordinatah hitrosti. Ker velja

$$dq_i = \dot{q}_i dt,$$

lahko pogoje (5.6) po množenju z dt zapišemo v obliki:

$$\varphi_p dt = a_{pi} dq_i + a_{p0} dt = 0. \quad (5.7)$$

Tako kot pri enačbi (5.4) so tudi tu koeficienti a_{pi} in a_{p0} odvisna od posplošenih koordinat q_i in časa t . V nasprotju z enačbo (5.4) pa koeficienti v enačbi (5.7) ne izpolnjujejo vseh pogojev integrabilnosti (5.5). Če bi jih izpolnjevali, bi bilo mogoče enačbo (5.6) reducirati na obliko (5.3). Zato tudi ni mogoče zmanjšati števila potrebnih posplošenih koordinat s pomočjo neholonomnih pogojnih enačb.

Pogojne enačbe (5.4) oziroma (5.7) omejujejo dejanske možnosti gibanja sistema. Zahtevamo lahko, da virtualni pomiki prav tako izpolnjujejo te pogoje. Ustrezne pogojne enačbe za virtualne pomike imajo zaradi $\delta t = 0$ obliko:

$$a_{pi} \delta q_i = 0. \quad (5.8)$$

Tovrstne pogojne enačbe ustrezajo dvostranskim vezem, definiranimi v točki 4.2.1. Predpostavimo še, da v množici vrednosti posplošenih koordinat q_i ne obstaja kombinacija, za katero bi vsi koeficienti $a_{pi}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ v eni od teh enačb izginili. Pogoje, ki teh predpostavk ne izpolnjujejo, bomo imenovali izrojeni. Za holonomne sisteme koeficienti a_{pi} izpolnjujejo pogoje integrabilnosti:

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} = 0.$$

Če virtualne pomike podvržemo pogojem (5.8), sledi, da operatorja d in δ za neholonomne sisteme nista zamenljiva, medtem ko sta za holonomne sisteme vedno zamenljiva. To lahko pokažemo na naslednji način. Če uporabimo operator δ na enačbo (5.7), dobimo:

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} \delta q_j dq_i + a_{pi} \delta (dq_i) + \frac{\partial a_{p0}}{\partial q_j} \delta q_j dt = 0. \quad (5.9)$$

Z uporabo operatorja d na enačbo (5.8) dobimo:

$$\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} \delta q_i dq_j + a_{pi} d(\delta q_i) + \frac{\partial a_{pi}}{\partial t} \delta q_i dt = 0. \quad (5.10)$$

Če oblikujemo razliko enačb (5.9) in (5.10) ter zamenjamo indeksa seštevanja i in j v prvih dveh členih zadnje enačbe, dobimo:

$$\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} \right) \delta q_j dq_i + \left(\frac{\partial a_{p0}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial t} \right) \delta q_j dt + a_{pi} (\delta d - d\delta) q_i = 0. \quad (5.11)$$

Izrazi v oklepaju prvih dveh členov v enačbi (5.11) v skladu z enačbo (5.5) odpadejo samo, če so izpolnjeni pogoji integrabilnosti, kar pa za vse izraze v neholonomnih sistemih ne velja. Poleg tega, ker lahko δq_i izberemo poljubno, je enačba (5.11) izpolnjena le, če velja:

$$\left. \begin{aligned} a_{pi} (\delta d - d\delta) q_i = - \left[\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial q_i} \right) \delta q_j dq_i + \left(\frac{\partial a_{p0}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{pj}}{\partial t} \right) \delta q_j dt \right] \neq 0, \\ p = 1, 2, \dots, s; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

To je s nehomogenih linearnih enačb za n izrazov $(\delta d - d\delta) q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zato lahko $n - s$ teh izrazov izberemo poljubno, tj. lahko jih izenačimo z nič. Ostalih s izrazov je nato mogoče enolično določiti, pri čemer ti izrazi praviloma niso enaki nič. Iz tega sledi, da za s posplošenih koordinat q_i ne velja zamenljivost operatorjev δ in d .

To pomeni, da prav tako velja:

$$\delta d\mathbf{r} \neq d\delta\mathbf{r}.$$

Za dokaz te trditve pokažemo, da iz enačbe (5.1) sledi:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt$$

in

$$\delta\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Nadalje sledi:

$$\delta d\mathbf{r} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_j} dq_i \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta dq_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_i} dt \delta q_i,$$

in

$$d\delta\mathbf{r} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\partial q_j}\delta q_i dq_j + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\delta dq_i + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\partial t}\delta q_i dt.$$

Če uporabimo SCHWARZovo pravilo o enakosti mešanih odvodov in zadnji dve enačbi medsebojno odštejemo, dobimo:

$$(\delta d - d\delta)\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}(\delta d - d\delta)q_i. \quad (5.13)$$

Ker vsi členi na desni strani enačbe (5.13) ne izginejo, je trditev dokazana.

Druga možnost je, da izpolnitev pogojev v obliki enačbe (5.7) zahtevamo le dejanske pomike. Virtualni pomiki potem na splošno ne izpolnjujejo ustreznih pogojev v obliki enačbe (5.8). V tem primeru sta tudi za neholonomne sisteme operatorja d in δ zamenljiva za vse posplošene koordinate. Vendar pa sile, pogojene z enačbami (5.7), pri virtualnih pomikih opravijo virtualno delo, kar je treba pri uporabi raznih načel upoštevati.

5.2.2 Splošne pogojne enačbe

Zdaj si oglejmo primer poljubnih pogojnih enačb (5.6), ki so nelinearne v koordinatah hitrosti. Te pogojne enačbe določajo omejitve za dejanska gibanja. V tem primeru ni mogoče podati pogojnih enačb med virtualnimi pomiki v obliki (5.8). Z uporabo pojma Jourdainove variacije, skladne s pogoji (4.43), pa lahko navedemo zveze za virtualne hitrosti $\delta'\dot{q}_i$, ki so podobne enačbam (5.8).

Najprej ugotovimo, da so spremenljivke $\delta'q_i$ lahko enake nič, saj iz enačb (5.2) in (4.43) sledi:

$$\delta'\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\delta'q_i = \mathbf{0}. \quad (5.14)$$

Zato z uporabo operatorja δ' na enačbo (5.6) dobimo zvezo:

$$\delta'\varphi_p = \frac{\partial\varphi_p}{\partial\dot{q}_i}\delta'\dot{q}_i = 0. \quad (5.15)$$

Če so poleg pogojnih enačb (5.6) prisotni tudi holonomni pogoji, ki ustrezajo enačbi (5.3), jih je pred uporabo JOURDAINOVE variacije treba totalno odvajati po času. Tako dobimo:

$$\left. \begin{aligned} \dot{f}_p &= \frac{\partial f_p}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f_p}{\partial t} = 0, \\ \delta'\dot{f}_p &= \frac{\partial f_p}{\partial\dot{q}_i}\delta'\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\partial f_p}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f_p}{\partial t}\right)\delta'\dot{q}_i = \frac{\partial f_p}{\partial q_i}\delta'\dot{q}_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Podobno JOURDAINovo variacijo vektorja hitrosti oblikujemo s pomočjo enačbe (5.2):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ \delta' \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_i} \delta' \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \delta' \dot{q}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta' \dot{q}_i.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Tudi variacija po GAUSSu, skladna s pogoji (4.44), omogoča obravnavo pogojnih enačb v obliki (5.6). Pri tem sta količini $\delta'' q_i$ in $\delta'' \dot{q}_i$ enaki nič, kar sledi iz:

$$\delta'' \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta'' q_i = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

$$\delta'' \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \delta'' q_i + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \delta'' \dot{q}_i = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Podobno kot pri izpeljavi enačb (5.15) do (5.17) dobimo ob uporabi GAUSSove variacije naslednje zveze:

$$\delta'' \dot{\varphi}_p = \frac{\partial \dot{\varphi}_p}{\partial \ddot{q}_i} \delta'' \ddot{q}_i = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \dot{q}_i} \delta'' \ddot{q}_i = 0 \quad (5.20)$$

$$\delta'' \ddot{f}_p = \frac{\partial \ddot{f}_p}{\partial \ddot{q}_i} \delta'' \ddot{q}_i = \frac{\partial f_p}{\partial q_i} \delta'' \ddot{q}_i = 0 \quad (5.21)$$

$$\delta'' \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \ddot{q}_i} \delta'' \ddot{q}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta'' \ddot{q}_i. \quad (5.22)$$

Vidimo, da bi z uporabo GAUSSove variacije lahko obravnavali tudi pogojne enačbe v obliki:

$$\psi_p(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n, t) = 0. \quad (5.23)$$

Pogojne enačbe med virtualnimi pospeški bi bile:

$$\delta'' \psi_p = \frac{\partial \psi_p}{\partial \ddot{q}_i} \delta'' \ddot{q}_i = 0. \quad (5.24)$$

Mehanski sistemi, za katere veljajo pogoji v skladu z enačbo (5.23), HAMEL [4] imenuje neholonomni sistemi drugega reda. Vendar vezi, ki vključujejo pospeške, nasprotujejo aksiomu, ki pravi, da sile, vključno z veznimi silami, ne morejo biti eksplicitno odvisne od pospeškov (glej tudi 2.4). Zato menimo, da se takšne pogojne enačbe pojavijo kvečjemu kot posledica eliminacijskih postopkov in se jim je zato mogoče vedno izogniti. V skladu s tem lahko sisteme, za katere veljajo pogoji v skladu z enačbo (5.6), obravnavamo že z uporabo JOURDAINove variacije. Vendar pa uporaba GAUSSove variacije ponuja prednost, saj omogoča formulacijo GAUSSovega načela kot ekstremalnega načela.

5.2.3 Kvazihitrosti, kvazikoordinate

Na tem mestu želimo predstaviti pojma *kvazihitrost* in *kvazikoordinata*. Naj obstaja linearna kombinacija posplošenih koordinat hitrosti \dot{q}_j v obliki:

$$\omega_i = a_{ij} \dot{q}_j + a_{i0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.25)$$

Koeficienti a_{ij} in a_{i0} so v splošnem funkcije posplošenih koordinat q_j in časa t . Poleg tega predpostavimo, da so enačbe (5.25) med seboj linearno neodvisne, tj. velja:

$$\det(a_{ij}) \neq 0. \quad (5.26)$$

Spremenljivke ω_i lahko obravnavamo kot nove hitrostne koordinate le, če desna stran enačbe (5.25) predstavlja totalni odvod po času. To velja, če koeficienti a_{ij} in a_{i0} izpolnjujejo pogoje integrabilnosti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} &= 0 \\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial a_{i0}}{\partial q_j} &= 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Naj bo:

$$\omega_i = \dot{\pi}_i,$$

pri čemer lahko spremenljivke π_i obravnavamo kot nove posplošene koordinate. Če pa enačbe (5.27) niso izpolnjene, spremenljivke ω_i imenujemo kvazihitrosti. Integrali

$$\pi_i(t) = \int_{t_0}^t \omega_i dt + \pi_i(t_0) \quad (5.28)$$

niso odvisni samo od stanja sistema, označenega s q_1, q_2, \dots, q_n , v času t , temveč tudi od integracijske poti. Ker π_i niso več dejanske koordinate, jih imenujemo kvazikoordinate. Če zahtevamo, da kvazikoordinate ne opisujejo le dejanskih, temveč tudi virtualnih stanj sistema, iz enačbe (5.25) ne sledi le:

$$d\pi_i = a_{ij} dq_j + a_{i0} dt, \quad (5.29)$$

temveč tudi:

$$\delta\pi_i = a_{ij} \delta q_j. \quad (5.30)$$

Če tvorimo razliko $(\delta d - d\delta)\pi_i$, dobimo:

$$(\delta d - d\delta)\pi_i - a_{ij}(\delta d - d\delta)q_j = \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right) \delta q_k dq_j + \left(\frac{\partial a_{i0}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} \right) \delta q_k dt. \quad (5.31)$$

Ker kvazikoordinate na desni strani enačbe (5.31) ne odpadejo, lahko sklepamo, da je zamenljivost operatorjev d in δ mogoča le za π_i ali za q_i .

5.3 Ravnotežne lege sistemov s končnim številom prostostnih stopenj

Preden se lotimo raziskovanja gibanja mehanskih sistemov, obravnavajmo ravnotežne lege takih sistemov. Ravnotežna lega je vsaka lega, v kateri lahko sistem pod vplivom vtisnjenih in veznih sil ostane v mirovanju. Pri tem ne zahtevamo, da je koordinatni

sistem, na katerega se nanašajo krajevni vektorji \mathbf{r}_1 masnih elementov, inercialni sistem. Najprej izpeljemo načelo virtualnega dela za poljuben koordinatni sistem. V ta namen izhajamo iz D'ALEMBERTovega načela, tj. enačbe (4.24):

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}^{(e)} - dm\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \quad (5.32)$$

Pri tem je $\ddot{\mathbf{r}}$ drugi odvod krajevnega vektorja po času, ki se nanaša na inercialni sistem. Zveza med tem tako imenovanim absolutnim pospeškom in relativnim pospeškom \mathbf{a}_r , ki se nanaša na poljubno gibajoči se koordinatni sistem, je glede na enačbo (2.26):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_f + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r. \quad (5.33)$$

V skladu z enačbo (2.18) velja:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$$

in ker se izhodišče gibljivega koordinatnega sistema, označenega z \mathbf{r}_0 , ne spreminja, je očitno:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}_1. \quad (5.34)$$

Z enačbama (5.33) in (5.34) dobimo iz enačbe (5.32):

$$\int_S [d\mathbf{F}^{(e)} - dm(\mathbf{a}_f + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r)] \cdot \delta\mathbf{r}_1 = 0. \quad (5.35)$$

Če vztrajnostni sili, tj. sistemsko silo in CORIOLISovo silo, združimo z vtisnjenimi silami $d\mathbf{F}^{(e)}$ v silo:

$$d\mathbf{F}^* = d\mathbf{F}^{(e)} - dm\mathbf{a}_f - dm\mathbf{a}_c, \quad (5.36)$$

dobimo D'ALEMBERTovo načelo glede na poljubni gibljiv sistem:

$$\int_S (d\mathbf{F}^* - dm\mathbf{a}_r) \cdot \delta\mathbf{r}_1 = 0. \quad (5.37)$$

V skladu z zgoraj podano definicijo ravnotežne lege mehanski sistem ostane v mirovanju glede na gibljiv koordinatni sistem, če sta relativna hitrost \mathbf{v}_r in relativni pospešek enaka nič. V tem primeru se načelo virtualnega dela za poljubno gibajoči se koordinatni sistem glasi:

$$\delta W^* = \int_S d\mathbf{F}^* \cdot \delta\mathbf{r}_1 = 0. \quad (5.38)$$

Opozoriti je treba, da je v tem primeru:

$$d\mathbf{F}^* = d\mathbf{F}^{(e)} - dm\mathbf{a}_f, \quad (5.39)$$

saj $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ zaradi $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ odpade.

Pri sistemih s končnim številom prostostnih stopenj so krajevni vektorji odvisni od končno mnogo posplošenih koordinat, ki jih izberemo tako, da \mathbf{r}_1 ni eksplicitno odvisen od časa:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (5.40)$$

Takšna izbira posplošenih koordinat, ki je vedno mogoča, se zdi najprimernejša pri preučevanju ravnotežnih leg. Iz enačbe (5.40) sledi:

$$\delta \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \delta q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.41)$$

Virtualno gibanje je lahko omejeno z r holonomnimi in s neholonomnimi pogoji oblike:

$$a_{pi} \delta q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r + s. \quad (5.42)$$

Če enačbo (5.41) vstavimo v enačbo (5.38), dobimo:

$$\delta W^* = \left(\int_S d\mathbf{F}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (5.43)$$

Iz integrala lahko izpostavimo δq_i , saj jih je treba obravnavati kot konstantne glede na integracijo prek masnih elementov sistema. Količine

$$Q_i^* = \int_S d\mathbf{F}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \quad (5.44)$$

imenujemo *posplošene vtisnjene sile*, saj pomnožene z virtualnimi spremembami posplošenih koordinat dajo virtualno delo:

$$\delta W^* = Q_i^* \delta q_i. \quad (5.45)$$

Če je q_i dolžinska koordinata, je Q_i^* sila, če je q_i kotna koordinata, pa moment. Q_i^* so na splošno odvisne od vseh q_i in časa t .

Iz načela virtualnega dela v obliki:

$$\delta W^* = Q_i^* \delta q_i = 0 \quad (5.46)$$

še ne sledi splošno izničenje posplošenih sil Q_i^* , saj δq_i zaradi enačbe (5.42) niso medsebojno neodvisne. Če enačbi (5.46) prištejemo pogoje (5.42), pomnožene z neznanimi množitelji λ_p , dobimo:

$$(Q_i^* + \lambda_p a_{pi}) \delta q_i = 0. \quad (5.47)$$

Pri tem je $r + s$ virtualnih pomikov medsebojno odvisnih, preostalih $n - (r + s)$ pa medsebojno neodvisnih. Neznane množitelje λ_p določimo tako, da koeficienti, pripadajoči $r + s$ virtualnim pomikom, odpadejo. Tudi preostali $n - (r + s)$ koeficienti morajo biti enaki nič, saj so pripadajoči virtualni pomiki zdaj poljubni. Enačba (5.47) tako vodi do pogojev ravnotežja sil v obliki:

$$Q_i^* + \lambda_p a_{pi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r + s. \quad (5.48)$$

Za fizikalno interpretacijo množiteljev λ_p predpostavimo, da virtualni pomiki δq_i ne izpolnjujejo pogojnih enačb (5.42). V tem primeru, kot je navedeno v točki 4.2.1, vezne sile opravljajo virtualno delo, zato moramo namesto enačbe (5.43) zapisati:

$$\delta W^* + \delta W^{(z)} = \int_S (d\mathbf{F}^* + d\mathbf{F}^{(z)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (5.49)$$

Sedaj uvedemo *posplošene vezne sile*, ki so definirane z:

$$Q_i^{(z)} = \int_S d\mathbf{F}^{(z)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i}. \quad (5.50)$$

Z enačbama (5.44) in (5.50) se enačba (5.49) preoblikuje v zvezo:

$$(Q_i^* + Q_i^{(z)}) \delta q_i = 0. \quad (5.51)$$

Ker so δq_i poljubni, sledi, da se njihovi koeficienti izničijo:

$$Q_i^* + Q_i^{(z)} = 0. \quad (5.52)$$

Primerjava enačbe (5.48) z enačbo (5.52) daje:

$$Q_i^{(z)} = \lambda_p a_{pi}. \quad (5.53)$$

Vsak člen v vsoti $\lambda_p a_{pi}$ predstavlja delež vezne sile $Q_i^{(z)}$, ki ga povzroči p -ti pogoj. Količina $Q_i^{(z)}$ je tako posplošena vezna sila, ki pripada i -ti koordinati q_i .

Posebno poenostavitev dosežemo, če so vtisnjene sile konservativne in vztrajnostnih sil ni, ali pa so tudi te konservativne. V tem primeru v skladu z enačbo (2.51) velja:

$$d\mathbf{F}^* = -\nabla(dU^*).$$

Iz enačbe (5.44) tako dobimo:

$$Q_i^* = \int_S -\nabla(dU^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} = - \int_S \frac{\partial(dU^*)}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} = - \int_S \frac{\partial(dU^*)}{\partial q_i} = - \frac{\partial U^*}{\partial q_i}. \quad (5.54)$$

Ravnotežni pogoji (5.48) nato dobijo obliko:

$$-\frac{\partial U^*}{\partial q_i} + \lambda_p a_{pi} = 0. \quad (5.55)$$

Če so prisotne zgolj holonomne pogojne enačbe, lahko koeficiente a_{pi} interpretiramo kot delne odvode funkcije $f_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$:

$$a_{pi} = \frac{\partial f_p}{\partial q_i}.$$

V tem primeru iz enačbe (5.55) dobimo:

$$-\frac{\partial U^*}{\partial q_i} + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_i} = 0,$$

oz.

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (-U^* + \lambda_p f_p) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r + s. \quad (5.56)$$

Opozoriti je treba, da so množitelji λ_p lahko funkcije q_i . Kljub temu je zapis enačbe (5.56) mogoč, saj zaradi $f_p = 0$ velja:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (\lambda_p f_p) = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \lambda_p}{\partial q_i} f_p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_i}. \quad (5.57)$$

Enak rezultat dobimo, če izhajamo iz načela virtualnega dela v obliki (4.26) in ga obravnavamo kot ekstremalno načelo z omejitvami:

$$f_p = 0.$$

Pri tem je treba upoštevati, da je potencial vztrajnostnih sil vključen v U .

Za določitev ravnotežnih leg imamo na voljo n enačb (5.48) ali, zlasti za konservativne holonomne sisteme, enačbe (5.56) in r holonomnih pogojev (5.42), ki jih lahko zapišemo v obliki:

$$f_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, r. \quad (5.58)$$

Količine Q_i^* , ki se pojavljajo v teh enačbah, so lahko odvisne od posplošenih koordinat in časa, medtem ko so a_{pi} funkcije zgolj posplošenih koordinat.

Če velja

$$n - (r + s) = k > 0,$$

je mogoče λ_p določiti iz $r + s$ enačb (5.48) ali (5.56) kot funkcije q_i in časa t . Iz preostalih k enačb lahko λ_p izločimo, kar vodi do k zvez med posplošenimi koordinatami in časom:

$$h_\mu(q_1, q_2, \dots, q_n; t) = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, k. \quad (5.59)$$

Zveze (5.58) in (5.59) predstavljajo $n - s$ pogojev za ravnotežne lege sistema. Glede na lastnosti teh enačb lahko ravnotežne lege ne obstajajo, obstaja ena, več ali neskončno mnogo rešitev. Ravnotežne lege so zgolj tiste rešitve, pri katerih so q_i časovno neodvisne in realne.

V primeru

$$n - (r + s) = k = 0,$$

lahko iz enačb (5.48) oziroma (5.58) enolično določimo vseh n -vrednosti λ_p kot funkcije posplošenih koordinat q_i , saj so te enačbe linearne v λ_p , determinanta njihovih koeficientov pa - če ne gre za izrojen primer - ne more biti nič zaradi linearne neodvisnosti pogojev (5.42). Zato so lahko ravnotežne lege odvisne le od pogojev (5.58), ne pa tudi od vtisnjenih sil.

Če je

$$n - (r + s) = k < 0,$$

je za določitev $r + s > n$ množiteljev na voljo samo n linearnih enačb (5.48) ali (5.56). To pomeni, da v tem primeru λ_p ni mogoče določiti, tj. veznih sil ni mogoče določiti brez spremembe modela.

V primeru $k = 0$ so ravnotežne lege običajno določene z geometrijo sistema in so zato znane že na začetku. Obstoječe enačbe v tem primeru služijo za določitev veznih sil. Ker je to za ne-degenerirane sisteme vedno nedvoumno mogoče, take sisteme imenujemo *statično določeni*. Nasprotno pa sisteme, za katere velja $k < 0$, imenujemo *statično nedoločeni*. Stopnja statične nedoločenosti je $|k|$ in je enaka številu veznih pogojev, ki bi jih lahko izpustili, ne da bi to vplivalo na ravnotežno lego za katero koli vtisnjeno silo. V primeru $k > 0$, ko vsaka sprememba vtisnjenih sil običajno povzroči tudi spremembo ravnotežne lege ali motnjo ravnotežja, sistem imenujemo *premičen*. Med take sisteme sodijo tudi tako imenovane kinematične verige.

Ker na začetku izračuna vezne sile še niso znane, je običajno treba preveriti, ali imajo te smiselne vrednosti za izbrani model. Na primer, za vezne sile se lahko omejimo glede njihove velikosti in smeri. Če je bilo na primer v modelu predpostavljeno, da se dve stični površini drži druga druge brez drsenja, to velja le do določene mejne vrednosti tangencialne sile med površinama. Če je ta mejna vrednost presežena, pride do drsenja in tangencialno silo, ki deluje med površinama, je treba obravnavati kot vtisnjeno silo drsnega trenja. To pa pomeni spremembo modela. Drugačne pogoje dobimo, če v modelu prvotno enostranske vezi obravnavamo kot dvostranske. Takrat je treba preveriti, da te ne popustijo pod vplivom določenih veznih sil. Do popuščanja vezi pride na primer pri vrveh in verigah, če se izkaže, da je vezna sila tlačna. Pri sistemih z znano ravnotežno lego, $k = 0$, je pogosto smiselno opustiti uporabo načela virtualnega dela in iz osnovnega aksioma, enačb (3.1) in (3.2), dobiti potrebne enačbe za določitev veznih sil. Pri tem izhajamo iz enačb (3.16), opisanih v razdelku 3.3 kot osnovne enačbe statike, ki jih zapišemo v obliki:

$$\mathbf{F}_{S_i}^* = \int_{(S_i)} d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{S_i}^* = \int_{(S_i)} \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad (5.60)$$

pri čemer je treba podsisteme S_i izbrati tako, da dobimo potrebno število linearno neodvisnih enačb. V ta namen je treba upoštevati točke delovanja in smeri veznih sil, kot izhajajo iz pogojev.

5.4 Enačbe gibanja sistemov s končnim številom prostostnih stopenj

5.4.1 Lagrangeve enačbe gibanja prve vrste

Za izpeljavo tako imenovanih LAGRANGEVIH enačb gibanja prve vrste izhajamo iz D'ALEMBERTovega načela, tj. enačbe (4.24),

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Za sisteme s končnim številom prostostnih stopenj lahko v skladu z enačbo (5.2) krajevni vektor \mathbf{r} masnega elementa dm podamo kot funkcijo posplošenih koordinat q_i , $n = 1, 2, \dots, n$ in t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Z dvakratnim odvajanjem krajevnega vektorja po času dobimo pospešek masnih elementov:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Poleg tega, ker je $\delta t = 0$, je:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.62)$$

Z uporabo enačb (5.61) in (5.62) lahko enačbo (4.24) zapišemo na naslednji način:

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (5.63)$$

Če so posplošene koordinate med seboj neodvisne, tj. če med njimi ni povezave, potem iz enačbe (5.63) izhaja, da so δq_j poljubni ¹

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = 0. \quad (5.64)$$

Kadar pa med δq_j obstajajo povezave, ki jih skladne z enačbo (5.8) zapišemo v obliki

$$a_{pj} \delta q_j = 0; \quad p = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.65)$$

¹V izvorniku so odvodi zapisani v krajši obliki. Npr. odvod po q_μ je zapisan s simbolom $\mathbf{r}_{|\mu}$. (OP)

ta sklep sprva ni mogoč. Ko pa enačbi (5.63) dodamo enačbe (5.65) s še neznanimi množitelji λ_p , potem lahko, kot je bilo pojasnjeno že v razdelku 5.3, izničimo koeficiente pri vseh δq_j . Tako dobimo

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \lambda_p a_{pj} = 0. \quad (5.66)$$

Te *Lagrangeve enačbe gibanja prve vrste* zaradi velikega števila potrebnih integracij niso povsem primerne za splošno uporabo. Njihov pomen je pri uporabi za sisteme z masnimi točkami, saj se pri tem STIELTJESEVI integrali pretvorijo v končne vsote. Vendar pa je mogoče število potrebnih integracij precej zmanjšati in tako enačbe (5.66) spraviti v obliko, ki je primernejša za uporabo za sisteme togih teles. Da bi to pokazali, uvedemo oznake

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \int_{(S)} dm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\nu}. \quad (5.67)$$

S temi količinami lahko CHRISTOFFELOVE simbole prve vrste zapišemo na naslednji način:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial q_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q_\sigma} \right). \quad (5.68)$$

Če enačbo (5.67) vstavimo v enačbo (5.68), dobimo:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\sigma} &= \frac{1}{2} \int_S dm \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\sigma \partial q_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\nu \partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\nu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\sigma \partial q_\mu} \right) \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\nu \partial q_\sigma} \right) \right] \\ &= \int_S dm \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Če v skladu z enačbo (5.44) uvedemo posplošene vtisnjene sile

$$Q_j^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \quad (5.70)$$

dobimo iz enačbe (5.66) z uporabo enačb (5.67) in (5.69)

$$\left. \begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2\Gamma_{k0j} \dot{q}_k + \Gamma_{00j} &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} \\ j, k, l &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

Nadaljnje združevanje na levi strani enačb (5.71) je mogoča, če čas t formalno nadomestimo s koordinato q_0 in razširimo vsote po k in l od 0 do n . Z $\ddot{q}_0 = 0$ in $\dot{q}_0 = 1$ dobimo

$$\left. \begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} \\ j &= 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

Za določitev $g_{\nu\mu}$ v skladu z enačbo (5.67) je v splošnem primeru treba zaradi $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ izračunati $1 + 2 + \dots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ integralov. Z neposredno uporabo enačbe (5.66) pa bi bilo potrebnih $\frac{n(n + 1)(n + 3)}{2}$ integralov.

Pospeške v enačbah (5.72) je mogoče izpostaviti, če je matrika koeficientov g_{jk} nesingularna, in sicer z množenjem z recipročno matriko koeficientov. Elemente te matrike definiramo s

$$g_{ij}^* g_{jk} = \delta_{ik}; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (5.73)$$

Če uvedemo CHRISTOFFELOVE simbole druge vrste, ki so podani z

$$\Gamma_{kl}^i = g_{ij}^* \Gamma_{klj}, \quad (5.74)$$

potem dobimo iz enačbe (5.72) po množenju z g_{ij}^* in seštevanju po indeksu j člene s samostojnimi pospeški

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_k + \Gamma_{kl}^i \dot{q}_k \dot{q}_l &= g_{ij}^* (Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj}) \\ i, j &= 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

V primeru, da so vtisnjene sile konservativne in so prisotne samo holonomne pogojne enačbe v obliki $f_p(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$, iz enačb (5.72) oz. (5.75), ker sta

$$Q_j^{(e)} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad a_{pj} = \frac{\partial f_p}{\partial q_j} \quad (\text{glej 5.3}),$$

dobimo

$$\left. \begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j} \quad j, k, l = 1, 2, \dots, n \\ p &= 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

oz.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_i + \Gamma_{kl}^i \dot{q}_k \dot{q}_l &= g_{ij}^* \left(-\frac{\partial U}{\partial q_j} + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j} \right) \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n \\ p &= 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

5.4.2 Lagrangeve enačbe gibanja druge vrste

V prejšnjem razdelku smo enačbo (5.72) izpeljali iz d'Alembertovega načela, ki omogoča določitev enačb gibanja za sisteme s končnim številom prostostnih stopenj, če poznamo funkcije $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ in morebitne vezi. Pomanjkljivost te metode je v nejasnosti koeficientov g_{jk} in Γ_{klj} . Poleg tega so številne količine Γ_{klj} pri uporabi pogosto enake nič, vendar tega na splošno ni mogoče ugotoviti pred njihovo določitvijo.

Te pomanjkljivosti lahko odpravimo z uporabo tako imenovanih *Lagrangevih enačb gibanja druge vrste*, v katerih ima pomembno vlogo pojem kinetične energije.

V nadaljevanju bomo te enačbe gibanja izpeljali iz D'ALEMBERTovega načela v različici (4.24). Najprej v skladu z enačbo (5.70) uvedemo posplošene sile in tako iz enačbe (5.62) dobimo

$$\int_{(S)} \mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{(S)} \mathbf{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j^{(e)} \delta q_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.78)$$

Poleg tega tvorimo

$$\int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (5.79)$$

Izpeljavo izraza $\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$ izvedemo na naslednji način :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial q_j} \end{aligned} \right\} \quad (5.80)$$

Pri tem smo uporabili zvezo

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (5.81)$$

katere veljavnost lahko dokažemo na naslednji način:

Iz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

dobimo

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

in iz tega, po parcialnem odvajanju po \dot{q}_j enačbo (5.81), saj \mathbf{r} ni odvisen od \dot{q}_j .

Ko vstavimo enačbe (5.80) v enačbo (5.79) ter upoštevamo izraz za kinetično energijo

$$T = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^2$$

dobimo:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} &= \int_{(S)} dm \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \int_{(S)} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{dm \dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dm \dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right) \right] \delta q_j \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

Z enačbama (5.78) in (5.82) dobimo iz enačbe (4.24):

$$\left[Q_j^{(e)} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0. \quad (5.83)$$

Če upoštevamo splošni primer, da med δq_j obstajajo vezi v obliki

$$a_{pj} \delta q_j = 0; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

potem iz enačbe (5.83) izhajajo LAGRANGEve enačbe gibanja druge vrste skladno z metodo sklepanja, uporabljeno v 5.4.1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} \\ p &= 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.84)$$

Pokažimo, da če odvajamo levo stran enačbe (5.84) potem dobimo LAGRANGEve enačbe gibanja prve vrste, tj. enačbe (5.72). To pokažemo tako, da kinetično energijo

$$T = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^2$$

s pomočjo enačbe (5.61) zapišemo v obliki

$$T = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l} \dot{q}_l; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Primerjava z enačbo (5.67) pokaže

$$T = \frac{1}{2} g_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.85)$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} (g_{jl} \dot{q}_l + g_{kj} \dot{q}_k) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} (g_{jl} \ddot{q}_l + g_{kj} \ddot{q}_k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \\ &= q_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \\ \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l \end{aligned}$$

Če to vstavimo v enačbo (5.84) in uporabimo CHRLSTOFFELOve simbole prve vrste potem iz enačbe (5.68) sledi

$$\begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l &= Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} \\ j &= 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kar dokazuje našo trditev.

Če so vtisnjene sile konservativne, lahko ponovno (glej 5.3) določimo

$$Q_j^{(e)} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Z upoštevanjem, da potencialna energija vtisnjenih sil ni odvisna od posplošenih koordinat hitrosti \dot{q}_j , torej da velja

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0,$$

lahko enačbo (5.84) z uvedbo *Lagrangeve funkcije*

$$L = T - U, \quad (5.86)$$

zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda_p a_{pj}. \quad (5.87)$$

Za holonomne vezi, kjer velja

$$a_{pj} = \frac{\partial f_p}{\partial q_j},$$

lahko enačbo (5.87) z uporabo

$$F = L - \lambda_p f_p \quad (5.88)$$

in

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\lambda_p f_p) = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \lambda_p}{\partial \dot{q}_j} f_p = 0, \quad (5.89)$$

kjer sta

$$\frac{\partial f_p}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0; \quad f_p = 0$$

preoblikujemo v

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.90)$$

Če pri določanju enačb gibanja ne potrebujemo tudi določitve posplošenih veznih sil

$$Q_j^{(z)} = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j}; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

je za holonomne sisteme priporočljivo odpraviti r koordinat. Med preostalimi koordinatami $f = (n - r)$ potem ni več pogojnih enačb, tako da lahko namesto enačbe (5.90) zapišemo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (5.91)$$

Enačbe (5.91) so *Eulerjeve enačbe* variacijskega problema, ki izhajajo iz HAMILTONovega načela za

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t).$$

[glej 4.2.4., enačba (4.40)]

5.4.3 Kanonične enačbe gibanja za holonomne sisteme s konservativnimi vtisnjenimi silami

Iz LAGRANGEvih enačb gibanja druge vrste za holonomne sisteme s konservativnimi vtisnjenimi silami brez presežnih koordinat, bomo zdaj izpeljali tako imenovane *kanonične enačbe*. Te imajo elegantno obliko in prednost, da neposredno vodijo do sistema diferencialnih enačb prvega reda. So izhodišče za obsežno integracijsko teorijo in pogosto omogočajo neposredne kvalitativne sklepe o gibanju sistema.

Najprej z zvezo

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (5.92)$$

uvedemo tako imenovane *koordinatne impulze* p_j . To omogoča zapis LAGRANGEvih enačbe gibanja (5.91) v obliki

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (5.93)$$

Iz zveze (5.92) je razvidno, da so koordinate impulza – tako kot LAGRANGEova funkcija L – na splošno odvisne od posplošenih koordinat q_i , koordinat hitrosti \dot{q}_i in od časa:

$$p_j = p_j(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t) . \quad (5.94)$$

Ker je L kvadratna forma v \dot{q}_i , so p_j linearno odvisni od koordinat hitrosti. Rešitev enačbe (5.93) po \dot{q}_i je mogoča, kadar je matrika koeficientov

$$g^{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (5.95)$$

nesingularna. To predpostavimo in zapišimo:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t) . \quad (5.96)$$

Če v

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t) \quad (5.97)$$

s pomočjo enačbe (5.96) nadomestimo \dot{q}_i s količinami q_i , p_i in t , dobimo še eno funkcionalno odvisnost LAGRANGEve funkcije, ki jo označimo z

$$L^* = L^*(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t) . \quad (5.98)$$

Hamiltonovo funkcijo

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t)$$

ali, zapisano enostavnejše

$$H = H(q, p, t)$$

uvedemo z zvezo

$$H = H(q, p, t) = p_k \dot{q}_k(q, p, t) - L^*(q, p, t) \quad (5.99)$$

in tvorimo

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial L^*}{\partial p_j} = \dot{q}_j + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j}.$$

Če izraz $\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k}$ nadomestimo s p_k v skladu z enačbo (5.92), dobimo:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

Iz

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j}$$

sledi z enačbama (5.92) in (5.93)

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j.$$

Tako dobljene enačbe

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2, \dots, f \end{aligned} \right\} \quad (5.100)$$

so iskane kanonične enačbe gibanja, ki tvorijo sistem $2f$ diferencialnih enačb prvega reda. HAMILTONovo funkcijo, ki nastopa v njem, je treba v splošnem primeru določiti v skladu z enačbo (5.99). Pri skleronomnih sistemih, kjer krajevni vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_f)$$

ni eksplicitno odvisen od časa, je kinetična energija

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

kvadratna forma koordinat hitrosti, prim. (5.85). Tako je v skladu z enačbo (5.92) zaradi $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$

$$p_k \dot{q}_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T = 2T^* \quad (5.101)$$

Zvezdica pri spremenljivki T^* ponovno označuje, da smo s pomočjo enačbe (5.96) odpravili koordinate hitrosti. Tako iz enačbe (5.99) z uporabo enačbe (5.101) HAMILTONova funkcija za skleronomne sisteme postane

$$H(q, p) = T^* + U, \quad (5.102)$$

kar je enako celotni mehanski energiji sistema.

Če se v HAMILTONovi funkciji $H(q, p, t)$ nekatere koordinate q_i ne pojavijo eksplicitno, se te posplošene koordinate imenujejo *ciklične*. Po enačbi (5.101) za te koordinate velja

$$\dot{p}_i = 0$$

in

$$p_i = \text{const.} \quad (5.103)$$

5.4.4 Hamiltonova-Jacobijeva parcialna diferencialna enačba

Predpostavimo, da je rešitve kanoničnih enačb (5.100) znana. Potem je mogoče koordinate impulzov izraziti kot znane funkcije posplošenih koordinat in časa:

$$p_i = w_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t). \quad (5.104)$$

Zdaj je potrebno preveriti, katere pogoje morajo funkcije w_i izpolnjevati, da so kanonične enačbe (5.100) izpolnjene. Za razlikovanje bomo za označevanje HAMILTONove funkcije v kanoničnih enačbah uporabljali

$$H(q, p, t) = H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \quad (5.105)$$

za označevanje te funkcije, ki jo dobimo iz enačbe (5.105) z zamenjavo znanih funkcij (5.104), pa

$$H(q, w, t) = H(q_1, q_2, \dots, q_f, w_1, w_2, \dots, w_f, t). \quad (5.106)$$

Medtem, ko iz enačbe (5.104) izhajaja

$$\dot{p}_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (5.107)$$

dobimo iz enačbe (5.106) z uporabo enačbe (5.100)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} H(q, w, t) &= \frac{\partial}{\partial q_i} H(q, p, t) + \frac{\partial}{\partial p_j} H(q, p, t) \frac{\partial w_j}{\partial q_i} \\ &= -\dot{p}_i + \dot{q}_j \frac{\partial w_j}{\partial q_i}. \end{aligned} \right\} \quad (5.108)$$

Z izločitvijo \dot{p}_i iz enačb (5.107) in (5.108) sledi

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q_i} H(q, w, t) + \left(\frac{\partial w_j}{\partial q_i} - \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j. \quad (5.109)$$

Teh f enačb je očitno neprotislovnih le, če lahko w_i izrazimo kot

$$w_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad G = G(q_1, q_2, \dots, q_f, t). \quad (5.110)$$

Iz enačb (5.109) potem sledi

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{\partial G}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}, t \right) \right] = 0. \quad (5.111)$$

Integracijska »konstanta«, ki nastopa pri integraciji teh enačb, je lahko le funkcija časa:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}, t \right) = c(t). \quad (5.112)$$

Rešitve te diferencialne enačbe se pri različnih izbirah $c(t)$ razlikujejo le za aditivno funkcijo časa. Pri tem, kot je to razvidno iz enačb (5.104) in (5.110), vrednosti p_i niso odvisne od te funkcije časa. Iz tega sledi, da funkcija $c(t)$ ni pomembna pri določanju p_i in ji zato lahko pripišemo vrednost nič. Na ta način dobimo *Hamilton-Jacobijevo parcialno diferencialno enačbo*

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}, t \right) = 0. \quad (5.113)$$

Tako ugotovimo, da so koordinate impulzov p_i podane z izrazom

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad (5.114)$$

pri čemer mora funkcija G zadoščati enačbi (5.113).

Funkcija G v splošnem ni odvisna le od f koordinat q_i in časa, temveč tudi od $f + 1$ poljubnih konstant a_0, a_1, \dots, a_f :

$$G = G(q_1, q_2, \dots, q_f, t, a_0, a_1, \dots, a_f). \quad (5.115)$$

Če oblikujemo $f + 1$ parcialnih odvodov

$$\frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, f$$

lahko izločimo $f + 1$ konstant a_0, a_1, \dots, a_f in ponovno dobimo enačbo (5.113). Ena od konstant, npr. a_0 , je aditivna, saj sta tako G kot $G + a_0$ rešitev enačbe (5.113). Rešitev v obliki (5.115) se v matematiki imenuje popolna rešitev.

S pomočjo popolne rešitve (5.115) lahko dobimo tudi posplošene koordinate kot funkcije časa v implicitni obliki. V ta namen tvorimo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial a_i}; \quad i = 1, 2, \dots, f$$

in z enačbami (5.113), (5.114), (5.115) in (5.112) dobimo

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial q_i} &= \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial a_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H(q, w, t)}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j \\ &= -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j \\ &= -\dot{q}_j \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} + \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

Iz tega sledi, da so parcialni odvodi funkcije G po a_i konstante. Skupaj z enačbo (5.114) dobimo zveze:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ b_i &= \frac{\partial G}{\partial a_i}; \quad i = 1, 2, \dots, f \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

Pri tem so b_i nove konstante, ki jih je treba, tako kot a_i , določiti iz začetnih pogojev. Prva enačba (5.117) podaja impulze kot funkcije posplošenih koordinat in časa, druga enačba pa implicitno določa koordinate kot funkcije časa. Tako smo rešitev kanonskih enačb (5.100) nadomestili z rešitvijo HAMILTON-JACOBIJEVE parcialne enačb (5.113).

Uporaba HAMILTON-JACOBIJEVE parcialne diferencialne enačbe ima prednosti v tako imenovanih *ločljivih sistemih*, kjer je mogoče funkcijo G zapisati kot vsoto parcialnih funkcij, pri čemer je vsaka odvisna le od ene koordinate in časa:

$$G = G_0(t, a_1, a_2, \dots, a_f) + \sum_{i=1}^f G_i(q_i, a_1, a_2, \dots, a_f) + a_0. \quad (5.118)$$

Poseben primer predstavljajo skleronomni sistemi, kjer je HAMILTONOVA funkcija, torej celotna energija sistema, neodvisna od časa. V tem primeru je $H(p, q)$ konstantna, in enačbo (5.113) nadomestimo z

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_f}\right) = E \quad (5.119)$$

kjer velja

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -E$$

in

$$G = a_0 - Et - \bar{G}(q_1, q_2, \dots, q_f; E, a_1, a_2, \dots, a_f) \quad (5.120)$$

Pri tem smo konstanto a_1 izrazili z a_2 do a_f in skupno energijo E . Namesto enačbe

(5.117) tako dobimo

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \bar{G}}{\partial q_i}; & i &= 1, 2, \dots, f \\ b_1 &= -t + \frac{\partial \bar{G}}{\partial E} \\ b_i &= \frac{\partial \bar{G}}{\partial a_i}; & i &= 2, 3, \dots, f \end{aligned} \right\} \quad (5.121)$$

Srednja enačba v (5.121) podaja odvisnost q_i od časa, zadnja enačba pa opisuje »tir« sistema v »konfiguracijskem prostoru« sistema, ki ga določajo q_i povsem geometrijsko in neodvisno od časa. Ločljive skleronomne sisteme imenujemo *Stäckelovi sistemi*. O *posplošenih Stäckelovih sistemih* govorimo, če so ločljivi, niso pa skleronomni.

Tehničnih sistemi z več prostostnimi stopnjami v večini primerov niso ločljivi. Zato ima HAMILTON-JACOBIjeva parcialna diferencialna enačba v tehnični mehaniki majhen pomen. Po drugi strani pa se uporablja v nebesni mehaniki in kvantni mehaniki. Več podrobnosti o STÄCKELOvih sistemih lahko najdete npr. v delu FORBAT [7].

5.4.5 Predstavitev Lagrangevih enačb gibanja s pomočjo kvazikoordinat

Oglejmo si možnost določitve LAGRANGEvih enačb gibanja druge vrste za linearne-neholonome sisteme brez uporabe LAGRANGEvih množiteljev. Uporabimo splošno predstavitev v kvazikoordinatah. Prednost tega pristopa je, da omogoča določitev enačb gibanja tudi za holonome sisteme, pri katerih je uporaba kvazikoordinat smiselna.

Za uvedbo kvazikoordinat uporabimo enačbo (5.29), ki jo zapišemo v obliki:

$$\dot{\pi}_i = a_{ij} \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(q_0, q_1, \dots, q_n), \quad q_0 = t; \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (5.122)$$

Iz tega sledi

$$\dot{q}_0 = 1, \quad \delta q_0 = 0.$$

Določimo še:

$$\dot{\pi}_0 = 1, \quad \delta \pi_0 = 0$$

in

$$a_{0j} = \delta_{0j}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (5.123)$$

Nadalje predpostavljamo, da je matrika koeficientov a_{ij} nesingularna. Inverzna matrika ima elemente b_{ij} , tako da velja

$$a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}; \quad i, j, k = 0, 1, \dots, n \quad (5.124)$$

Iz enačb (5.123) in (5.124) sledi

$$b_{0k} = \delta_{0k}; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (5.125)$$

Poleg tega iz enačb (5.122) in (5.124) izhaja

$$\dot{q}_j = b_{jk}\dot{\pi}_k; \quad j, k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.126)$$

Med virtualnimi spremembami dejanskih koordinat in kvazikoordinatami obstajata v skladu z enačbama (5.122) in (5.126) zvezi

$$\delta\pi_i = a_{ij}\delta q_j, \quad \delta q_j = b_{jk}\delta q_k, \quad i, j, k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.127)$$

Za izpeljavo iskanih enačb gibanja izhajamo iz D'ALEMBERTovega načela, enačba (4.24), in najprej obravnavamo izraz $\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}$. Iz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_0, q_1, \dots, q_n) \quad (5.128)$$

sledi

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \dot{\mathbf{r}}(q_0, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5.129)$$

V tem izrazu zamenjajmo \dot{q}_i v skladu z enačbo (5.126) s kvazihitrostmi, nato pa za označevanje te nove funkcionalne odvisnosti namesto $\dot{\mathbf{r}}$ uvedemo oznako $\dot{\mathbf{r}}^*$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(q_0, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ = \dot{\mathbf{r}}(q_0, q_1, \dots, q_n, b_{1k}\dot{\pi}_k, \dots, b_{nk}\dot{\pi}_k) \\ = \dot{\mathbf{r}}^*(q_0, q_1, \dots, q_n, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n). \end{aligned} \right\} \quad (5.130)$$

Iz enačbe (5.129) dobimo

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \dot{\pi}_j = \mathbf{a}_j \dot{\pi}_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (5.131)$$

in

$$\delta\mathbf{r}^* = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \delta\pi_j = \mathbf{a}_j \delta\pi_j \quad (5.132)$$

kjer je

$$\mathbf{a}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (5.133)$$

Iz enačbe (5.131) sledi

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \dot{\pi}_j} = \mathbf{a}_j. \quad (5.134)$$

Pri tem upoštevamo, da tukaj j teče samo od 1 do n , saj je odvod po $\dot{\pi}_0 = 1$ ni smiseln.

Zdaj z enačbo (5.132) tvorimo

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}}^* \cdot \delta\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j \delta\pi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.135)$$

in izraz $\ddot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j$ pretvorimo na naslednji način:

$$\ddot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j) - \dot{\mathbf{r}}^* \cdot \dot{\mathbf{a}}_j. \quad (5.136)$$

Prvi člen desne strani lahko z enačbo (5.134) zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \mathbf{a}_j) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}^* \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \dot{\pi}_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_j} \left((\dot{\mathbf{r}}^*)^2 \right). \quad (5.137)$$

Za preoblikovanje drugega člena desne strani enačbe (5.136) \mathbf{a}_j totalno odvajamo po času in upoštevamo enačbi (5.133) in (5.126):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_j &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) b_{ij} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l \\ i &= 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5.138)$$

Po drugi strani velja

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l \right) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} \dot{\pi}_l \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} \dot{\pi}_l \\ i, k, l &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.139)$$

Pri tem smo uporabili zveze (5.131), (5.126) in (5.129). Enačbo (5.139) rešimo po $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}$ in tako dobljeni izraz vstavimo v enačbo (5.138):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_j &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} \dot{\pi}_l \right) b_{ij} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} b_{kl} \dot{\pi}_l \\ i, k, l &= 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.140)$$

Če iz enačb (5.133) in (5.134) odpravimo \mathbf{a}_j za $j \neq 0$, potem z uporabo enačbe (5.124) dobimo naslednji odvisnosti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \pi_s} a_{sk} \quad \text{in} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \pi_s} a_{si} \\ s, k, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.141)$$

Zaradi posebnosti določitve (5.123) ostanejo zveze (5.141) za $k, i \neq 0$ pravilne, tudi če pri seštevanju po s izpustimo člene z indeksom $s = 0$. Čeprav po enačbi (5.141) izrazi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \quad \text{in} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

za $k, i = 0$ niso definirani, jih lahko vstavimo v enačbo (5.140) pri seštevanju po k oz. i od 0 do n , saj členi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_0} \frac{\partial b_{0l}}{\partial q_i} \quad \text{oz.} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_0} \frac{\partial b_{0j}}{\partial q_k}$$

zaradi enačbe (5.125) odpadejo.

Poleg tega iz enačbe (5.124) izhajajo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} (a_{sk} b_{kl}) &= \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} b_{kl} + a_{sk} \frac{\partial b_{kl}}{\partial q_i} = 0 \quad \text{oz.} \\ \frac{\partial}{\partial q_k} (a_{si} b_{ij}) &= \frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} b_{ij} + a_{si} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} = 0 \\ i, k &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.142)$$

Z uporabo enačb (5.141) in (5.142) dobimo za $\dot{\mathbf{a}}_j$ naslednje izraz:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_j &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial q_i} b_{ij} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^*}{\partial \pi_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l \\ i, k, l &= 0, 1, \dots, n; \quad j, s = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.143)$$

Z enačbami (5.135) do (5.137) in (5.143) dobimo z uporabo D'ALEMBERTovega načela ter enačbe (5.128)

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_j} \left(\frac{1}{2} \int_{(S)} dm (\dot{\mathbf{r}}^*)^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \int_{(S)} dm (\dot{\mathbf{r}}^*)^2 \right) b_{ij} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \dot{\pi}_s} \left(\frac{1}{2} \int_{(S)} dm (\dot{\mathbf{r}}^*)^2 \right) b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l \right] \delta \pi_j = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{a}_j \delta \pi_j \end{aligned} \right\} \quad (5.144)$$

Naj

$$T^* = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm (\dot{\mathbf{r}}^*)^2 = T^*(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{\pi}_j, \dots, \dot{\pi}_n) \quad (5.145)$$

označuje kinetično energijo, izraženo z običajnimi koordinatami in kvazihitrostmi. Naj

$$\Pi_j^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{a}_j = Q_j^{(e)} b_{ij} \quad (5.146)$$

označuje posplošeno silo, povezano z j -to kvazikoordinato. Tako iz enačbe (5.144) dobimo

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l \right] \delta \pi_j = \Pi_j^{(e)} \delta \pi_j \\ i, k, l = 0, 1, \dots, n; \quad j, s = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.147)$$

Če je prisotnih r vezi

$$a_{jk} \delta q_k = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n \quad (5.148)$$

kjer je $m = n - r$, potem lahko izberemo kvazikoordinate tako, da zadnjih r količin $\delta \pi_j$ identično izgine:

$$\delta \pi_j = a_{jk} \delta q_k = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.149)$$

Prvih m količin $\delta\pi_j$ je potem poljubnih, zato enačba (5.147) lahko obstaja le, če velja

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l = \Pi_j^{(e)} \\ i, k, l = 0, 1, \dots, n; \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.150)$$

To so LAGRANGEVE enačbe druge vrste v kvazikoordinatah.

Seveda je mogoče r vezi izraziti tudi kot pogojne enačbe med $\delta\pi_j$ v obliki

$$c_{pj} \delta\pi_j = 0, \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.151)$$

Potem so vezi po množenju s množitelji λ_p prav tako »povezane« z enačbami (5.147), kot je razloženo v prejšnjih razdelkih. Tako dobimo

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \dot{\pi}_l = \Pi_j^{(e)} + \lambda_p c_{pj} \\ i, k, l = 0, 1, \dots, n; \quad j, s = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (5.152)$$

Oblikovanje dvojne vsote v enačbah (5.150) in (5.152)

$$\gamma_{jst} = b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \quad (5.153)$$

za vse kombinacije indeksov j, s, l hitro postane nepregledno. Zato v nadaljevanju prikažemo možnost, kako te količine izračunamo na enostavnejši način. Izhajamo iz enačbe (5.31) in predpostavimo zamenljivost operatorjev δ in d za naravne koordinate q_j :

$$(\delta d - d\delta) q_j = 0 \quad (5.154)$$

Z dogovorom, uvedenim v tem razdelku,

$$q_0 = t,$$

dobimo

$$(\delta d - d\delta) \pi_s = \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right) \delta q_k dq_i. \quad (5.155)$$

Z uporabo enačb (5.126) in (5.127) iz tega sledi

$$(\delta d - d\delta) \pi_s = \gamma_{jst} \delta\pi_l d\pi_j \quad (5.156)$$

Opazimo, da so izrazi γ_{jst} antisimetrični glede na zunanje indekse, tj. velja

$$\gamma_{jst} = -\gamma_{tsj}, \quad (5.157)$$

ker je

$$\gamma_{tsj} = b_{il} b_{kj} \left(\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_l} \right) = b_{kl} b_{ij} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} \right) = -\gamma_{jst}.$$

Iz tega sledi tudi, da te količine izginejo, če sta oba zunanja indeksa enaka.

5.4.6 Lagrangeve enačbe gibanja druge vrste brez uporabe Lagrangevih množiteljev

Seveda je mogoče določiti tudi LAGRANGEve enačbe gibanja, ki ustrezajo enačbam (5.150) z uporabo dejanskih posplošenih koordinat namesto kvazikoordinat. V nadaljevanju bomo pokazali, kako jih lahko iz enačb (5.150) izpeljemo.

Pri tem predpostavljamo, da jo prisotno r vezi

$$\bar{a}_{ij}\dot{q}_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad q_0 = t. \quad (5.158)$$

Te razrešimo glede na zadnje r koordinat hitrosti \dot{q}_j . To je vedno mogoče, če so vezi med seboj linearno neodvisne in če so posplošene koordinate ustrezno oštevilčene. Enačba (5.158), rešena glede na »presežne« koordinate hitrosti, ima lahko obliko

$$\dot{q}_i = c_{ij}\dot{q}_j; \quad i = m + 1, m + 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad m = n - r. \quad (5.159)$$

Med kvazihitrostmi in dejanskimi koordinatami hitrosti obstajajo naslednje zveze:

$$\left. \begin{array}{ll} \dot{\pi}_i = \dot{q}_i & \text{za } i = 0, 1, \dots, m \\ \dot{\pi}_i = \dot{q}_i - c_{ij}\dot{q}_j & \text{za } i = m + 1, m + 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (5.160)$$

Potem enačbe

$$\dot{\pi}_i = 0 \quad \text{za } i = m + 1, m + 2, \dots, n \quad (5.161)$$

izpolnjujejo vezi (5.158). Inverzija enačb (5.160) daje

$$\left. \begin{array}{ll} \dot{q}_i = \dot{\pi}_i & \text{za } i = 0, 1, \dots, m \\ \dot{q}_i = \dot{\pi}_i + c_{ij}\dot{\pi}_j & \text{za } i = m + 1, m + 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (5.162)$$

Primerjava zvez (5.160) in (5.161) z enačbama (5.122) in (5.126) vodi do

$$\left. \begin{array}{ll} a_{ij} = \delta_{ij} & \text{za } i = 0, 1, \dots, m \\ a_{ij} = \delta_{ij} - c_{ij} & \text{za } i = m + 1, m + 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (5.163)$$

in

$$\left. \begin{array}{ll} b_{ij} = \delta_{ij} & \text{za } i = 0, 1, \dots, m \\ b_{ij} = \delta_{ij} + c_{ij} & \text{za } i = m + 1, m + 2, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (5.164)$$

Opozoriti je treba, da je v skladu z enačbo (5.159) c_{ij} za $j > m$ enaki 0. Kinetično energijo T^* , ki jo določa enačba (5.145), lahko na podlagi enačbe (5.160) zapišemo kot

$$\begin{aligned} T^* & (q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_n) \\ & = T^* (q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m; \dot{\pi}_{m+1}, \dots, \dot{\pi}_n) \\ & = T (q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \end{aligned} \quad (5.165)$$

Iz tega sledi za izraze v enačbi (5.160)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} &= \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_s} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \quad \text{za } s = m + 1, m + 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Za vrednosti $s \leq m$ izraz iz okroglega oklepaja v enačbi (5.150) izgine, kar je razvidno iz primerjave z enačbo (5.163). Na podlagi teh transformacijami iz enačbe (5.150) izpeljemo LAGRANGEve enačbe gibanja za sisteme z linearnimi neholonomskimi vezmi, izražene z dejanskimi koordinatami, brez LAGRANGEvih množiteljev

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} b_{ij} b_{kl} \left(\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_l} \right) &= Q_i b_{ij} \\ i, k = 0, 1, \dots, n; \quad j, l = 1, 2, \dots, m; \quad s = m + 1, m + 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.166)$$

Za $s > m$ te enačbe nimajo več odvodov po π_s , zato lahko te količine v T^* v skladu z enačbo (5.165) postavimo enake nič, tj.

$$T^* = T^*(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m)$$

je preprosto izraz za kinetično energijo sistema po izločitvi »presežnih« koordinat hitrosti. Vendar je pomembno poudariti, da po drugi strani v izrazu $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$ v kinetični energiji ni mogoče izločiti nobenega hitrostnega parametra, kar pomeni, da je

$$T = T(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n).$$

Tako m enačb (5.166) skupaj z r pogojnimi enačbami (5.158) ali (5.159) daje $m + r = n$ diferencialnih enačb za n posplošenih koordinat. Nasprotno pa enačbe (5.84) z LAGRANGEvimi množitelji skupaj z r pogojnimi enačbami dajo $n + r$ diferencialnih enačb za določitev n posplošenih koordinat in r množiteljev. Vendar pa s pomočjo enačbe (5.166) ni mogoče določiti veznih sil.

5.4.7 Appellove enačbe gibanja

Z LAGRANGEvimi enačbami gibanja, obravnavanimi v prejšnjih dveh razdelkih, je bilo mogoče upoštevati tudi neholonomske vezi brez »spajanja« z LAGRANGEvimi množitelji. Drugo možnost za obravnavo neholonomskih vezi, ki so linearne v koordinatah hitrosti, brez uvajanja LAGRANGEvih množiteljev, omogočajo *Appellove enačbe gibanja*.

Ponovno obravnavamo sistem s končnim številom prostostnih stopenj, ki je določen z

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_0, q_1, \dots, q_n) \quad q_0 = t \quad (5.167)$$

in vsebuje pogojne enačbe v obliki

$$a_{pi} dq_i = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r \quad (5.168)$$

pri čemer je vsaj ena od njih holonomna. Iz enačbe (5.167) najprej sledi

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.169)$$

Enačbe (5.168), za katero predpostavljamo, da so linearno neodvisne, rešimo za r diferencialov dq_i :

$$\left. \begin{aligned} dq_i = b_{ij} dq_j; \quad i = m + 1, m + 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m \\ m = n - r \end{aligned} \right\} \quad (5.170)$$

Pri tem smo predpostavili, da je mogoče enačbe rešiti za zadnjih r diferencialov dq_i . To je vedno mogoče doseči s ustreznim preurejanjem indeksov. S pomočjo enačbe (5.170) te dq_i odpravimo iz enačbe (5.169) in dobimo

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{r} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} b_{ij} \right) dq_j = \mathbf{c}_j dq_j \\ \mathbf{c}_j &= \mathbf{c}_j(q_0, q_1, \dots, q_n) \\ i &= m + 1, m + 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.171)$$

Iz enačbe (5.171) dobimo naslednje izraze za hitrost in pospešek masnih elementov:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_j \dot{q}_j; \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (5.172)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{c}_j}{dt} \dot{q}_j + \mathbf{c}_j \ddot{q}_j = \frac{\partial \mathbf{c}_j}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_j + \mathbf{c}_j \ddot{q}_j \\ j, l &= 0, 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.173)$$

GAUSSOVA variacija $\ddot{\mathbf{r}}$ je torej

$$\delta'' \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_j \delta'' \ddot{q}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.174)$$

Če izhajamo iz GAUSSovega načela, enačba (4.46),

$$\int_{(S)} (d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} = 0$$

in uporabimo enačbo (5.147), dobimo

$$\delta'' \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \ddot{\mathbf{r}} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{c}_j \delta'' \ddot{q}_j. \quad (5.175)$$

Podobno kot v 5.3. v skladu z enačbo (5.44) uvedemo posplošene sile

$$\Pi_j^{(e)} = \int_{(S)} d\mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{c}_j \quad (5.176)$$

Tako uvedene količine se od posplošenih sil po enačbi (5.44) razlikujejo v tem, da \mathbf{c}_j na splošno niso parcialni odvodi krajevnega vektorja po koordinatah. Poleg tega s pomočjo enačbe (5.173) uvedemo *Appellovo funkcijo*:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= S(q_0, q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_m) \end{aligned} \quad (5.177)$$

Zaradi

$$\delta'' S = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} \delta'' \ddot{q}_j; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

dobimo iz enačb (5.175) in (5.176)

$$\left(\Pi_j^{(e)} - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} \right) \delta'' \ddot{q}_j = 0. \quad (5.178)$$

Pri tem je m spremenljivk $\delta'' \ddot{q}_j$ med seboj neodvisnih in so poljubno izbirne. Zato je enačba (5.178) mogoča le, če velja

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \Pi_j^{(e)}; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.179)$$

To so APPELLOVE enačbe gibanja. Njihova struktura je posebno preprosta. Vendar pa je izračun funkcije S lahko računsko precej zahteven, še posebej, kadar ne gre za točkovne sisteme in je prisotno večje število prostostnih stopenj.

5.4.8 Enačbe gibanja za sisteme z nelinearnimi neholonomnimi vezmi

V prejšnjih razdelkih smo izpeljali enačbe gibanja za sisteme, za katere v najbolj splošnem primeru veljajo holonomne in linearne neholonomne pogojne enačbe v skladu z enačbo (5.8)

$$a_{pi} \delta q_i = 0, \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad i = 1, \dots, n.$$

Zdaj bomo omogočili tudi nelinearne pogojne enačbe v obliki (5.6)

$$\varphi_h(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0; \quad h = 1, 2, \dots, s.$$

v koordinatah hitrosti.

Kot je bilo navedeno v razdelku 5.2.2, ni mogoče določiti pogojnih enačb med virtualnimi pomiki tako, kot je to mogoče v enačbi (5.8). Zaradi tega uporaba

D'ALEMBERTovega načela za izpeljavo enačb gibanja ni mogoča. Po drugi strani pa obstajajo linearne zveze med JOURDAINovimi ali GAUSSovimi variacijami, v skladu z enačbo (5.15):

$$\delta' \varphi_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_i} \delta' \dot{q}_i = 0 \quad (5.180)$$

ali v skladu z enačbo (5.20)

$$\delta'' \dot{\varphi}_h = \frac{\partial \dot{\varphi}_h}{\partial \ddot{q}_i} \delta'' \ddot{q}_i = 0. \quad (5.181)$$

Zato sta JOURDAINovo in GAUSSovo načelo (glej 4.2.5) primerna za izpeljavo enačb gibanja za sisteme z nelinearnimi neholonomskimi vezmi. V nadaljevanju bomo uporabili JOURDAINovo načelo, pri čemer omenimo, da GAUSSovo načelo daje enake rezultate.

Iz enačbe (4.45) in z uporabo enačbe (5.17) sledi:

$$\int_{(S)} \left(d\mathbf{F}^{(e)} - dm \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta' \dot{q}_j = 0. \quad (5.182)$$

Namesto enačbe (5.63) uporabimo enačbo (5.61):

$$\int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta' \dot{q}_j = 0 \quad (5.183)$$

Iz tega dobimo iskane enačbe gibanja, če premisleke iz razdelka 5.4.1, ki so se nanašali na zveze med δq_j , povsem analogno prenesemo na zveze (5.180) med $\delta' \dot{q}_j$. Te enačbe se glasijo

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S)} \left[d\mathbf{F}^{(e)} - dm \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} + \lambda_p a_{pj} \\ + \Lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \right\} \quad (5.184)$$

$k, l, j = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad h = 1, 2, \dots, s$

in v skladu z enačbo (5.72)

$$\left. \begin{aligned} g_{jk} \ddot{q}_k + \Gamma_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} + \Lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_j} \\ j = 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 0, 1, \dots, n; \\ p = 1, 2, \dots, r; \quad h = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (5.185)$$

Zlahka vidimo, da lahko iz JOURDAINovega načela izpeljemo tudi LAGRANGEve enačbe gibanja druge vrste ob prisotnosti nelinearnih neholonomskih pogojnih enačb. Enačbe gibanja lahko izpeljemo na podoben način kot v razdelku 5.4.2. Namesto enačb (5.84) so to enačbe

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{(e)} + \lambda_p a_{pj} + \Lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \dot{q}_j} \\ j = 1, 2, \dots, n; \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad h = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\}$$

Za opis gibanja togega telesa uvedemo koordinatni sistem x, y, z z izhodiščem O . Gibanje tega koordinatnega sistema in s tem gibanje telesa je povezano s nepremičnim koordinatnim sistemom $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ z izhodiščem \bar{O} , glej sliko 5/1. Vektor \mathbf{r}_M označuje lego masnega središča telesa glede na koordinatni sistem x, y, z . Kot je znano, lahko vsako diferencialno majhno spremembo lege togega telesa opišemo s premikom točke O in zasukom okoli trenutne osi, ki poteka skozi točko O .

Ker so na sliki 5/1 poleg oznak navedene tudi enake zveze kot na sliki 2/4, lahko uporabimo enačbo (2.23). Vektorju $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{v}_1$ damo vrednost nič, saj pri togem telesu oddaljenost vseh masnih elementov drug od drugega in od točke O ostane nespremenjena:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 \quad (5.187)$$

ali, po množenju z dt

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + dt \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1. \quad (5.188)$$

Enačbo (5.187) v enačbo (5.186) in dobimo:

$$T = \frac{1}{2} \int_{(S)} (\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(S)} [\dot{\mathbf{r}}_0^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)^2] dm. \quad (5.189)$$

Z uporabo pravila o zamenjavi vrstnega reda množenja za mešani produkt dobimo:

$$2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = 2\dot{\mathbf{r}}_0 \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_1. \quad (5.190)$$

Vektorja $\boldsymbol{\omega}$ in \mathbf{r}_1 lahko v koordinatnem sistemu telesa zapišemo s pomočjo enotskih vektorjev $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ v obliki

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (5.191)$$

in

$$\mathbf{r}_1 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (5.192)$$

Z upoštevanjem enačb (5.191) in (5.192) dobimo

$$\left. \begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)^2 &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= \omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (x^2 + z^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\omega_x \omega_y x y - 2\omega_x \omega_z y z - 2\omega_z \omega_x z x \end{aligned} \right\} \quad (5.193)$$

Iz enačbe (5.189) dobimo z enačbama (5.190) in (5.193) kinetično energijo

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_0^2 \int_{(S)} dm + \dot{\mathbf{r}}_0 \times \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{(S)} \mathbf{r}_1 dm \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega_x^2 \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \omega_y^2 \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \omega_z^2 \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - \omega_x \omega_y \int_{(S)} x y dm - \omega_y \omega_z \int_{(S)} y z dm - \omega_z \omega_x \int_{(S)} z x dm \end{aligned} \right\} \quad (5.194)$$

Pri tem smo količine $\dot{\mathbf{r}}_0$, $\boldsymbol{\omega}$, ω_x , ω_y in ω_z zapisali pred integrale, saj jih pri integraciji masnih elementov lahko obravnavamo kot konstante. Vidimo, da se drugi integral v enačbi (5.194) izniči, če točka O

- miruje glede na prostorsko nepremičen sistem \bar{O} ali pa
- sovpada z masnim središčem telesa.

V prvem primeru se faktor pred integralom izniči, ker je $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$, v drugem primeru pa odpade sam integral v skladu z definicijo masnega središča po enačbi (4.1), ker je $\mathbf{r}_M = \mathbf{0}$.

V nadaljevanju bomo predpostavili, da je eden od teh dveh pogojev izpolnjen. Poleg tega uvedemo naslednje *masne vztrajnostne momente*

$$J_{xx} = \int_{(S)} dm (y^2 + z^2), \quad J_{yy} = \int_{(S)} dm (x^2 + z^2), \quad J_{zz} = \int_{(S)} dm (x^2 + y^2) \quad (5.195)$$

in naslednje *deviacijske ali centrifugalne momente*

$$J_{xy} = J_{yx} = - \int_{(S)} dm x y, \quad J_{yz} = J_{zy} = - \int_{(S)} dm y z, \quad J_{zx} = J_{xz} = - \int_{(S)} dm z x. \quad (5.196)$$

Če upoštevamo še, da je

$$m = \int_{(S)} dm$$

skupna masa togega telesa, dobimo iz enačbe (5.194) za kinetično energijo izraz

$$T = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \left(J_{xx} \omega_x^2 + J_{yy} \omega_y^2 + J_{zz} \omega_z^2 \right. \\ & \left. + 2J_{xy} \omega_x \omega_y + 2J_{yz} \omega_y \omega_z + 2J_{xz} \omega_x \omega_z \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.197)$$

Očitno je, da

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_0^2 \quad (5.198)$$

predstavlja translacijsko energijo telesa zaradi gibanja težišča in jo zato imenujemo *translacijska energija*. *Rotacijsko energijo* zapišemo kot

$$T_{\text{rot}} = \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \left(J_{xx} \omega_x^2 + J_{yy} \omega_y^2 + J_{zz} \omega_z^2 \right. \\ & \left. + 2J_{xy} \omega_x \omega_y + 2J_{yz} \omega_y \omega_z + 2J_{xz} \omega_x \omega_z \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.199)$$

To je energija, ki jo ima telo, ko izvaja čisto rotacijsko gibanje okoli osi skozi točko O . Tako lahko celotno energijo togega telesa zapišemo kot vsoto translacijske in rotacijske energije:

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}. \quad (5.200)$$

Treba pa je opozoriti, da je ta razčlenitev celotne energije mogoča le, če so izpolnjeni zgoraj navedeni pogoji glede točke O . V nasprotnem primeru se pojavi dodatni energijski člen, ki je odvisen od translacijskega in rotacijskega gibanja telesa.

Masne vztrajnostne in deviacijske momente, ki jih določajo enačbe (5.195) in (5.196), lahko razumemo kot elemente tenzorja drugega reda, *vztrajnostnega tenzorja*

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}.$$

Kot je razvidno iz enačbe (5.196), je ta tenzor simetričen. Elementi vztrajnostnega tenzorja so odvisni od izbranega koordinatnega sistema. Spreminjanje elementov vztrajnostnega tenzorja pri rotaciji koordinatnega sistema lahko jasno ponazorimo, če s pomočjo vztrajnostnega tenzorja preučimo zvezo med vrtilno količino \mathbf{L} in vektorjem kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$.

V skladu z enačbo (4.7) lahko gibalno količino predstavimo kot

$$\mathbf{L} = \int_{(S)} \mathbf{r} \times dm \dot{\mathbf{r}}$$

S pomočjo enačbe (5.187) in

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$$

dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_{(S)} (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1) \times (\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) dm \\ &= \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 \int_{(S)} dm + \mathbf{r}_0 \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_{(S)} \mathbf{r}_1 dm \right) + \int_{(S)} \mathbf{r}_1 dm \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \int_{(S)} \mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) dm \end{aligned} \quad (5.201)$$

Pri tem predpostavimo, da je točka O bodisi miruje glede na prostorsko določen sistem \bar{O} (v tem primeru zaradi enostavnosti določimo tudi $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$) bodisi da je identična z masnim središčem telesa. V prvem primeru ostane v enačbi (5.201) samo zadnji integral

$$\mathbf{L}_1 = \int_{(S)} \mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) dm \quad (5.202)$$

v drugem primeru pa

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{L}_1 \quad (5.203)$$

Količina \mathbf{L}_1 je v obeh primerih vrtilna količina telesa glede na točko, fiksirano na telesu, ki je hkrati točka, fiksirana v prostoru, ali masno središče. Delež $m\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0$ je vrtilna

količin masnega središča glede na izhodišče prostorsko nepremičnega koordinatnega sistema, če vzamemo, da je celotna masa zgoščena v masnem središču.

Sedaj obravnavo omejimo na \mathbf{L}_1 in v enačbo (5.202) vstavimo vektorja $\boldsymbol{\omega}$ in \mathbf{r}_1 , ki sta podana v razčlenjeni obliki z enačbama (5.191) in (5.192). Sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \int_{(S)} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \times [(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \times (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})] dm \\ &= \int_{(S)} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \times [(\omega_y z - \omega_z y) \mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y z) \mathbf{k}] dm \\ &= \int_{(S)} \left\{ [(y^2 + z^2) \omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] \mathbf{i} + [-xy\omega_x + (x^2 + y^2) \omega_y - yz\omega_z] \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + [-xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2 + y^2) \omega_z] \mathbf{k} \right\} dm \end{aligned}$$

Z uporabo enačb (5.195) in (5.196) dobimo

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= (J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z) \mathbf{i} + (J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z) \mathbf{j} \\ &\quad + (J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z) \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (5.204)$$

Desno stran enačbe (5.204) lahko razumemo kot skalarni produkt tenzorja vztrajnosti z vektorjem kotne hitrosti. To simbolično zapišemo kot

$$\mathbf{L}_1 = \mathcal{J} \boldsymbol{\omega} \quad (5.205)$$

ali razčlenjeno v matričnem zapisu:

$$\begin{bmatrix} L_{1x} \\ L_{1y} \\ L_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (5.206)$$

Vidimo, da komponente vrtilne količine na splošno niso sorazmerne komponentam kotne hitrosti, tj. vektor vrtilne količine in vektor kotne hitrosti nista kolinearna. Vprašamo se, ali obstajajo smeri, za katere velja sorazmernost med vektorjema \mathbf{L}_1 in $\boldsymbol{\omega}$, tj. za katere velja

$$\mathbf{L}_1 = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (5.207)$$

Če enačbo (5.207) odštejemo od enačbe (5.206), dobimo homogen sistem enačb za komponente $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{bmatrix} J_{xx} - \lambda & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} - \lambda & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.208)$$

Ta sistem enačb ima netrivialne rešitve le, če je determinanta koeficientov nična:

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} - \lambda & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.209)$$

Po izračunu determinante dobimo z uporabo simetrijskih zvez

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}) \lambda^2 + (J_{yy}J_{zz} + J_{zz}J_{xx} + J_{xx}J_{yy} - J_{yz}^2 - J_{xz}^2 - J_{xy}^2) \lambda \\ - (J_{xx}J_{yy}J_{zz} + J_{xy}J_{yz}J_{xz} + J_{xz}J_{xy}J_{yz} - J_{xx}J_{yz}^2 - J_{yy}J_{xz}^2 - J_{zz}J_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.210)$$

Najprej predpostavimo, da so trije koreni algebrske enačbe (5.210) med seboj različni, tj. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Potem lahko pokažemo, da so ustrezni lastni vektorji $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ki nastanejo po vstavitvi korenov $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ v enačbo (5.218), med seboj pravokotni. V ta namen določimo desni strani enačb (5.205) in (5.207) in jih zapišemo, npr. enkrat za ω_1 in enkrat za ω_2 :

$$\begin{aligned} J\omega_1 &= \lambda_1\omega_1 \\ J\omega_2 &= \lambda_2\omega_2 \end{aligned}$$

Če prvo enačbo skalarno pomnožimo z ω_2 , drugo pa z ω_1 , dobimo

$$\begin{aligned} \omega_2 \cdot J\omega_1 &= \lambda_1\omega_2 \cdot \omega_1 \\ \omega_1 \cdot J\omega_2 &= \lambda_2\omega_1 \cdot \omega_2 \end{aligned}$$

Na levi strani druge enačbe zamenjamo faktorja, kar je dovoljeno zaradi simetrije \mathcal{J} . Nato obe enačbi odštejemo drugo od druge in dobimo

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \cdot \omega_2 \quad (5.211)$$

Če se λ_1 in λ_2 med seboj razlikujeta, potem je skalarni produkta med ω_1 in ω_2 enak nič, iz česar sledi naša trditev o ortogonalnosti lastnih vektorjev.

Če zdaj tri medsebojno pravokotne smeri lastnih vektorjev uporabimo kot osi novega koordinatnega sistema ξ, η, ζ z izhodiščem O , je zveza med komponentami \mathbf{L}_1 in ω zdaj v skladu z enačbo (5.207) predstavljeno z zvezo

$$\begin{bmatrix} L_{1\xi} \\ L_{1\eta} \\ L_{1\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \quad (5.212)$$

Lastne vrednosti λ_1, λ_2 in λ_3 so torej, kot kaže primerjava z enačbo (5.206), elementi vztrajnostnega tenzorja, vezani na koordinatni sistem ξ, η, ζ , in predstavljajo masne

vztrajnostne momente

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= J_{\xi\xi} = \int_{(S)} (\eta^2 + \zeta^2) dm \\ \lambda_2 &= J_{\eta\eta} = \int_{(S)} (\xi^2 + \zeta^2) dm \\ \lambda_3 &= J_{\zeta\zeta} = \int_{(S)} (\xi^2 + \eta^2) dm \end{aligned} \right\} \quad (5.213)$$

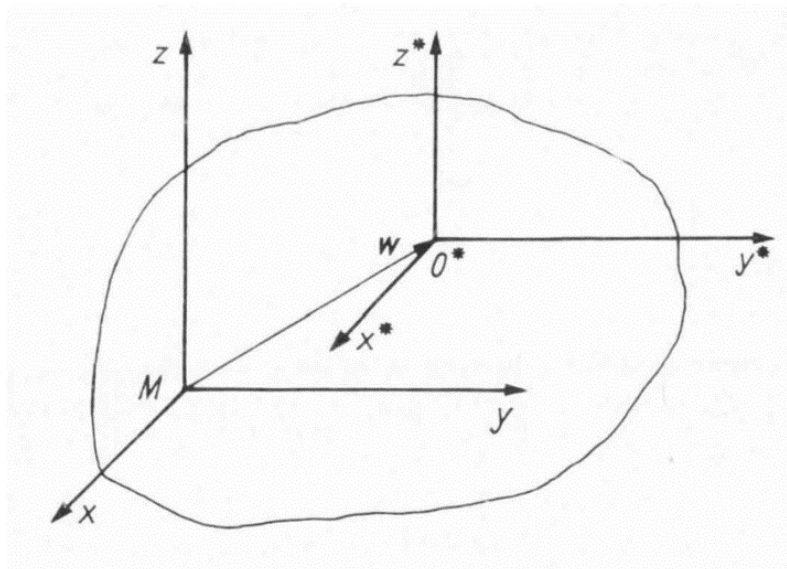
Koordinatni sistem ξ, η, ζ se od vseh drugih koordinatnih sistemov z istim izhodiščem razlikuje po tem, da pri njem deviacijski oziroma centrifugalni momenti izginejo. Zato osi tega koordinatnega sistema imenujemo *glavne vztrajnostne osi*, masne vztrajnostne momente, podane z enačbo (5.213), pa *glavni masni vztrajnostni momenti*. Prehod iz poljubnega ortogonalnega koordinatnega sistema x, y, z v sistem glavnih osi ξ, η, ζ imenujemo *transformacija glavnih osi*. Velja tudi, da je vsaka simetrijska os telesa hkrati glavna vztrajnostna os. Vendar pa obrat tega izreka ne velja, tj. ni vsaka glavna os tudi simetrijska os.

Zdaj obravnavajmo primer, ko sta dve od lastnih vrednosti λ ali vse tri lastne vrednosti med seboj enake. Če velja, na primer, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, potem obstajata dva linearno neodvisna lastna vektorja za lastno vrednost $\lambda_1 = \lambda_2$. Ta vektorja ležita v ravnini, pravokotni na ω_3 , v kateri je vsak vektor lastni vektor. Dve poljubni med seboj pravokotni osi v tej ravnini lahko izberemo za osi ξ in η sistema glavnih osi. Ti skupaj z osjo ζ tvorijo enega izmed neskončno mnogih možnih sistemov glavnih osi. Primeri teles, za katera veljajo ti pogoji, so vsa rotacijsko simetrična telesa, če koordinatno izhodišče leži na osi simetrije tega telesa.

Če so vse lastne vrednosti med seboj enake, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, potem so vse osi, ki potekajo skozi koordinatno izhodišče, glavne vztrajnostne osi. V tem primeru je vsaka ortogonalni sistema ξ, η, ζ sistem glavnih osi. Telesi, pri katerih je vsaka os, ki poteka skozi masno središče, glavna vztrajnostna os, sta na primer krogla in kocka.

Zdaj si bomo pogledali, kako se spremenijo komponente vztrajnostnega tenzorja pri prehodu iz enega nepremičnega telesnega koordinatnega sistema x, y, z v drugi nepremični telesni sistem z osmi x^*, y^*, z^* . Obravnavali bomo dva posebna primera, iz katerih lahko sestavimo vsako splošno transformacijo.

V prvem primeru se lahko koordinatna sistema premakneta le vzporedno drug proti drugemu (glej sliko 5/2), pri čemer predpostavljamo, da je izhodišče sistema x, y, z masno središče telesa. Glede na sistem x, y, z ima vektor premika komponente a, b in



Slika 5/2. Vzporedni premik dveh koordinatnih sistemov

c. Potem dobimo, na primer, za

$$\begin{aligned}
 J_{x^*x^*} &= \int_{(S)} (y^{*2} + z^{*2}) dm = \int_{(S)} [(y + b)^2 + (z + c)^2] dm \\
 &= \int_{(S)} [(y^2 + z^2) + 2by + 2cz + (b^2 + c^2)] dm \\
 &= J_{xx} + m(b^2 + c^2) + 2b \int_{(S)} y dm + 2c \int_{(S)} z dm
 \end{aligned}$$

Zadnja dva integrala sta enaka nič, saj predstavljata statična momenta telesa glede na osi skozi masno središče. Tako dobimo:

$$J_{x^*x^*} = J_{xx} + m(b^2 + c^2). \quad (5.214)$$

Podobno velja:

$$\begin{aligned}
 J_{y^*y^*} &= J_{yy} + m(a^2 + c^2) \\
 J_{z^*z^*} &= J_{zz} + m(a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

Za centrifugalni moment $J_{x^*y^*}$ dobimo:

$$\begin{aligned}
 J_{x^*y^*} &= - \int_{(S)} x^*y^* dm = - \int_{(S)} (x + a)(y + b) dm \\
 &= - \int_{(S)} (xy + ab + ay + bx) dm \\
 &= J_{xy} - mab - a \int_{(S)} y dm - b \int_{(S)} x dm
 \end{aligned}$$

Ker so statični momenti ponovno enaki nič, sledi

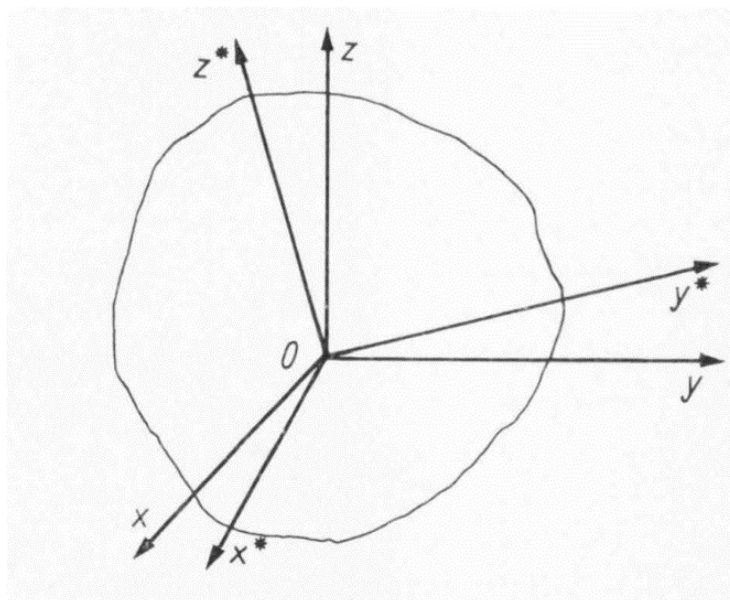
$$J_{x^*y^*} = J_{xy} - m a b \quad (5.215)$$

Podobno velja

$$J_{y^*z^*} = J_{yz} - m b c$$

$$J_{x^*z^*} = J_{xz} - m a c$$

Transformacijski pravili (5.214) in (5.215) sta znani kot STEINERjev izrek. Omogoča prehod iz »težiščnega sistema« x, y, z v koordinatni sistem, ki je vzporeden z njim, in obratno. Z dvakratno uporabo STEINERjevega izreka je tako mogoč prehod med poljubnima vzporednima koordinatnima sistemoma.



Slika 5/3. Zasuk dveh koordinat sistema s skupnim izhodiščem

V drugem primeru imata oba koordinatna sistema lahko isto izhodišče, vendar sta med seboj zasukana (glej sliko 5/3). Ni nujno, da je izhodišče masno središče telesa. Oba koordinatna sistema morata biti povezana le z rotacijo, kar pomeni, da sta oba hkrati desnosučna ali levosučna sistema. Med koordinatami x, y, z in x^*, y^*, z^* zato veljajo homogene zveza

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \cos(x, x^*) + y \cos(y, x^*) + z \cos(z, x^*) \\ y^* &= x \cos(x, y^*) + y \cos(y, y^*) + z \cos(z, y^*) \\ z^* &= x \cos(x, z^*) + y \cos(y, z^*) + z \cos(z, z^*) \end{aligned} \right\} \quad (5.216)$$

Da bi poenostavili zapis naslednjih enačb, ponovno uporabimo dogovor o seštevanju

in odslej označujemo koordinatne osi z indeksi, tj. določimo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z \\ x_1^* &= x^*, & x_2^* &= y^*, & x_3^* &= z^*. \end{aligned} \quad (5.217)$$

Prav tako želimo poenostaviti zapis smernih kosinusov. Naj velja:

$$\alpha_{ij} = \cos(x_i, x_j^*), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.218)$$

Potem enačbo (5.216) lahko zapišemo v obliki

$$x_i^* = \alpha_{ij} x_j; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.219)$$

Prav tako velja

$$x_j = a_{ij} x_i^*, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.220)$$

kar je razvidno z zamenjavo koordinat x, y, z s koordinatami x^*, y^*, z^* v enačbi (5.216). Vidimo, da so α_{ij} komponente enotskih vektorjev \mathbf{e}_j^* sistema x_j . Zaradi ortogonalnosti teh vektorjev velja:

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_k^* = \delta_{ik}, \quad e_j e_l = \delta_{jl}. \quad (5.221)$$

Iz tega na podlagi enačbo (5.119) sledi

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_k^* = \alpha_{ij} \alpha_{kl} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l = \alpha_{ij} a_{kl} \delta_{jl} = \alpha_{ij} \alpha_{kj},$$

tj. za smerne kosinuse velja zveza

$$\alpha_{ij} \alpha_{kj} = \delta_{ik}. \quad (5.222)$$

Podobno iz enačbe (5.220) dobimo enačbo

$$\alpha_{ij} \alpha_{il} = \delta_{jl}. \quad (5.223)$$

V zgoraj dogovorjenem načinu zapisa zdaj ponovno zapišemo enačbo (5.206), tako za x_j^* - kot za x_j -sistem:

$$L_{1i}^* = J_{kl}^* \omega_k^*, \quad L_{1j} = J_{jl} \omega_l. \quad (5.224)$$

Za komponente vektorjev \mathbf{L}_1 in $\boldsymbol{\omega}$ velja transformacijsko pravilo (5.219), tako da lahko prvo enačbo (5.224) zapišemo tudi kot:

$$\alpha_{ij} L_{1j} = J_{ik}^* \alpha_{kl} \omega_l.$$

Pomnožimo to enačbo z α_{im} in seštejemo po indeksu i , kar z enačbo (5.223) daje:

$$L_{1j} = \alpha_{ij} J_{ik}^* \alpha_{kl} \omega_l.$$

S primerjavo z drugo izmed enačb (5.224) dobimo iskane transformacijske enačbe za elemente vztrajnostnega tenzorja:

$$J_{jl} = \alpha_{ij} J_{ik}^* \alpha_{kl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5.225)$$

Obratno zvezo dobimo z uporabo enačb (5.222) in (5.223). Ta se glasi:

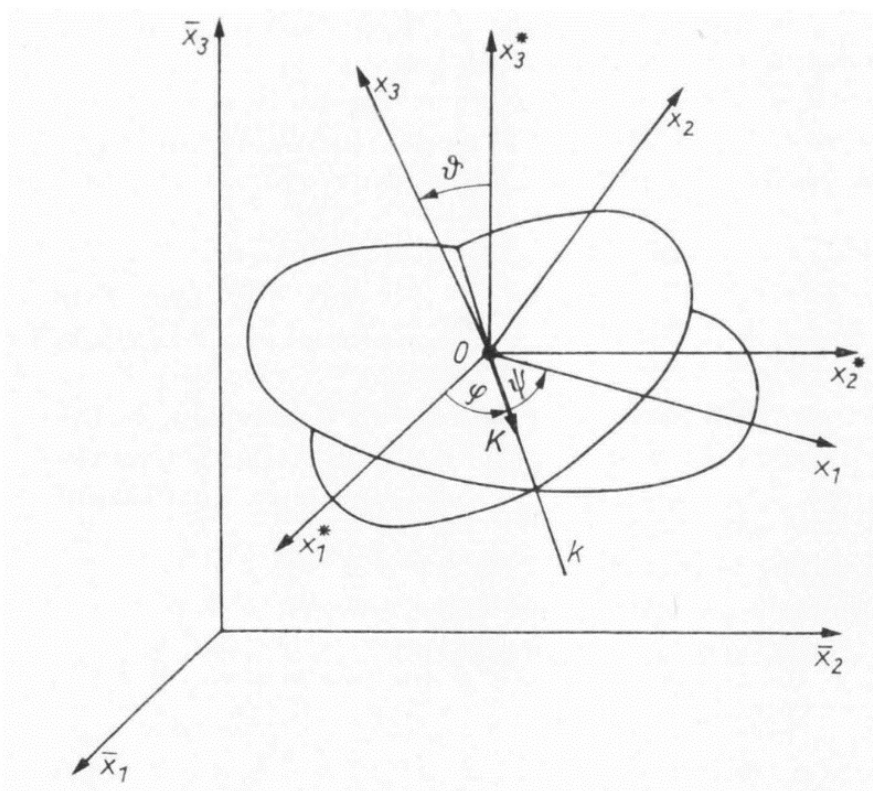
$$J_{ik}^* = \alpha_{ij} J_{jl} \alpha_{kl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5.226)$$

5.5.2 Eulerjevi koti

Da bi lahko gibanje togega telesa izrazili s posplošenimi koordinatami, tj. da bi zapisali zvezo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

v skladu z enačbo (5.2), uvedemo EULERjeve kote. Ti opisujejo vrtenje togega telesa okoli točke, ki je pritrjena na telo. Gibanje togega telesa lahko nato v celoti opišemo z gibanjem te točke in tremi EULERjevimi koti, ki jih bomo uvedli v nadaljevanju.



Slika 5/4. Eulejevi koti φ , ψ , ϑ

Uvedemo mirujoč koordinatni sistem $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, ki je tak kot je prikazan na sliki 5/1. Osi x_1^*, x_2^*, x_3^* določajo koordinatni sistem, katerega izhodišče se nahaja v točki O , vezani na telo, njegove osi pa so vzporedne z osmi $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ (slika 5/4). Tudi koordinatni sistem x_1, x_2, x_3 , prikazan na sliki 5/1, naj bo povezan s togim telesom in naj ima prav tako izhodišče O . Zveze med komponentami vektorja \mathbf{r}_1 glede na sistema x_1, x_2, x_3 in x_1^*, x_2^*, x_3^* spet dajo enačbo (5.216). Zdaj pa trdim, da lahko smerne

kosinuse izrazimo s tremi koti ϑ , φ , ψ tako, da enačba (5.216) dobi obliko

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5.227)$$

Za dokaz zadostuje, da v enačbi (5.222) in (5.223) vstavimo elemente matrike koeficientov iz enačbe (5.227). Za geometrijsko razlago kotov ϑ , φ , ψ s primerjavo enačb (5.216) in (5.227) najprej ugotovimo, da je

$$\vartheta = \angle(z, z^*) = \angle(x_3, x_3^*)$$

kot med osema x_3 in x_3^* . Oglejmo si vektor \mathbf{K} na ravnini (x_1, x_2) , ki je podan z

$$x_1 = \cos \psi, \quad x_2 = -\sin \psi, \quad x_3 = 0$$

(slika 5/4), in mu določimo komponente v sistemu x_1^* , x_2^* , x_3^*

$$x_1^* = \cos \varphi, \quad x_2^* = \sin \varphi, \quad x_3 = 0.$$

Iz tega sledi, da ravnino (x_1, x_2) oblikujemo tako, da ravnino (x_1^*, x_2^*) zavrtimo okoli tako imenovane vozliščne črte k , v kateri leži vektor \mathbf{K} , za kot ϑ . Os x_1^* se z zasukom za kot φ v ravnini (x_1^*, x_2^*) spremeni v vozliščno črto, ta pa se z zasukom za kot ψ v ravnini (x_1, x_2) spremeni v os x_1 . Za določitev predznaka ϑ upoštevamo, da iz enačb (5.216) in (5.227) izhaja

$$\cos(z, x^*) = \cos(x_3, x_1^*) = \sin \varphi \sin \vartheta,$$

tj. ϑ je pozitiven, če velja $0 < \varphi < \pi$ in če osi x_3 in x_1^* tvorita ostri kot. Količine ϑ , φ , ψ se imenujejo *Eulerjevi koti*; označeni so na sliki 5/4.

Če za opis izhodišča O izberemo kartezične koordinate \bar{x}_{1O} , \bar{x}_{2O} , \bar{x}_{3O} , je iskana zveza (5.2) med komponentami krajevnega vektorja masnega elementa s koordinatami x_1 , x_2 , x_3 v koordinatnem sistemu vezanem na telo in posplošenimi koordinatami

$$\begin{aligned} q_1 &= \vartheta, & q_2 &= \varphi, & q_3 &= \psi, \\ q_4 &= \bar{x}_{1O}, & q_4 &= \bar{x}_{2O}, & q_4 &= \bar{x}_{3O} \end{aligned}$$

podana z enačbo

$$x_i = q_{i+3} + \alpha_{ij} x_j; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.228)$$

kjer so α_{ij} elementi transformacijske matrike iz enačbe (5.227)

$$(\alpha_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Za komponente hitrosti masnega elementa dobimo:

$$\dot{x}_i = \dot{q}_{i+3} + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k x_j; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (5.229)$$

Sedaj obravnavamo le čiste zasuke, zato postavimo:

$$\dot{q}_4 = \dot{q}_5 = \dot{q}_6 = 0.$$

Poleg tega vektor hitrosti s pomočjo transformacije (5.220) izrazimo z njegovimi komponentami glede na koordinatni sistem x_1, x_2, x_3 vezan na telo:

$$\dot{x}_l = \alpha_{il} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k x_j. \quad (5.230)$$

Koeficienti x_j v enačbi (5.230) so antisimetrični glede na indeksa j in l . Namreč, iz enačbe (5.223), ko jo odvajamo po času, izhaja:

$$\alpha_{il} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \alpha_{ij} \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0.$$

Primerjajmo enačbo (5.230) z enačbo (5.187) za $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$. Zapisano v komponentah dobimo iz enačbe (5.187) z $\omega_1 = \omega_x, \omega_2 = \omega_y, \omega_3 = \omega_z$

$$\dot{x}_l = \beta_{lj} x_j, \quad (5.231)$$

kjer je matrika

$$(\beta_{lj}) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.232)$$

Ker se morata enačbi (5.230) in (5.231) ujemati za vse masne elemente, sledi, da so vsi koeficienti x_j enaki. Podrobneje dobimo:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \alpha_{i3} \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial q_k} \dot{q}_k = -\alpha_{i2} \frac{\partial \alpha_{i3}}{\partial q_k} \dot{q}_k = a_{1k} \dot{q}_k \\ \omega_2 &= \alpha_{i1} \frac{\partial \alpha_{i3}}{\partial q_k} \dot{q}_k = -\alpha_{i3} \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial q_k} \dot{q}_k = a_{2k} \dot{q}_k \\ \omega_3 &= \alpha_{i2} \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial q_k} \dot{q}_k = -\alpha_{i1} \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial q_k} \dot{q}_k = a_{3k} \dot{q}_k \\ & i, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (5.233)$$

Z uvedba količin a_{1k} , a_{2k} , a_{3k} dobimo povezavo z enačbo (5.25), s katero so bile uvedene kvazihitrosti. Z izračunom dobimo za elemente matrike (a_{ij}) :

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \vartheta \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & 1 \end{bmatrix} \quad (5.234)$$

Elementi te matrike ne izpolnjujejo vseh pogojev integrabilnosti (5.27), zato količine ω_1 , ω_2 , ω_3 niso odvodi posplošenih koordinat, ampak so kvazihitrosti. Tvorimo še k (a_{ij}) inverzno matriko

$$(b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} & \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} & 0 \\ -\cot \vartheta \sin \psi & -\cot \vartheta \cos \psi & 1 \end{bmatrix} \quad (5.235)$$

Z enačbami (5.233) do (5.235) dobimo naslednjo zvezo med kvazihitrostmi ω_1 , ω_2 , ω_3 ter EULERjevimi koti in njihovimi odvodi:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \omega_2 &= -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (5.236)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi \\ \dot{\varphi} &= \omega_1 \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} + \omega_2 \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \\ \dot{\psi} &= -\omega_1 \cot \vartheta \sin \psi - \omega_2 \cot \vartheta \cos \psi + \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.237)$$

5.5.3 Eulerjeve enačbe

Sedaj s pomočjo enačbe (5.152) izpeljemo LAGRANGEve enačbe gibanja druge vrste za togo telo. Kinetično energijo izračunamo po enačbi (5.197), ob predpostavki, da

izhodiščna točka O (slika 5/1) miruje ali se nahaja v masnem središču togega telesa. Poleg tega izberemo koordinatni sistem telesa z osmi $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ tako, da so osi glavne vztrajnostne osi. Potem je:

$$T = \frac{1}{2} \left[J_{11}\omega_1^2 + J_{22}\omega_2^2 + J_{33}\omega_3^2 + m (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) \right]. \quad (5.238)$$

Od $6^3 = 216$ količin γ_{jst} po enačbi (5.153) so vse tiste, pri katerih je indeks večji od 3, od začetka enake nič, ker so \dot{q}_4 , \dot{q}_5 , in \dot{q}_6 odvodi posplošenih koordinat, koordinate q_4 , q_5 , in q_6 pa se ne pojavljajo v koeficientih a_{ij} in b_{ij} . Z uporabo enačbe (5.156) lahko preostalih $3^3 = 27$ vrednosti γ_{jst} izračunamo z enačbama (5.233) in (5.234):

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= \cos q_3 dq_1 + \sin q_1 \sin q_3 dq_2 \\ \delta d\pi_1 &= \cos q_3 \delta dq_1 + \sin q_1 \sin q_3 \delta dq_2 - \sin q_3 \delta q_3 dq_1 \\ &\quad + \cos q_1 \sin q_3 \delta q_1 dq_2 + \sin q_1 \cos q_3 \delta q_3 dq_2. \end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} \delta\pi_1 &= \cos q_3 \delta q_1 + \sin q_1 \sin q_3 \delta q_2 \\ \delta\delta\pi_1 &= \cos q_3 \delta\delta q_1 + \sin q_1 \sin q_3 \delta\delta q_2 - \sin q_3 \delta q_3 \delta q_1 \\ &\quad + \cos q_1 \sin q_3 \delta q_1 \delta q_2 + \sin q_1 \cos q_3 \delta q_3 \delta q_2. \end{aligned}$$

Ker je, kot smo predpostavili, za dejanske koordinate podana zamenljivost operatorjev d in δ (glej tudi 5.2.2), sledi:

$$\begin{aligned} (\delta d - d\delta) \pi_1 &= -\sin q_3 (\delta q_3 dq_1 - \delta q_1 dq_3) + \cos q_1 \sin q_3 (\delta q_1 dq_2 - \delta q_2 dq_1) \\ &\quad + \sin q_1 \cos q_3 (\delta q_3 dq_2 - \delta q_2 dq_3) \\ &= -\sin q_3 [\cot q_1 (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1)] - \cos q_3 (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1) \\ &\quad + \sin q_3 (\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2) + \frac{\cos q_3 \sin q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1) \\ &\quad + \sin q_1 \cos q_3 \left[-\frac{\sin q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1) - \frac{\cos q_3}{\sin q_1} (\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2) \right] \\ &= -\frac{\sin q_1}{\sin q_1} (\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1) \\ &= -(\delta\pi_2 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_2). \end{aligned}$$

Nadalje velja:

$$\begin{aligned} (\delta d - d\delta) \pi_2 &= -\cos q_3 (\delta q_3 dq_1 - \delta q_1 dq_3) + \cos q_1 \cos q_3 (\delta q_1 dq_2 - \delta q_2 dq_1) \\ &\quad - \sin q_1 \sin q_3 (\delta q_3 dq_2 - \delta q_2 dq_3) \\ &= (\delta\pi_1 d\pi_3 - \delta\pi_3 d\pi_1). \end{aligned}$$

In še:

$$\begin{aligned} (\delta d - d\delta) \pi_3 &= -\sin q_1 (\delta q_1 dq_2 - \delta q_2 dq_1) \\ &= -(\delta\pi_1 d\pi_2 - \delta\pi_2 d\pi_1). \end{aligned}$$

Iz tega sledi:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{213} = +1, \quad \gamma_{312} = -1 \\ \gamma_{123} = -1, \quad \gamma_{321} = +1 \\ \gamma_{132} = +1, \quad \gamma_{231} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (5.239)$$

Za vse druge kombinacije indeksov so γ_{jst} enaki nič.

Z enačbami (5.236) in (5.237) dobimo iz enačb (5.152) in (5.153) končno

$$\left. \begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= \Pi_1^{(e)} + \lambda_p c_{p1} \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= \Pi_2^{(e)} + \lambda_p c_{p2} \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= \Pi_3^{(e)} + \lambda_p c_{p3} \end{aligned} \right\} \quad (5.240)$$

in

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{q}_4 &= \Pi_4^{(e)} + \lambda_p c_{p4} \\ m \ddot{q}_5 &= \Pi_5^{(e)} + \lambda_p c_{p5} \\ m \ddot{q}_6 &= \Pi_6^{(e)} + \lambda_p c_{p6} \end{aligned} \right\} \quad (5.241)$$

Če ni nikakršnih omejitev in količine $\Pi_1^{(e)}$, $\Pi_2^{(e)}$, $\Pi_3^{(e)}$ niso odvisne od koordinat q_4 , q_5 , in q_6 ali njihovih odvodov, potem enačbe (5.240) in (5.241) medsebojno niso povezane.

Ker so $\Pi_1^{(e)}$, $\Pi_2^{(e)}$, $\Pi_3^{(e)}$ momenti vtisnjenih sil glede na osi x_1 , x_2 , x_3 in so $\lambda_p c_{p1}$, $\lambda_p c_{p2}$, $\lambda_p c_{p3}$ ustrezni vezni momenti, lahko enačbe (5.240) zapišemo tudi v obliki *Eulerjevih enačb*

$$\left. \begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1^{(a)}, \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= M_2^{(a)}, \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3^{(a)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.242)$$

Količine $M_1^{(a)}$, $M_2^{(a)}$, $M_3^{(a)}$ so zunanji momenti glede na osi x_1 , x_2 , x_3 . Če so ti momenti bodisi enaki nič, konstantni ali funkcije kvazihitrosti ω_1 , ω_2 , ω_3 , potem je mogoče, če je integracija enačb (5.242) uspešna, podati stanje hitrosti, ki ga predstavljajo $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$. Da bi določili lego telesa v odvisnosti od časa, je treba integrirati enačbe (5.237).

Če pa so zunanji momenti odvisni od lege telesa, tj. če so funkcije EULERjevih kotov, potem je treba iz EULERjevih enačb s pomočjo enačbe (5.236) izločiti kvazihitrosti. Tako dobljene enačbe niso identične diferencialnim enačbam, dobljenim iz LAGRANGEVih enačb gibanja druge vrste, če je kinetična energija že vnaprej podana kot funkcija EULERjevih kotov in njihovih odvodov. V slednjem primeru bi bili zunanji momenti na desni strani teh enačb izraženi glede na poševni sistem osi, ki ga tvorijo vozliščna črta, os x_3^* in os x_3 .

Količine q_4 , q_5 , q_6 so kartezične koordinate masnega središča M ali katere koli druge točke, ki je nepremična v prostoru. Ker so $\Pi_4^{(e)}$, $\Pi_5^{(e)}$, $\Pi_6^{(e)}$ rezultante vtisnjenih sil v

smeri koordinatnih osi, $\lambda_p c_{p4}$, $\lambda_p c_{p5}$, $\lambda_p c_{p6}$ pa ustrezne vezne sile, lahko enačbe (5.241) zapišemo tudi kot

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{q}_4 &= F_1^{(a)} \\ m \ddot{q}_5 &= F_2^{(a)} \\ m \ddot{q}_6 &= F_3^{(a)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.243)$$

Če je točka O masno središče, enačba (5.243) predstavlja izrek o masnem središču za togo telo, ki smo ga za sistem v vektorski obliki že podali z enačbo (4.4).

5.5.4 Ravninsko gibanje togega telesa

Enačbe gibanja togega telesa (5.240) in (5.241), predstavljajo sistem nelinearnih diferencialnih enačb, za katerega so rešitve v zaključeni obliki znane le za posebna gibanja. Takšna posebna gibanja so npr.

- ravninsko gibanje,
- vrtenje okoli prostorsko nepremične osi,
- gibanje z ničelnimi zunanji momenti,
- gibanje rotacijsko simetričnih teles okoli nepremične točke telesa, ki leži na simetrijski osi pod vplivom težnosti.

V nadaljevanju se bomo ukvarjali predvsem z ravninskim gibanjem. Zanj je značilno premikanje masnega središča v ravnini in vrtenje telesa okoli glavne vztrajnostne osi, ki je vedno pravokotna na to ravnino. Ta glavna vztrajnostna os je os x_3 . Naj se masno središče giblje v prostorsko nepremični ravnini (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Potem ostane os x_3 vedno vzporedna z osjo \bar{x}_3 . Kotna hitrost ω_3 postane dejanska koordinata hitrosti, ker za $\vartheta = 0$ količine a_{3k} v enačbi (5.234) izpolnjujejo pogoje integrabilnosti (5.27).

Postavimo

$$\omega_3 = \dot{\varphi},$$

kjer je φ kot zasuka telesa v ravnini (\bar{x}_1, \bar{x}_2) glede na začetno lego, ki je določena v prostoru, in

$$q_4 = \bar{x}_{1M}, \quad q_5 = \bar{x}_{2M}$$

kjer sta \bar{x}_{1M} in \bar{x}_{2M} koordinati masnega središča. Poleg tega naj bo

$$J_3 = J, \quad M_3^{(a)} = M^{(a)}.$$

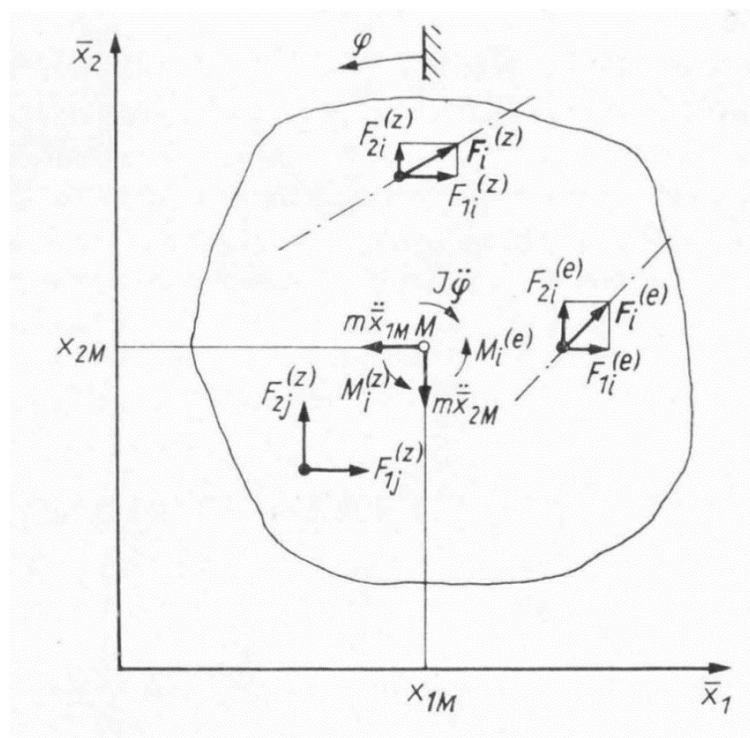
S temi izrazi dobimo iz enačbe (5.242):

$$M^{(a)} - J\ddot{\varphi} = 0 \quad (5.244)$$

in iz enačbe (5.243):

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(a)} - m \ddot{\bar{x}}_{1M} &= 0, \\ F_2^{(a)} - m \ddot{\bar{x}}_{2M} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.245)$$

Enačbe (5.244) in (5.245) predstavljajo uporabo enačb (3.18) za ravninsko gibanje togega telesa. Iz njih je razvidno, da lahko dinamični problem pretvorimo v statičnega tako, da momentu zunanjih sil $M^{(a)}$ dodamo $-J\ddot{\varphi}$, zunanjima silama $F_1^{(a)}$ in $F_2^{(a)}$ pa $-m\ddot{x}_{1M}$ oz. $-m\ddot{x}_{2M}$. Glede na zgoraj navedeno so lahko zunanji momenti in sile sestavljeni iz vtisnjenih sil in momentov ter veznih sil in momentov. Ker se uporaba tega načela, po katerem dinamični problem pretvorimo v statičnega, pri ravninskih sistemih pogosto izkaže za smiselno, bomo v nadaljevanju podrobneje razložili postopek določanja enačb gibanja.



Slika 5/5. Ravninsko gibanje togega telesa

Če na koncu vnesemo še sili zaradi pospeška mase $m\ddot{x}_{1M}$ in $m\ddot{x}_{2M}$, ki sta nasprotni smeri pozitivnega pospeška masnega središča, ter moment pospeška mase $J\ddot{\varphi}$, ki je nasproten smeri pozitivnega kotnega pospeška, lahko sistem na sliki 5/5 obravnavamo kot statični sistem.

Z F_1^* in F_2^* označimo rezultanti vseh sil v smeri \bar{x}_1 oziroma \bar{x}_2 in z M^* rezultanto momentov glede na katero koli točko ravnine. Potem velja:

$$F_1^* = 0, \quad F_2^* = 0, \quad M^* = 0. \quad (5.246)$$

Če v prvih dveh enačbah (5.246) npr. komponente sil, ki kažejo v pozitivne smeri \bar{x} , vpišemo kot pozitivne, potem moramo nasprotno usmerjene sile obravnavati z

negativnim predznakom. Enako velja za predznake momentov. Opozoriti je treba, da moment M^* poleg posameznih momentov vključuje tudi momente vseh komponent sil glede na izbrano referenčno točko ravnine. Pri tem je dovoljeno, da enačbi $F_1^* = 0$ in/ali $F_2^* = 0$ v enačbah (5.246) nadomestimo z dvema dodatnima momentnima enačbama $M^* = 0$, če za izračun momentov izberemo drugi referenčni točki ravnine.

Ker ima prosto gibajoče se togo telo v ravnini tri prostostne stopnje, telo ostane gibljivo le, če med koordinatami \bar{x}_1 , \bar{x}_2 in φ obstajata največ dve linearno neodvisni zvezi:

$$a_{p1} \delta \bar{x}_1 + a_{p2} \delta \bar{x}_2 + a_{p3} \delta \varphi = 0. \quad (5.247)$$

Za vsako lego togega telesa obstajajo največ tri linearno neodvisne vezi. Te ustrezajo trem neznanim komponentam veznih sil ali veznih momentov. Če je v ravnini med seboj povezanih m togih teles, obstaja največ $3m$ linearno neodvisnih vezi in temu ustrezno $3m$ neznanih komponent veznih sil ali veznih momentov. Sistem ostaja gibljiv le, če je število vezi največ $3m - 1$.

5.6 Metode reševanja diferencialnih enačb gibanja (izpuščeno)

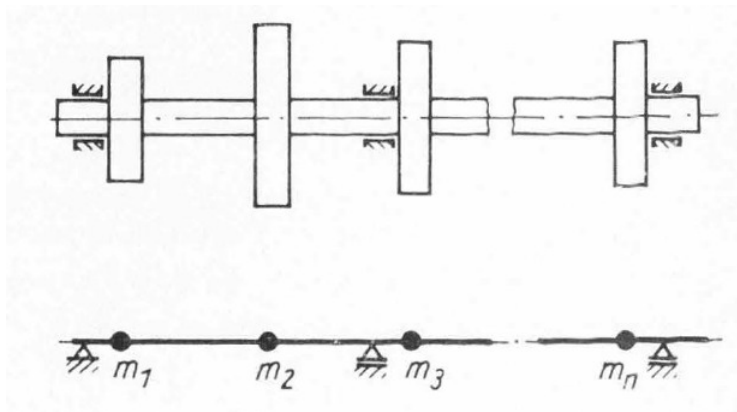
5.7 Stabilnost gibanja sistemov s končnim številom prostostnih stopenj (izpuščeno)

6

Primeri uporabe

V spodnji tabeli je prikazano, na katere dele besedila se nanašajo posamezni primeri.

<i>Primer</i>	<i>Poglavje</i>	<i>Primer</i>	<i>Poglavje</i>
6.1	5.3	6.9	5.4.2
6.2	5.4.2		5.6.1.3
	5.5.4	6.10	5.4.2
6.3	5.4.1		5.6.2.1.2
	5.4.2	6.11	5.4.2
6.4	3.3		5.6.1.3
	5.4.1		5.6.2.2.1
	5.4.2		5.6.2.2.2
	5.5.4		5.6.2.2.3
6.5	5.4.2		5.6.2.2.4
6.6	5.4.2	6.12	5.5.3
6.7	5.4.2		5.6.1.2.2
	5.4.6	6.13	5.4.2
	5.4.7		5.6.1.2.4
6.8	5.4.2	6.14	5.4.2
	5.6.1.1		5.71
	5.6.1.2.2		5.6.2.2.1
	5.6.2.1.1		5.7.2.1.2
	5.6.2.1.2		



Slika 6/1. Elastična gred s posameznimi masami

6.1 Ravnotežna lega vrteče elastične gredi

Na vrteči elastični gredi je nameščenih n diskov (zobniških koles, vztrajnikov ali podobnih komponent). Predpostavimo, da lahko sistem reduciramo na brezmasno elastično gred, na katero so pritrjene posamezne mase (slika 6/1). Elastične lastnosti gredi in ležajev so izotropne. V os gredi, za katero predpostavljamo, da je idealno ravna, postavimo os kartezičnega koordinatnega sistema, ki se vrti s kotno hitrostjo Ω gredi (slika 6/2). V tem koordinatnem sistemu naj bo lega masnega središča i -tega diska za $\Omega = 0$ podana s koordinatami ξ_i, η_i . Odstopanja od lege $\xi_i = 0, \eta_i = 0$ so lahko posledica proizvodnih nenatančnosti.

Težnost v nadaljevanju ne upoštevamo. Neznanke so koordinate x_i, y_i masnih središč za gred, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo.

1. Določitev ravnotežnih pogojev

Če koordinate $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$, obravnavamo kot posplošene koordinate, potem so sile, ki delujejo na masne točke v smeri x in y , ustrezne posplošene sile. V skladu z enačbo (5.48) so te posplošene sile enake nič, če so posplošene koordinate med seboj neodvisne, zato med njimi ni pogojnih enačb. Ker vrteči koordinatni sistem ni inercialen, v skladu z enačbo (5.36) vtisnjenim silam \mathbf{F}^* pripadajo tudi vztrajnostne sile. Za vsako masno točko je centrifugalna sila edina vztrajnostna sila, saj je centripetalni pospešek, ki je posledica systemskega gibanja, edini pospešek:

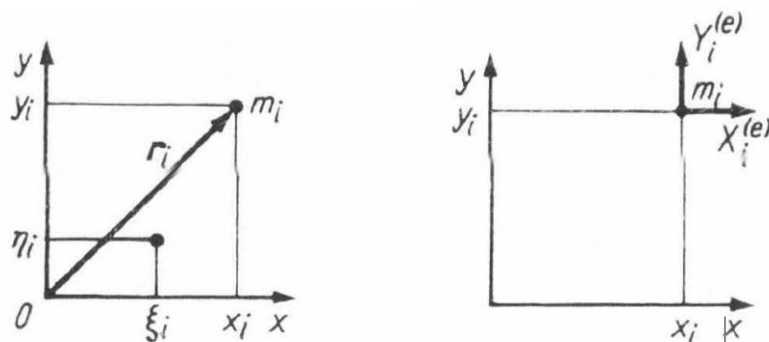
$$\mathbf{a}_{fi} = -\mathbf{r}_i \Omega^2.$$

Če za i -to masno točko zapišemo enačbo (5.48) ob upoštevanju enačb (5.36) in

(5.44), dobimo naslednje izraze za posplošene vtisnjene sile:

$$\left. \begin{aligned} X_i^{(e)*} &= X_i^{(e)} + m_i x_{(i)} \Omega^2 = 0, \\ Y_i^{(e)*} &= Y_i^{(e)} + m_i y_{(i)} \Omega^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Količini $X_i^{(e)}$ in $Y_i^{(e)}$ predstavljata tako imenovani vračalni sili [Rückstellkräfte], ki ju elastična gred izvaja na masno točko m_i v smeri x oziroma y (slika 6/3).



Slika 6/2 (levo). Lega masnega središča pri mirujoči in vrteči se gredi.

Slika 6/3 (desno). Vtisnjena sila v masnem središču.

Med pomiki f_i v točkah, označenih z indeksom i , in obremenitvenimi silami F_j , ki delujejo pravokotno na os palice, znotraj meje sorazmernosti obstajajo linearne zveze:

$$f_i = \alpha_{ij} F_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

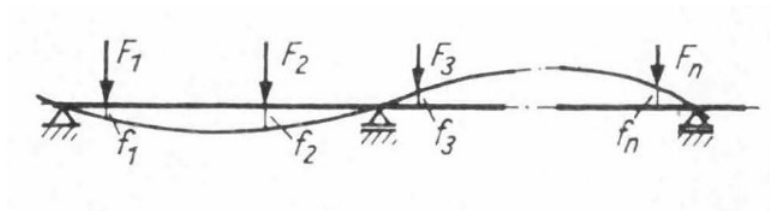
pri čemer sorazmernostni faktorji

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (3)$$

predstavljajo *vpliv pomikov* (slika 6/4).

Če v skladu z enačbo (2) zapišemo zveze med premiki in silami v smeri x in y ter upoštevamo

$$f_i = x_i - \xi_i$$



Slika 6/4. Upogib elastične gredi

oz.

$$f_i = y_i - \eta_i$$

in

$$F_j = -X_j^{(e)}$$

oz.

$$F_j = -Y_j^{(e)},$$

dobimo enačbi:

$$\left. \begin{aligned} (x_i - \xi_i) &= -\alpha_{ij} X_j^{(e)}, \\ (y_i - \eta_i) &= -\alpha_{ij} Y_j^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Iz enačb (1) in (4) sledi:

$$\left. \begin{aligned} (x_i - \xi_i) &= \alpha_{ij} m_j x_j \Omega^2, \\ (y_i - \eta_i) &= \alpha_{ij} m_j y_j \Omega^2, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

oz. če uporabimo Kroneckerjev simbol δ_{ij} :

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{ij} m_j - \delta_{ij} \Omega^{-2}) x_j &= -\xi_i \Omega^{-2}, \\ (\alpha_{ij} m_j - \delta_{ij} \Omega^{-2}) y_j &= -\eta_i \Omega^{-2}, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ko uvedemo nove koordinate:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sqrt{m_i} x_{(i)}, \quad \mu_i = \sqrt{m_i} \xi_{(i)}, \\ v_i &= \sqrt{m_i} y_{(i)}, \quad \nu_i = \sqrt{m_i} \eta_{(i)}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

in spremenljivke:

$$\beta_{ij} = \sqrt{m_i m_j} \alpha_{(i)(j)}, \quad (8)$$

lahko enačbe (6) po množenju z $\sqrt{m_i}$ zapišemo v obliki:

$$\left. \begin{aligned} (\beta_{ij} - \delta_{ij} \Omega^{-2}) u_j &= -u_i \Omega^{-2}, \\ (\beta_{ij} - \delta_{ij} \Omega^{-2}) v_j &= -v_i \Omega^{-2}, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Kot je znano, ima sistem enačb (9) enolično rešitev le, če velja:

$$\det (\beta_{ij} - \delta_{ij} \Omega^{-2}) \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Če neenakost (10) velja, je deformacije x_i in y_i mogoče enolično določiti iz enačb (7) in (9) ali neposredno iz enačb (6).

2. Rešitev z lastnimi vektorji

Rešitve iščemo v obliki linearne kombinacije lastnih vektorje problema lastnih vrednosti

$$\left(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2}\right) w_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

ki izhajajo iz ničelne desne strani enačbe (9). Korene karakteristične enačbe

$$\det\left(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2}\right) = 0$$

označimo z Ω_k^{-2} za $k = 1, 2, \dots, n$. Če te vrednosti zaporedoma vstavimo v enačbo (11) namesto Ω^{-2} , lahko lastne vektorje w_{jk} določimo iz enačb:

$$\left(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega_k^{-2}\right) w_{j(k)} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Ti lastni vektorji so ortogonalni, če predpostavimo, da so vse lastne vrednosti Ω_k^{-2} različne. Poleg tega so normalizirani tako, da velja:

$$w_{ik}w_{jl} = \delta_{kl},$$

tj. matrika (w_{jk}) je ortogonalna. Tedaj velja tudi:

$$w_{ik}w_{jk} = \delta_{ij}. \quad (13)$$

Če zdaj pomnožimo prvo od enačb (9) z w_{ik} , dobimo:

$$w_{ik}\left(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2}\right) u_j = -w_{ik}\mu_i\Omega^{-2}.$$

Iz simetrije β_{ij} sledi:

$$\left(\beta_{ij} - \delta_{ij}\Omega^{-2}\right) w_{jk}u_i = -w_{ik}\mu_i\Omega^{-2}.$$

Iz te zveze z enačbo (12) dobimo:

$$\delta_{ij}\left(\Omega_k^{-2} - \Omega^{-2}\right) w_{j(k)}u_i = -w_{ik}\mu_i\Omega^{-2},$$

oziroma:

$$w_{ik}u_i = -\frac{\Omega^{-2}}{\Omega_k^{-2} - \Omega^{-2}} w_{i(k)}\mu_i. \quad (14)$$

Ko enačbo (14) pomnožimo z w_{jk} in seštejemo po k , dobimo:

$$u_j = -\frac{\Omega^{-2}}{\Omega_k^{-2} - \Omega^{-2}} w_{jk}w_{ik}\mu_i, \quad (15)$$

ali:

$$u_j = \frac{\Omega_k^2}{\Omega_k^2 - \Omega^2} w_{jk}w_{ik}\mu_i. \quad (16)$$

Na podoben način dobimo:

$$v_j = \frac{\Omega_k^2}{\Omega_k^2 - \Omega^2} w_{jk} w_{ik} \nu_i. \quad (16)$$

Iz enačb (15) in (16) je razvidno, da faktor:

$$\frac{\Omega_k^2}{\Omega_k^2 - \Omega^2}$$

pri $\Omega \rightarrow \Omega_k$ približuje neskončnosti, zaradi česar postanejo deformacije, povezane s k -tim lastnim vektorjem, še posebej močno vzbujene. V mejnem primeru $\Omega = \Omega_k$ lahko deformacije ostanejo končne le, če je faktor:

$$w_{ik} \mu_i \quad \text{oz.} \quad w_{ik} \nu_i,$$

povezan s k -tim lastnim vektorjem, enak nič. To pomeni, da morata biti vektorja μ_i in ν_i pravokotna na ustrezna lastna vektorja w_{ik} . Poleg tega lahko vidimo, da se pri $\Omega \rightarrow \infty$ deformacije približujejo vrednostim $u_j = 0$, $v_j = 0$. Vendar to ne pove ničesar o stabilnosti te ravnotežne lege.

6.2 Dvigalo

Dvigalo je poenostavljeno prikazano na sliki 6/5. Skica na levi prikazuje začetno stanje, ko breme miruje, medtem ko skica na desni prikazuje stanje po začetku gibanja. Predpostavimo, da vrv ostane navpična in jo lahko obravnavamo kot togo in brez mase.

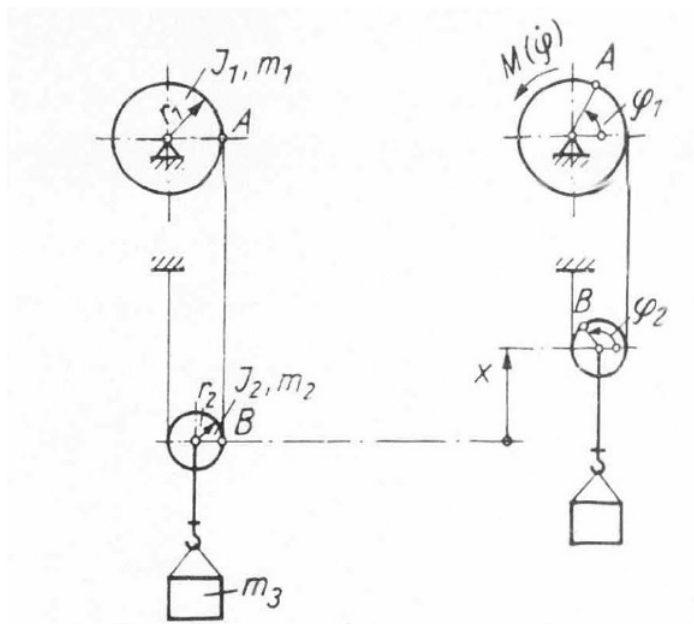
Podani so:

J_1	vztrajnostni moment vravnega bobna in pogona, glede na os vrtenja bobna,
J_2	vztrajnostni moment jermenice, glede na os jermenice, v kateri mora ležati tudi njeno masno središče,
m_1	masa vravnega bobna,
m_2	masa celotnega škripčevja, vključno z jermenico,
m_3	masa bremena,
r_1 oz. r_2	povprečna polmera navitja vrvi na bobnu oz. na jermenici,
$M = M(\dot{\varphi}_1)$	pogonski moment, podan kot funkcija kotne hitrosti.

Iščemo kot zasuka φ_1 vravnega bobna kot funkcijo časa in silo v vrvi.

Enačbe gibanja bomo izpeljali na dva načina:

- z uporabo metodo prerezov in enačb gibanja za togo telo (razdelek 5.5.4),
- z uporabo LAGRANGEve enačbe gibanja druge vrste (razdelek 5.4.2).



Slika 6/5. Dvigalo

1. Rešitev s pomočjo enačb za ravninsko gibanje togega telesa

Vrvi in povezavo z bremenskim kavljem prerežemo, da postanejo vsa tri telesa prosta. Odstranimo še osne ležaje vrvnega bobna. Obenem vnesemo vezne sile F_1 do F_5 , ki jih povzročajo prvotne toge vezi. Nadalje na telesa vnesemo vtisnjene sile m_1g , m_2g in m_3g ter vtisnjen moment $M(\dot{\varphi}_1)$. Dodamo še vztrajnostne obremenitve $m_2\ddot{x}$, $m_3\ddot{x}$, $J_1\ddot{\varphi}_1$, $J_2\ddot{\varphi}_2$, ki so usmerjene v nasprotno smer od definiranih pospeškov (slika 6/6).

Za izrezana prosta toga telesa uporabimo enačbe (5.244) in (5.245), potrebne za določitev iskanih veznih sil F_1 in F_2 ter postavitev enačb gibanja:

$$M(\dot{\varphi}_1) - F_1 r_1 - J_1 \ddot{\varphi}_1 = 0, \quad (1)$$

$$(F_1 - F_2) r_2 - J_2 \ddot{\varphi}_2 = 0, \quad (2)$$

$$F_1 + F_2 - F_5 - m_2 g - m_2 \ddot{x} = 0, \quad (3)$$

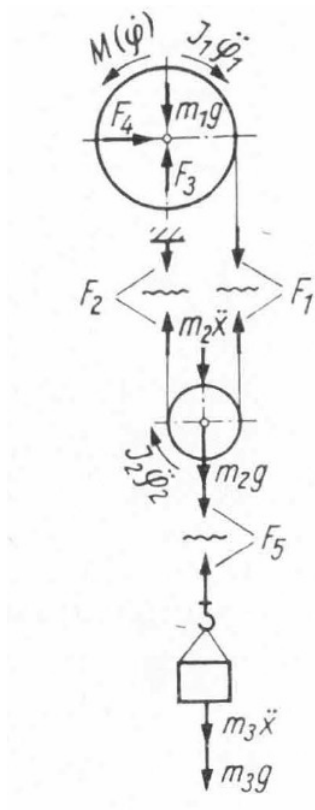
$$F_5 - m_3 g - m_3 \ddot{x} = 0. \quad (4)$$

Z izločitvijo veznih sil dobimo:

$$2M(\dot{\varphi}_1) r_2 - 2J_1 r_2 \ddot{\varphi}_1 + J_2 r_1 \ddot{\varphi}_2 - (m_2 + m_3)(g + \ddot{x}) r_1 r_2 = 0. \quad (5)$$

Zaradi nerazteznosti vrvi obstajajo med koordinatami φ_1 , φ_2 in x naslednji pogoji:

$$f_1 = r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 - x = 0 \quad (6)$$



Slika 6/6. Razrez dvigala

(pogoj nerazteznosti za desni del vrvi),

$$f_2 = r_2\varphi_2 - x = 0 \quad (7)$$

(pogoj nerazteznosti za levi del vrvi).

Pri določanju vezi smo dodatno predpostavili, da vrv ne drsi po bobnu in jermenici.

Na podlagi omejitvenih pogojev (6) in (7), ki ju dvakrat odvajamo po času, lahko v enačbi (5) odpravimo količini \ddot{x} in $\ddot{\varphi}_2$:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{4M(\dot{\varphi}_1)r_2^2 - 2(m_2 + m_3)gr_1r_2^2}{4J_1r_2^2 + J_2r_1^2 + (m_2 + m_3)r_1^2r_2^2}. \quad (8)$$

Po deljenju z imenovalcem ulomka na desni strani in integraciji ob upoštevanju začetnega pogoja

$$\dot{\varphi}_1 = q, \quad \text{za } t = 0,$$

sledi iz enačbe (8):

$$\int_0^{\dot{\varphi}_1} \frac{d\dot{\varphi}_1}{4M(\dot{\varphi}_1)r_2^2 - 2(m_2 + m_3)gr_1r_2^2} = \frac{t}{4J_1r_2^2 + J_2r_1^2 + (m_2 + m_3)r_1^2r_2^2}. \quad (9)$$

Če je $M(\dot{\varphi}_1)$ znan, lahko integral na levi strani enačbe (9) izračunamo numerično. Z razrešitvijo enačbe po $\dot{\varphi}_1$ dobimo funkcijo:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1(t), \quad (10)$$

ki z dodatno integracijo pripelje do iskane odvisnosti:

$$\varphi_1 = \varphi_1(t). \quad (11)$$

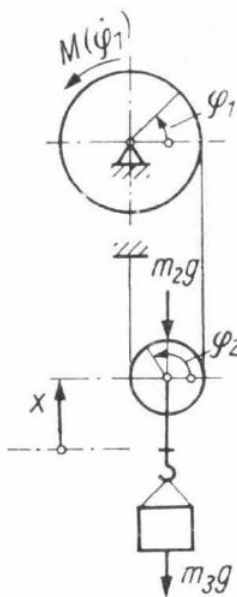
Iskani sili v vrvi, F_1 in F_2 , določimo z enačbami (1) in (2) ter z uporabo enačb (5) in (6), kot funkciji $\dot{\varphi}_1$ in $\ddot{\varphi}_1$:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{r_1} [M(\dot{\varphi}_1) - J_1 \ddot{\varphi}_1], \\ F_2 &= F_1 - \frac{1}{r_2} J_2 \ddot{\varphi}_2 = F_1 - \frac{r_1}{2r_2^2} J_2 \ddot{\varphi}_1, \\ &= \frac{1}{r_1} \left[M(\dot{\varphi}_1) - \left(J_1 + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{r_2^2} J_2 \right) \ddot{\varphi}_1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Z zamenjavo $\ddot{\varphi}_1$ iz enačbe (8) v enačbah (12) lahko F_1 in F_2 izrazimo kot funkciji $\dot{\varphi}_1$. Nato z uporabo enačbe (10) končno dobimo $F_1(t)$ in $F_2(t)$.

2. Rešitev z uporabo Lagrangevih enačb gibanja druge vrste

Pri uporabi LAGRANGEvih enačb gibanja druge vrste lahko opustimo skico prereзов, prikazano na sliki 6/6. Vseeno pa je priporočljivo da v skico vrišemo vtisnjene sile, če



Slika 6/7. Dvigalo z označenimi vtisnjenimi silami

te niso vse potencialne sile (glejte sliko 6/7). Na sliki je razvidno, da je delo vtisnjenih sil pri virtualnem pomiku sistema:

$$\delta W^{(e)} = M (\dot{\varphi}_1) \delta \varphi_1 - (m_2 + m_3) g \delta x.$$

Vtisnjene posplošene sile ustrezajo koeficientom virtualnih pomikov v tem izrazu:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\varphi_1}^{(e)} &= M (\dot{\varphi}_1), \\ Q_{\varphi_2}^{(e)} &= 0, \\ Q_x^{(e)} &= -(m_2 + m_3) g. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Z variacijo pogojev, podanih z enačbama (5) in (6), dobimo:

$$\left. \begin{aligned} r_1 \delta \varphi_1 - r_2 \delta \varphi_2 - \delta x &= 0, \\ r_2 \delta \varphi_2 - \delta x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Kinetična energija je podana kot:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{x}^2. \quad (15)$$

Na podlagi enačb (14) in (15) dobimo Lagrangeve enačbe (5.71) za

$$q_1 = \varphi_1, \quad q_2 = \varphi_2, \quad q_3 = x,$$

v obliki:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= M (\dot{\varphi}_1) + \lambda_1 r_1, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= -(\lambda_1 - \lambda_2) r_2, \\ (m_2 + m_3) \ddot{x} &= -(m_2 + m_3) g - (\lambda_1 + \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ker pogojni enačbi (5) in (6) izhajata iz nerazteznosti desnega in levega dela vrvi, sta, v skladu s tem, kar je bilo povedano v 5.3 za enačbo (5.41):

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\lambda_1 = F_1, \quad (17)$$

sila v desnem delu vrvi, in

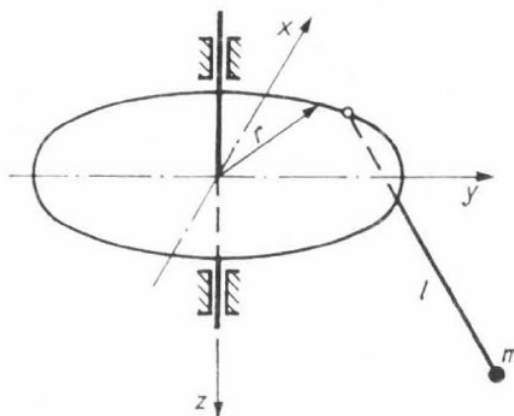
$$\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\lambda_2 = F_2, \quad (18)$$

sila v levem delu vrvi. S tem so enačbe (16) enakovredne enačbam (1) do (4). V prvem primeru smo dobili dodatno enačbo, saj se z izrezom mase m_3 pojavi F_5 kot dodatna neznanka. Parameter, ki bi ustrezal tej sili, bi se pojavil v enačbah (16), če bi uvedli posebno koordinato in dodatno omejitev za navpično gibanje mase m_3 .

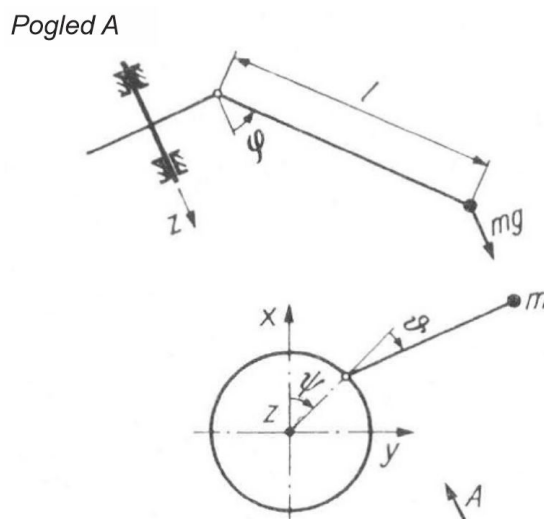
6.3 Prostorsko preprosto nihalo s premikajočim se obesiščem

Obesišče preprostega nihala se giblje po predpisanem zakonu gibanja $\psi = \psi(t)$ po krožnici v vodoravni ravnini (slika 6/8).

Poiščimo diferencialne enačbe za gibanje nihala. Izpeljali jih bomo s pomočjo LAGRANGEVih enačb gibanja prve in druge vrste.



Slika 6/8. Prostorsko nihalo



Slika 6/9. Prostorsko nihalo z označenimi posplošenimi koordinatami

1. Uporaba Lagrangevih enačb prve vrste

Kot posplošeni koordinati uporabimo kota

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \vartheta,$$

prikazana na sliki 6/9. Čas lahko, tako kot v točki 5.4, simbolično predstavimo z q_0 . Krajevni vektor masne točke m je podan z naslednjo zvezo:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i} [r \cos \psi + l \sin \varphi \cos (\psi + \vartheta)] \\ &+ \mathbf{j} [r \sin \psi + l \sin \varphi \sin (\psi + \vartheta)] + \mathbf{k} l \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

kjer so i, j, k enotski vektorji v smeri koordinatnih osi x, y, z .

Količine $g_{\mu\nu}$ določimo po enačbi (5.67):

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = m \dot{\psi}^2 (r^2 + 2lr \sin \varphi \cos \vartheta + l^2 \sin^2 \varphi), \\ g_{01} &= g_{10} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = m l r \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta, \\ g_{02} &= g_{20} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = m l r \dot{\psi} \sin \varphi \cos \vartheta + l^2 \dot{\psi} \sin^2 \varphi, \\ g_{11} &= m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = m l^2, \\ g_{12} &= g_{21} = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = 0, \\ g_{22} &= m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = m l^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Izmed spremenljivk $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$, podanih z enačbo (5.68), zapišemo le tiste, ki imajo neničelne zadnje indekse, saj potrebujemo samo te:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{001} &= m l \cos \varphi (r \ddot{\psi} \sin \vartheta - r \dot{\psi}^2 \cos \vartheta - l \dot{\psi}^2 \sin \varphi) \\ \Gamma_{002} &= m l \sin \varphi (r \ddot{\psi} \cos \vartheta + r \dot{\psi}^2 \sin \vartheta + 2l \ddot{\psi} \sin \varphi) \\ \Gamma_{011} &= \Gamma_{101} = 0 \\ \Gamma_{012} &= \Gamma_{102} = m l^2 \dot{\psi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{021} &= \Gamma_{201} = -m l^2 \dot{\psi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{022} &= \Gamma_{202} = 0 \\ \Gamma_{111} &= 0 \\ \Gamma_{112} &= 0, \\ \Gamma_{121} &= \Gamma_{211} = 0 \\ \Gamma_{122} &= \Gamma_{212} = m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{221} &= -m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{222} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Potencialna energija, definirana glede na ravnino $z = 0$, je

$$U = -mgl \cos \varphi. \quad (4)$$

Z uporabo enačb (2) do (4) dobimo iz enačbe (5.76), po deljenju z ml , diferencialni enačbi gibanja:

$$\left. \begin{aligned} l\ddot{\varphi} + \cos \varphi [r\ddot{\psi} \sin \vartheta - r\dot{\psi}^2 \cos \vartheta] - l \sin \varphi (\dot{\psi} + \dot{\vartheta})^2 &= -g \sin \varphi, \\ l \sin^2 \varphi (\ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}) + r \sin \varphi (\ddot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\psi}^2 \sin \vartheta) \\ + 2l\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2. Uporaba Lagrangevih enačb gibanja druge vrste

Krajevni vektor, podan z enačbo (1), odvajamo po času:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & \mathbf{i} \left\{ -r\dot{\psi} \sin \psi + l \left[\dot{\varphi} \cos \varphi \cos (\psi + \vartheta) - (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \sin (\psi + \vartheta) \right] \right\} \\ & + \mathbf{j} \left\{ r\dot{\psi} \cos \psi + l \left[\dot{\varphi} \cos \varphi \sin (\psi + \vartheta) + (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \cos (\psi + \vartheta) \right] \right\} \\ & - \mathbf{k} l \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Kinetična energija je:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left[r^2 \dot{\psi}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2lr\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \varphi \sin^2 \vartheta \right. \\ &\quad \left. + 2lr\dot{\psi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \cos \vartheta + l^2 (\dot{\psi} + \dot{\vartheta})^2 \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Na podlagi enačb (4) in (6) tvorimo LAGRANGEovo funkcijo:

$$L = T - U.$$

Iz LAGRANGEvih enačb gibanja druge vrste, v skladu z enačbo (5.91), izpeljemo diferencialne enačbe gibanja (5), saj so izpolnjeni pogoji:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml \left[l\ddot{\varphi} + r\ddot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - r\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \vartheta + r\dot{\psi}\dot{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta \right] \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= ml \left[-r\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \vartheta + r\dot{\psi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \cos \varphi \cos \vartheta - l (\dot{\psi} + \dot{\vartheta})^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi \right] \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= ml \left[l (\ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}) \sin^2 \varphi + 2l\dot{\varphi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \cos \varphi + r\ddot{\psi} \sin \varphi \cos \vartheta + r\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \vartheta \right. \\ &\quad \left. - r\dot{\psi}\dot{\vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta \right] \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= ml \left[r\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \vartheta - r\dot{\psi} (\dot{\psi} + \dot{\vartheta}) \sin \varphi \sin \vartheta \right]. \end{aligned}$$

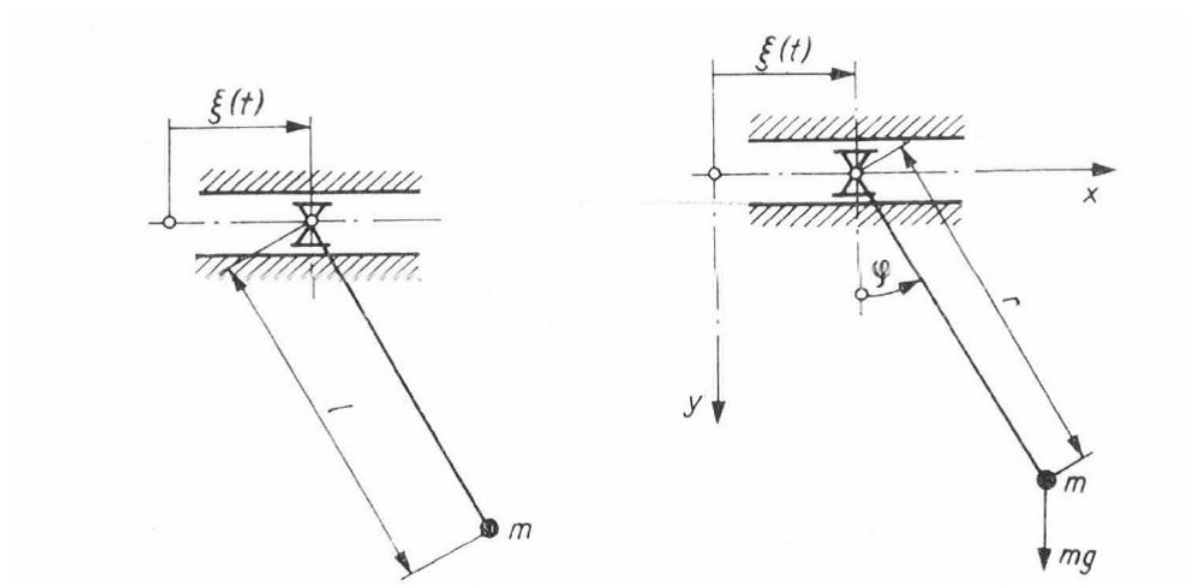
6.4 Ravninsko nihalo s premikajočim se obesiščem

Obesišče nihala se giblje po premici glede na predpisan zakon gibanja $\xi = \xi(t)$ (slika 6/10).

Poiščemo diferencialne enačbe gibanja nihala in silo v vrvici.

Nalogo rešimo:

1. s pomočjo LAGRANGEvih enačb prve vrste,
2. s pomočjo LAGRANGEvih enačb druge vrste,
3. z izrezom mase in uporabo D'ALEMBERTovega aksioma.



Slika 6/10. (levo) Ravninsko nihalo

Slika 6/11. (desno) Ravninsko nihalo z označenimi posplošenimi koordinatami

1. Uporaba Lagrangevih enačb gibanja prve vrste

V skladu s sliko 6/11 kot posplošene koordinate določimo:

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = r.$$

Pogoj je:

$$f_1(\varphi, r, t) = l - r = 0. \quad (1)$$

Poleg tega ponovno postavimo:

$$q_0 = t.$$

Krajevni vektor masne točke, glede na izhodišče koordinatnega sistema x, y , lahko izrazimo s funkcijo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} [\xi(t) + r \sin \varphi] + \mathbf{j} r \cos \varphi. \quad (2)$$

Tako v skladu z enačbami (5.67) dobimo količine $g_{\mu\nu}$:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= m\dot{\xi}^2 & g_{11} &= mr^2 \\ g_{01} = g_{10} &= mr\dot{\xi} \cos \varphi & g_{12} = g_{21} &= 0 \\ g_{02} = g_{20} &= mr\dot{\xi} \sin \varphi & g_{22} &= m. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Od količin $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$, podanih z enačbo (5.68) in $\sigma \neq 0$, so od nič različne naslednje:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{001} &= m\ddot{\xi} \cos \varphi \\ \Gamma_{002} &= m\ddot{\xi} \sin \varphi \\ \Gamma_{112} &= -mr \\ \Gamma_{121} = \Gamma_{211} &= mr. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Potencialna energija, definirana glede na ravnino $y = 0$, je:

$$U = -mgr \cos \varphi. \quad (5)$$

Z vstavitvijo enačb (1) ter (3) do (5) v enačbo (5.76) dobimo:

$$\left. \begin{aligned} mr^2\ddot{\varphi} + mr\ddot{\xi} \cos \varphi + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} &= mgr \sin \varphi \\ m\ddot{\mathbf{r}} + m\ddot{\xi} \sin \varphi - mr\dot{\varphi}^2 &= mg \cos \varphi - \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Temu dodamo pogoj (1) tj.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Če v enačbo (6) vstavimo enačbe (1) in (7), sledi:

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{\xi} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0, \quad (8)$$

kar predstavlja diferencialno enačbo gibanja, in

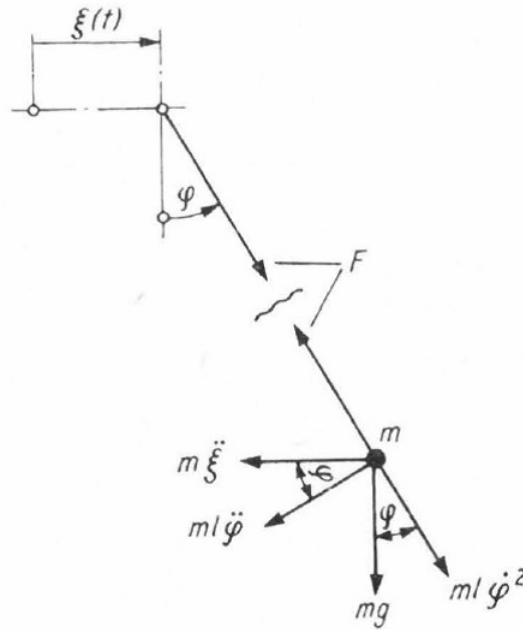
$$\lambda_1 = -m\ddot{\xi} \sin \varphi + ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi, \quad (9)$$

kar določa vrednost vezne sile. V skladu z enačbo (5.53) dobimo silo v vrvici kot posplošeno vezno silo v obliki

$$Q_2^{(z)} = \lambda_1 a_{12} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\lambda_1. \quad (10)$$

Ta vezna sila deluje na masno točko v smeri naraščajoče koordinate r . Sila v vrvici \mathbf{F} , prikazana na sliki 6/12, je torej enaka

$$F = -Q_2^{(z)} = \lambda_1 \quad (11)$$



Slika 6/12 Prerez vrvice nihala

2. Uporaba Lagrangevih enačb gibanja druge vrste

Hitrost masne točke izračunamo kot:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} (\dot{\xi} + \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) + \mathbf{j} (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi). \quad (12)$$

Izraz za kinetično energijo je:

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\xi}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\xi} (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)]. \quad (13)$$

Če upoštevamo potencialno energijo iz enačbe (5), dobimo iz enačbe (5.87) zaradi pogojev:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m (2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} + \dot{r}\dot{\xi} \cos \varphi + r\ddot{\xi} \cos \varphi - r\dot{\xi}\dot{\varphi} \sin \varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m (\dot{\xi}\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\xi}\dot{\varphi} \sin \varphi - gr \sin \varphi) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m (\ddot{r} + \dot{\xi} \sin \varphi + \dot{\xi}\dot{\varphi} \cos \varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m (r\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}\dot{\varphi} \cos \varphi + g \cos \varphi) \end{aligned}$$

ponovno enačbo (6), oziroma, če upoštevamo še enačbo (7), zvezi (8) in (9).

3. Uporaba d'Alembertovega aksioma

Za določitev enačbe gibanja in sile v vrvi uporabimo zveze (3.18). Če jih uporabimo na posamezno masno točko, se glasijo:

$$\mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F}_a^* = \mathbf{0}, \quad (14)$$

pri čemer je:

$$\mathbf{F}_a^* = \mathbf{F}_a - m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_a^{(e)} + \mathbf{F}_a^{(z)} - m\ddot{\mathbf{r}}.$$

V skladu z razlago v razdelku 3.3. uporaba teh enačb vodi do pogojev ravnotežja masne točke z upoštevanjem vztrajnostnih sil. Na sliki 6/12 so prikazane vse sile, ki delujejo na masno točko:

- sistemska sila z velikostjo $m\ddot{\xi}$,
- sila zaradi relativnega pospeška z velikostjo $ml\ddot{\varphi}$ in centrifugalna sila z velikostjo $ml\dot{\varphi}^2$,
- teža z velikostjo mg (vtisnjena sila),
- vezna sila z velikostjo F .

CORIOLISOVA sila je tukaj enaka nič. Vse vztrajnostne sile so prikazane v nasprotni smeri glede na pozitivno definirane smeri pospeškov.

V skladu s prvo enačbo (14) tvorimo vsoto komponent sil v smeri vrvice in pravokotno nanjo:

$$\left. \begin{aligned} F + m\ddot{\xi} \sin \varphi - mg \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ m\ddot{\xi} \cos \varphi + ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

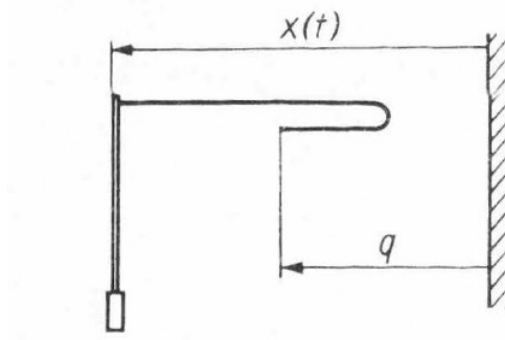
Vidimo lahko, da sta enačbi (15) ob upoštevanju enačbe (11) identični z enačbama (8) in (9).

6.5 Bič

Konec vrvice se giblje po premici s konstantno hitrostjo $\dot{x} = v$ (slika 6/13). Vrvico obravnavamo kot neraztezno in popolnoma gibko. Masa na enoto dolžine je konstantna in jo označimo z μ . Poleg tega predpostavimo, da se vse točke vrvice gibljejo po isti premici, pri čemer zanemarimo vpliv zemeljske težnosti. V začetnem stanju je vrvica dolžine l v mirovanju in zavzema vodoravno lego:

$$\left. \begin{aligned} q(0) - x(0) &= l, \\ \dot{q}(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Iščemo hitrost \dot{q} prostega konca vrvice.



Slika 6/13. Bič

1. Diferencialne enačbe gibanja

Oba dela vrvice z dolžinama $\frac{1}{2}(l+x-q)$ in $\frac{1}{2}(l-x+q)$ lahko obravnavamo kot toga telesa s spremenljivo maso, ki se gibljeta premočrtno. Kinetična energija je

$$T = \frac{1}{2}\mu [(l+x-q)\dot{x}^2 + (l-x+q)\dot{q}^2]. \quad (2)$$

V skladu z enačbo (5.91) je zaradi $U = 0$ in $\dot{x} = v = \text{const.}$ časovni odvod

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} [\mu(l-x+q)\dot{q}] = \mu[(l-x+q)\ddot{q} + (-\dot{x} + \dot{q})\dot{q}],$$

in parcialni odvod

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2}\mu(-\dot{x}^2 + \dot{q}^2).$$

Diferencialna enačba gibanja je:

$$(l-x+q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \dot{x}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = 0,$$

oziroma

$$(l-x+q)\ddot{q} + \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{x})^2 = 0. \quad (3)$$

2. Rešitev enačb gibanja

S pomočjo koordinatne transformacije

$$\left. \begin{aligned} y &= l - x + q \\ \dot{y} &= -\dot{x} + \dot{q} \\ \ddot{y} &= \ddot{q} \quad (\text{ker je } \dot{x} = v = \text{const}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

enačbo (3) preoblikujemo v

$$y\ddot{y} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 = 0$$

oz.

$$\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{y}}{y}. \quad (5)$$

To diferencialno enačbo lahko takoj enkrat integriramo:

$$\dot{y} = (cy)^{-\frac{1}{2}}.$$

Po ponovnem integriranju dobimo

$$y = A(t + B)^{\frac{2}{3}} \quad (6)$$

kjer sta novi konstanti A in B. Z enačbo (4) najdemo

$$q = x - l + A(t + B)^{\frac{2}{3}}. \quad (7)$$

Če v enačbo (7) vstavimo začetne pogoje (1) dobimo dve enačbi za določitev konstant A in B :

$$\begin{aligned} -l + AB^{\frac{2}{3}} &= l \\ \dot{x} + \frac{2}{3}AB^{-\frac{1}{3}} &= 0 \end{aligned}$$

Razrešitev da

$$A = \frac{1}{2} \sqrt[3]{36l\dot{x}^2}, \quad B = -\frac{4}{3} \frac{l}{\dot{x}}.$$

Tako iz enačbe (7) dobimo

$$q = x + l \left[2 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3\dot{x}t}{4l}\right)^2} - 1 \right]. \quad (8)$$

Za hitrost \dot{q} velja

$$\dot{q} = \dot{x} \left(1 - 1 / \sqrt[3]{1 - \frac{3\dot{x}t}{4l}} \right). \quad (9)$$

Dolžina prostega dela vrvice je

$$z = \frac{1}{2} (l - x + q).$$

Če vstavimo enačbo (8) dobimo

$$z = l \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3\dot{x}t}{4l}\right)^2}. \quad (10)$$

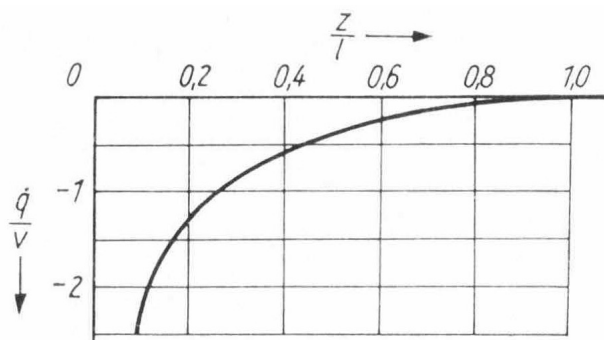
Z enačbama (9) in (10) lahko hitrost prostega konca vrvice predstavimo kot funkcijo njene dolžine:

$$\dot{q} = \dot{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z/l}} \right)$$

ali pri $\dot{x} = v$,

$$\frac{\dot{q}}{v} = 1 - \frac{1}{\sqrt{z/l}}. \quad (11)$$

Kot je razvidno iz enačbe (11), hitrost prostega konca vrvice presega za $z \rightarrow 0$ vsako mejo. Dejansko ostaja hitrost končna, ker vrstica ne more biti popolnoma toga in gibka. Kljub temu lahko z ustreznim gibanjem presežemo hitrost zvoka zraka, pri čemer se pojavi dobro znani pok biča (glej sliko 6/14).



Slika 6/14. Potek hitrosti prostega konca vrvice

6.6 Vibracijska igla

Vibracijska igla za zgoščevanje betona je v prerezu prikazana na sliki 6/15. V valjasti posodi A, se vrti (vibrirna) igla B, ki jo poganja gibljiva gred. Predpostavimo, da posoda izvaja enakomerno krožno gibanje s polmerom a okoli točke O , ki je nepremična v prostoru. Na posodo deluje dušilna sila

$$\mathbf{F}_D = -k \mathbf{v}_M, \quad (1)$$

ki je nasprotna vektorju hitrosti \mathbf{v}_M . Nadalje so podane naslednje vrednosti:

m_0	masa posode,
μ	masa igle,
$m = m_0 + \mu$	skupna masa vibratorja,
$\dot{\varphi} = \dot{\Omega} = \text{const.}$	kotna hitrost vrtenja igle okoli svoje osi,
ρ	polmer igle,
r	polmer vrtenja središča igle v posodi.

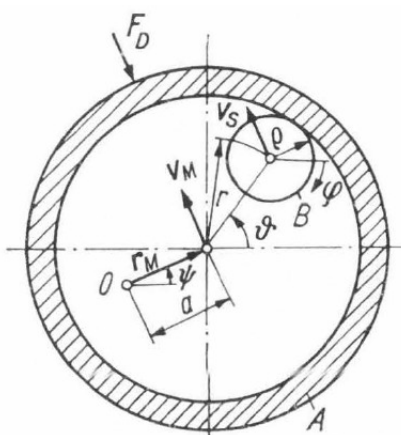
Pod pogojem, da se igla gladko kotali vzdolž notranje stene posode, je potrebno določiti:

F_N	velikost normalne sile med iglo in posodo,
F_T	velikost tangencialne sile med iglo in posodo,
a	polmer krožnega premika središča posode M ,
$\alpha = \vartheta - \psi$	fazni kot med vrtenjem igle in gibanjem posode.

Poleg tega je treba določiti meje delovanja brez zdrsa, če je

$$\nu = \frac{\max F_T}{F_N} \quad (2)$$

koeficient trenja. Za rešitev je treba uporabiti LAGRANGEve enačbe.



Slika 6/15. Prerez vibracijske igle

1. Izpeljava enačb gibanja

Čeprav ima sistem le dve prostostni stopnji, je treba, če že na začetku ne predpostavimo $\dot{a} = 0$, za določitev veznih sil uvesti več kot dve splošeni koordinati. Te so

$$a, \psi, \vartheta, r.$$

Brez izgube splošnost za kot φ predpostavimo

$$\varphi = \Omega t. \quad (3)$$

Za dejansko gibanje velja omejitev

$$\dot{\mathbf{r}} \leq \mathbf{0}, \quad (4)$$

ki izraža togost igle in ohišja. Neenačba (4) predstavlja enostransko vez. Kot je običajno, najprej predpostavimo dvostransko vez, ki ustreza

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

veljavnost enačbe (5) pa preverimo kasneje. Dodatna pogojna enačba izhaja iz pogoja kotaljenja brez zdrsa igle po notranji steni posode. Ob upoštevanju enačbe (3) se ta glasi

$$r\vartheta - \rho\Omega t = \text{const.}$$

oziroma po odvajanju po času

$$r\dot{\vartheta} - \rho\Omega = 0.$$

Rešitev za $\dot{\vartheta}$ da

$$\dot{\vartheta} = \omega = \frac{\rho}{r}\Omega, \quad (6)$$

pri čemer je bila zaradi krajšega zapisa uvedena kotna hitrost ω . Pogoja

$$\dot{a} = 0, \quad \ddot{\psi} = 0, \quad (7)$$

ki izhajajata iz predpostavljenega krožnega premika posode, po drugi strani nista vezi, saj jih ne povzročajo toge vezi, temveč metoda reševanja, ki jo bomo uporabili v enačbah gibanja, ki jih je treba še določiti, da bi problem poenostavili.

Kinetično energijo sistema je

$$T = \frac{1}{2}m_0\mathbf{v}_M^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}_s^2 + \frac{1}{2}J\Omega^2.$$

Pri tem je J masni vztrajnostni moment igle in njenega pogona, povezan z osjo vrtenja, ki ga v nadaljevanju ne bomo uporabili. Izražena s posplošenimi koordinatami je

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_0(\dot{a}^2 + a^2\dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}\mu\left\{\left[\dot{a} + \dot{r}\cos(\vartheta - \psi) - r\dot{\vartheta}\sin(\vartheta - \psi)\right]^2\right. \\ &\quad \left.+ \left[a\dot{\psi} + \dot{r}\sin(\vartheta - \psi) + r\dot{\vartheta}\cos(\vartheta - \psi)\right]^2\right\} + \frac{1}{2}J\Omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{a}^2 + a^2\dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}\mu\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{a}\dot{r}\cos(\vartheta - \psi) - 2\dot{a}r\dot{\vartheta}\sin(\vartheta - \psi)\right. \\ &\quad \left.+ 2ar\dot{\psi}\sin(\vartheta - \psi) + 2ar\dot{\psi}\cos(\vartheta - \psi)\right] + \frac{1}{2}J\Omega^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Za določitev posplošenih sil izračunamo virtualno delo. Delež dušilne sile pri virtualnem delu je, ob upoštevanju enačbe (1)

$$\mathbf{F}_D \cdot \delta\mathbf{r}_M = -k(\dot{a}\delta a + a^2\dot{\psi}\delta\psi)$$

(glej sliko 6/16). Ker pogoja (5) in (6) za virtualne premike ne veljata, vezne sile prav tako opravljajo virtualno delo. To je:

$$-F_N\delta r + F_{Tr}\delta\vartheta$$

(glej sliko 6/17). Celotno virtualno delo je torej:

$$\delta W = -k(\dot{a}\delta a + a^2\dot{\psi}\delta\psi) - F_N\delta r + F_{Tr}\delta\vartheta.$$

Če označimo

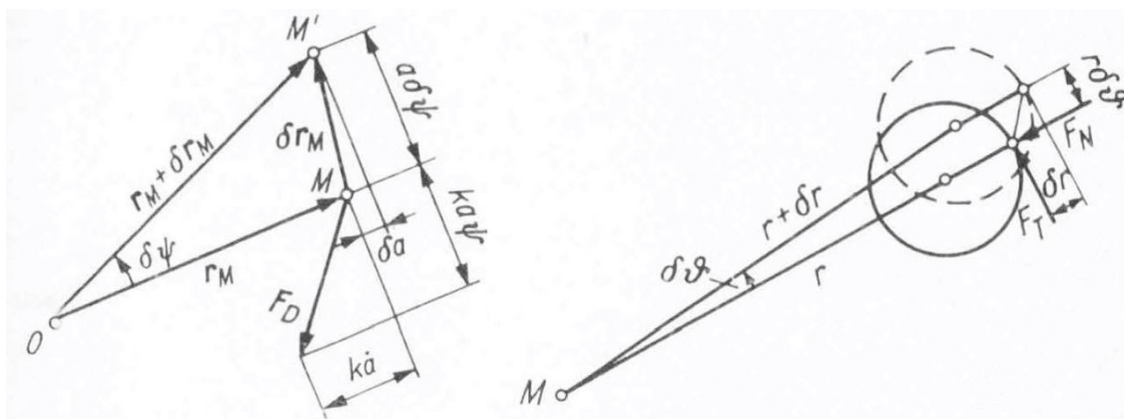
$$q_1 = a, \quad q_2 = \psi, \quad q_3 = r, \quad q_4 = \vartheta$$

so posplošene sile:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -k\dot{a}, & Q_2 &= -ka^2\dot{\psi} \\ Q_3 &= -Fg, & Q_4 &= F_T r. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

LAGRANGEve enačbe gibanja druge vrste so podane z enačbami (5.84). Pri zapisu naslednjih enačb so bile uporabljene enačbe (5) do (7):

$$\begin{aligned} -\mu r \omega (\omega - \dot{\psi}) \cos(\vartheta - \psi) - ma\dot{\psi}^2 - \mu r \omega \dot{\psi} \cos(\vartheta - \psi) &= -k\dot{a} = 0 \\ -\mu ar \omega (\omega - \dot{\psi}) \sin(\vartheta - \psi) - \mu ar \omega \dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi) &= -ka^2\dot{\psi} \\ -\mu a \dot{\psi} (\omega - \dot{\psi}) \cos(\vartheta - \psi) - \mu r \omega^2 - \mu a \omega \dot{\psi} \cos(\vartheta - \psi) &= -F_N \\ -\mu ar \dot{\psi} (\omega - \dot{\psi}) \sin(\vartheta - \psi) + \mu ar \omega \dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi) &= F_T r. \end{aligned}$$



Slika 6/16 (levo). K določitvi virtualnega dela dušilne sile

Slika 6/17 (desno). K določitvi virtualnega dela veznih sil

2. Rešitev enačb gibanja

Zgornje enačbe lahko poenostavimo. Uvedemo fazni kot $\alpha = \vartheta - \psi$:

$$-\mu r \omega^2 \cos \alpha - ma\dot{\psi}^2 = 0 \quad (10)$$

$$-\mu ar \omega^2 \sin \alpha + ka^2\dot{\psi} = 0 \quad (11)$$

$$F_N = \mu r \omega^2 + \mu a \dot{\psi}^2 \cos \alpha \quad (12)$$

$$F_T = \mu a \dot{\psi}^2 \sin \alpha \quad (13)$$

Ker mora biti $\dot{\psi}$ v skladu s pristopom reševanja enačbe (7) konstanta, je po enačbah (10) in (11) tudi

$$\alpha = \vartheta - \psi$$

konstanta . Zato je v povezavi z enačbo (6)

$$\dot{\psi} = \dot{\vartheta} = \omega = \frac{\rho}{r} \Omega \quad (14)$$

Enačbo (14) vstavimo v enačbe (10) do (13) in iz enačb (10) in (11) izračunamo a in α :

$$a = \frac{\mu}{m} r \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2 \omega^2}}} = -\frac{\mu}{m} r \cos \alpha \quad (15)$$

$$\alpha = \pi - \arctan \frac{k}{m\omega}. \quad (16)$$

S tako dobljenimi enačbama (15) in (16) iz enačb (12 in (13) sledi:

$$F_N = \mu \omega^2 r \left(1 - \frac{\mu}{m} \cos^2 \alpha \right) \quad (17)$$

$$F_T = \frac{\mu^2}{m} \omega^2 r \sin \alpha \cos \alpha \quad (18)$$

Kot je razvidno, je $F_N \geq 0$. Igla je torej v stiku z ohišjem, kar pomeni, da je enačba (5) izpolnjena. Sedaj lahko formuliramo pogoj za kotaljenje brez spodrsavanja:

$$\left| \frac{F_T}{F_N} \right| = \left| \frac{\frac{\mu}{m} \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \frac{\mu}{m} \cos^2 \alpha} \right| \leq \nu \quad (19)$$

ali

$$f = \nu (2 - \zeta - \zeta \cos 2\alpha) - \zeta |\sin 2\alpha| \geq 0, \quad (20)$$

kjer je

$$\zeta = \frac{\mu}{m}.$$

Če zahtevamo stabilno delovanje, tj. kotaljenje brez zdrsa za vse možne dušilne faktorje, mora biti enačba (20) izpolnjen tudi za $\alpha = \alpha_0$, pod pogojem da $f(\alpha_0)$ doseže minimum. Ker v skladu z enačbo (16) iščemo minimum le za $\frac{\pi}{2} \leq \alpha_0 \leq \pi$, lahko namesto enačbe (20) zapišemo

$$f = \nu (2 - \zeta - \zeta \cos 2\alpha) + \zeta \sin 2\alpha \geq 0 \quad (21)$$

$$\pi \leq 2\alpha \leq 2\pi$$

Uporabimo

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} = \zeta (\nu \sin 2\alpha_0 + \cos 2\alpha_0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 f}{d\alpha^2} \right|_{\alpha_0} = 2\zeta (\nu \cos 2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0) > 0.$$

Rešitev je

$$2\alpha_0 = 2\pi - \arctan \nu^{-1},$$

tj.

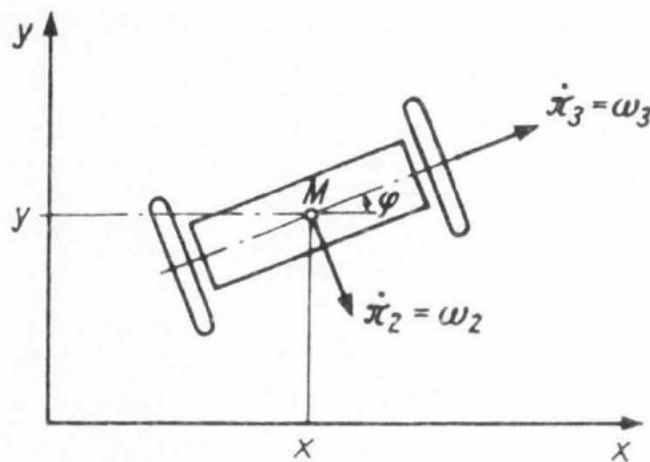
$$\begin{aligned}\sin 2\alpha_0 &= -\frac{\nu^{-1}}{\sqrt{1+\nu^{-2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}} \\ \cos 2\alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\nu^{-2}}} = \frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}.\end{aligned}$$

Z uporabo teh vrednosti iz enačbe (21) končno sledi iskani pogoj

$$\zeta \leq \frac{2\nu}{\nu + \sqrt{1+\nu^2}}. \quad (22)$$

6.7 Težka os na nagnjeni ravnini

Togo telo v ravnini (x, y) je podprto z dvema brezmasnima kolesoma, ki sta pritrjena na popolnoma gladko os (brez trenja), glej sliko 6/18. Masa telesa je m , njegov vztrajnostni moment glede na os skozi masno središče M , pravokotno na ravnino (x, y) , pa je J . Sinus kota nagiba osi y glede na vodoravno ravnino je α , pri čemer se ravnina z naraščanjem y spušča



Slika 6/18 Težka os na nagnjeni ravnini

Diferencialne enačbe gibanja je treba določiti s pomočjo

1. LAGRANGEVih enačb gibanja v naravnih koordinatah z uporabo LAGRANGEVih množiteljev (točka 5.4.2),
2. LAGRANGEVih enačbe gibanja s kvazikoordinatami (točka 5.4.5.),
3. LAGRANGEVih enačb gibanja v naravnih koordinatah brez uporabe LAGRANGEVih množiteljev (točka 5.4.6.),
4. APPELLOVih enačb gibanja (točka 5.4.7.).

Enačbe gibanja je treba rešiti za začetne pogoje

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \Omega \\ x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1. Rešitev s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja v naravnih koordinatah z uporabo Lagrangevih množiteljev

Omejitev gibanje osi zaradi koles izrazimo z naslednjim pogojem:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\varphi.$$

To zvezo lahko zapišemo v obliki

$$\dot{x} \cos\varphi + \dot{y} \sin\varphi = 0. \quad (2)$$

Začetni pogoji (1) izpolnjujejo to omejitev. Med virtualnimi pomiki tako obstaja zveza

$$\cos\varphi \delta x + \sin\varphi \delta y = 0. \quad (3)$$

Kinetična energija je

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2, \quad (4)$$

potencialna energija pa

$$U = -mg\alpha y. \quad (5)$$

Za posplošene koordinate

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = x, \quad q_3 = y$$

so torej LAGRANGEVE enačbe gibanja v skladu z enačbo (5.87), če uporabimo $L = T - U$, naslednje:

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= 0 \\ m\ddot{x} &= \lambda \cos\varphi \\ m\ddot{y} &= mg\alpha + \lambda \sin\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Iz prve enačbe (6) in začetnih pogojev sledi

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \varphi = \Omega t. \quad (7)$$

Ta rezultat vstavimo v drugo in tretjo enačbo sistema (6):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \cos\Omega t \\ m\ddot{y} &= mg\alpha + \lambda \sin\Omega t \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Ker je lahko množitelj λ funkcija časa, ga moramo pred integracijo enačbe (8) odpraviti. To storimo tako, da prvo enačbo (8) pomnožimo s $-\sin \Omega t$, drugo s $\cos \Omega t$ in ju nato seštejemo:

$$m(-\ddot{x} \sin \Omega t + \ddot{y} \cos \Omega t) = mg\alpha \cos \Omega t. \quad (9)$$

Če upoštevamo enačbo (2) lahko izraz v oklepaju na levi strani enačbe (9) izrazimo kot

$$\frac{d}{dt}(-\dot{x} \sin \Omega t + \dot{y} \cos \Omega t).$$

To lahko hitro dokažemo z izračunom. Tako iz enačbe (9) sledi

$$-\dot{x} \sin \Omega t + \dot{y} \cos \Omega t = \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t. \quad (10)$$

Integracijsko konstanto smo izbrali tako, da je izpolnjena enačba (1). Iz enačb (2) in (10) lahko izračunamo x in y

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{g\alpha}{\Omega} \sin^2 \Omega t \\ \dot{y} &= \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \cos \Omega t. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Če upoštevamo začetne pogoje (1), je rešitev enačb (11)

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \frac{g\alpha}{\Omega^2} (-2\Omega t + \sin 2\Omega t) \\ y &= \frac{1}{4} \frac{g\alpha}{\Omega^2} (1 - \cos 2\Omega t). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

To sta iskani funkciji $x(t)$ in $y(t)$. Zanimivo pri rešitvi (12) je, da kljub nagnjeni osi y ostane y koordinata masnega središča omejena (razen za $\Omega = 0$), medtem ko $x(t)$ neomejeno narašča.

Za poseben primer $\Omega = 0$ lahko enačbe gibanja izpeljemo iz enačb (12) z dvakratno uporabo L'HOSPITALovega pravila. Tako dobimo znane formule

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2} g\alpha t^2. \quad (13)$$

Ker je v skladu s tem, kar je bilo povedano v 5.3, enačba (3) $\lambda \cos \varphi$ komponenta vezne sile v smeri x in $\lambda \sin \varphi$ komponenta vezne sile v smeri y , predstavlja

$$\sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi} = \lambda$$

velikost vezne sile. To lahko izračunamo iz prvega enačbe (8) z uporabo enačbe (12) dobimo

$$\lambda = \frac{m\ddot{x}}{\cos \Omega t} = -mg\alpha \frac{\sin 2\Omega t}{\cos \Omega t} = -2mg\alpha \sin \Omega t.$$

2. Rešitev s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja s kvazikoordinatami

Kot kvazihitrosti izberemo

$$\left. \begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \dot{\varphi} \\ \dot{\pi}_2 &= -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi \\ \dot{\pi}_3 &= \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Količina $\dot{\pi}_3$ je izbrana tako, da pogoj

$$\dot{\pi}_3 = 0$$

ostane izpolnjen. Inverzna vrednost enačb (14), izražena v matričnem zapisu, je

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\pi}_1 \\ \dot{\pi}_2 \\ \dot{\pi}_3 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Elementi matrike koeficientov iz enačbe (15) so količine b_{jk} , ki ustrezajo enačbi (5.126).

Kot je razvidno s primerjavo enačbe (14) z enačbami za transformacijo med zasukanima koordinatnima sistemoma sta $\dot{\pi}_2 = \omega_2$ in $\dot{\pi}_3 = \omega_3$ komponenti hitrosti masnega središča, povezani s koordinatnim sistemom, ki je vezan na telo (slika 6/18). Kinetična energija, izražena s kvazihitrostmi, je torej

$$T^* = \frac{1}{2} m (\dot{\pi}_2^2 + \dot{\pi}_3^2) + \frac{1}{2} J \dot{\pi}_1^2. \quad (16)$$

Količine $\Pi_j^{(e)}$ so določene z enačbama (5.146) in (15) ter so enake

$$\Pi_j^{(e)} = Q_i^{(e)} b_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} b_{ij}.$$

Izpisano je to:

$$\begin{aligned} Q_1^{(e)} &= Q_2^{(e)} = 0, & Q_3^{(e)} &= mg \\ \Pi_1^{(e)} &= 0, & \Pi_2^{(e)} &= mg\alpha \cos \varphi, & \Pi_3^{(e)} &= mg\alpha \sin \varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Količino γ_{jst} v enačbi (5.150) določimo s pomočjo enačbe (14) in (15) iz enačbe (5.156):

$$\begin{aligned} (\delta d - d\delta) \pi_1 &= 0 \\ (\delta d - d\delta) \pi_2 &= \delta (-dx \sin \varphi + dy \cos \varphi) - d(-\delta x \sin \varphi + \delta y \cos \varphi) \\ &= \cos \varphi (dx \delta \varphi - d\varphi \delta x) - \sin \varphi (dy \delta \varphi - d\varphi \delta y) \\ &= -d\pi_3 \delta \pi_1 + d\pi_1 \delta \pi_3 \\ (\delta d - d\delta) \pi_3 &= \delta (dx \cos \varphi + dy \sin \varphi) - d(\delta x \cos \varphi + \delta y \sin \varphi) \\ &= -\sin \varphi (dx \delta \varphi - d\varphi \delta x) + \cos \varphi (dy \delta \varphi - d\varphi \delta y) \\ &= d\pi_2 \delta \pi_1 - d\pi_1 \delta \pi_2. \end{aligned}$$

Pri tem smo ponovno predpostavili

$$(\delta d - d\delta) q_i = 0.$$

To pomeni, da je

$$\gamma_{123} = -\gamma_{321} = -\gamma_{132} = \gamma_{231} = 1. \quad (18)$$

Vsi ostali γ_{jst} pa so enaki nič.

Z rezultati enačb (16) do (18) lahko tvorimo enačbe gibanja v skladu z enačbo (5.150):

$$\begin{aligned} J\ddot{\pi}_1 + m(\dot{\pi}_2\dot{\pi}_3 - \dot{\pi}_3\dot{\pi}_2) &= 0 \\ m\ddot{\pi}_2 + m\dot{\pi}_3\dot{\pi}_1 &= mg\alpha \cos \varphi \end{aligned}$$

Če v skladu z enačbo (2) in enačbo (14) upoštevamo tudi $\dot{\pi}_3 = 0$, dobimo naslednji zvezi

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\pi}_1 &= 0 \\ \ddot{\pi}_2 &= g\alpha \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Prva enačba (19) ima rešitev

$$\pi_1 = \varphi = \Omega t,$$

pri čemer so začetni pogoji že upoštevani. Z upoštevanjem tega se druga enačba (19) glasi:

$$\ddot{\pi}_2 = mg\alpha \cos \Omega t,$$

njen integral pa ima vrednost

$$\dot{\pi}_2 = -\dot{x} \sin \Omega t + \dot{y} \cos \Omega t = \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t. \quad (20)$$

Integracijska konstanta je bila ponovno izbrana tako, da je izpolnjen enačba (1). Rezultat enačbe (20) ustreza rezultatu enačbe (10), zato nadaljnji izračun poteka na enak način kot za enačbo (1). Prav tako je treba opozoriti, da

$$\int_0^t |\dot{\pi}_2| dt = \int_0^t \left| \frac{g\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \right| dt$$

predstavlja razdaljo, ki jo prepotuje masno središče M vzdolž svoje krivulje tira.

3. Rešitev s pomočjo Lagrangevih enačb gibanja v naravnih koordinatah brez uporabe Lagrangevih množiteljev.

Ponovno vzamemo $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$, $q_3 = y$ in rešimo enačbo (2) po \dot{y} :

$$\dot{y} = \dot{x} \cot \varphi. \quad (21)$$

Iz kinetične energije T v skladu z enačbo (4) dobimo T^* z izločitvijo \dot{y}

$$T^* = \frac{1}{2}m \left(1 + \cot^2\varphi\right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m \frac{\dot{x}^2}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2. \quad (22)$$

Neničelni elementi matrike (a_{ij}) določeni z enačbama (5.160) in (5.164), so v skladu z enačbo (21)

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{32} = \cot\varphi. \quad (23)$$

Neničelni elementi k (a_{ij}) inverzni matrike (b_{ij}) so

$$b_{11} = 1, \quad b_{22} = 1, \quad b_{32} = -\cot\varphi. \quad (24)$$

Iz enačbe (23) je razvidno, da sta od količin

$$\left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right)$$

iz enačbe (5.166) lahko le dve različni od nič, in sicer tisti s kombinacijama indeksov

$$s = 3, \quad i = 1, \quad k = 2$$

in

$$s = 3, \quad i = 2, \quad k = 1$$

z vrednostma

$$\frac{\partial \cot\varphi}{\partial\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi}$$

in

$$-\frac{\partial \cot\varphi}{\partial\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi}.$$

Iz tega za količine

$$\gamma_{jst} = b_{ij}b_{kl} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i} \right), \quad j, l = 1, 2$$

dobimo vrednosti

$$\gamma_{132} = -\gamma_{231} = \frac{1}{\sin^2\varphi}, \quad (25)$$

medtem ko imajo za vse druge kombinacije indeksov γ_{jst} vrednost nič.

Z rezultati, podanimi v enačbah (4), (22) in (25), lahko zdaj, ob upoštevanju pogojev

$$Q_1^{(e)} = Q_2^{(e)} = 0, \quad Q_3^{(e)} = mg\alpha,$$

določimo enačbe gibanja, ki ustrezajo enačbi (5.166):

$$J\ddot{\varphi} - (-2) \frac{1}{2} \frac{m\dot{x}^2}{\sin^3\varphi} \cos\varphi + \frac{m\dot{y}\dot{x}}{\sin^2\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}}{\sin^2\varphi} + m\dot{y} \left(-\frac{1}{\sin^2\varphi} \right) \cdot \dot{\varphi} = -mg\alpha \cot\varphi. \quad (26)$$

V obeh enačbah (26) nadomestimo $\dot{y} z - \dot{x} \cot\varphi$, skladno enačbo (21) in tako dobimo

$$J\ddot{\varphi} = 0$$

$$\frac{\ddot{x}}{\sin^2\varphi} - 2\frac{m\dot{x}}{\sin^3\varphi} \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \frac{m\dot{x}}{\sin^2\varphi} \cot\varphi \cdot \dot{\varphi} = -mg\alpha \cos\varphi.$$

Prva od teh enačb ima ponovno rešitev

$$\varphi = \Omega t.$$

To vstavimo v drugo enačbo in jo pomnožimo z $\frac{1}{m} \sin\Omega t$:

$$\frac{\ddot{x}}{\sin\Omega t} - \frac{\dot{x}}{\sin^2\Omega t} \cos\Omega t \cdot \Omega = -g\alpha \cos\Omega t. \quad (27)$$

Levo stran te enačbe lahko zapišemo tudi v obliki

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sin\Omega t}.$$

To omogoča ločitev spremenljivk:

$$d \left(\frac{\dot{x}}{\sin\Omega t} \right) = -g\alpha \cos\Omega t dt.$$

Rezultat integracije je

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\sin\Omega t} &= -\frac{g\alpha}{\Omega} \sin\Omega t + C_1 \\ \dot{x} &= -\frac{g\alpha}{\Omega} \sin^2\Omega t + C_1 \sin\Omega t. \end{aligned} \quad (28)$$

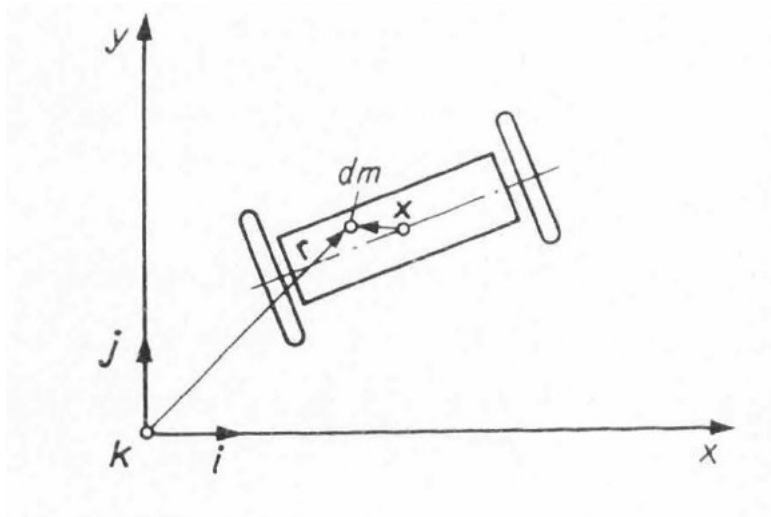
Za določitev integracijske konstante C_1 začetni pogoj za \dot{x} ne zadostuje, saj desna stran enačbe (28) za $t = 0$ tako ali tako odpade. Zato uporabimo enačbo (21) in določimo

$$\dot{y} = -\dot{x} \cot\Omega t = \frac{g\alpha}{\Omega} \sin\Omega t \cos\Omega t - C_1 \cos\Omega t. \quad (29)$$

Ker velja $\dot{y}(0) = 0$ lahko zdaj določimo integracijsko konstanto C_1 kot

$$C_1 = 0.$$

S tem sta enačbi (28) in (29) identični z enačbama (11).



Slika 6/19. Lega masnega elementa dm v prostorsko nepremičnem sistemu x, y

4. Rešitev s pomočjo Appellovih enačb gibanja

Naj bo \mathbf{x} krajevni vektor v opazovalnem sistemu vezanem na telo, z izhodiščem v M (glej sliko 6/19). Potem za krajevni vektor \mathbf{r} prostorsko nepremičnega koordinatnega sistema velja

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{x}\end{aligned}$$

Če s pomočjo enačbe (21) nadomestimo \dot{y} , sledi

$$\dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{i} - \cot \varphi \mathbf{j}) \dot{x} + \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{x}$$

(Glede odvajanja vektorja \mathbf{x} v gibljivem sistemu glej 2.2.1.). Po ponovnem odvajanju dobimo

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= (\mathbf{i} - \cot \varphi \mathbf{j}) \ddot{x} + \mathbf{j} \frac{\dot{x} \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} + \mathbf{k} \ddot{\varphi} \times \mathbf{x} + \mathbf{k} \dot{\varphi} \times (\mathbf{k} \dot{\varphi} \times \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{i} \ddot{x} + \mathbf{j} \left(\frac{\dot{x} \dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} - \ddot{x} \cot \varphi \right) + \ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{x} - \dot{\varphi}^2 [\mathbf{x} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})].\end{aligned}$$

Izraz v oglatem oklepaju na desni strani te enačbe predstavlja projekcijo vektorja \mathbf{x} na ravnino x, y in ga označimo z \mathbf{y} . Velja

$$\mathbf{k} \times \mathbf{x} = \mathbf{k} \times [\mathbf{y} + \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] = \mathbf{k} \times \mathbf{y}.$$

Za kvadrat pospeška dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}^2 = \ddot{x}^2 + \left(\ddot{x} \cot \varphi - \frac{\dot{x}\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} \right)^2 + \ddot{\varphi}^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{y}) + 2\ddot{x}\dot{\varphi} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \\ - 2\ddot{x}\dot{\varphi}^2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{y} + 2 \left(\frac{\dot{x}\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} - \ddot{x} \cot \varphi \right) \dot{\varphi} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \\ + 2\ddot{x}\dot{\varphi}^2 \cot \varphi \mathbf{j} \cdot \mathbf{y} - 2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^2 \mathbf{y} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \\ + \text{Členi brez komponent pospeška.} \end{aligned} \quad (30)$$

Člene v enačbi (30) lahko še preoblikujemo:

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) = [(\mathbf{k} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{k}] \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{y} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})] \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^2.$$

Poleg tega je izraz $\mathbf{y} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{y}$, ki ga vsebuje enačba (30), enak nič, ker je $\mathbf{k} \times \mathbf{y}$ pravokoten na \mathbf{y} .

Pri oblikovanju APPELlove funkcije v skladu z enačbo (5.177) upoštevamo, da

$$\int_{(S)} dm \mathbf{y}$$

zaradi simetrije odpade, medtem ko

$$J = \int_{(S)} dm \mathbf{y}^2$$

predstavlja masni vztrajnostni moment glede na os, pravokotno na ravnini x, y , ki poteka skozi M . Iz enačbe (30) tako končno sledi

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \dot{\mathbf{i}}^2 = \frac{1}{2} m \left[\ddot{x}^2 + \left(\ddot{x} \cot \varphi - \frac{\dot{x}\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J \ddot{\varphi}^2 \\ + \text{Členi brez komponent pospeška.} \end{aligned} \quad (31)$$

Količine $\Pi_j^{(e)}$ so v skladu z enačbo (5.176) enake količinam $Q_j^{(e)} b_{ij}$ iz enačbe (26), ker je bila odpravljena ista komponenta hitrosti.

Iz enačbe (31) in enačbe (5.179) dobimo enačbe gibanja:

$$\begin{aligned} J \ddot{\varphi} = 0, \\ m \left[\ddot{x} + \left(\ddot{x} \cot \varphi - \frac{\dot{x}\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} \right) \cot \varphi \right] = -mg \alpha \cot \varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

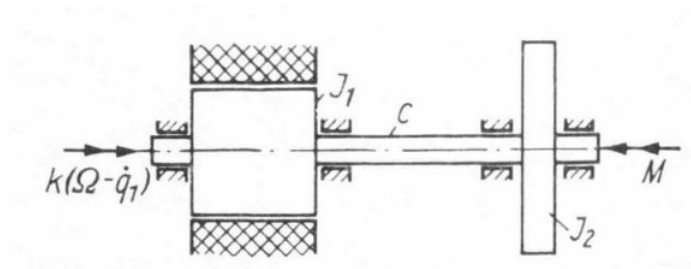
Prva od teh enačb ponovno daje znani rezultat konstantne kotne hitrosti, drugo pa preuredimo in dobimo:

$$\frac{\ddot{x}}{\sin^2 \varphi} - \frac{\dot{x}}{\sin^3 \varphi} \cos \varphi \dot{\varphi} = -g \alpha \cot \varphi.$$

To pa je znova enačba (27).

6.8 Pogonski sistem z nenadno začetno konstantno obremenitvijo

Elektromotor prek elastične gredi poganja delovni stroj, glej sliko 6/20. Vztrajnostna momenta sta J_1 za rotor motorja in J_2 za delovni stroj, q_1 in q_2 sta ustrezni kotni koordinati, Ω je kotna hitrost motorja v prostem teku, $k(\Omega - \dot{q}_1)$ pa moment, ki ga na rotor prenaša magnetno polje. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je k konstanta. Moment obremenitve pogonskega stroja je do časa $t = 0$ enak nič, nato pa skokovito doseže vrednost M in deluje v nasprotni smeri od smeri vrtenja. Torzijska togost elastične gredi je c .



Slika 6/20. Pogonski sistem

Določimo začetne vrednosti

$$q_1(0) = q_2(0) = 0; \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \Omega \quad (1)$$

in izračunajmo elastično torzijo gredi $q_1(t) - q_2(t)$ za $t > 0$. V ta namen je treba določiti LAGRANGEve enačbe gibanja druge vrste. Njihovo rešitev je treba določiti

- eksaktno z uporabo nastavka rešitve,
- približno z metodo zaporednih približkov in
- numerično z metodo RUNGE-KUTTA.

1. Določitev enačb gibanja

Za izpeljavo enačb gibanja potrebujemo poleg kinetične energije

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 \quad (2)$$

še posplošene sile. Te dobimo s pomočjo virtualnega dela vtisnjenih sil, ki je sestavljeno iz virtualnega dela pogonskega momenta

$$k(\Omega - \dot{q}_1) \delta q_1,$$

virtualnega dela momenta, ki izhaja iz elastičnega zasuka gredi

$$-c(q_1 - q_2)(\delta q_1 - \delta q_2),$$

in virtualnega dela obremenilnega momenta

$$-M\delta q_2.$$

Posplošene sile so faktorji pri navideznih premikih v $\delta W^{(e)}$ (glej tudi 5.3.). Tako je

$$\left. \begin{aligned} Q_1^{(e)} &= -k\dot{q}_1 - c(q_1 - q_2) + k\Omega \\ Q_2^{(e)} &= -c(q_2 - q_1) - M \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ko enačbi (1) in (2) vstavimo v enačbo (5.84), dobimo iskane enačbe gibanja

$$\left. \begin{aligned} J_1\ddot{q}_1 + k\dot{q}_1 + c(q_1 - q_2) &= k\Omega \\ J_2\ddot{q}_2 + c(q_2 - q_1) &= -M. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2. Eksaktna rešitev sistema diferencialnih enačb

Za homogeni sistem diferencialnih enačb, ki pripada enačbi (4), dobimo z nastavkom

$$q_i = A_i e^{\lambda t}$$

karakteristično enačbo ((glej tudi 5.7.1.):

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} J_1\lambda^2 + k\lambda + c & -c \\ -c & J_2\lambda^2 + c \end{vmatrix} \\ &= \lambda [J_1J_2\lambda^3 + kJ_2\lambda^2 + c(J_1 + J_2)\lambda + kc] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Z uvedbo oznak:

$$\tau = \frac{J_1}{k}, \quad \omega_0^2 = c \frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}, \quad \beta = \frac{J_1}{J_1 + J_2}$$

lahko sistem enačb (4) zapišemo v obliki

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \tau^{-1}\dot{q}_1 + \omega_0^2(1 - \beta)(q_1 - q_2) &= \tau^{-1}\Omega, \\ \ddot{q}_2 + \omega_0^2\beta(q_2 - q_1) &= -c^{-1}\omega_0^2\beta M \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

karakteristično enačbo pa lahko predstavimo na naslednji način:

$$\lambda (\lambda^3 + \tau^{-1}\lambda^2 + \omega_0^2\lambda + \beta\tau^{-1}\omega_0^2) = 0. \quad (8)$$

Od korenov karakteristične enačbe (8) je eden enak nič:

$$\lambda_1 = 0.$$

Od preostalih korenov je eden negativen in realen, druga dva pa sta kompleksna.

Da bo tudi drugi koren racionalen, za naš primer posebej določimo:

$$\omega_0 = 2\tau^{-1}, \quad \beta = \frac{15}{32} \quad (9)$$

Tako lahko enačbo (8) zapišemo v obliki

$$\lambda \left(\tau^3 \lambda^3 + \tau^2 \lambda^2 + 4\tau \lambda + \frac{15}{8} \right) = 0. \quad (10)$$

Nato razmeroma preprosto najdemo

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\tau^{-1}.$$

Po deljenju enačbe (10) z $\lambda \left(\tau \lambda + \frac{1}{2} \right)$ ostane enačba

$$\tau^2 \lambda^2 + \frac{1}{2}\tau \lambda + \frac{15}{4} = 0$$

z rešitvama

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}\tau^{-1}(-1 + i\sqrt{59}), \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}\tau^{-1}(-1 - i\sqrt{59}).$$

Za lastne vektorje $A_j x$ [glej enačbo (5.255)] dobimo

$$A_{j1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{j2} = \begin{bmatrix} 17 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad A_{j3} = \begin{bmatrix} -14 - i\sqrt{59} \\ 15 \end{bmatrix}, \quad A_{j4} = \begin{bmatrix} -14 + i\sqrt{59} \\ 15 \end{bmatrix}.$$

V skladu z enačbo (5.257) dobimo splošno rešitev homogenega sistema enačb v obliki

$$q_1^{(h)} = C_1 + 17C_2 e^{-\frac{t}{2\tau}} + C_3 \left(-14 - i\sqrt{59} \right) e^{\frac{t}{4\tau}(-1+i\sqrt{59})} + C_4 \left(-14 + i\sqrt{59} \right) e^{\frac{t}{4\tau}(-1-i\sqrt{59})}$$

$$q_2^{(h)} = C_1 + 15C_2 e^{-\frac{t}{2\tau}} + 15C_3 e^{\frac{t}{4\tau}(-1+i\sqrt{59})} + 15C_4 e^{\frac{t}{4\tau}(-1-i\sqrt{59})}$$

ali z uporabo EULERjevih formul v obliki

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(h)} &= C_1 + 17C_2 e^{-\frac{t}{2\tau}} \\ &\quad + e^{-\frac{t}{4\tau}} \left[(-14D + \sqrt{59}E) \cos\left(\frac{t}{4\tau}\sqrt{59}\right) + (\sqrt{59}D + 14E) \sin\left(\frac{t}{4\tau}\sqrt{59}\right) \right] \\ q_2^{(h)} &= C_1 + 15C_2 e^{-\frac{t}{2\tau}} + e^{\frac{t}{4\tau}} \left[15D \cos\left(\frac{t}{4\tau}\sqrt{59}\right) - 15E \sin\left(\frac{t}{4\tau}\sqrt{59}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Matrika

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}$$

je singularna, zato skladno s razdelkom 5.6.1.2.2. za iskanje partikulne rešitve ne zadošča preprosta izbira konstantnih členov. Z uporabo nastavka

$$\varphi_j = \pi_{j0} + \pi_{j1} t$$

najdemo partikulno rešitev

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C + \frac{M}{c} + \left(\Omega - \frac{M}{c} \tau \omega_0^2 (1 - \beta) \right) t \\ \varphi_2 &= C + \left(\Omega - \frac{M}{c} \tau \omega_0^2 (1 - \beta) \right) t.\end{aligned}$$

Količina C , ki je vključena v to rešitev, je poljubna konstanta, ki je že prisotna v rešitvi homogenega sistema in jo zato lahko izpustimo. Za poenostavitev zapisa uvedemo še okrajšavo za kot zasuka

$$\mu = \frac{M}{C}$$

elastične gredi pod vplivom konstantnega momenta M . Za vrednosti podane v (9), je partikulna rešitev

$$\left. \begin{aligned}\varphi_1 &= \mu + \left(\Omega - \frac{17}{8} \tau^{-1} \mu \right) t \\ \varphi_2 &= \left(\Omega - \frac{17}{8} \tau^{-1} \mu \right) t.\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ker se celotna rešitev diferencialnega sistema enačb (4) sestavlja iz rešitev po enačbah (11) in (13)

$$q_j = q_j^{(h)} + \varphi_j,$$

z vstavitvijo celotne rešitve v začetne pogoje (1) dobimo naslednje enačbe za konstante C_1, C_2, D in E :

$$\begin{aligned}C_1 + 17C_2 - 14D + \sqrt{59}E + \mu &= 0 \\ C_1 + 15C_2 + 15D &= 0 \\ -\frac{17}{2}C_2 + \frac{73}{4}D + \frac{13}{4}\sqrt{59}E - \frac{17}{8}\mu + \Omega\tau &= \Omega\tau \\ -\frac{15}{2}C_2 - \frac{15}{4}D - \frac{15}{4}\sqrt{59}E - \frac{17}{8}\mu + \Omega\tau &= \Omega\tau\end{aligned}$$

Rešitev tega linearnega sistema enačb je:

$$C_1 = 3.5333 \mu, \quad C_2 = -0.25000 \mu, \quad D = 0.014444 \mu, \quad E = -0.010560 \mu.$$

Po določitvi teh konstant lahko izrazimo rešitve $q_1(t)$ in $q_2(t)$. Za iskano razliko dobimo

$$\begin{aligned}q_1 - q_2 &= \mu \left\{ 1 - 0.5 e^{-0.5t/\tau} - e^{-0.25t/\tau} \right. \\ &\quad \left. \times \left[0.5 \cos \left(1.92029 \frac{t}{\tau} \right) + 0.19529 \sin \left(1.92029 \frac{t}{\tau} \right) \right] \right\} \quad (14)\end{aligned}$$

3. Rešitev s pomočjo metode zaporednih približkov (izpuščeno)

4. Rešitev s pomočjo metode Runge-Kutta

Izhajamo iz sistema enačb (7) in uvedemo brezdimenzijsko časovno koordinato

$$\vartheta = \frac{t}{\tau}$$

Naj bo q'_i odvod posplošene koordinate q_i po ϑ . Potem velja

$$q'_i = \frac{dq_i}{d\vartheta} = \frac{dq_i}{dt} \frac{dt}{d\vartheta} = \tau \dot{q}_i, \quad q''_i = \tau^2 \ddot{q}_i.$$

S tem in s pomočjo enačbe (12) lahko sistem enačb (7) zapišemo v obliki

$$\left. \begin{aligned} q''_1 &= \tau \Omega - q'_1 - \tau^2 \omega_0^2 (1 - \beta) (q_1 - q_2) \\ q''_2 &= \tau^2 \omega_0^2 \beta (q_1 - q_2) - \mu \tau^2 \omega_0^2 \beta \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Z uporabo vrednosti iz enačb (9)

$$\omega_0 = 2\tau^{-1}, \quad \beta = \frac{15}{32}$$

in za

$$\mu = 0.005, \quad \Omega\tau = 1,$$

kot primer, sistem enačb (27) dobi obliko

$$\left. \begin{aligned} q''_1 &= 1 - q'_1 - 4 \cdot \frac{17}{32} (q_1 - q_2) \\ q''_2 &= 4 \cdot \frac{15}{32} (q_1 - q_2) - 0.005 \cdot 4 \cdot \frac{15}{32} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

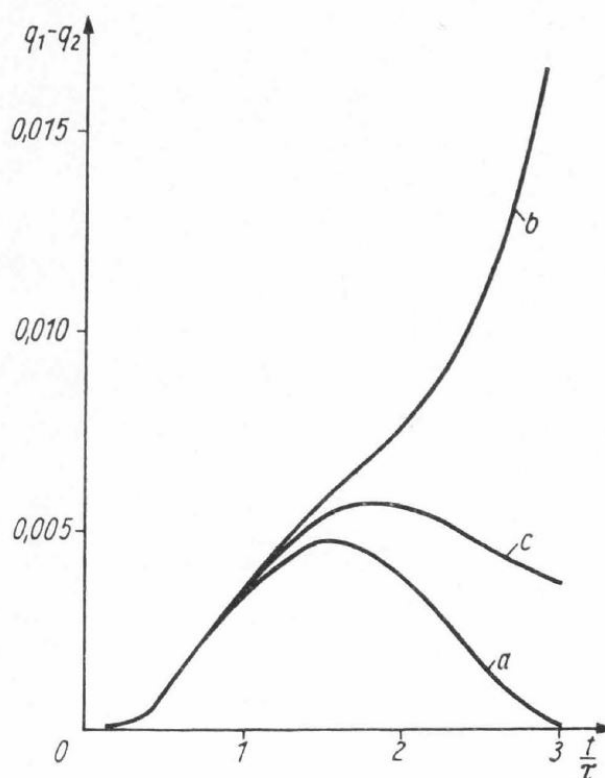
Z dolžino koraka $h = 0.1$ so funkcije q_1 in q_2 izračunane z uporabo programa, opisanega v 5.6.2.1.2, na računalniku Minsk 22.

5. Povzetek in primerjava

Vrednosti, izračunane po treh metodah, so za $\mu = 0.005$ in za časovni interval od $t = 0$ do 7π prikazane na sliki 6/21.

Glede natančnosti se vrednosti, izračunane z metodo RUNGE-KUTTA, znotraj izbranega časovnega intervala zelo dobro ujema z eksaktno rešitvijo. Nasprotno pa ničelni in prvi približek funkcij, izračunanih z metodo zaporednih približkov, že znotraj tega časovnega intervala močno odstopata in sta uporabna le za čas neposredno po začetku obremenitve.

Pri primerjavi zahtevnosti reševanja je treba upoštevati, da je za eksaktno rešitev potrebno rešiti linearni sistem enačb z dvakrat toliko neznankami, kot je število prostostnih stopenj. Metoda zaporednih približkov pa zahteva začetno rešitev, ki jo je bistveno enostavneje pridobiti. Poleg tega je ta metoda uporabna tudi za nelinearne sisteme. Najmanj analitično zahtevna je metoda RUNGE-KUTTA.



Slika 6/21. Časovni potek razlike odmikov $q_1 - q_2$. a - po metodi zaporednih približkov (začetni približek), b - po metodi zaporednih približkov (prvi približek), c - po metodi RUNGE-KUTTA in eksaktna rešitev.

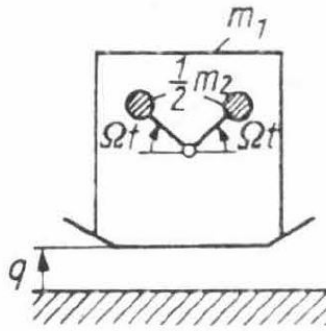
6.9 Linearni nihajni sklop z dvema prostostnima stopnjama (izpuščeno)

6.10 Dinamični utrjevalnik tal z ekscentričnim vzbujanjem

Dinamični utrjevalnik tal (vibro plošča) je vzbujan z dvema enakima, nasproti vrtečima neuravnoteženima masama, ki imata kotno hitrost Ω . Masa utrjevalnika brez neuravnoteženih mas znaša m_1 , skupna masa obeh neuravnoteženih mas pa m_2 (slika 6/24). Ekscentričnost neuravnoteženih mas je r . Ravnina tal ostajajo pred vsakim udarcem nespremenjena. Ta pogoj je lahko izpolnjen s horizontalnim premikom utrjevalnika, ki pa tukaj ne bomo obravnavali. Višina plošče utrjevalnika nad tlemi je q .

Predpostavimo, da so tla idealno plastična, kar pomeni, da su prodiranju plošče upirajo s konstantno silo F_B .

Naloga je poiskati enačbo gibanja $q = q(t)$ za vspostavljeno periodično gibanje.



Slika 6/24. Dinamični utrjevalnik

1. Določitev enačb gibanja s pomočjo d'Alembertovega načela

Pri določitvi enačb gibanja je treba ločiti tri faze gibanja:

1. $q \leq 0$ in $\dot{q} < 0$:

Plošča utrjevalnika prodirata v tla; na ploščo deluje konstantna, vtisnjena sila F_B .

2. $q \leq 0$ in $\dot{q} = 0$:

Utrjevalnik miruje na deformiranih tleh; na ploščo deluje reakcijska sila, ki je pozitivna in ne sme presežati F_B .

3. $q \leq 0$ in $\dot{q} > 0$ ali $q > 0$:

Utrjevalnik se je ločil od tal.

Izkaže se, da je smiselno uporabiti D'ALEMBERTOVO načelo v obliki neenačbe (4.23) za enostranske vezi. Označimo posplošeno vtisnjeno silo kot Q , tako da iz neenačbe (4.23) sledi

$$\left[Q - m_1 \ddot{q} - m_2 (\ddot{q} - r \Omega^2 \sin \Omega t) \right] \delta q \leq 0$$

oz.

$$\left[Q - (m_1 + m_2) \ddot{q} - m_2 r \Omega^2 \sin \Omega t \right] \delta q \leq 0 \quad (4)$$

V enačbi (4) smo upoštevali, da se skupno težišče neuravnoteženih mas giblje po navpičnici. Zdaj ločeno obravnavamo posamezne faze gibanja:

1. Faza gibanja

Posplošena vtisnjena sila izhaja iz sile tal in teže:

$$Q = F_B - (m_1 + m_2)g$$

Ker je δq poljubno, velja v neenačbi (4) enačaja, kar podaja

$$F_B - (m_1 + m_2)g - (m_1 + m_2)\ddot{q} + m_2 r \Omega^2 \sin \Omega t = 0$$

oz.

$$\ddot{q} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \Omega^2 \sin \Omega t - g + \frac{F_B}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

2. Faza gibanja

Tokrat je:

$$Q = -(m_1 + m_2)g$$

Tla zdaj delujejo kot toga podlaga, od katere se lahko plošča kvečjemu odmakne (enostranska vez). To pomeni:

$$\delta q > 0 \quad (6)$$

Faktor δq v neenačbi (4) mora biti manjši ali enak nič:

$$-(m_1 + m_2)g - (m_1 + m_2)\ddot{q} + m_2 r \Omega^2 \sin \Omega t \leq 0$$

Rešitev za \ddot{q} je:

$$\ddot{q} \geq \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \Omega^2 \sin \Omega t - g \quad (7)$$

Iz neenačbe (7) sledi pogoj za ohranitev stanja mirovanja ($\ddot{q} = 0$):

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} r \Omega^2 \sin \Omega t - g \leq 0 \quad (8)$$

Če ta pogoj ni izpolnjen, telo preide v 3. fazo gibanja.

3. Faza gibanja

Spet velja:

$$Q = -(m_1 + m_2)g$$

Ker je δq poljuben, dobimo iz neenačbe (4) namesto (7) enačbo:

$$\ddot{q} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \Omega^2 \sin \Omega t - g \quad (9)$$

Za nadaljnjo obravnavo dobljenih enačb gibanja (5) in (9) ter pogoja (8) je koristno, da jih z naslednjimi substitucijami:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \Omega t \\ x &= \frac{\Omega^2}{g} q \\ \alpha &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{r \Omega^2}{g} \\ \beta &= \frac{F_B}{(m_1 + m_2)g} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

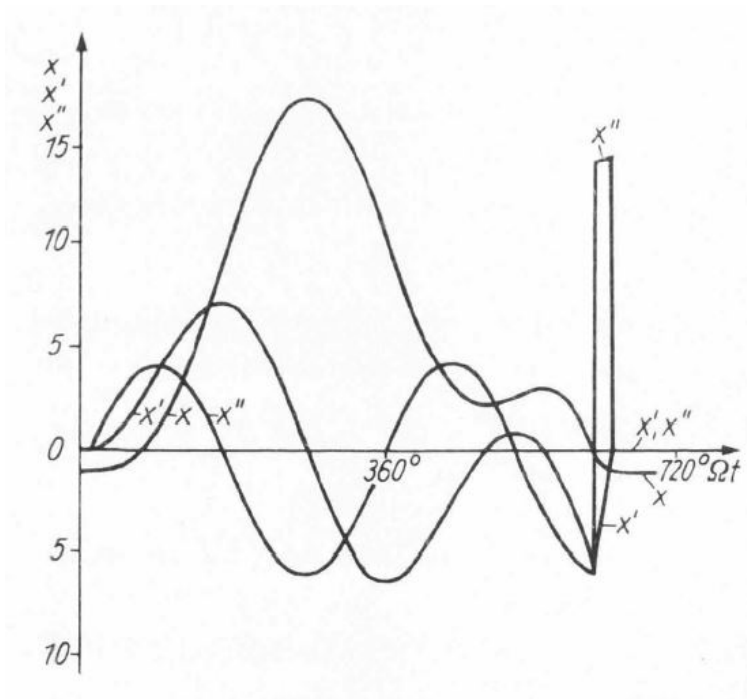
naredimo brezdimenzijske. Z odvodi po τ , označenimi z črtico, sledi:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \alpha \sin \tau + \beta - 1 && \text{za } x \leq 0 \text{ in } x' < 0 \\ x'' &= 0 && \text{za } x \leq 0 \text{ in } x' = 0 \text{ in } \alpha \sin \tau - 1 \leq 0 \\ x'' &= \alpha \sin \tau - 1 && \text{za } x \leq 0 \text{ in } x' > 0 \text{ ali} \\ &&& x > 0 \text{ ali} \\ &&& x \leq 0 \text{ in } x' = 0 \text{ in } \alpha \sin \tau - 1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Začetne vrednosti τ , x in x' ob začetku posameznih faz gibanja označimo z indeksi 1, 2 ali 3. Rešitve diferencialnih enačb (11) lahko podamo kot:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \alpha(\sin \tau_1 - \sin \tau) + (\tau - \tau_1)(x'_1 + \alpha \cos \tau_1) + \frac{1}{2}(\beta - 1)(\tau - \tau_1)^2 \\ x &= x_2 \\ x &= x_3 + \alpha(\sin \tau_3 - \sin \tau) + (\tau - \tau_3)(x'_3 + \alpha \cos \tau_3) - \frac{1}{2}(\tau - \tau_3)^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Vsaka izmed treh enačb velja le v območju, kjer so pogoji posameznih faz izpolnjeni (glej enačbo (13)). Pri prekoračitvi teh robnih pogojev preide gibanje v drugo fazo. Ob danih začetnih pogojih lahko rešitev sestavimo z lepljanjem funkcij po enačbi (12), pri čemer je treba določiti čase prehoda. To vključujejo reševanje transcendentnih enačb.



Slika 6/25. Časovni potek poti x , hitrosti \dot{x} , in pospeška \ddot{x} .

Za vrednosti $\alpha = 5$, $\beta = 20$ in začetna pogoja

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

je bil izračun izveden z računalnikom, dokler ni bilo približno doseženo periodično stanje. To se zgodi po približno sedmih obratih neuravnoteženih mas. Rezultat izračuna je grafično prikazan na sliki 6/25. Perioda skokovitega gibanja pri izbranih vrednostih zajema dva obrata neuravnoteženih mas. Opazna je nenadna sprememba pospeška ob stiku s tlemi in ob zaključku faze deformacije.

6.11 Nelinearni pogonski sistem s tremi prostostnimi stopnjami (izpuščeno)

6.12 Rotor centrifuge z ekscentričnostjo (izpuščeno)

6.13 Stohastično vzbujan linearni pogonski sistem (izpuščeno)

6.14 Stabilnost vertikalnih nihanj elastičnega nihala (izpuščeno)

7

Priloga: Teorija naključnih funkcij (izpuščeno)

Literatura

- 1 KUSNECOV, B.G.: Von Galilei bis Einstein. Entwicklung der physikalischen Ideen. Berlin: Akademie-Verlag 1970.
- 2 Autorenkollektiv: Die Wissenschaft von der Wissenschaft. Berlin: Dietz Verlag 1968
- 3 KREYSZIG, E.: Differentialgeometrie. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest and Portig KG 1957.
- 4 HAMEL, G.: Theoretische Mechanik. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1949.
- 5 SMIRNOV, W. J.: Lehrgang der höheren Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967.
- 6 BUDÓ, A.: Theoretische Mechanik. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
- 7 FORBAT, N.: Analytische Mechanik der Schwingungen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.

Stvarno kazalo

- aksiom, 2
 - d'Alembertov, 26
- aksiomi
 - Newtonovi, 26
- Appellova funkcija, 72
- binormala, 6
- centrifugalna sila, 28
- centrifugalni moment, 81
- centripetalni pospešek, 8
- Coriolisov pospešek, 10
- Coriolisova sila, 28
- deviacijski moment, 76
- enačbe gibanja
 - Appellove, 70
 - Lagrangeve, druge vrste, 56
 - Lagrangeve, prve vrste, 53
- energija
 - kinetična, 32
 - potencialna, 19
- Eulerjeve enačbe, 89
- Eulerjevi koti, 84
- gibalna količina, 21
 - izrek o ohranitvi, 30
 - zakon, 31
- glavna normala, 6
- glavne vztrajnostne osi, 80
- glavni masni vztrajnostni momenti, 80
- gostota, 15
- Hamilton-Jacobijeva parcialna diferencialna enačba, 62
- Hamiltonova funkcija, 59
- hitrost
 - absolutna, 9
 - komponente, 5
 - posplošena, 43
 - sistemska, 10
 - vektor, 5
- inercialni sistem, 21
- izrek, 2
- kanonične enačbe, 59
- karakteristična enačba, 97
- klasična mehanika, 1
- konfiguracijski prostor, 64
- koordinate
 - ciklične, 61
 - posplošene, 42
- koordinate hitrosti, 43
- koordinate impulza, 59
- koordinatni sistem
 - kartezični, 4
- kotna hitrost, 7
 - vektor, 26
- kotni pospešek, 8
- krajevni vektor, 4
- kvazihitrost, 46
- kvazikoordinata, 46

- Lagrangeva funkcija, 38
 centralna enačba, 37
- masa, 11
- masni element, 16
- masni vztrajnostni moment, 76
- masno središče, 29
- mehanski sistem, 41
- model, 1
- navidezna sila, 28
- načelo
 d'Alembertovo, 35
 Gaussovo, najmanjše prisile, 39
 Hamiltonovo, 36
 Jourdainovo, 38
- načelo relativnosti
 Galilejevo, 27
- neholonomne pogojne enačbe, 43
- opazovalni sistem, 4
- pogoji integrabilnosti, 42
- pogojne enačbe, 42
 holonomne, 43
 neholonomne, 43
 skleronomne, 43
 splošne, 45
- pospešek, 6
 absolutni, 10
 komponente, 5
 normalni, 6
 sistemski, 10
 vektor, 5
- posplošene koordinate, 43
- potencial, 18
- potencialna funkcija, 18
- prisila, 39
- pritisnjena ravnina, 6
- prostor
 absolutni, 1
 evklidski, 3
 homogenost, 3
 izotropnost, 3
 neomejenost, 3
 zveznost, 3
- prostostne stopnje, 42
- ravnotežje
 dinamično, 26
 statično, 26
- ravnotežna lega, 47
- relativna hitrost, 9
- relativni pospešek, 10
- rotacijska energija, 76
- sila, 16
 konservativna, 19
 notranja, 17
 posplošena, 56
 vtisnjena, 33
 zunanja, 17
- sistem
 aksiomatski, 2
 deduktivni, 1
 holonomni, 43
 ločljiv, 63
 mehanski, 1
 neholonomen, 44
 reonomni, 43
 skleronomni, 43
 statično določen, 52
 statično nedoločen, 52
 Stäckelov, 64
 tehnični, 1
 zaprt, 3, 17
- sistem točk, 11
- Steinerjev izrek, 82
- Stieltjesov integral, 14
- tangencialni pospešek, 6

- tangenta, 5
- tehniška mehanika, 2
- telo
 - deformabilno, 11
 - togo, 11
- temeljna enačba dinamike, 23
- težišče, 29
- transformacija glavnih osi, 80
- transformacija, Galileijeva, 28
- translacijska energija, 76
- vezi
 - dvostranske, 34
 - enostranske, 34
 - toge, 33
- vezna sila, 38
- virtualni pomik, 2
- vrtilna količina, 22
 - izrek o ohranitvi, 30
 - zakon, 24
- vztrajnostna sila, 26
- vztrajnostni tenzor, 77
- zakon o ohranitvi energije, 33
- zakon sile, 33
- zakon vzajemnega učinka, 25
- zakon vztrajnosti, 22
- zaporedni približki, 126
- začetni pogoji, 121
- čas
 - absolutni, 3
 - homogen, 4
 - zvezen, 4