Ludwig Boltzmann

NAČELA MEHANIKE I. DEL

Prevedel: Milan Batista

UNIVERZA V LJUBLJANI

FPP
Fakulteta za pomorstvo in promet

Ludwig Boltzmann

NAČELA MEHANIKE

I. DEL

Načela mehanike: 1. del

Avtor: Ludwig Boltzmann
Prevajalec in urednik: prof. dr. Milan Batista
Naslovnica: Microsoft Copilot

Založnik: Založba Univerze v Ljubljani (University of Ljubljana Press)
Za založnika: prof. dr. Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdajatelj: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet
Za izdajatelja: prof. dr. Peter Vidmar, dekan Fakultete za pomorstvo in promet Univerze v Ljubljani

Ljubljana, Portorož, 2024
Publikacija je brezplačna.
Prva e-izdaja.

Publikacija je izšla s podporo Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

Prva e-izdaja.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na: https://ebooks.uni-lj.si/

DOI: 10.70587/9789612974602

To delo je ponujeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Deljenje pod enakimi pogoji 4.0 Mednarodna licenca. / This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 215162115
ISBN 978-961-297-460-2 (PDF)

To delo je prosti prevod knjige Ludwiga Boltzmanna z naslovom Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik, ki jo je leta 1897 izdala založba Johan Ambrosius Barth iz Leipziga. V prevod je vključena celotna prva knjiga ter zadnje poglavje druge knjige, ki obravnava relativno gibanje.

Prevod je označen kot prost iz dveh razlogov: prvič, ker ni profesionalen (namenjen je bil osebni rabi), in drugič, ker so vsi zgodovinski pojmi, kot so živa sila [lebendige Kraft], funkcija sile [Kraftfunktion], ploščinski izrek [Flächensatz] ter ustrezen koordinatni sistem [taugliche Bezugssysteme], prevedeni v današnje izraze: kinetična energija, potencial, vrtilna količina in inercialni opazovalni sistem. Da bi ohranil stik z izvirnikom, je nekaterim izrazom ob prvem pojavu v oglatih oklepajih dodan nemški izvirnik.

Nemški izraz Gauss'sches Prinzip des kleinsten Zwanges je preveden kot Gaussovo načelo najmanjše prisile (ali tudi najmanjšega omejevanja). V meni znani slovenski literaturi je Gaussovo načelo omenil prof. Kuhelj[1], kjer ga je imenoval Gaussov princip najmanjše nuje. Vendar se danes načelo najmanjše nuje (oz. akcije) uporablja za Hamiltonovo načelo.

Opombe, ki niso prisotne v izvirniku, so označene z (OP). Pri uvedbi nekaterih pojmov je uporabljena poudarjena pisava, kar prav tako ni del izvirnika. Dodatno je priložen seznam oseb, ki se pojavljajo v besedilu, pri čemer so zgodovinski podatki povzeti po Wikipediji.

Slike v besedilu so povzete iz originala. Za boljše razumevanje sta v § 17 dodani sliki kaleidofona in glasbenih vilic z zrcalci, pridobljeni s spleta, čeprav nista del izvirnika.

Hvaležen bom za vsako pripombo ali dopolnilo, ki bi pripomoglo k izboljšanju prevoda.

Milan Batista
Portorož, maj 2021

[1]Anton Kuhelj, Matematična sredstva v mehaniki. Mehanika. Hidromehanika, Ljubljana 1984

Predgovor

Poudarite resnico.
Pišite jasno.
Bodite trdni v svojih prepričanjih.

Če namesto drugega dela teorije plinov zdaj objavljam prvi del mehanike, tega ne želim opravičevati s sklicevanjem na znane vzorce glede zaporedja izida knjig. Do tega je prišlo na naslednji način. V drugem delu teorije plinov so se potrebne razlage o mehaniki tako nakopičile, da so sprva zapolnile cel razdelek, nato poglavje, in nazadnje sem se odločil, da iz tega naredim celo knjigo, in sicer tako, da sem dodal zvezek predavanj o mehaniki, ki sem ga pripravil med prejšnjimi počitnicami za naslednji zimski semester. Toda ko sem si ogledal svoje zapiske, sem pomislil, da bi moral celotno metodo zamenjati s preprostejšo. Namesto tega sem vsebino omenjene knjižice, da se moja prizadevanja ne bi povsem izgubila, vključil v pričujočo knjigo, ki bi jo zato lahko označil kot predavanja, ki jih na dunajski univerzi nikoli nisem imel.

V zadnjem času se veliko govori o nejasnostih v načelih mehanike, pri čemer se poskuša te težave rešiti s predstavitvijo mehanike v novi, tuji preobleki. Moj pristop pa je nasproten: skušam ugotoviti, ali se nejasnostim ni mogoče izogniti tako, da mehaniko podrobno predstavim v njeni klasični obliki. Pri tem se osredotočam na nekatere koncepte, ki so bili prej spregledani ali obravnavani le bežno, obenem pa upoštevam vsako upravičeno kritiko. Posebej se strinjam s pripombami Hertza o bogastvu idej v pomembnih Machovih spisih, čeprav nikakor nisem povsod enakega mnenja kot Mach.

Z veseljem bi uporabil kvaternione, vendar pa bi to nasprotovalo mojemu cilju, da izključim vse, kar je nemškemu občinstvu neznano.

Drugi del predavanj o mehaniki, ki bo vseboval načela, pomembna za teorijo plinov, naj bi izšel kmalu, temu pa naj bi, takoj ko bo to mogoče, sledil tudi drugi del teorije plinov. Tretji del mehanike bo zajemal teorijo elastičnosti in hidrodinamike ter tako vodil nazaj k teoriji plinov.

Na tako obsežnem področju, kot je mehanika, seveda ni mogoče govoriti o popolnosti in bistvenih novostih. Kljub temu se je od poglavja o paralelogramu sil (§ 10) do opredelitve ravnotežja sistema, d'Alembertovega načela in splošne oblike enačb gibanja (§ 72, 73 in 74) izkazalo, da nekateri izreki mehanike zahtevajo natančnejšo opredelitev. Seveda na nobeno od teh vprašanj tu ni mogoče dokončno odgovoriti; to bi bilo mogoče le v monografiji, vendar sem zadovoljen, če sem opozoril na vrzeli in dal pobudo za nadaljnje raziskave.

Abbazia, 3. avgusta 1897.

Ludwig Boltzmann

Kazalo

I

Temeljni pojmi

§ 1 Opis izbrane metode. Mehanika je veda o ***gibanju*** naravnih ***teles***, tj. spremembi njihove ***lokacije*** [Ortsveränderung] (relativne spremembe lege), ki ni povezana s spremembo njihovih drugih lastnosti. V skladu s to definicijo mora mehanika raziskati tudi pogoje, pri katerih telo ne spreminja svoje lokacije, tj. ko miruje.

Ker je sprememba lokacije najpreprostejši pojav, je mehanika osnova celotne naravoslovne znanosti. Zato ne preseneča, da je bila že zgodaj zelo razvita (Newton, Lagrange, Euler itd.) in da je vedno bolj izpopolnjena. Vendar pa se ta popolnost bolj nanaša na gotovost pri reševanju posameznih problemov kot na njena temeljna načela. Slednja so bila še zlasti v zadnjem času večkrat predmet kritike.

Omenjam le Hertza[1], ki v svoji knjigi ugotavlja, da je nejasnost temeljnih načel mehanike predvsem posledica njihovega neustreznega prikaza v učbenikih. Na kratko bom predstavil svoj pogled na vzroke, ki so pripeljali do tega neustreznega prikaza.

Nikoli nisem dvomil, kar v svoji knjigi poudarja tudi Hertz, da so naše misli zgolj slike objektov (ali bolje rečeno, znaki zanje), ki so lahko z njimi v neki zvezi, vendar z njimi nikoli ne morejo sovpadati, temveč se z njimi povezujejo kot črke z zvoki ali note s toni. Zaradi omejenosti našega uma lahko odražajo le omejen vidik teh objektov.

Od tu lahko nadaljujemo na dva načina:

1. Slike pustimo bolj splošne. Tako je tveganje, da se kasneje izkažejo za napačne, manjše, saj jih lažje prilagodimo na novo odkritim dejstvom; toda zaradi svoje splošnosti so slike bolj nedoločene in meglene, njihov nadaljnji razvoj pa bo povezan z nekaj negotovosti in dvoumnosti.

2. Slike specializiramo in jih do neke mere podrobno obdelamo. V tem primeru bomo morali uvesti veliko več poljubnih (hipotetičnih) elementov, ki morda ne bodo ustrezali novim izkušnjam; po drugi strani pa je prednost ta, da so slike bolj jasne in pregledne, tako da lahko iz njih s popolno gotovostjo in nedvoumnostjo izpeljemo vse posledice.

Zdi se mi, da so nejasnosti v načelih mehanike posledica tega, da ne začnemo s hipotetičnimi miselnimi slikami, ampak te že na začetku poskušamo povezati z izkušnjami. Prehod k hipotezam se potem skuša bolj ali manj prikriti ali pa celo umetno dokazati, da je celotna zgradba nujna in brez hipotez, vendar pa je ravno to privedlo do nejasnosti.

[1]Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt von Heinrich Hertz. Leipzig, J. A. Barth, 1894.

Posebno v našem času se pogosto zahteva, da je treba navajati le neposredno dane pojave ne da bi jim dodali kar koli namišljenega. Čeprav je priporočljivo ločevati med stvarnim in hipotetičnim in slednjega nikoli ne kopičiti brez razloga, menim, da brez hipotez ne bi mogli doseči več kot poenostavljeno označevanje vsakega posameznega pojava v spominu. Vse poenostavitve spominskih slik, vse razumevanje zakonov, vsa pravila za povzemanje zapletenih pojavov in njihovo napovedovanje po preprostih pravilih, temeljijo na uporabi slik, ki so povzete iz drugih preprostih pojavov in dejanj volje.

Ideal naj bi bil oblikovanje parcialnih diferencialnih enačb in na njihovi osnovi napovedovati pojave Toda tudi te enačbe niso nič drugega kot pravila za oblikovanje nekih miselnih slik, in sicer seznama števil. Parcialne diferencialne enačbe zahtevajo konstrukcijo seznama števil, ki tvorijo mnogoterost več dimenzij. Če se spomnimo pomena njihove simbolike, niso nič drugega kot zahteva, da si zamislimo veliko število točk takšnih mnogoterosti (tj. mest, ki jih označuje več števil mnogoterosti, podobno kot točke v prostoru njihove koordinate) in iz njih po določenih pravilih nenehno izpeljujemo nove točke mnogoterosti, torej da si tako rekoč zamislimo neko gibanje točk v mnogoterosti[2].

Torej, če gremo k bistvu, tudi Maxwellove elektromagnetne enačbe v obliki, v kakršni jih je zapisal Hertz, vsebujejo hipoteze, torej nekaj, kar je dodano izkušnjam, ki so nastale, kot vedno, s prenosom zakonov, opaženih na končnih telesih, na elemente, ki smo si jih izmislili. Tako kot vse parcialne diferencialne enačbe matematične fizike, ki so poleg tega zaradi hkratnega delovanja več naravnih sil (elektrika, magnetizem, elastičnost, toplota, kemija) praktično neizračunljivo zapletene, so tudi te le nenatančne, okvirne slike določenih dejstev, čeprav so sestavljene iz nekoliko drugačnih elementov, kot so atomi, ki smo jih vajeni. Skladnost teorije z izkušnjami je Hertz iskal šele pozneje, tako kot bomo mi to storili za atomistično sliko.

Trditev, da atomizem, ne pa parcialne diferencialne enačbe, dejstvom dodaja nekaj tujega, se mi zdi neutemeljena. Vendar pa iz uporabnosti atomizma, ki je pogosto tako očitna iz dejstev, ne smemo sklepati, da je njegova slika vedno ustrezna. Kjer njegova neposredna uporaba še ni mogoča, je treba uporabiti druge slike, ki izhajajo iz drugih elementov. Uporabljati je treba le takšne atomistične slike, ki so podprte z dejstvi; nikoli pa ne smemo naravi vsiljevati kaj samovoljnega ali domišljijskega.

Glede tega atomizem zagotovo ni odgovoren za vse domislice, ki jih na njegovem področju uprizarjajo nepoznavalci. Kdo ve, ali bo energetika, ko bo dosegla sedanjo raven atomizma, prikrajšana za takšna pretiravanja?

Prav tako ne smemo nikoli iskati metafizičnih razlogov za sliko ali iz nje prehitro sklepati, na primer da so atomi v kemiji materialne točke. Prav tako ne smemo izgubiti izpred oči možnosti, da bi to sliko lahko nekoč nadomestile povsem drugačne slike, recimo da ne bi bili ozkogledi—morda celo take, ki bi izhajale iz mnogoterosti, ki sploh ne bi imele lastnosti našega trirazsežnega prostora, tako da bi na primer preproste geometrijske konstrukcije atomizma nadomestili z manipulacijami s števili, ki tvorijo zapleteno mnogoterost.

Zato sem zadnji človek, ki bi zanikal možnost, da bi lahko na drugačen način kot po poti atomizma pridobili boljšo sliko narave. Prav zato, da bi dobili merilo za vrednost

[2]Boltzmann, Ueber die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft. Wien. Sitzber. Bd. 105, S. 907, 7. Nov. 1896. Wied. Ann. Bd. 60, S. 231, 1897

katere koli druge takšne slike narave, si bom v tej knjigi prizadeval čim bolj jasno in dosledno razviti staro sliko mehanike. Zdaj pa naj kdo poskusi predstaviti drugo sliko sveta, ki bo brez hipotez, pa naj bo to na energetski ali zgolj fenomenološki osnovi, in to ne le z nekaj nedoločenimi namigi o njeni možnosti, ampak naj jo izpelje od začetka do konca z enako jasnostjo, kot bo v nadaljevanju predstavljena mehanistična slika. Hic Rhodus, hic salta![3]

Dokler se to še ni zgodilo, dopuščam možnost, ne pa gotovost, da bo drugačna slika sveta nadomestila mehanistično.

Toda slike, ki so manj določene in jasne od tiste, ki jo bomo razvili, bodo imele mesto le ob njej. Čeprav so bolj prilagodljive, bo naša slika najbolj notranje popolna, zato bo tako rekoč vzorčna slika, s katero se bo morala vsaka nova teoretična zasnova primerjati po jasnosti in preglednosti.

Izhajali bomo iz temeljne predpostavke, da je število ***materialnih točk*** veliko, vendar končno. Običajno pravijo, da se z diferencialnimi enačbami povsem izognemo sliki, ki izhaja iz končnega števila, vendar je to ponovno zavajanje. Diferencialne enačbe, tako kot atomizem, najprej zahtevajo predstavo o veliki končni množici številskih vrednosti in točk mnogoterosti, tj. točk v mnogoterosti števil. Šele nato trdijo, da slika nikoli ne predstavlja pojavov natančno, ampak se jim le približuje, in to toliko bolj, kolikor večja je množica teh točk in čim manjša je razdalja med njimi. A tudi tu se mi za zdaj ne zdi izključena možnost, da slika najbolje predstavlja pojave pri določenem, zelo velikem številu teh točk in da se z nadaljnjim povečevanjem tega števila od njih ponovno oddaljuje, saj atomi obstajajo v velikem, vendar končnem številu.

Kvalitativne zakone naravnih pojavov in tudi kvantitativne povezave v zelo preprostih pogojih, na primer pogoj ravnotežja težkega paralelepipeda, katerega robovi so v razmerju 1:2:3, si lahko seveda v mislih predstavljamo, tudi če ne izhajamo iz zelo velikega končnega števila elementov. Takoj ko pa želimo določiti kvantitativne zakone, ki veljajo v zapletenih pogojih, moramo vedno izhajati iz diferencialnih enačb, tj. najprej si moramo zamisliti veliko končno število različnih točk, torej razmišljati atomistično, pri čemer nič ne spremeni dejstvo, da se lahko nato s povečevanjem števila zamišljenih točk poljubno približamo kontinuumu, ne da bi ga kdaj dosegli.

Kakor koli že, prav danes je zanimivo obravnavati mehaniko, ki je najbolj nazorna znanstvena veda, po metodi, ki je ravno nasprotna trenutno moderni usmeritvi, in jo od samega začetka utemeljiti na zelo specifičnih miselnih slikah. Bralec bo morda sprva imel občutek, da se zgolj poigravamo z miselnimi slikami in pri tem pozabljamo na stvarnost. Kljub temu bomo najprej poskušali kar se da jasno in dosledno oblikovati idejno zgradbo. Če se izkaže, da je skladna z resničnostjo, je s tem opravičena samovoljnost osnovnih predpostavk. Želimo si le sliko narave, in če se tega jasno zavedamo, ne tvegamo, da bi sliki zaupali bolj kot izkušnjam in tako postali slepi za slednje.

§ 2 Temeljni pojmi privzeti iz nauka o prostoru in času. Prva temeljna predpostavka. Zveznost gibanja. Vsaka ***sprememba lege*** se zgodi v ***času*** in odvija v ***prostoru***. Zato moramo pred začetkom obravnave mehanike privzeti nauk o prostoru kot takem in času kot takem. Čas kot enodimenzionalno mnogoterost lahko predstavimo z mnogoterostjo števil, razporejenih v eni dimenziji, medtem ko razmerja

[3] "Tukaj je Rodos. Skoči." Iz Ezopove basni Hvalisavi popotnik. Pomen: Sedaj pokaži, kaj znaš. (OP)

v prostoru vodijo k posebni vedi, in sicer geometriji. Zato domnevamo, da poznamo celoten nauk o racionalnih in iracionalnih realnih številih, vključno z infinitezimalnim računom, ter celotno geometrijo. Res je, da imajo tudi te vede nekatere temeljne težave. Vendar se te težave enako prenašajo na vse pristope k načelom mehanike, saj morajo vsi izhajati iz prostora in časa. Ker pa želimo na tem mestu obravnavati le težave, značilne za mehaniko, se s težavami aritmetike in geometrije ne bomo ukvarjali.

Očitno ne moremo dobiti ***slike teles*** in njihovega gibanja, če vse dele celotnega ***neskončnega prostora*** obravnavamo enako. Zato želimo izpostaviti številne posamezne točke pred ostalimi. Te pred ostalimi izpostavljene točke prostora imenujemo ***materialne točke***.

Da bi določili ***lego*** [Lage] poljubne materialne točke v določenem trenutku, si zamislimo, da v prostoru ves čas obstaja določen pravokotni ***koordinatni sistem***. Kot lokacijo [Orte] naše materialne točke v določenem trenutku razumemo njeno lego glede na ta koordinatni sistem, ki jo določimo na znan način s kartezičnimi ali polarnimi koordinatami ali kako drugače.

Koordinatni sistem sicer ni nič realnega, vendar to po naših temeljnih izhodiščih ne predstavlja težave, saj gre trenutno zgolj za oblikovanje miselne slike. Kasneje bomo videli, da je mogoče koordinatni sistem izbrati na različne načine. Videli bomo tudi, da lahko lokacijo materialne točke, namesto da jo določimo z njeno relativno lego glede na koordinatni sistem, določimo tudi glede na tri posebej izpostavljene materialne točke ali telo, ki mora imeti določene lastnosti, ali pa glede na nekatere iz množice vseh točk izpeljane premice ali ravnine, tako da naša miselna slika vključuje zgolj podobne stvari (izključno materialne točke), ne pa tudi koordinatnega sistema. Vendar bi upoštevanje teh možnosti trenutno našo sliko le zapletlo. Naša slika je torej sestavljena iz koordinatnega sistema in vseh materialnih točk, ki imajo v vsakem trenutku določeno lego glede na ta koordinatni sistem. To, da lahko izberemo tudi drugačne koordinatne sisteme, ne da bi slika pri tem izgubila kar koli od svoje skladnosti z izkušnjami, nas za zdaj ne skrbi.

Prav tako nam z našega stališča ne povzroča težav vprašanje merila enakosti različnih časovnih intervalov, enako kot vprašanje o možnosti določitve absolutne lege v prostoru. Predpostavljamo možnost izdelave kronometra, ki deluje popolnoma enakomerno, ki je dovolj zaščiten pred vsemi motnjami in ga je mogoče nadomestiti z drugim, enako izdelanim, še preden se vsaj malo obrabi. Pogled na kronometer nam nato pokaže vrednost tiste neodvisne spremenljivke, ki smo jo poimenovali čas.

Še zdaleč si ne domišljam, da bi bilo tukaj in v nadaljevanju mogoče natančno definirati vsako besedo, preden jo uporabim.. (Glej prvo stran mojega traktata ”O vprašanju objektivnega obstoja procesov v neživi naravi” [”über die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur”])[45]. Razlog za jasnost

[4]Wien. Sitzber., Bd. 106, S. 83, 7. Januar 1897

[5]Prevod prvih dveh odstavkov:

Začel bom tako, da svoje stališče opišem z resnično anekdoto. Bilo je še v času mojega gimnazijskega študija, ko me je moj brat, zdaj že zdavnaj pokojni, pogosto zaman poskušal prepričati o nedoslednosti mojega ideala filozofije, ki ob uvedbi jasno opredeli vsak pojem. Nazadnje mu je to uspelo na naslednji način: Pri šolskem pouku so nam neko filozofsko delo (mislim, da ga je napisal Hume) hvalili kot posebej dosledno. Takoj sem ga v spremstvu brata poiskal v knjižnici. Na voljo je bilo le v angleškem izvirniku. Bil sem zmeden, ker nisem razumel niti besede v angleščini, vendar je brat takoj posredoval: »Če delo dela to, kar od njega pričakuješ, potem jezik ne more biti pomemben, saj mora biti v tem zgornjih slik je očiten; gre za pravila, kako razmišljati o prostorskih odnosih, ki si jih lahko vsakdo zlahka ponazori z ravnilom in svinčnikom ali pa z lesenimi palčkami in pletilkami ter so tako preprosta, da je že sama miselna slika običajno dovolj jasna tudi brez risbe. Pri tem se uporablja najmanjše število osnovnih zamisli. Prehod od nekaj posameznih, jasno predstavljivih točk do njihovega velikega števila je podan na urejen način s splošnimi pravili. Več kot lahko ponazorimo s temi preprostimi slikami, ki jih trenutno zagotovo potrebujemo za prikaz določenih pojavov, bolj razumljiva se nam mora zdeti narava.

Tisto, kar lahko razložimo le s pomočjo uvedbe dodatnih pojmov, se nam zdi veliko bolj nerazumljivo. Vsekakor pa tudi pri predstavitvi takšnih dodatnih pojmov ne smemo zgolj nedoločno namigovati na elemente, iz katerih izhajamo, temveč jih moramo opredeliti enako odkrito in jasno, kot to poskušam storiti tukaj.

Našo sliko zdaj dopolnimo tako, da si zamislimo določene ***zakonitosti za spremembo lege*** vseh teh materialnih točk s časom. ***Predpostavka 1***: Predstavljamo si, da se nikoli ob istem času dve različni materialni točki ne pokrivata oziroma ne ležita neskončno blizu druga drugi. Kadar pa se katerikoli materialni točki nahajata na nekem mestu (seveda relativno glede na naš koordinatni sistem), se bo v neskončno bližnjem trenutku tudi ena in samo ena materialna točka nahajala na mestu, ki je neskončno blizu temu prvemu mestu. Pravimo, da je ta druga materialna točka enaka prvi, in to imenujemo ***zakon zveznosti gibanja***. Ta nam omogoča prepoznavanje iste materialne točke v različnih časih. Množico vseh mest, na katerih se nahaja ena in ista materialna točka skozi ves čas, imenujemo ***tir*** (oz. tirnica ali trajektorija) [Bahn] te materialne točke; množico mest, skozi katera gre v omejenem časovnem obdobju, imenujemo ***pot*** [Weg] v tem času.

Zakon zveznosti lahko izrazimo tudi takole: vsaki materialni točki, ki je imela v določenem trenutku določene koordinate, ustreza v neskončno bližnjem trenutku ena in samo ena materialna točka s koordinatami, ki se od prvotnih razlikujejo za neskončno malo, in to imenujemo ***ista materialna točka***, tj. koordinate vsake materialne točke so zvezne funkcije časa.

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \chi(t)\,, \quad z = \psi(t)\,.$$

§ 3. Druga temeljna predpostavka. Obstoj odvodov koordinat po času. Pojem hitrosti in njenih komponent. Našo sliko dopolnimo s predpostavko, da morajo imeti pravkar omenjene funkcije $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$, ki podajajo odvisnost koordinat vsake materialne točke od časa, prvi in drugi odvod, ki nikjer ne postaneta neskončna, kar bomo imenovali ***temeljna predpostavka 2***. V prostoru z x, y, z oziroma $x_1 = x + \xi$, $y = y + \eta$, $z_1 = z + \zeta$ označimo koordinate prostorskih točk A in

primeru vsaka beseda jasno opredeljena, preden jo uporabimo.≪

Težko je jasneje pokazati, kakšno količino izkušenj ter besed in misli, s katerimi jih opisujemo, je treba predpostaviti kot znano, če se hočemo sploh razumeti, in da vsega ne moremo opredeliti, temveč moramo s pomočjo znakov, ki so prav tako znani, zgolj podati pravila, kako lahko naše opise poenostavimo in prilagodimo znanim izkušnjam. Tako kot Evklid v geometriji uporablja nedokazljive aksiome, tako bomo najprej preučili, katera dejstva tvorijo osnovo in predpogoj znanja. Pošteno bomo priznali, da s temi dejstvi ne moremo in ne smemo storiti ničesar drugega, kot da jih prikličemo v spomin s pomočjo znanih znakov, in ne bomo presenečeni, če je prav njihova razlaga doslej veljala za najtežjo stvar na svetu. . . . (OP)

A', v katerih se je nahajala določena materialna točka v času t oziroma $t+\tau$. Naj bo σ dolžina daljice AA'. Če ostane t konstanten, τ pa se vedno bolj zmanjšuje, se mora zgoditi naslednje:

1. Ulomek ξ/τ se približuje določeni končni vrednosti, ki jo označimo z u. V skladu s simboliko diferencialnega računa jo označimo z dx/dt ali $\varphi'(t)$. Enako velja za η/τ in ζ/τ. Torej

$$\left.\begin{aligned} \lim \frac{\xi}{\tau} &= u = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \\ \lim \frac{\eta}{\tau} &= v = \frac{dy}{dt} = \chi'(t), \\ \lim \frac{\zeta}{\tau} &= w = \frac{dz}{dt} = \psi'(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kjer so te količine lahko pozitivne ali negativne ali enake nič in jih imenujemo ***komponente hitrosti*** materialne točke v treh koordinatnih smereh.

2. Ker za vsako vrednost τ obstaja enačba

$$\sigma = +\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

se količnik σ/τ približuje limiti

$$\begin{aligned} c = \sqrt{u^2+v^2+w^2} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

ki jo imenujemo ***hitrost*** materialne točke v času t in ima lahko le končno pozitivno vrednost, vključno z ničlo.

3. Če ta limita ni enaka nič, potem se smer daljice, ki poteka od A proti A', v vsakem primeru približuje določeni ***smeri*** v prostoru, ki ima določeno ***usmeritev*** in jo imenujemo smer hitrosti materialne točke v času t. V splošnem bomo kote poljubne usmerjene (v določeni smeri narisane) daljice G s pozitivnimi koordinatnimi osmi označili z (G,x), (G,y) in (G,z), kot med dvema usmerjenima daljicama G in H pa s (G,H). Ker za vsako vrednost τ obstaja enačba $\xi = \sigma\cos(\sigma,x)$ z dvema podobnima, ki veljata za preostali dve koordinatni osi, potem velja tudi:

$$u = c\cos(c,x)\,, \quad v = c\cos(c,y)\,, \quad w = c\cos(c,z)\,. \tag{3}$$

Naj bodo A'', A''', …, $A^{(n)}$ točke prostora, v katerih se materialna točka nahaja v časih $t+2\tau$, $t+3\tau$, …, $t+n\tau = T$, potem se, kot vemo iz integralskega računa, vsota daljic AA', $A'A''$, …, $A^{(n-1)}A^{(n)}$, ko se τ manjša, medtem ko ostajata t in produkt $n\tau$ konstantni končni količini, približuje določeni limiti, ki jo imenujemo ***dolžina poti***, opravljeni v času $T-t$, in jo s simboli običajnimi v integralskem računu, označimo s $\int_t^T c\,dt$, medtem ko za $c\,dt$ pogosto pišemo ds, tako da je

$$\frac{ds}{dt} = c = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{4}$$

Prva od enačb nima drugega pomena kot to, da se prirastek abscisne osi ξ razlikuje od prirastka časa τ, pomnoženega z u, le za količino, ki se, ko jo delimo z τ, z manjšanjem τ približuje ničli. Pomen takšnih enačb je še posebej kratek in jasen, če so prirastki spremenljivk na začetku označeni z diferencialnimi znaki pred zadevnimi spremenljivkami. Enakost dveh diferencialnih izrazov ne pomeni nič drugega kot to, da se razlikujeta le za količino, ki se, deljena z enim od diferencialov (če je koeficient enega od njih enak nič, je treba izbrati tega), z manjšanjem vrednosti imenovalca približuje limiti nič (je neskončno majhna višjega reda). Enakost dveh diferencialnih izrazov je torej dokazana, če lahko geometrijsko ali kako drugače pokažemo, da je njuna razlika neskončno majhna višjega reda.

V tem smislu bomo pogosto uporabljali enačbe med diferencialnimi izrazi, zato enačbe (1), (2), (4) zapišemo preprosto v obliki:

$$\left.\begin{aligned} &dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt, \\ &ds = c\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Zadnja od teh enačb pove, da se razlika med zelo majhno dolžino poti ds in časom dt, pomnoženim s c, v katerem je bila opravljena, deljeno z dt, približuje ničli, iz česar sledi, da je vsota $\int ds$ dolžin vseh poti, opravljenih v končnem času, enaka integralu $\int c\,dt$, kjer je c podana kot funkcija časa.

Kot je znano, obstajajo tudi funkcije, ki se neskončno malo spremenijo za vsako neskončno majhno spremembo argumenta, ne da bi se količnik spremembe argumenta in funkcije približal določeni limiti za vsako vrednost argumenta z neskončnim zmanjšanjem prvega; zato predpostavka 2 nikakor ne izhaja iz predpostavke 1[6]. Kdor se je učil mehaniko, se bo spomnil težav, ki jih je imel pri razumevanju dokaza, da lahko za zelo kratek čas gibanje obravnavamo kot enakomerno premočrtno in da lahko v tem času sile obravnavamo kot nespremenljive. Težava je preprosto v tem, da omenjeni dokaz ni pravilen.

Analitične funkcije smo ustvarili prav zato, da bi predstavili izkustvena dejstva. Njihovo odvedljivosti ne moremo jemati kot dokaz odvedljivosti empirično določenih funkcij, saj je število možnih funkcij, ki niso odvedljive, prav tako neskončno veliko kot število odvedljivih funkcij. Prav tako je dejstvo, da vsaka črta, ki jo narišemo ročno ali strojno odraža značilnosti odvedljive funkcije, lahko dokaz, da je odvedljivost funkcij, ki so v mehaniki določene empirično, glede na naše današnje možnosti opazovanja nekaj, kar je določeno izkustveno.

Zato smo odvedljivost brez posebnega pojasnila preprosto navedli kot predpostavko, ki se ujema z dosedanjimi izkušnjami.

§ 4. Uvedba vektorjev. V nadaljevanju nam bo pogosto v pomoč ***vektorski račun***. Zato bomo že na tem preprostem primeru obravnavali njegove osnovne pojme. Pod pojmom vektor razumemo daljico določene ***dolžine***, določene ***smeri*** in določene ***usmerjenosti*** (ki označuje, katera od njenih končnih točk velja za začetno in katera za končno točko). Ker je namen vektorja le ta, da nam omogoči razumeti te tri lastnosti, je vseeno, iz katere točke prostora je narisan, dokler vektor ni namenjen izražanju česa

[6]Zvezna funkcija ni nujno odvedljiva, primer je Weirstrassova funkcija. (OP)

drugega. Najpogosteje narišemo vektor iz koordinatnega izhodišča O (to izberemo kot začetno točko obravnavane daljice).

Pod vsoto dveh vektorjev (***vektorska vsota***) razumemo tretji vektor, ki ga dobimo, če drugi vektor narišemo iz končne točke prvega vektorja in povežemo začetno točko prvega vektorja s končno točko drugega vektorja. Tako dobimo vsoto dveh vektorjev na enak način kot pri paralelogramu sil, kjer dobimo ***rezultanto*** dveh sil. Vektor, katerega vsota z drugim vektorjem daje tretji vektor, imenujemo razlika (***vektorska razlika***) tretjega in drugega vektorja. Če je projekcija vektorja na abscisno os enaka vsoti projekcij dveh drugih vektorjev na abscisno os, in enako velja za drugi dve koordinatni osi, potem je, kot je takoj razvidno, prvi vektor vsota drugih dveh. Enako velja za razliko dveh vektorjev in vsoto več kot dveh vektorjev. Da bi našli vsoto več vektorjev, je treba k vsoti prvega in drugega vektorja prišteti tretji vektor in tako naprej. Iz končne točke B prvega vektorja AB potegnemo premico BC enake dolžine in smeri kot drugi vektor, iz končne točke C te premice potegnemo premico CD enake dolžine in smeri kot tretji vektor, in tako naprej. Daljica, ki poteka od začetne točke A prvega vektorja do končne točke M zadnje od teh daljic, predstavlja vsoto vseh vektorjev. Sliko

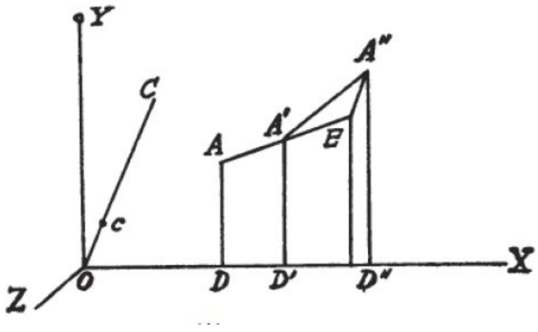
$$ABCD \dots M$$

za katero seveda ni nujno, da leži v ravnini, imenujemo ***vektorski poligon***, če vektorji predstavljajo sile, pa ***legopis sil*** [Kräftepolygon].

Seveda lahko lego katere koli materialne točke v katerem koli času prikažemo tudi z vektorjem, ki ga potegnemo iz katere koli točke v prostoru, npr. iz koordinatnega izhodišča, proti tisti točki prostora, v kateri se materialna točka v danem času nahaja. Razdaljo AA' med prostorskima točkama A in A', v katerih se materialna točka nahaja v času t in $t + \tau$, lahko obravnavamo kot vektor, ki je enak razliki vektorjev OA' in OA, ki povezujeta točki A in A' s koordinatnim izhodiščem O. Iz poljubne točke, npr. iz izhodišča O, lahko narišemo tudi vektor Ob, ki ima enako smer in dolžino kot AA'. Ker pa se dolžina AA' zmanjšuje z zmanjševanjem τ do neskončnosti, lahko dolžino tega vektorja Ob povečamo glede na poljuben čas (časovno enoto) τ, ki jo enkrat za vselej izberemo kot konstanto. Limito OB, ki se ji tako povečani vektor približuje z zmanjševanjem τ, imenujemo ***vektor hitrosti*** obravnavane materialne točke v času t. Z njim prikažemo hitrost obravnavane materialne točke po velikosti in smeri, njene projekcije na tri koordinatne osi, torej njene komponente u, v, w, ne glede na to, iz katere točke v prostoru je narisan.

§ 5. Pojem pospeška in njegove komponente. V osnovno predpostavko 2 smo vključili tudi pogoj, da so koordinate po času dvakrat odvedljive. Če so ti odvodi v končnem času $n\tau$ enaki nič, potem vezne daljice AA', $A'A''$, $A''A'''$, …, prostorskih točk, kjer se nahaja materialna točka v časih t, $t + \tau$, $t + 2\tau$, …, $t + n\tau$, ležijo na isti premici in so vse enake dolžine; tir materialne točke je torej premica, po kateri točka v enakih časih opravi enake poti. Hitrost je konstantna, gibanje pa enakomerno. Vsaka pospešitev ali upočasnitev gibanja, vsaka ukrivljenost tira na eno ali drugo stran, je torej posledica dejstva, da imajo drugi odvodi koordinat po času vrednosti, različne od nič. Zato je treba preučiti predvsem vrednosti teh drugih odvodov.

Naj se materialna točka v časih t, $t + \tau$ in $t + 2\tau$ nahaja v točkah prostora A, A', in A'', katerih projekcije na abscisno os so D, D', D'' (glej sliko 1). Naj bodo x, y,



Slika 1

z oziroma x', y', z' in x'', y'', z'' koordinate materialne točke v času t, $t+\tau$ oziroma $t+2\tau$. Potem je, kot je znano, drugi odvod abscise x materialne točke po času, ki ga imenujemo ***komponenta pospeška*** te materialne točke v smeri abscise, enak limiti izraza

$$\frac{x'' - x' - (x' - x)}{\tau^2} = \frac{D'D'' - DD'}{\tau^2} \tag{6}$$

ko se τ neskončno zmanjšuje; razdalji DD' in $D'D''$ sta projekciji vektorjev AA' in $A'A''$ na absciso. Števec ulomka v formuli je torej projekcija razlike teh dveh vektorjev na abscisno os. Ker je tu očitno vseeno, iz katere točke sta vektorja narisana, narišimo oba vektorja iz iste točke v prostoru, npr. vektor AA' nadomestimo z vektorjem $A'E$ enake dolžine in smeri, ki je narisan iz A'. Daljica EA'' končnih točk dveh vektorjev $A'E$ in $A'A''$, oziroma daljica Oc enake dolžine, potegnjena vzporedno z njo iz koordinatnega izhodišča, tako predstavlja razliko dveh vektorjev $A'A''$ in AA'. Projekcija Oc oziroma EA'' na absciso je torej enaka števcu v formuli (6). Limito, ki se ji ta razlika, deljena s τ^2, približuje, imenujemo komponenta pospeška v smeri abscise. Ker enako velja tudi za drugi dve koordinatni smeri, nam vektor EA'' oziroma Oc natančno prikaže ***ukrivljenost tira*** ter pospeševanje ali zaviranje gibanja. Dolžino tega vektorja bomo spet narisali v razmerju med τ^2 in kvadratom izbrane časovne enote. Limita OC, ki se ji približa tako povečan vektor, potegnjen iz koordinatnega izhodišča pri konstantnem t in zmanjšujočem se τ, imenujemo ***vektor pospeška*** ali, krajše, ***pospešek*** obravnavane materialne točke v času t. Njegove komponente v treh koordinatnih smereh so enake temu, kar smo že imenovali komponente pospeška v treh koordinatnih smereh, tj. enake $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ in $\dfrac{d^2z}{dt^2}$. Dolžina vektorja OC je pozitivni kvadratni koren iz:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

Seveda bi isti vektor OC dobili tudi, če bi končni točki dveh vektorjev hitrosti OB in OB' materialne točke v času t in $t+\tau$ povezali z daljico in poiskali limito, ki se ji ta daljica, deljena z τ, približuje.

Naj bodo (g, x), (g, y) in (g, z) koti med pospeškom naše materialne točke (tj. vektorjem OC) in tremi koordinatnimi osmi, g pa velikost tega pospeška (tj. dolžina tega vektorja); torej:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\cos(g,x)\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g\cos(g,y)\,, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g\cos(g,z)\,. \tag{7}$$

Če je pospešek materialne točke v nekem primeru predstavljen s poljubnim vektorjem OC, v drugem primeru pa z drugim vektorjem OD, potem kot vsoto teh dveh pospeškov razumemo pospešek, ki ga predstavlja vsota vektorjev OC in OD. Če so komponente pospeška OC glede na koordinatne smeri enake

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2}\,,$$

pospeška OD pa

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2y_2}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2z_2}{dt^2}\,,$$

potem so komponente vsote obeh pospeškov naslednje

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^2y_2}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{d^2z_2}{dt^2}. \tag{8}$$

Podobno definiramo vsoto treh ali več pospeškov.

§ 6. Temeljne predpostavke 3 – 7. Naj bo dano poljubno število (n) materialnih točk. V nekem času t naj se te nahajajo v točkah prostora A_1,A_2,A_3,. . .,A_n. Sliko dopolnimo z naslednjimi temeljnimi predpostavkami, ki nam povejo, kako ugotoviti pospeške iz medsebojne lege materialnih točk.

Temeljna predpostavka 3. Pospešek katere koli materialne točke (ki ga je treba obravnavati kot vektor, kot je bilo omenjeno zgoraj) je enak vsoti $n-1$ pospeškov (ki jih je treba obravnavati na enak način), pri čemer ima vsak smer daljice, ki je potegnjena skozi obravnavano materialno točko in eno od preostalih materialnih točk. Ti pospeški se imenujejo pospešek, ki ga druga točka povzroča prvi, ali pa pospešek prve materialne točke, ki ga povzroča druga.

Temeljna predpostavka 4. Pospešek, ki ga ima katera koli materialna točka zaradi delovanja druge, je vedno usmerjen nasproti pospešku, ki ga ima druga točka zaradi delovanja prve. Če torej prvi pospešek poteka v smeri daljice, ki je potegnjena od prve proti drugi točki (primer B), potem je drugi pospešek usmerjen v smeri daljice, ki je potegnjena od druge proti prvi točki. Pravimo, da se materialni točki medsebojno ***privlačita***. Če pa prvi pospešek poteka v smeri podaljška daljice, ki je potegnjena od druge točke onkraj prve točke (primer A), potem ima tudi drugi pospešek smer podaljška daljice, ki je potegnjena od prve točke onkraj druge točke, in se materialni točki medsebojno ***odbijata***.

Temeljna predpostavka 5. Velikost pospeška g_{12} katere koli materialne točke glede na katero koli drugo točko ni odvisna niti od absolutne lege obeh točk v prostoru niti od absolutne vrednosti časa, niti od narave okolice ali hitrosti zadevnih točk, niti od smeri daljice, ki ju povezuje v prostoru, temveč izključno od dolžine r_{12} te daljice. To pomeni, da obstaja ena sama funkcija $F\,(r_{12})$ te dolžine. Funkciji $F\,(r_{12})$ pripišemo pozitivni ali negativni predznak, in ker pospešku g_{12} vektorja vedno pripada pozitivni predznak, podamo $g_{12} = +F(r_{12})$ ali $g_{12} = -F(r_{12})$, odvisno od tega, ali se točki odbijata ali privlačita, torej odvisno od tega, ali pospešek poteka v smeri podaljška vezne daljice ali v smeri same daljice. Oblika te funkcije je za zdaj popolnoma nedoločena[7].

Temeljna predpostavka 6. Velikost pospeška, ki ga prva materialna točka posreduje drugi, ni nujno enaka tisti, ki jo druga točka posreduje prvi. Če postavimo, da je velikost pospeška g_{21} druge materialne točke zaradi prve enaka $\mu_2 F(r_{12})$, potem ima μ_2 za ta par točk konstantno vrednost v vsakem času in na vseh razdaljah. Ta vrednost je nujno pozitivna, saj za drugo točko v primeru privlačenja velja $g_{21} = +\mu_2 F(r_{12})$, v primeru odboja pa $g_{21} = -\mu_2 F(r_{12})$.

Temeljna predpostavka 7. Naj bo r_{13} razdalja med poljubno izbrano prvo materialno točko in tretjo točko. Naj $\Phi(r_{13})$ označuje pospešek prve materialne točke glede na tretjo, $\mu_3 \Phi(r_{13})$ pa pospešek tretje točke glede na prvo. V tem primeru je pospešek druge točke glede na tretjo vedno v konstantnem razmerju $\mu_2 : \mu_3$. Če je r_{23} razdalja med drugo in tretjo točko, $\Psi(r_{23})$ pa pospešek druge točke glede na tretjo, mora biti $\frac{\mu_3}{\mu_2}\Psi(r_{23})$ pospešek tretje točke glede na drugo.

Za bolj simetrično obliko te predpostavke z m_1 označimo poljubno pozitivno število, ki je konstantno skozi čas in prostor, in postavimo:

$$\frac{m_1}{\mu_2} = m_2, \quad \frac{m_1}{\mu_3} = m_3.$$

Nadalje označimo količino $m_1 \cdot F(r_{12})$, ki bo očitno tudi funkcija r_{12} z enakim predznakom kot $F(r_{12})$, s $f_{12}(r_{12})$; količini $\frac{m_1}{\mu_2}\Phi(r_{13})$ in $\frac{m_1}{\mu_2}\Psi(r_{23})$ z $f_{13}(r_{13})$ in $f_{23}(r_{23})$. Nato lahko zgornja razmerja zapišemo v naslednji simetrični obliki:

$$\begin{aligned} m_1 g_{12} &= m_2 g_{21} = \pm f_{12}(r_{12}), \\ m_1 g_{13} &= m_3 g_{31} = \pm f_{13}(r_{13}), \\ m_2 g_{23} &= m_3 g_{32} = \pm f_{23}(r_{23}). \end{aligned}$$

pri čemer za odboj velja pozitivni predznak, za privlačenje pa negativni predznak.

Če v razmislek uvrstimo še četrto materialno točko, lahko določimo pospeške

$$g_{14} = F_1(r_{14}), \quad g_{24} = \Phi_1(r_{24}), \quad g_{34} = \Psi_1(r_{34}),$$

ki jih imajo na razdaljah r_{14}, r_{24} in r_{34} prva, druga in tretja materialna točka glede na četrto, vendar je treba za določitev pospeška g_{41} četrte materialne točke glede na prvo določiti faktor μ_4, s katerim moramo pomnožiti pospešek $F_1(r_{14})$, da bi dobili pospešek g_{41} četrte materialne točke glede na prvo. Ker naj bi temeljna predpostavka 7, veljala za tri poljubne materialne točke, mora biti pospešek g_{42} četrte materialne točke glede na drugo $\frac{\mu_4}{\mu_2}\Phi_1(r_{24})$, pospešek g_{43} četrte materialne točke glede na tretjo pa mora biti

[7] Tu pa je brez bistvenega vpliva na jasnost možna posplošitev slike, ki sem jo tudi poskusil, in sicer s predpostavko, da funkcija F vsebuje tudi prvi ali celo drugi odvod r_{12} po času. Če je slednji linearno vsebovan v njem, lahko rečemo tudi, da faktorji m, o katerih bomo govorili pozneje, niso konstantni. Vendar pa ima ta posplošitev tako majhen praktični pomen, da se z njo tukaj ne bomo ukvarjali.

enak $\dfrac{\mu_4}{\mu_3}\Psi_1\left(r_{34}\right)$. Če zdaj popolnoma enako kot prej določimo

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{\mu_4} = m_4, \quad m_1 = F\left(r_{14}\right) = f_{14}\left(r_{14}\right), \\ \frac{m_1}{\mu_2}\Phi_1\left(r_{24}\right) = m_2\Phi_1\left(r_{24}\right) = f_{24}\left(r_{24}\right), \\ \frac{m_1}{\mu_3}\Psi_1\left(r_{34}\right) = m_3\Psi_1\left(r_{34}\right) = f_{34}\left(r_{34}\right), \end{aligned}$$

dobimo:

$$\begin{aligned} m_1 g_{14} = m_4 g_{41} = \pm f_{14}\left(r_{14}\right), \\ m_2 g_{24} = m_4 g_{42} = \pm f_{24}\left(r_{24}\right), \\ m_3 g_{34} = m_4 g_{43} = \pm f_{34}\left(r_{34}\right). \end{aligned}$$

Razširitev teh enačb na več kot štiri materialne točke ni nobena težava.

§ 7. Masa in sila. Enakost učinka in nasprotnega učinka. V skladu s prejšnjim paragrafom za vsako materialno točko določimo število m, imenovano njena ***masa***, in za dve poljubni materialni točki funkcijo $f\left(r\right)$ njune medsebojne razdalje r, ki jo imenujemo ***sila***, ki deluje med tema točkama na tej razdalji. Absolutno vrednost $f\left(r\right)$ imenujemo ***velikost sile***. Velikost sile je enaka produktu mase prve točke in pospeška, ki ga doseže glede na drugo, in obratno za drugo točko glede na prvo. Velikost sile, tako kot absolutno vrednost pospeška, vedno obravnavamo kot pozitivno. Smer pospeška, ki ga druga točka prenese na prvo, imenujemo ***smer sile***, s katero druga točka deluje na prvo. Ta smer je vedno nasprotna smeri sile, s katero prva točka deluje na drugo, in je usmerjena proti drugi točki ali stran od nje, odvisno od tega, ali je funkcija $f\left(r\right)$ pozitivna ali negativna.

Tako je sila, s katero prva materialna točka deluje na drugo, vedno enaka, vendar nasprotno usmerjena sili, s katero druga točka deluje na prvo. To imenujemo ***načelo učinka in nasprotnega učinka***, ki pravi, da sta učinek in nasprotni učinek enaka, vendar nasprotno usmerjena.

Na kratko pravimo, da je sila, ki deluje med dvema točkama, ***centralna sila*** [Centrikraft], kar pomeni:

1. da je njena velikost odvisna zgolj od razdalje med točkama,

2. da je njena smer enaka smeri daljice, ki povezuje ti dve točki,

3. da sta učinek in nasprotni učinek enaka po velikosti in nasprotno usmerjena.

Da bi bilo gibanje zagotovo nedvoumno določeno, dodatno predpostavimo, da ima fizikalno določena funkcija razdalje r, ki določa silo, končen prvi odvod (vključno z nič) za vse ustrezne vrednosti r, ali pa vsaj, da količnik prirastka r in ustreznega prirastka $f\left(r\right)$ za te vrednosti r nikoli ne postane neskončen.

Med masami m vseh materialnih točk je ena povsem poljubno izbrana, preostale pa so določene na podlagi te in eksperimentalnih dejstev.

Namesto navajanja virov bi raje poudaril, da v tej knjigi zgolj predstavljam že znano in ne trdim, da sem odkril katero koli od navedenih trditev. Vendar pa naj omenim, saj je morda manj znano, da je uporabljeno definicija mase podal Macha[8].

Sliko bi poenostavili, če bi predpostavili, da imajo vse materialne točke enako maso, torej da dve točki povzročata druga drugi enake, a nasprotno usmerjene pospeške. Če bi predpostavili še, da v gostejših telesih preprosto obstaja več materialnih točk na enoto prostornine, bi lahko prav tako dobro opisali vse pojave. Tudi materialno točko z maso m bi lahko približno opisali kot množico m zelo tesno povezanih točk z maso 1. Uporabili smo splošnejšo sliko, ker je ta prav tako jasna in določena.

Seveda so osnovne predpostavke med seboj tesno povezane, zato bi pogosto naleteli na protislovja, če bi opustili ali spremenili le eno ali nekaj izmed njih, medtem ko bi druge ohranili nespremenjene. Na primer, če predpostavimo, da sta pospeška dveh materialnih točk neodvisna od njune lege v prostoru in od absolutnega časa, vendar opustimo eno izmed predpostavk 4, 5 ali 7, bi lahko hitrost dveh trdno povezanih točk sčasoma rasla v neskončnost. Seveda bi morali pri tem še vedno predpostaviti, da naprava, ki jih povezuje, deluje skladno z našimi predpostavkami. Iz tega pa ne sledi, da lahko vse naše predpostavke nadomestimo z načelom energije ali drugimi splošnimi načeli, čeprav bi morda nekatere lahko.

Lahko bi se osredotočili na enačbo kinetične energije namesto na pojem pospeška, na primer s predpostavko, da ta enačba velja ločeno za vsako koordinatno smer. To bi bilo morda privlačno, glede na pomembno vlogo načela energije v naravi kot celoti. Vendar nisem našel načina, kako bi temeljne predpostavke res bistveno spremenil z uporabo splošnejših načel. Tudi nisem posebej vztrajal pri iskanju take rešitve, saj se mi zdi, da ni bistvena, če že izhajamo iz medsebojnega delovanja materialnih točk na daljavo in iz tega izpeljemo Hamiltonovo načelo, enačbe elastičnosti, hidrodinamike itd.

§ 8. Splošne enačbe gibanja. Če je sila, ki deluje med dvema materialnima točkama, katerih koordinate so x_1, y_1, z_1 oziroma x_2, y_2, z_2, odbojna, potem je, kot smo že omenili, pospešek g_{12} prve materialne točke, ki ga povzroča druga, usmerjen v smer podaljška daljice r_{12}, ki poteka od druge proti prvi in tvori s pozitivnimi koordinatnimi osi kote, katerih kosinusi so

$$\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, \quad \frac{y_1 - y_2}{r_{12}}, \quad \frac{z_1 - z_2}{r_{12}}$$

To so torej kosinusi kotov (g_{12}, x), (g_{12}, y), (g_{12}, z), ki jih pospešek g_{12} tvori s pozitivnimi koordinatnimi osmi. Tudi funkciji $f_{12}\,(r_{12})$ damo pozitivni predznak. Če bi torej prvo materialno točko pospešila le druga, bi po formuli dobili

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g_{12} \cos(g_{12}, x) = \frac{1}{m_1} f_{12}\,(r_{12})\,\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}$$

z dvema podobnima enačbama za osi y in z. Če ima pospešek nasprotno smer, ga ponovno obravnavamo kot pozitivnega, vendar kosinusu dodelimo nasprotni predznak, torej nastavimo

$$\cos(g_{12}, x) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}.$$

[8] Carl's Repertormm, Bd. 4. E. Mach, Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, Prag, 1872, pp. 59

Ker pa potem tudi funkciji $f_{12}(r_{12})$ damo nasprotni predznak, je tudi v tem primeru

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} f_{12}(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}.$$

V skladu s tretjo osnovno predpostavko je skupni pospešek prve materialne točke vektorska vsota različnih pospeškov, ki jih povzročajo vse druge materialne točke in v skladu z (8) je skupna komponenta pospeška v abscisni smeri enaka algebrski vsoti posameznih pospeškov. Tako imamo v splošnem

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum_{k=2}^{n} f_{1k}(r_{1k}) \frac{x_1 - x_k}{r_{1k}}, \tag{9}$$

z dvema podobnima enačbama za preostali dve koordinati in $3n-3$ podobnih enačb za druge materialne točke.

Vrednosti spremenljivke, ki jo je treba sešteti, podane nad in pod znakom za seštevanje, izražajo (kot vedno v nadaljevanju), da je treba v izrazu, ki mu je dodan znak za seštevanje, tej spremenljivki dati vse pozitivne celoštevilske vrednosti od spodaj do vključno zgoraj, nato pa je treba vse tako nastale izraze sešteti. Z $\varphi_{hk}(r_{hk})$ označimo nedoločeni integral $\int f_{hk}(r_{hk})\, dr_{hk}$, pri čemer ima lahko integracijska konstanta poljubno vrednost.

Pogosto bomo morali v izrazu, ki vsebuje koordinate katere koli obravnavane materialne točke, zelo malo spremeniti eno od teh koordinat, vse druge pa bodo ostale konstantne. Spremembe, ki nastanejo na ta način, imenujemo delne in jih označujemo z znakom ∂ Ne smemo jih zamenjevati s spremembami, ki nastanejo v času dt (skupna sprememba), saj se v tem času na splošno spremenijo vse koordinate. Tako ima parcialni diferencialni odvod $\frac{\partial r_{hk}}{\partial x_h}$ od r_{hk} na x_h naslednji pomen: od vseh koordinat malo spremenimo le x_h, poiščemo na ta način spremenjen r_{hk}, ga delimo s spremembo x_h in končno poiščemo limito, ki se ji količnik približuje ko se sprememba x_h manjša. Ker je

$$r_{hk} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2},$$

lahko po pravilih diferencialnega računa najdemo:

$$\frac{\partial r_{hk}}{\partial x_h} = \frac{x_h - x_k}{r_{hk}},$$

in podobno

$$\frac{\partial r_{hk}}{\partial y_h} = \frac{y_h - y_k}{r_{hk}}, \qquad \frac{\partial r_{hk}}{\partial z_h} = \frac{z_h - z_k}{r_{hk}}.$$

Poleg tega sledi iz definicije funkcij φ

$$\frac{\partial \varphi(r_{hk})}{\partial x_h} = \varphi'(r_{hk}) \frac{x_h - x_k}{r_{hk}} = f(r_{hk}) \frac{x_h - x_k}{r_{hk}},$$

in podobno za y in z.

V izrazu $\varphi_{hk}\,(r_{hk})$ po vrsti vstavimo h enak vsakemu pozitivnemu celemu številu od ena do vključno n in za vsak h ponovno postavimo k enako vsakemu od teh števil, razen tistemu, ki je enako h. Vsoto vseh tako dobljenih izrazov označimo z

$$\sum\sum\varphi_{hk}(r_{hk}) = -V. \tag{10}$$

Potem lahko enačbo zapišemo v obliki:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \tag{11}$$

z dvema podobnima enačbama za drugi dve koordinatni osi in $3n-3$ podobnimi enačbami za druge materialne točke. Komponenta sile, ki deluje v kateri koli koordinatni smeri na katero koli materialno točko, je torej negativni parcialni odvod funkcije vseh koordinat V (***potencial*** [Kraftfunction]) po ustrezni koordinati.

Po mojem mnenju so pri odvodih po času še vedno prisotne določene nejasnosti. Razen v redkih primerih, ko lahko najdemo analitično funkcijo z natančno določenim odvodom po času, je pri izdelavi numerične slike potrebno razmisliti drugače. Vedno je treba čas razdeliti na končno število časovnih intervalov, preden preidemo na limito. Morda naše formule le približno izražajo povprečne vrednosti, ki izhajajo iz številnih drobnih elementov, ki jih ni mogoče natančno določiti. Vendar do zdaj nimamo pomembnih dokazov, ki bi to potrdili.

§ 9. Različni pojmi. Rezultanta. Komponente. Namesto da rečemo, da druga materialna točka povzroča prvi pospešek g_{12}, lahko tudi rečemo: ta pospešek povzroča sila $\pm f_{12}\,(r_{12})$, s katero druga točka deluje na prvo, vendar nikoli ne smemo pozabiti, da so to le različne besede za eno in isto dejstvo. Kot smo že omenili, absolutno vrednost funkcije $f_{12}\,(r_{12})$, ki je enaka produktu mase m materialne točke, na katero deluje, in pospeška g, ki ga povzroča, imenujemo ***velikost sile***, smer tega pospeška pa ***smer sile***. Na popolnoma enak način kot pospeške lahko tudi sile izrazimo z vektorji (puščicami), katerih dolžina je enaka velikosti obravnavane sile in katerih smer sovpada s smerjo sile, torej tudi s smerjo pospeška, ki ga povzroča. Ti vektorji, ki predstavljajo sile, običajno ne izhajajo iz koordinatnega izhodišča, temveč iz točke, na katero deluje sila.

Vektorska vsota vseh sil, ki delujejo na materialno točko, predstavlja silo, ki jo imenujemo ***rezultanta***; posamezne sile imenujemo njene ***komponente***. Ker je v skladu s tretjo temeljno predpostavko dejanski pospešek materialne točke vektorska vsota različnih pospeškov, ki bi jih ta imela zaradi posameznih sil, in ker se vektorji, ki predstavljajo sile, od vektorjev, ki predstavljajo pospeške, razlikujejo le po tem, da so dolžine prvih vedno večkratne, sledi, da ima dejanski pospešek materialne točke smer rezultante sil, njegov produkt z maso m materialne točke pa je enak velikosti rezultante sil. Dejanski pospešek torej ugotovimo na podlagi rezultante sil, tako kot pospešek, ki ga povzroči posamezna sila, ugotovimo na podlagi te posamezne sile.

To lahko zlahka še bolj posplošimo. Če je vektor $\mathfrak{R}$ vsota poljubnih drugih vektorjev C, potem je pospešek, ki ga sila, predstavljena z vektorjem $\mathfrak{R}$, daje materialni točki, vektorska vsota pospeškov, ki bi jih različne sile, predstavljene z vektorji C, dale tej materialni točki. Ker je vseeno, v kakšnem vrstnem redu so vektorji združeni v vsoto, in ker so poleg tega vektorji, ki predstavljajo sile, vedno m–krat daljši in enako usmerjeni kot vektorji, ki predstavljajo ustrezne pospeške, ti pa se v skladu s tretjo osnovno predpostavko seštevajo kot vektorji, bo materialna točka zaradi ene same sile $\mathfrak{R}$ (rezultante) imela enak pospešek kot zaradi vseh sil C (njenih komponent) skupaj, ne glede na to, ali nanjo sicer ne deluje nobena druga sila ali pa nanjo poleg tega delujejo še druge sile, katerih pospeški se nato prištejejo k tej sili.

Vsota dveh vektorjev je lahko vektor ničelne dolžine le, če sta oba vektorja enako dolga in nasprotno usmerjena. Materialna točka, na katero delujeta dve sili, torej ne bo imela nobenega pospeška oziroma se bo obnašala tako, kot da nanjo ne bi delovala nobena sila, če imata ti dve sili enako velikost, vendar nasprotno smer. Ker se rezultanta poljubnega števila sil, ki delujejo na materialno točko, določi s pomočjo slike 5 v § 4 (mnogokotnik sil, za dve sili pa paralelogram sil), bodo sile ohranile svoje ravnotežje, tj. točke ne bodo pospešile, če je mnogokotnik sil $ABC, \ldots, M$ zaprt, tj. njegova končna točka M sovpada z začetno točko A.

Iz konstrukcije mnogokotnika sil je razvidno, da lahko učinek sile P v celoti nadomestimo z učinkom treh sil

$$X = P\cos(P,x)\,, \quad Y = P\cos(P,y)\,, \quad Z = P\cos(P,z)\,, \tag{12}$$

ki delujejo v treh koordinatnih smereh in jih imenujemo komponente sile glede na koordinatne smeri.

S P_1 označimo rezultanto vseh sil, ki delujejo na materialno točko mase m_1, na katero se nanašajo enačbe (9), s P_1', P_1'', ... pa vse komponente, na katere lahko rastavimo silo P_1. Komponente sil P_1', P_1'', ... v koordinatnih smereh označimo z X_1, Y_1, Z_1, X_1', Y_1', Z_1', X_1'', Y_1'', Z_1'', ... Potem lahko v skladu s povedanim zapišemo tudi enačbo (9):

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 = X_1' + X_2'' + \cdots \tag{13}$$

Podobne enačbe seveda veljajo tudi za preostali koordinatni osi in vse ostale materialne točke.

§ 10. Poissonov dokaz paralelograma sil. Med številnimi dokazi izreka o paralelogramu sil bom v nekoliko spremenjeni obliki na kratko podal dokaz iz Poissonove knjige o mehaniki.

Predpostavimo, da lahko več sil (komponent), ki delujejo na točko, v vseh njihovih učinkih vedno nadomestimo z eno samo silo (rezultanto). Iz tega sledi, da lahko vedno najdemo rezultanto več kot dveh sil tako, da najprej združimo kateri koli dve sili v rezultanto, nato to rezultanto združimo s katero koli tretjo silo v novo rezultanto in tako naprej. Ker prva rezultanta v celoti nadomesti prvi dve sili, mora imeti nova rezultanta, ki ima v vseh okoliščinah enak učinek kot prva rezultanta in tretja sila skupaj, tudi enak učinek kot prve tri sile in tako naprej.

Nadalje predpostavljamo, da velikost rezultante in njena relativna lega glede na komponente nista odvisni od absolutne lege telesa v prostoru, pogojev gibanja, preteklih okoliščin in izvora sil, tako da vse sile katerega koli izvora delujejo enako. Sila dvojne velikosti je takšna, ki učinkuje enako kot dve popolnoma enaki sili iste smeri skupaj. Sila trojne velikosti je tista, ki učinkuje enako kot tri enako usmerjene sile enake velikosti, in tako naprej. Pri tem nas zakoni in niti pomen ustvarjenega gibanja ne zanimajo.

Če na točko delujeta dve popolnoma enaki in nasprotno usmerjeni sili, potem ti ne določata gibanja niti v svoji smeri niti pravokotno nanjo. Točka mora torej, če je sprva

mirovala, ostati v mirovanju; to pomeni, da mora biti v ravnotežju in se obnašati, kot da nanjo ne deluje nobena sila.

Če na točko delujeta sila v eni smeri in sila dvojne velikosti v nasprotni smeri, lahko slednjo nadomestimo z dvema silama enake velikosti, od katerih eno izniči nasprotna sila. Tako ostane le ena izmed teh sil.

Če tako nadaljujemo, je enostavno videti, da je rezultanta poljubnega števila sil, katerih smeri sovpadajo s premico, njihova algebraična vsota, pri čemer štejemo sile, ki delujejo v eno smer, kot pozitivne, in tiste, ki delujejo v drugo smer, kot negativne. Rezultanta deluje v eno ali drugo smer glede na to, ali je ta algebraična vsota pozitivna ali negativna.

Naj zdaj na točko A delujeta dve enaki sili AB in AC, ki oklepata poljuben kot. Eno od polovic premice AH, ki razpolavlja ta kot, imenujmo pozitivni poltrak, drugo pa negativni poltrak. Naj bo α kot med pozitivnim poltrakom in eno od sil, pri čemer tako obe sili skupaj tvorita kot 2α. Kot α je lahko oster ali top, enak nič, enak enemu ali dvema pravima kotoma.

Edina premica, ki je enolično določena z dvema enako dolgima daljicama, ki izhajata iz ene točke, je razpolovnica njunega kota. Rezultanta AD sil AB in AC mora torej sovpadati s to razpolovnico in ležati na njeni pozitivni ali negativni strani.

Če se velikost vsake od sil AB in AC podvoji, ne da bi se spremenila njuna smer, si lahko to ponazorimo tako, kot da bi v smeri AB obstajali dve sili AB in AB_1, enaki prvotni sili, in podobno v smeri AC dve enaki sili AC in AC_1. Rezultanta sil AB in AC je AD, rezultanta sil AB_1 in AC_1 pa AD_1. Toda AD in AD_1 skupaj tvorita rezultanto, ki je enako usmerjena, vendar dvakrat večja od AD. Tako dokažemo, da mora biti AD sorazmerna z velikostjo enakih sil AB in AC. Vendar je lahko še vedno odvisna od kota, pod katerim delujeta ti sili. Zato postavimo:

$$AD = AB\, f(\alpha)$$

pri čemer funkcija $f(\alpha)$ dobi pozitiven predznak v primerih, ko AD pade na pozitivno stran poltraka AH, in negativen predznak v primerih, ko ima smer negativnega poltraka.

Če α zamenjamo z $180° - \alpha$, potem obe sili z nasprotno stranico tvorita enak kot, zato mora tudi rezultanta preprosto obrniti svojo smer, torej jee

$$f(180 - \alpha) = -f(\alpha)$$

Predpostavimo še, da α ni večji od $90°$, kar ne omejuje splošnosti. Zdaj narišemo premico AK, ki s premico AH tvori poljuben kot β, ki leži med α in $90°$, proti tisti strani, kjer leži sila AB.

Nadalje naj na točko A delujeta dve sili AB' in AC', ki ju ponazorimo s puščicama, ki sta natanko zrcalni sliki puščic AB in AC glede na premico AK. Naj bo AH' zrcalna slika premice AH glede na zrcalo AK. Sili AB' in AC' imata potem rezultanto AD', ki je le zrcalna slika AD glede na AK, rezultanto vseh štirih sil AB, AC, AB', AC' pa dobimo tako, da poiščemo rezultanto AD in AD'. Slednji sili sta enaki in tvorita kot β s premico AK ali njenim podaljškom, odvisno od tega, ali je $f\,(\alpha)$ pozitivna ali negativna. Njuna rezultanta je torej

$$AD\, f(\beta) = AB\, f(\alpha) f(\beta) \tag{13a}$$

in deluje v smeri AK ali v nasprotni smeri, odvisno od tega, ali je ta izraz pozitiven ali negativen. Enako silo moramo dobiti, če najprej oblikujemo rezultanto AB in AB', nato AC in AC', ter na koncu združimo ti dve rezultanti v eno. Rezultanta AB in AB' je enaka

$$AB \cdot f\,(\beta - \alpha)\,,$$

rezultanta AC in AC' je enaka

$$AB \cdot f\,(\beta + \alpha)\,.$$

Obe ležita na daljici AK in imata smer AK ali nasprotno, odvisno od tega, ali je izraz, ki je zanj določen, pozitiven ali negativen. Rezultanta teh dveh rezultant je torej njuna algebrska vsota

$$AB \cdot [f(\beta - \alpha) + f(\beta + \alpha)]$$

in prav tako deluje v smeri AK ali nasprotno, odvisno od tega, ali je ta izraz pozitiven ali negativen.

Ker smo na eni strani dobili ta izraz in na drugi strani izraz (13a) za rezultanto štirih sil AB, AB', AC, in AC', morata biti oba izraza enaka. Predznak ima v obeh primerih enak pomen: pozitiven izraža učinek v smeri AK, negativen pa v nasprotni smeri. Tako dobimo:

$$f(\alpha)f(\beta) = f(\beta - \alpha) + f(\beta + \alpha) \tag{13b}$$

za vse vrednosti α in β, ki ležijo znotraj predpostavljenih omejitev.

Za $\alpha = 0$ je rezultanta dvakrat večja od vsake od komponent, zato je $f(0) = 2$. Če je ε zelo majhen kot, lahko postavimo $f(\varepsilon) = e^{\zeta} + e^{-\zeta}$, ali $f(\varepsilon) = -\left(e^{\zeta} + e^{-\zeta}\right)$, ali $f(\varepsilon) = 2\cos\zeta$, odvisno od tega, ali je $f(\varepsilon) > 2$, $f(\varepsilon) < -2$, ali pa je vrednost med $+2$ in -2. Če je natančno enak $+2$ ali -2, izberemo prvo ali drugo obliko s $\zeta = 0$. Zdaj v enačbo (13b) vpišimo naslednje zamenjave: $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varepsilon$; nato $\alpha = \varepsilon$, $\beta = 2\varepsilon$; nato $\alpha = \varepsilon$, $\beta = 3\varepsilon$ ali $\alpha = \beta = 2\varepsilon$; nato $\alpha = \varepsilon$, $\beta = 4\varepsilon$ ali $\alpha = 2\varepsilon$, $\beta = 3\varepsilon$ in tako naprej. Potem brez težav ugotovimo, da je za vsako celo število h, $f(h\varepsilon) = e^{h\zeta} + e^{-h\zeta}$, ali $f(h\varepsilon) = -\left(e^{h\zeta} + e^{-h\zeta}\right)$, ali $f(h\varepsilon) = 2\cos(h\zeta)$, odvisno od izbrane oblike $f(\varepsilon)$. Ko rezultanta doseže ničlo, torej ko je $f(h\varepsilon) = 0$ za $h\varepsilon = 90°$, vendar ne za nobeno vrednost $h\varepsilon$ med $0°$ in $90°$, $f(h\varepsilon)$ ni mogoče predstaviti z eksponentno formulo. Zato mora biti enaka $2\cos(h\varepsilon)$, in za $h\varepsilon = 90°$ mora biti tudi $h\zeta = 90°$, kar pomeni, da je $\zeta = \varepsilon$. Tako dobimo $f(h\varepsilon) = 2\cos(h\varepsilon)$, in če označimo poljubno količino $h\varepsilon$ z α, dobimo $f(\alpha) = 2\cos(\alpha)$, kar dokazuje paralelogram sil v primeru dveh enakih komponent.

Sedaj se lotimo primera, ko na točko A delujeta dve različni sili AB in AC, ki sta pravokotni druga na drugo. Razpolovimo premico BC v točki D in vsako od danih sil razstavimo na dve komponenti, od katerih ima ena smer AD, druga pa tvori enak kot z razstavljeno silo na nasprotni strani. Slednji dve komponenti se medsebojno izničita, prvi dve pa sta obe enaki AD in skupaj tvorita rezultanto obeh prvotno danih sil, skladno s pravilom o paralelogramu sil.

Sedaj se lotimo primera, ko na točko A delujeta dve sili AB in AC, ki sta različni in pravokotni druga na drugo. Narišimo paralelogram $ABDC$ in vsako od sil razstavimo na dve komponenti, od katerih ima ena smer AD, druga pa je nanjo pravokotna. Slednji dve komponenti se medsebojno uničita, prvi dve pa sta enaki AD in skupaj tvorita rezultanto obeh prvotno danih sil.

Seveda to nikakor ni dokaz, da so vse naše prej navedene predpostavke pravilne. Kaže le na to, da bi se zapletli v protislovje, če bi ohranili predpostavke, ki smo jih uporabili pri definiciji sile, hkrati pa predpostavili drugačen način določanja rezultante dveh sil.

Tudi predpostavka, da velikost rezultante in njena relativna lega glede na komponente nista odvisni od lege telesa v prostoru ali glede na mirujoč zvezdni svod, ni tako samoumevna, kot bi si mislili. Na primer, sile, ki lahko dele nekega sistema trajno ohranjajo v določeni relativni legi, na splošno niso odvisne le od njihove relativne lege, temveč se spreminjajo, če se celoten sistem vrti v prostoru, ne da bi se pri tem relativne lege njegovih delov spreminjale.

§ 11. O zamenjavi koordinatnega sistema slike z drugim. Ker enačbe (9) določajo le druge odvode koordinat po času, mora biti v nekem času (začetnem času) podanih $6n$ vrednosti vseh koordinat in njihovih prvih odvodov glede na čas (komponente hitrosti). Začetni čas pogosto označimo kot t_0 ali čas nič, vrednosti koordinat in komponent hitrosti v tem času pa z $x_1^0, y_1^0, \ldots, w_n^0$. S temi $6n$ vrednostmi in diferencialnimi enačbami (9) so enolično določene vrednosti vseh koordinat in komponent hitrosti v katerem koli drugem času.

Ker smo našo sliko zasnovali na povsem določenem koordinatnem sistemu, moramo najprej preveriti, v kolikšni meri ista pravila za določanje vrednosti koordinat in komponent hitrosti iz njihovih začetnih vrednosti veljajo tudi za druge koordinatne sisteme. Prvotno izbrani koordinatni sistem in vse koordinatne sisteme, za katere to velja, imenujemo ***inercialni opazovalni sistemi*** [taugliche Bezugssysteme]. Najprej razmislimo o nekem drugem koordinatnem sistemu, katerega osi so ves čas vzporedne z osmi prvotnega koordinatnega sistema naše slike in ne spreminjajo svoje lege glede na ta prvi koordinatni sistem. V tem primeru se koordinate katere koli točke v katerem koli času glede na novi koordinatni sistem razlikujejo od prvotnih koordinat le za aditivne konstante, medtem ko komponente hitrosti, pospeški in vsi členi na desni strani enačb, ki so odvisni le od relativne lege materialnih točk, ostajajo popolnoma enaki. Enačbe tako ostanejo veljavne in popolnoma nespremenjene, če v njih zamenjamo koordinate glede na prvotni koordinatni sistem s tistimi glede na novega. Novi koordinatni sistem tako deluje enako kot prvotni, saj lahko spremembe koordinat glede na novi sistem izpeljemo po enakih pravilih, kot smo jih določili za prvotni koordinatni sistem. To velja tudi, če nove koordinatne osi ostanejo vzporedne s prvotnimi, vendar se novo koordinatno izhodišče giblje glede na stari koordinatni sistem po premici s konstantno hitrostjo, katere komponente glede na tri koordinatne osi so a, b, c. V tem primeru se pri prehodu na novi koordinatni sistem vsem komponentam hitrosti v smeri abscise doda konstanta a, tistim v smeri y in z pa konstanti b oziroma c. Abscisam vseh točk se doda izraz $at + \alpha$, koordinatama y in z pa $bt + \beta$ oziroma $ct + \gamma$, kjer so α, β, γ tri nove konstante. Tudi v tem primeru se pospeški in členi na desni strani enačb ne spremenijo, zato naša pravila za določanje gibanja sistema veljajo enako tako za novi koordinatni sistem kot za prvotnega.

Enako velja, če v primeru mirovanja ali enakomerno premočrtnega gibanja koordinatnega izhodišča osi novega koordinatnega sistema, ki je prav tako pravokoten, niso vzporedne z osmi prvotnega koordinatnega sistema, vendar pa se koti z osmi starega koordinatnega sistema ne spremenijo. Pospeške in sile smo namreč določili s pomočjo vektorjev, ki so neodvisni od lege koordinatnega sistema. Izrazi za projekcije pospeškov in sil na koordinatne osi pa so enaki za vse koordinatne sisteme. Če koordinate glede na novi sistem označimo s črticami in z (x, x'), (x, y'), ... kote med starimi in novimi koordinatnimi osmi, potem je

$$\frac{d^2 x'_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cos(x, x') + \frac{d^2 y_1}{dt^2} \cos(y, x') + \frac{d^2 z_1}{dt^2} \cos(z, x').$$

Če tu zamenjamo $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ z njihovimi vrednostmi iz enačb (9), kjer zamenjamo $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ in $z_1 - z_2$ z

$$(x'_1 - x'_2)\cos(x, x') + (y'_1 - y'_2)\cos(x, y') + (z'_1 - z'_2)\cos(x, z') \quad \text{itd.}$$

in nadaljujemo na enak način z $\frac{d^2 y'_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 z'_1}{dt^2}$, lahko enačbe v novih koordinat zlahka preoblikujemo v obliko enačb (9).

Obstajajo torej številni koordinatni sistemi, ki jih je mogoče na popolnoma enak način kot prvotni koordinatni sistem uporabiti kot temelj za sliko, pri čemer se pravila za določanje gibanja sistema iz začetnih vrednosti koordinat in komponent hitrosti ne spremenijo, saj so vsi ti sistemi ustrezni opazovalni sistemi. To je zelo pomembno, saj pogosto izbira enega ali drugega koordinatnega sistema prinaša določene prednosti. Po drugi strani pa se novi koordinatni sistem ne sme vrteti glede na prvotnega ali pa se novo izhodišče koordinat ne sme neenakomerno ali krivočrtno gibati glede na prvotni koordinatni sistem, če ne želimo spremeniti teh pravil. V prvem primeru bi bilo namreč treba določiti kote (x, x') itd., v drugem pa količine, označene z a, b, c, α, β, γ, ne bi bile več konstante, tako da drugi odvodi koordinat po času ne bi imeli več zgornje oblike, kar bomo podrobneje razložili v drugem delu. V tem drugem primeru bi se vsem drugim odvodom abscise glede na čas dodala enaka funkcija časa, kar bi veljalo tudi za drugi dve koordinati.

§ 12. Povezanost podanega prikaza z drugimi. Namenoma smo se nekoliko oddaljili od stvarnosti, da bi dobili sliko, ki jo je mogoče čim bolj natančno in jasno zgraditi na najpreprostejši način, tj. sliko brez nejasnih pojmov, ki daje jasne napotke za izračune in zato v vsakem posameznem primeru omogoča, da lahko s poljubnim približkom že vnaprej nedvoumno in zanesljivo določimo pričakovan rezultat [9]. Zdi se mi, da je zahteva po tako nedvoumno določeni sliki tisto, kar Hertz razume pod zahtevo, da mora biti slika skladna z zakoni mišljenja; ne morem si namreč predstavljati drugačnih zakonov mišljenja kot takih, po katerih morajo biti naše slike podane jasno in nedvoumno ter omogočati, da iz njih vedno na kar se da preprost in zanesljiv način izpeljemo rezultate, ki so skladni z izkušnjami. Še zdaleč pa nisem mnenja, da je mogoče karkoli, na primer geometrijske slike, izpeljati le iz zakonov mišljenja.

[9]Naša slika ustreza znani zahtevi Kirchhoffa, da mora fizika le opisovati dejstva, saj je le zbirka pravil za oblikovanje aritmetičnih in geometrijskih predstav, s pomočjo katerih je mogoče dejstva vedno pravilno napovedati. S tem se popolnoma izognemo pojmoma vzroka in posledice. Če namreč tu in tam prisotnost ene materialne točke imenujemo vzrok za pospešek druge, to ne pomeni nič drugega kot to, da sta obe na določeni razdalji deležni določenih pospeškov. Zato upam, da epistemoloških ugovorov proti tukajšnjemu prikazu ni mogoče podati.

Po drugi strani pa se mi zdi upravičena Hertzeva opomba, da večini obravnav temeljnih načel mehanike manjkata zaželena doslednost in jasnost, ki sem si ju tu prizadeval doseči s podrobno uvedbo hipotez. Razmerje mas teles je pogosto določeno kot obratno razmerje pospeškov, ki jih telesi dosežeta pod vplivom enakih sil. Na končna trdna telesa lahko delujemo z enakimi silami tako, da jih postavimo na vodoravno, popolnoma gladko mizo, nato pa enako raztegnjeno elastično vrvico ali enako majhen magnet ali naelektren predmet, ki je podvržen enakim vplivom, pritrdimo enkrat na eno telo, drugič na drugo. Tekočine je treba zapreti v posodo z majhno maso, na katero je mogoče te naprave pritrditi. Kot bomo videli pozneje iz slike, ki si jo lahko ustvarimo na podlagi učinka sosednjih volumnskih elementov elastičnih in tekočih teles, lahko težišče sistema, tj. telesa in magneta ali posode in tekočine, dejansko obravnavamo kot eno samo telo, na katero deluje sila, ki je odvisna le od narave magneta in vplivov, ki jim je izpostavljen. Enako velja za napeto vrvico, če lahko njeno maso zanemarimo. Toda kako lahko enake sile uporabimo za posamezne materialne točke? Če definicija razmerja mas dveh teles temelji na njunem medsebojnem trku, potem se ni mogoče izogniti upoštevanju trka volumnskih elementov; če pa izhajamo iz neposrednega delovanja dveh majhnih teles na daljavo, potem ob dosledni izpeljavi spet pridemo do naše definicije.

Če bi začeli s povsem jasno sliko medsebojnega delovanja volumnskih elementov elastičnih teles in iz nje izpeljali temeljne pojme in zakone običajne mehanike, temu seveda ne bi nasprotoval[10]. Tega žal nimamo, zato lastnosti (mase) in zakone sprememb (sile) preprostih materialnih točk določimo s postopki, pri katerih so takšni volumski elementi nepogrešljivi, na primer trki ali pritrditve iste elastične vrvice na različna telesa. V obravnavah materialne točke se izkušnje s končnimi objekti mešajo s konceptualno zasnovo posameznih točk. Kdo ne bi opazil začaranega kroga, ki se skriva v tem, ko materialno točko definiramo kot zelo majhno telo in se sklicujemo na to, da teorija, ki temelji na tej definiciji, omogoča zanemarjanje neskončno majhnih vrednosti višjega reda, kadar volumske elemente, ki so dejansko majhna telesa, obravnavamo kot preproste točke prostora? Veliko bolj jasno je, če že na začetku obravnavamo končna telesa kot sliko številnih, gosto posejanih točk, katerih hitrost se pri prehodu na sosednjo točko le malo spreminja. Toda začeti neposredno s pospeški končnih teles, brez poznavanja pojma materialne točke, prav tako ni mogoče, če še ne poznamo izreka o težišču. To niso zgolj druge besede za isto stvar. Menim, da je pomembno izbrati besede tako, da se na najbolj primeren način vedno spomnimo na pravilno epistemološko povezanost vseh pojmov.

Toda tudi če dopustimo, da lahko delujemo z isto silo na različne materialne točke, ne da bi prej definirali njihove mase, je treba dejstvo, da razmerje pospeškov materialnih točk ni odvisno od vrste sile, tj. da je razmerje pospeškov materialnih točk A in C enako produktu ustreznih razmerij za A in B na eni strani ter B in C na drugi, vedno obravnavati kot posebno izkustveno dejstvo ali pa je treba predpostaviti splošnejša izkustvena dejstva (npr. načelo energije), iz katerih to izhaja. Cilj naše slike centričnih sil je prav to, da z enim zamahom podamo jasen vpogled v vse te trditve, pa tudi v

[10]Mislim, da sem že drugje dokazal, da bi morala imeti vsaka jasna slika medsebojnega delovanja med volumnskimi elementi veliko več skupnega z današnjo atomistiko, kot se običajno domneva. Pokazal sem tudi, da je pojem nejasen in onemogoča izračun limite, če predpostavimo, da so tudi enostavni volumski elementi spet povečani in razgradljivi v diferenciale. Wien. Sitzber. 105, str. 907, 7. november 1896. Wied. Ann. 60, str. 231, 1897.

zakone o ***medsebojnem delovanju*** [Wechselwirkung] volumnskih elementov, izrek o težišču itd.

Tudi v Kirchhoffovih predavanjih o mehaniki me definicija pojma mase ne prepriča. Primer, v katerem so podane enačbe med koordinatami materialnih točk (vezano gibanje), se mi zdi bolj abstrakcija kot primer, ki bi ustrezal naravnim razmeram. V vseh drugih primerih pa je Kirchhoffova definicija ohlapna, kar je še posebej očitno pri uvedbi mase in gostote volumnskega elementa elastičnega telesa.

Hertzova mehanika, ki seveda ne pozna drugih sil razen sil vezi, postane popolnoma razumljiva, jasna in nedvoumno določena slika. Kot pravi Hertz, ustreza zakonom mišljenja. Pri tem pogrešam le eno stvar, in sicer dokaz, da je naravo res mogoče opisati s to sliko.

Seveda ne zanikam možnosti, da bi lahko te pojme jasno predstavili tudi na drugačen način, kot je storjeno tukaj, vendar mi to do sedaj ni uspelo. Prav tako ne želim reči, da se mi zdi verjetno, da mora učinkovanje na daljavo med materialnimi točkami, ki se pojavlja kot funkcija razdalje, predstavljati končno sliko procesov v naravi. Velikokrat so ga poskušali razložiti s trki molekul nekega medija (svetlobnega etra). Vendar je pri tem treba sprejeti precej zapletene dodatne predpostavke, na primer za pojasnitev kohezije je treba posameznim molekulam pripisati mrežasto strukturo. Potrebujemo tudi zakone trkov in s tem ponovno pojem mase. Po drugi strani pa so poskušali molekule razumeti kot vrtinčne obroče in tako pojasniti njihovo navidezno delovanje na daljavo. Možnost, da bodo takšni poskusi razlage nekega dne nadomestili sile na daljavo, vsekakor obstaja. Vendar se mi dosedanje predpostavke v ta namen ne zdijo niti preprostejše niti jasnejše od slike, iz katere sem izhajal. Zdi se mi, da prej nekoristno povečujejo število poljubnih hipotez, ne da bi s tem pridobili na preprostosti in jasnosti, čemur se je po mojem mnenju treba izogniti prav tako kot dvoumnosti in nejasnosti slik zaradi njihove premajhne specializacije. Na splošno bi vprašanje o tem, kakšne so stvari v resnici, rad nadomestil s skromnejšim, a jasnejšim vprašanjem: katere slike trenutno najbolj preprosto in nedvoumno predstavljajo naše izkušnje?

Kakor koli že, tudi če je prihodnjo izpopolnitev mehanike mogoče pričakovati od nadaljnjega razvoja obstoječih posebnih slik ali pa od njihove zamenjave s splošnejšimi slikami energetske ali fenomenološke narave, menim, da je v obeh primerih čim bolj jasna opredelitev sedanje atomistične mehanike lahko koristna: v prvem primeru kot podlaga za nadaljnji razvoj, v drugem pa kot zgled jasnosti in notranje doslednosti, ki sta nujni za vsako novo teorijo. Zdi se mi, da to ne temelji na skladnosti s kakšnimi posebnimi zakoni mišljenja, temveč na dejstvu, da v tem prikazu uporabljamo pravila in konstrukcije, ki na podlagi izkušenj vedno omogočajo natančno definirano uporabo, in ki, tudi če pričakovani rezultat ni vnaprej znan, dajejo jasen odgovor, skladen z opazovanji.

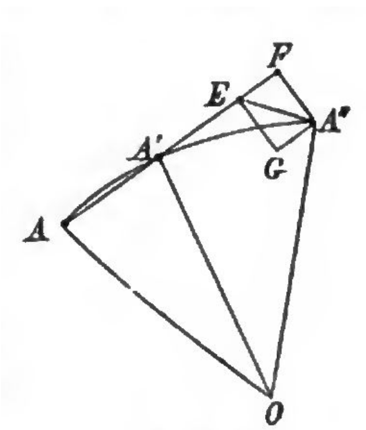
II

Gibanje materialne točke

§ 13. Tangencialna, centripetalna in centrifugalna sila. Obravnavajmo naslednji problem: Naj bo podan tir poljubne materialne točke z maso m ter njena lega na tem tiru v vsakem času. Določimo silo, ki je potrebna za tako predpisano gibanje točke. Materialna točka naj bo ob času t v A, ob času $t+\tau$ v A' in ob času $t+2\tau$ v A''. Hitrost v je definirana kot odvod $\frac{ds}{dt}$ poti po času, torej kot limito količnika $\frac{\Delta s}{\tau}$. Odvod hitrosti po času $\frac{dv}{dt}$ poiščemo po pravilih diferencialnega računa tako, da od izraza $\frac{\Delta s'}{\tau}$, ki velja v času $t+\tau$, odštejemo $\frac{\Delta s}{\tau}$, ki velja v času t, razliko delimo z τ in poiščemo limito, ko se τ zmanjšuje. Torej velja:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim \frac{A'A'' - AA'}{\tau^2}.$$

Da bi dobili pospešek, moramo v skladu s pravili, navedenimi v § 5, oba vektorja AA' in $A'A''$ postaviti v isto točko prostora, za katero ponovno izberemo točko A'; iz te točke potegnemo daljico $A'E$, ki je pravokotno nadaljevanje AA' in je tudi enako dolga kot AA' (sl. 2). Od E proti A'' potegnemo daljico EA''. Limita, ki se ji ta



Slika 2

daljica približuje, deljena z τ^2, je pospešek materialne točke m v času t. Vektor EA'' lahko razstavimo na dve komponenti EF in EG v smeri EA'' in pravokotni nanjo.

Dejanski pospešek, ki ga ima materialna točka m v času t, lahko torej dobimo, če predpostavimo, da nanjo delujeta dve sili: prva sila (imenovana ***tangencialna sila*** [Tangentialkraft]) v smeri, ki se ji daljica $A'E$ približuje z zmanjševanjem τ, tj. v smeri gibanja materialne točke v času t, in druga, ***centripetalna sila***, v smeri EG. Ta smer se z zmanjševanjem τ približuje normali, ki se nahaja v ***pritisnjeni ravnini krivulje tira*** v smeri gibanja, tj. premici, ki poteka od lokacije ***premične točke*** [Beweglichen] proti ***središču ukrivljenosti*** tira. Daljica EG namreč leži v ravnini treh točk A, A', A'', in tisto limito, ki se ji ta ravnina približuje z zmanjševanjem τ, imenujemo pritisnjena ravnina krivulje tira, ki poteka skozi tri točke A, A', in A''. Velikost S tangencialne sile je glede na § 7 enaka $\lim \dfrac{EF}{\tau^2}$. $A'F$ se od $A'A''$ razlikuje le za neskončno majhno vrednost reda velikosti τ^2. AA' se torej razlikuje za vrednost reda velikosti τ^3, saj je AA' neskončno majhen reda velikosti τ. Zato se tudi EF razlikuje od razlike $A'A'' - AA'$ le za neskončno majhno vrednost reda velikosti τ^3. Tako je:

$$\lim \frac{EF}{\tau^2} = \lim \frac{A'A'' - AA'}{\tau^2} = \frac{dc}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

in zato

$$S = m\frac{dc}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2} \tag{14}$$

Iz te enačbe in enačbe (4)

$$c = \frac{ds}{dt}$$

lahko najdemo pot kot funkcijo časa, če sta podana tir in tangencialna sila S.

Velikost centripetalne sile Z je enaka $m \lim \dfrac{EG}{\tau^2}$. Limito, ki se ji približuje krog, speljan skozi tri točke A, A' in A'', imenujemo ***pritisnjeni krog*** krivulje tira v točki A, njegovo središče O imenujemo ***središče ukrivljenosti***, njegov polmer R pa ***polmer ukrivljenosti***. V skladu s konstrukcijo, znano iz teorije ukrivljenosti krivulj, pri kateri zanemarimo infinitezimalne višjega reda, lahko trikotnika $A''A'F$ in $A'OA''$ na sliki 2 obravnavamo kot podobna trikotnika in tako dobimo:

$$FA'' : A'A'' = A'A'' : OA',$$

torej

$$FA'' = EG = \frac{A'A''^2}{OA'} = \frac{A'A''^2}{R}.$$

Ker pa je

$$\lim \frac{A'A''}{\tau} = c,$$

je torej

$$Z = m \lim \frac{EG}{\tau^2} = \frac{mc^2}{R}\,. \tag{15}$$

Sile, ki delujejo na materialno točko, so lahko zelo različnega izvora, vendar mora biti njihova rezultanta vedno enaka rezultanti dveh sil S in Z, če želimo, da se materialna točka na dani krivulji giblje na predpisan način (tako, da je pot enaka podani funkciji časa).

Če imamo na primer napravo, pod vplivom katere se materialna točka mase m giblje s konstantno hitrostjo c po krogu s polmerom R, potem vemo, da je rezultanta vseh sil, s katerimi na premično točko delujejo materialne točke, iz katerih je sestavljena naprava, sila velikosti $m\,c^2/R$, ki je usmerjena proti središču kroga in jo imenujemo ***centripetalna sila***. Ker sta učinek in nasprotni učinek enaka, mora tudi gibajoča se materialna točka delovati na materialne točke, iz katerih je sestavljena naprava, s popolnoma enako, vendar nasprotno silo, tj. s silo, ki je usmerjena stran od središča kroga, tj. ***centrifugalno silo*** [Centrifugalkraft]. Menim, da je pojem centrifugalne sile v tem prikazu verjetno brez tistih nejasnosti, ki jih omenja Hertz na sedmi strani svoje knjige.[1].

§ 14. Enakomerno in enakomerno pospešeno gibanje. Zelo verjetno je, da postane sila $f(r)$, ki deluje med dvema poljubnima materialnima točkama, neskončno majhna, takoj ko razdalja r preseže določeno mejo, kar pomeni, da se naša slika ujema z dejstvi le, če sprejmemo to predpostavko. Ta mejna razdalja bi lahko bila celo reda velikosti molekul, če bi vse učinke, ki se zdijo, da dosegajo večje razdalje, omogočal nek medij.

Najpreprostejši primer gibanja materialne točke nastopi, ko je ta tako oddaljena od vseh drugih, da nobena od njih nanjo ne deluje z zaznavno silo. Kot smo videli, so takrat drugi odvodi koordinat ***premične materialne točke*** [beweglichen materiellen Punktes] po času enaki nič, komponente hitrosti pa so konstantne. Če je torej materialna točka na začetku mirovala, bo ostala v mirovanju; če pa je imela hitrost že na začetku, se bo gibala enakomerno po premočrtnem tiru (***zakon vztrajnosti*** [Trägheitsgesetz] ali Galilejevo načelo).

Drug preprost primer nastopi, ko je rezultanta vseh sil, ki delujejo na materialno točko z maso m, ves čas njenega gibanja popolnoma nespremenljiva po velikosti in smeri. Temu primeru bi se približali, če bi na premično materialno točko delovale poljubne, zelo oddaljene mirujoče materialne točke in bi bila sila, ki jo ustvarjajo, tako velika, da kljub veliki razdalji ne bi izginila, njeno velikost in spremembo smeri pa bi lahko zanemarili zaradi velikosti razdalje delujočih točk med celotnim gibanjem. Zato bi lahko silo, ki deluje na premično točko, obravnavali kot konstantno. Za izhodišče koordinat izberemo točko prostora, v kateri se na začetku nahaja premična materialna točka, za smer koordinat izberemo smer celotne sile, ki nanjo deluje in katere velikost lahko označimo kot $p = m\,g$ kot smer y, abscisno os pa v ravnini, ki vsebuje to smer in

[1]Odlomek iz Hertzove mehanike: "... Kamen vrtimo v krogu, ki je privezan na vrvico in pri tem se zavedamo, da na kamen delujemo s silo. Ta sila odklanja kamen z ravne poti. Če spreminjamo silo, maso kamna in dolžino vrvice, ugotovimo, da je dejansko gibanje kamna vedno v skladu z drugim Newtonovim zakonom. Tretji zakon pa zdaj zahteva nasprotno silo sili, ki deluje na kamen z roko. V zvezi s to nasprotno silo je običajna razlaga, da kamen deluje na roko zaradi centrifugalne sile in da je ta centrifugalna sila dejansko popolnoma enaka in nasprotna sili, ki jo izvajamo mi. Ali je ta način izražanja dopusten? Ali je to, kar imenujemo centrifugalna sila, kaj drugega kot vztrajnost kamna? Ali lahko vztrajnost upoštevamo dvakrat, najprej kot maso in nato še kot silo, ne da bi pri tem porušili jasnost naših predstav? V naših zakonih gibanja je bila sila vzrok gibanja in je bila prisotna *pred* gibanjem. Ali lahko brez zmede v naših predstavah nenadoma začnemo govoriti o silah, ki nastanejo zaradi gibanja, ki so posledica gibanja? Ali se lahko obnašamo, kot da smo o silah te nove vrste kaj trdili že v naših zakonih, kot da bi jim s tem, ko jih poimenujemo sile, lahko podelili lastnosti sil? Na ta vprašanja je treba jasno odgovoriti negativno. Edina možna razlaga je, da centrifugalna sila pravzaprav sploh ni sila. . . ." (OP)

smer začetne hitrosti materialne točke, katere koordinate v času t označimo kot x, y, z. Potem v skladu z enačbo (13) dobimo

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = p = mg, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Poleg tega v začetnem času, za katerega izberemo $t = 0$, velja $x = y = z = w = 0$, u in v pa sta enaka danima komponentama u_0 in v_0 začetne hitrosti. Iz

$$u = \frac{dx}{dt}\,, \quad v = \frac{dy}{dt}\,, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

z izračunom, ki je preveč enostaven, da bi ga bilo treba na tem mestu podrobneje obravnavati, dobimo:

$$z = 0\,, \quad x = u_0 t\,, \quad y = v_0 t + g\frac{t^2}{2}\,.$$

Enačba tira je enačba med x in y, ki velja za vsako točko tira, torej za vsako vrednost časa t. Dobimo jo tako, da iz zadnjih dveh enačb izločimo čas t, s čimer za $u_0 = 0$ dobimo $x = 0$; za vsako drugo vrednost u_0 pa

$$y = \frac{v_0}{u_0}x + \frac{g}{2u_0^2}x^2$$

ali

$$\left(y + \frac{v_0^2}{2g}\right)\frac{2u_0^2}{g} = \left(x + \frac{u_0 v_0}{g}\right)^2.$$

Ta enačba predstavlja parabolo, katere os je vzporedna z osjo y, njen parameter je enak $\frac{u_0^2}{g}$, njen vrh pa ima koordinate $-\frac{u_0 v_0}{g}$ in $-\frac{v_0^2}{2g}$. V skladu z zakoni, ki jih predstavljajo te formule, se vsaka točka nevrtečega telesa, ki je podvržena le vplivu ***zemeljske težnosti*** [Erdschwere], premika, pri čemer je pospešek g usmerjen proti središču Zemlje. Vsaka taka točka se obnaša, kot da bi nanjo delovala stalna sila nespremenljive smeri, navpično navzdol (njena ***teža***). Velikost te sile ni enaka na vseh mestih na zemeljski površini, vendar jo lahko štejemo za enako znotraj prostora laboratorija. Zanimivo dejstvo je, da imajo vsa telesa na istem mestu na zemeljski površini enak pospešek, ki ga imenujemo ***težnostni pospešek***.

§ 15. Gibalna količina. Sunek. Vrnimo se k najsplošnejšemu primeru gibanja poljubne materialne točke, ki ga podajajo najsplošnejše enačbe. Ker obravnavamo le eno materialno točko, izpustimo indeks 1. Naj bo celotna sila [Gesamtkraft] P, ki deluje na materialno točko, in njena smer podana v odvisnosti od časa, ali pa naj bodo podane različne komponente P', P'', …, katerih rezultanta je sila P, skupaj s svojimi smermi v odvisnosti od časa. Ker je masa m materialne točke konstantna, lahko enačbo zapišemo v obliki:

$$\frac{d\,(m\,u)}{dt} = X = X' + X'' + \ldots \tag{16}$$

ali $d\,(m\,u) = X\,dt$, kar pomeni, da se povečanje količine $m\,u$ v zelo kratkem času dt razlikuje od produkta časa dt za vrednost, ki jo ima x-komponenta sile v kateremkoli trenutku znotraj tega časovnega intervala, le za neskončno majhno količino višjega reda, tj. za količino, ki se, deljena z dt, z zmanjševanjem dt približuje ničli. Integracija te enačbe da, če označimo vrednosti, ki pripadajo kateremukoli času t_0 (začetni čas), z indeksom nič, vrednosti, ki pripadajo kasnejšemu, prav tako poljubnemu času t_n, pa z indeksom n:

$$m\,u_n - m\,u_0 = \int_{t_0}^{t_n} X\,dt \tag{17}$$

Produkt mase s komponento hitrosti v abscisni smeri imenujemo **gibalna količina** [Bewegungsmoment] materialne točke glede na abscisno smer, produkt $X\,dt$ pa **sunek sile** [Antrieb der Kraft] v tej smeri v časovnem intervalu dt. Integral $\int_{t_0}^{t_n} X\,dt$ imenujemo **celotni sunek sile** [gesammten Antrieb der Kraft] v času $t_n - t_0$ v tej smeri. Tako lahko enačbo izrazimo na naslednji način: Povečanje gibalne količine materialne točke glede na abscisno smer v poljubnem času je enako celotnemu sunku sile, ki deluje v tej smeri v tem času, kar seveda velja tudi za poljubno majhne trenutke. Določeni integral seveda pomeni, da mora biti gibalna količina v abscisni smeri v času $t_n - t_0$ določen takole: Skupni čas $t_n - t_0$ razdelimo na zelo veliko zelo majhnih delov $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, $\ldots$, $t_n - t_{n-1}$. Vrednost X komponente sile P v katerem koli času v intervalu $t_1 - t_0$ označimo z X_1, v katerem koli času, ki leži znotraj $t_2 - t_1$ z X_2, ... Skupni impulz sile P v abscisni smeri v času $t_n - t_0$ potem definiramo kot limito vsote:

$$X_1\,(t_1 - t_0) + X_2\,(t_2 - t_1) + \cdots + X_n\,(t_n - t_{n-1}\,.) \tag{18}$$

Če upoštevamo, da se $X_k\,(t_k - t_{k-1})$ razlikuje od povečanja gibalne količine v smeri abscise le za neskončno majhno vrednost višjega reda, potem lahko takoj ugotovimo, da se izraz v limiti približuje celotnemu povečanju te gibalne količine v času $t_n - t_0$. Ker je $X = X' + X'' + \cdots$ lahko takoj ugotovimo, da je impulz rezultante vedno enak vsoti impulzov njenih komponent. Če namesto t_n, ki je povsem poljuben čas, spet zapišemo t in zato namesto u_n spet zapišemo u, lahko enačbo zapišemo tudi takole:

$$u = u_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} X\,dt.$$

Ker je $u = \dfrac{dx}{dt}$, dobimo z integracijo po t, če upoštevamo, da sta t_0 in s tem u_0 konstanti, naslednji rezultat:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + u_0\,(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} X\,dt \\ &= x_0 + u_0\,(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} (q - t_0)\,X\,(q)\;dq, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

kjer je $X\,(q)$ količina, ki jo dobimo tako, da izrazimo X kot funkcijo t in nato zamenjamo integracijsko spremenljivko t s q[2].

[2]V spodnji vrstici je X enak srednji vrednosti X na intervalu od t_0 do t. (OP)

Seveda poleg abscisne smeri vse to velja tudi za smeri y in z. Količino $P\,dt$ imenujemo tudi **celotni sunek sile** P v času dt.

§ 16. Kinetična energija. Delo Ugotovitve iz prejšnjega paragrafa omogočajo takojšnjo rešitev problema, kadar je sila podana kot neposredna funkcija časa. Vendar pa pogosto ni tako; sile so običajno podane kot funkcije relativne lege različnih materialnih točk. V takšnih primerih so formule iz prejšnjega odstavka neuporabne. Da bi lahko izračunali $\int X, dt$, $\int Y, dt$ in $\int Z, dt$, bi morali poznati relativno lego vseh točk kot funkcijo časa, kar pomeni, da bi morali celoten problem že rešiti. Bolj uporaben je zato izrek o kinetični energiji, do katerega pridemo na naslednji način. Iz enačb (14), ker se $\dfrac{ds}{dt}$ približuje limiti c in se torej $c\dfrac{dc}{dt}$ približuje isti limiti kot $\dfrac{ds}{dt}\dfrac{dc}{ds}$ oziroma $\dfrac{dc}{dt}$, sledi

$$mc\frac{dc}{ds} = S$$

ali zapisano v diferencialni obliki po shemi (4a),

$$m\,c\,dc = S\,ds$$

in po integraciji

$$\frac{mc^2}{2} - \frac{mc_0^2}{2} = \int S\,ds. \tag{20}$$

Produkt mase in polovice kvadrata hitrosti imenujemo ***kinetična energija*** [lebendige Kraft], produkt $S\,ds$ pa delo sile, opravljeno na poti ds, integral

$$\int S\,ds$$

pa **skupno delo sile**. Enačba (20) pove, da je povečanje kinetične energije materialne točke vedno enako skupnemu delu sile, ki nanjo deluje.

S je komponenta celotne sile P, ki deluje na materialno točko v smeri njene poti ds. Z dx, dy, dz označimo spremembe koordinat x, y, z materialne točke na poti ds, tj. komponente poti v smeri treh koordinat; nadalje z X, Y, Z označimo komponente sile P v koordinatnih smereh in končno z dp projekcijo poti ds na smer sile P. Projekciji S in ds imata pozitivni ali negativni predznak, odvisno od tega, ali potekata v smeri ds oziroma P ali v nasprotni smeri. Torej:

$$\left.\begin{gathered}S = P\cos(P, ds)\ , \quad dp = ds\,\cos(P, ds)\,, \\ \cos(P, ds) = \cos(P, x)\cos(ds, x) + \cos(P, y)\cos(ds, y) + \\ + \cos(P, z)\cos(ds, z)\,, \\ X = P\cos(P, x)\ , \quad dx = ds\,\cos(ds, x)\ . \end{gathered}\right\} \tag{21}$$

s štirimi podobnimi enačbami za drugi dve koordinatni osi. Zato je delo, opravljeno na poti ds:

$$S\,ds = P\,ds\,\cos(P, ds) = P\,dp = X dx + Y dy + Z dz\,. \tag{22}$$

Delo sile na neskončno majhni poti lahko torej dobimo tudi tako, da velikost sile pomnožimo z dolžino poti in kosinusom kota, ki ga oklepata, ali pa s projekcijo poti na smer sile. Zadnja od enačb (22) pove, da je delo sile enako vsoti njenih komponent v treh koordinatnih smereh, saj je v skladu z dano definicijo $X\,dx$ delo komponente dane sile v smeri x. Še bolj splošno velja naslednji izrek: če imajo poljubne sile $P', P'', \ldots$, ki delujejo na neko točko, rezultanto P in se ta točka premakne za poljubno neskončno majhno pot, potem je delo sile P vedno enako vsoti del njenih komponent. O veljavnosti tega izreka se najlažje prepričamo tako, da delo vsake od teh sil nadomestimo z vsoto del njenih treh komponent glede na tri koordinatne smeri.

Enačbo

$$d\left(\frac{mc^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz$$

lahko neposredno izpeljemo na naslednji način: levo stran enačbe (16) pomnožimo z $u\,dt$, desno pa z dx, ki je enak $u\,dt$. Nato enako postopamo z ustrezno enačbo za os y, tj. z enačbo $m\dfrac{dv}{dt} = Y$: na levi strani jo pomnožimo z $v\,dt$, na desni pa z dy. Podoben postopek uporabimo tudi za enačbo v smeri osi z in na koncu tako dobljene tri enačbe seštejemo. Na ta način dobimo enačbo, katere leva stran je $m\,(u\,du + v\,dv + w\,dw)$, tj. enaka $d\left(\dfrac{1}{2}mc^2\right)$, desna stran pa je enaka $X dx + Y dy + Z dz$.

Če bi se želeli izogniti enačbam z diferencialnimi izrazi, bi morali najprej povezati zelo veliko zelo bližnjih točk v prostoru A_0, A_1, A_2, …, skozi katere gre premična točka, z daljicami A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$. Za poljubno vrednost k označimo daljico $A_{k-1}A_k$ z Δs_k; nadalje s P_k označimo silo, ki deluje na materialno točko v A_k, s S_k, X_k, Y_k, Z_k pa njihove komponente v smeri $A_{k-1}A_k$ in v koordinatnih smereh, z Δp_k, Δx_k, Δy_k, Δz_k pa projekcije Δs_k na smeri P_k in koordinatne smeri. Končno, s predpono Δ označimo povečanje ene od količin t, c, u, v, w pri prehodu iz točke A_{k-1} v A_k, npr. z Δt čas, ki je za to potreben. Enačbi (21) in (22) nato veljata nespremenjeni, le da moramo za P, S, X, Y, Z, ds, dp, dx, dy, dz zapisati: P_k, S_k, X_k, Y_k, Z_k, Δs_k, Δp_k, Δx_k, Δy_k, Δz_k. Enačbi, ki sta rezultat te zamenjave oznak, bomo imenovali enačbi (21*) in (22*).

Iz enačb (1), (4) in (16), zapisanih v obliki

$$c = \lim \frac{\Delta s_k}{\Delta t}, \quad u = \lim \frac{\Delta x_k}{\Delta t}, \quad m \lim \frac{\Delta u_k}{\Delta t} = X_k, \quad \text{itd.}$$

sledi

$$m \lim \left(u\frac{\Delta u}{\Delta s_k} + v\frac{\Delta v}{\Delta s_k} + w\frac{\Delta w}{\Delta s_k}\right) = \lim \frac{\Delta\left(\frac{mc^2}{2}\right)}{\Delta s_k} = S_k\,.$$

Iz tega in iz enačb (21*) in (22*) sledi po pravilih integralskega računa:

$$\begin{aligned}\lim \sum S_k \Delta s_k &= \lim \sum P_k \Delta p_k = \lim \sum P_k \Delta s_k \cos\left(P_k, \Delta s_k\right) \\ &= \lim \sum \left(X_k \Delta x_k + Y_k \Delta y_k + Z_k \Delta z_k\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(c_n^2 - c_0^2\right),\end{aligned}$$

ki ima v simbolnem zapisu integralskega računa obliko (20). Enačbo (19) bi bilo treba obravnavati kot skrajšan izraz za integralsko enačbo (20) ali pa jo zapisati v obliki naslednjega ulomka:

$$\frac{P\,ds\,\cos\left(P, ds\right)}{S\,ds} = \frac{P\,dp}{S\,ds} = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{S\,ds} = 1.$$

§ 17. Lissajousove krivulje. Kot prvi posebni primer bomo obravnavali eno samo materialno točko z maso m, katere pravokotne koordinate označimo z x, y, z, komponente hitrosti pa z u, v, w. Naj bodo komponente X, Y, Z celotne sile, ki deluje v koordinatnih smereh sorazmerne s koordinatami materialne točke. Vedno morajo delovati v smeri koordinatnega izhodišča, tako da imajo za pozitivne vrednosti koordinat smer negativnih osi koordinat, zato jih označimo z negativnimi predznaki. Tako bo:

$$X = -a_{11}x, \quad Y = -a_{22}y \quad Z = -a_{33}z, \tag{23}$$

kjer so a_{11}, a_{22} in a_{33} konstante. V splošnih enačbah gibanja namesto m_1, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1, X_1, Y_1, Z_1, pišemo m, x, y, z, u, v, w,

$$X = -a_{11}x\,, \quad Y = -a_{22}y\,, \quad Z = -a_{33}z\,,$$

tako, da se izrazijo v obliki

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -a_{22}y\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -a_{33}z\,. \tag{24}$$

Sile, s katerimi na obravnavano materialno točko delujejo točke v njeni bližini, ne morejo na njo delovati natanko po tem zakonu, saj bi v tem primeru privlačna sila na neskončni razdalji ne izginila, temveč postala neskončno velika. Kljub temu pa obstaja primer, ko enačbe (23) veljajo vsaj približno, in sicer na naslednji način.Premična materialna točka z maso m naj bo pod vplivom poljubnega števila drugih mirujočih materialnih točk, ki nanjo delujejo s silami tako, da točka miruje, ko je v koordinatnem izhodišču, kar pomeni, da se tam vse sile, ki delujejo nanjo, medsebojno ***uravnotežijo***. Poleg tega naj bi se premična materialna točka vedno oddaljila od koordinatnega izhodišča le za razdaljo, ki je majhna v primerjavi z razdaljami do teh materialnih točk, ki nanjo delujejo. Poleg tega se lahko premična materialna točka vedno oddalji od koordinatnega izhodišča le za razdaljo, ki je majhna v primerjavi z razdaljami do teh materialnih točk. Zato so tudi koordinate x, y, z premične materialne točke majhne glede na vse te razdalje, kar omogoča, da potencial V razvijemo po potencah teh koordinat. Če vrednosti

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}, \quad \ldots$$

za $x = y = z = 0$, označimo z a_0, a_1, a_2, a_3, a_{11}, a_{12}, $\cdots$ dobimo:

$$V = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_{11}\frac{x^2}{2} + a_{12}\frac{x\,y}{2} + \cdots$$

Ker so komponente sile, ki delujejo na premično materialno točko v smereh koordinat, vedno negativni parcialni odvodi V po ustreznih koordinatah, ki se za $x = y = z = 0$ medsebojno uničijo, velja $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Nadalje predpostavimo, kot je znano iz analitične geometrije, da lahko vedno izberemo lego koordinatnih osi tako, da so $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$. Če izberemo to lego koordinatnih osi in zaradi majhnosti koordinat zanemarimo člene, ki so glede nanje višjega reda od drugega, sledi:

$$V = a_0 + \tfrac{1}{2}\left(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2\right).$$

Za komponente sile, ki delujejo na materialno točko v koordinatnih smereh, in za enačbe gibanja dobimo enačbi (23) in (24).

Če so tri konstante a_{11}, a_{22} in a_{33} pozitivne, potem se, takoj ko se materialna točka neskončno malo premakne iz svoje ***mirujoče lege*** v kateri koli od treh koordinatnih smeri, vedno pojavi sila, ki jo potisne nazaj proti tej legi. Pravimo, da je ravnotežje materialne točke v njeni mirujoči legi ***stabilno***. Če bi bil eden ali več teh koeficientov negativen, bi, če bi se materialna točka nekoliko premaknila iz svoje mirujoče lege v ustrezni koordinatni smeri, začela delovati sila, ki bi jo še bolj oddaljila od te lege. V tem primeru bi, če materialna točka ne bi imela začetne hitrosti, ustrezna koordinata rasla toliko časa, dokler zgornje enačbe, ki so le približne, ne bi več veljale. Takrat pravimo, da je ravnotežje ***nestabilno***. Tega primera, kot tudi primerov, v katerih eden ali več koeficientov a_{11}, a_{22} in a_{33} izgine ali v katerih je razvoj v vrsto nedopusten, ne bomo podrobneje obravnavali. To bi se zgodilo le, če sile, s katerimi ena od točk deluje na premično točko, v neposredni bližini njene mirujoče lege ne bi mogli razviti v vrsto skladno s Taylorjevim izrekom. Zato se ukvarjamo izključno s primerom, ko so a_{11}, a_{22} in a_{33} pozitivni.

Tri diferencialne enačbe (24) so med seboj popolnoma neodvisne. Zato je dovolj, da obravnavamo prvo. Njen integral je znan. Če sta A in B poljubni konstanti in velja $+\sqrt{A^2+B^2}=C$, $\arctan(A/B)=-D$, potem se ta glasi:

$$x = A\cos\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) = C\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}} - D\right)$$

Če določimo konstante tako, da za $t=0$ velja $x=x_0$, $u=\dfrac{dx}{dt}=u_0$, dobimo:

$$x = x_0\cos\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) + u_0\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{11}}{m}}\right) \tag{25}$$

Komponenta gibanja v abscisni smeri je periodična. Vrednost x neprestano niha med $+C=\sqrt{x_0^2+\dfrac{u_0^2 m}{a_{11}}}$ in $-C$, naprej in nazaj, ter je pri ustrezno izbranem začetku časa vedno sorazmerna s sinusom časa, pomnoženega s konstanto. Takšno gibanje imenujemo preprosto sinusno gibanje ali ***harmonično gibanje*** ali tudi, ker nihalo približno niha po teh zakonih, preprosto nihanje. Enake vrednosti za x in u se ponovijo, ko se argument pod sinusnim in kosinusnim znakom poveča za 2π, torej ko se t poveča za $2\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{a_{11}}}$. Polovico τ te količine, torej trajanje gibanja naprej, ki je enako trajanju gibanja nazaj, imenujemo ***perioda nihanja***.[3] Količino, ki jo dobimo tako, da zmnožek števila π delimo s periodo nihanja in pomnožimo s časom, ki je pretekel od trenutka, ko je bil x nazadnje enak $+C$, imenujemo ***fazo gibanja*** [Phase der Bewegung] [4].

Enako seveda velja za komponento gibanja v smeri osi y in z, vendar se ustrezni periodi nihanja, τ' in τ'', na splošno razlikujeta med seboj in od τ.

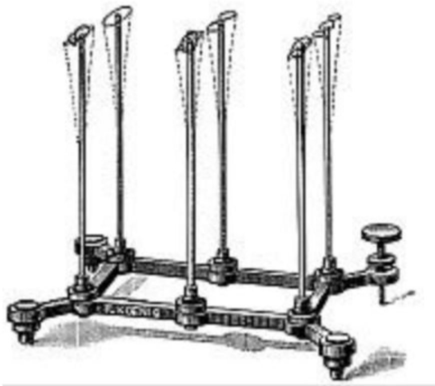
O možnih rešitvah, za katere velja, da je v vsakem trenutku $z=0$, povejmo le nekaj besed. Poleg enačbe (25) imamo v tem primeru še podobno enačbo za os y:

$$y = y_0\cos\left(t\sqrt{\frac{a_{22}}{m}}\right) + v_0\sqrt{\frac{a_{22}}{m}}\sin\left(t\sqrt{\frac{a_{22}}{m}}\right)\ . \tag{26}$$

[3]Tu je perioda določena kot polovica nihajnega časa (OP)

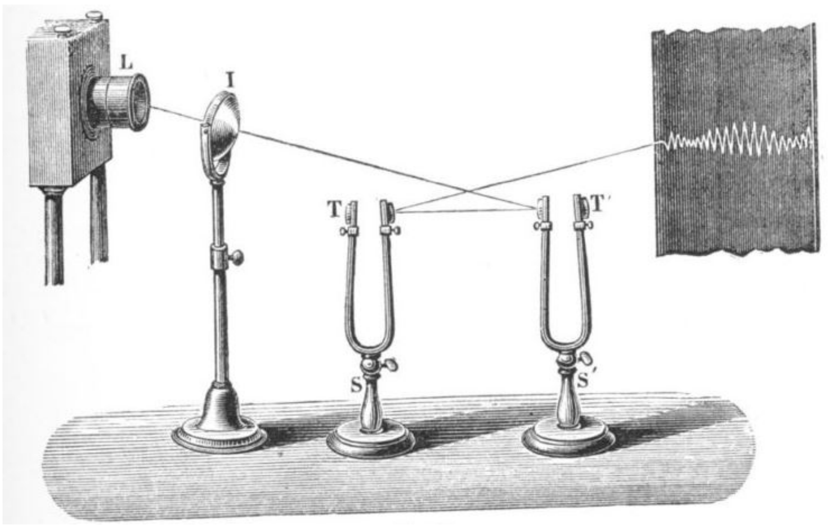
[4]Fazni kot (OP)

Če je en konec elastične palice pravokotnega preseka vpet, na drugem koncu pa je pritrjena razmeroma velika masa m (Wheatstoneov kaleidofon), potem ta izvaja približno



Wheatstoneov kaleidofon. *Slika ni del izvirnega besedila.*

enako gibanje, kot ga opisujeta enačbi (25) in (26),in enako kot točka svetlobnega žarka, ki se odbija od dveh zrcal, pritrjenih na krake dveh vilic, ki nihata v medsebojno pravokotnih ravninah (Lissajousove krivulje. Obe vrsti gibanja lahko obravnavamo bodisi kot izkustveno dejstvo ali pa ju izpeljemo iz poznejših slik elastičnih pojavov.



Zrcalca na vilicah. *Slika ni del izvirnega besedila.*

Tir najdemo v tem primeru tako, da čas izločimo iz enačb (25) in (26). Če je razmerje period nihanja τ in τ' racionalno, potem vedno dobimo algebrsko enačbo, ki povezuje x in y. Če pa je to razmerje iracionalno, tir tvori zvezno linijo, vendar ta linija z naraščajočim časom postopoma vedno bolj zvezno zapolnjuje celoten končni del ravnine (pravokotnik), tako da se materialna točka poljubno približa vsaki točki tega dela ravnine, če se le giblje dovolj dolgo.

Oglejmo si naslednji primer: Na obravnavano materialno točko, na katero v smeri OX deluje sila $-a_{11}x$ in v smeri OY sila $-a_{22}y$, deluje še tretja sila stalne velikosti p, ki je v ravnini xy usmerjena neposredno iz koordinatnega izhodišča. Tako bi bilo, če bi bila os palice Wheatstoneovega kaleidofona vodoravna in bi na maso m, pritrjeno na njen konec, poleg elastičnosti palice delovala tudi težnost. Če p deluje v smeri abscisne osi, nastopi ravnotežje pri $x = \dfrac{p}{a_{11}}$; če pa p deluje v smeri osi y, potem nastopi ravnotežje pri $y = \dfrac{p}{a_{22}}$. Če pa je smer sile p nagnjena glede na ti dve smeri, potem ***premik***, ki ga ima materialna točka iz svoje mirovne lege O, v primeru ravnotežja ni v smeri sile, če sta a_{11} in a_{22} različna. Če so na primer stranske površine palice Wheatstoneovega kaleidofona nagnjene glede na vodoravno ravnino, se bo palica z utežjo, pritrjeno na konec, upognila navzdol ne v navpični ravnini, temveč v ravnini, ki je nagnjena proti navpičnici, če je njen prerez pravokotnik.

onovno se vrnemo k gibanju, ki ga določata splošni enačbi (25) in (26), v katerih ni učinka sile p, in obravnavajmo primer, ko velja $a_{11} = a_{22}$, kar se zgodi vedno, kadar vsaki materialni točki, ki deluje na premično točko, ustreza druga točka, ki je glede na os y relativno postavljena tako, kot je prva glede na os x. Naj bo torej $a_{11} = a_{22} = a$. Izločitev časa iz enačb pokaže, da je tir premica, če x in y hkrati dosežeta svoje največje vrednosti, ki so enake ali nasprotno usmerjene.

Če trenutek, ko sta hitrosti u_0 in v_0 enaki 0, izberemo za začetek časa, potem sta x_0 in y_0 v prvem primeru enaka, v drugem pa nasprotna. Pravimo, da je fazna razlika med gibanjem v abscisni in ordinatni smeri enaka nič ali π. Seveda je premik le končni del premice dolžine $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ v eno ali drugo smer. Če je fazna razlika teh dveh gibanj $\frac{1}{2}\pi$ ali $\frac{3}{2}\pi$, tj. če ima x največjo pozitivno ali negativno vrednost, ko je $y = 0$, in obratno, potem je, če za začetek časa izberemo enega od teh trenutkov, $u_0 = y_0 = 0$. Izločitev časa pokaže, da je tir elipsa, katere osi sovpadajo s koordinatnimi osmi, ali krog; v nasprotnem primeru pa je tir nagnjena elipsa.

Če v enačbah (25) in (26) a_{11} in a_{22} nista povsem enaka, temveč se le malo razlikujeta, potem je gibanje dolgo časa takšno, kot da bi bila povsem enaka, in šele postopoma se fazna razlika med gibanjem v abscisni in ordinatni smeri spremeni. Tudi če sta $\sqrt{a_{11}}$ in $\sqrt{a_{22}}$ približno v racionalnem razmerju, ki ga je mogoče izraziti z enostavnimi celimi števili, je gibanje dolgo časa takšno, kot da bi bila natančno v tem razmerju, in postopoma spet pride do faznega premika med gibanjem v abscisni in ordinatni smeri.

Podobno v astronomiji motnje planetarnih tirov obravnavamo tako, kot da bi se vsak planet vsak trenutek gibal po določenem tiru v skladu s Keplerjevimi zakoni, pri čemer bi se elementi tega tira s časom le postopoma spreminjali

§ 18. Dušeno harmonično nihanje. Zdaj si oglejmo primer, ko poleg sile, sorazmerne s koordinato, deluje tudi sila, sorazmerna s hitrostjo. Obravnavali bomo le gibanje po premici. Če za to premico izberemo abscisno os, dobimo namesto prve od enačb (24( ))naslednjo enačbo:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a\,x - 2\,b\,\frac{dx}{dt}, \tag{27}$$

kjer sta a in b konstanti. Sila, ki je sorazmerna s hitrostjo, deluje vedno nasprotno od smeri gibanja, zato ji dodelimo negativni predznak. Gibanje nihala, ki počasi nihajo pod vplivom težnosti in upora zraka, poteka, kot bomo videli pozneje, približno v skladu z zakonom, ki ga izraža ta enačba. Sile, ki jih povzročajo zračni delci, je mogoče dobro predstaviti s centričnimi silami in iz tega lahko (vsaj okvirno) sklepamo, da se gibanje zračnih delcev v bližini nihala odvija približno tako, kot da je sila prvega na drugega sorazmerna s hitrostjo drugega. V skladu z zakoni, določenimi z enačbo (27), niha tudi magnet, ki ga duši bakrena masa. V tem primeru poznamo manj slik, s katerimi lahko predstavimo sile, ki jih električni tokovi bakrene mase delujejo na magnet. Izkušnje nas ponovno učijo, da je sila dušenja sorazmerna s hitrostjo. Integracija enačbe (27) da

$$x = Ce^{\alpha_1 t} + C_1 e^{-\alpha_2 t}$$

takoj, ko je $b^2 > a\,m$, kjer sta

$$\alpha_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - a\,m}}{m}$$
$$\alpha_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - a\,m}}{m}$$

pozitivni količini, če sta, kot predpostavljamo, a in b pozitivna, tj. če je sila, sorazmerna s koordinato, privlačna sila, tista sorazmerna s hitrostjo pa je dušilna. C in C_1 sta integracijski konstanti, ki ju lahko enostavno določimo, če so na začetku časa podane vrednosti koordinate in hitrosti. Absciso, ki ustreza kateremu koli času, tako sestavljata dva člena, ki se s povečevanjem časa asimptotično približujeta ničli v skladu z eksponentnim zakonom, tj. s povečevanjem časa se geometrijsko zmanjšujeta v aritmetičnem smislu. Prvi člen se zmanjšuje hitreje kot drugi, tako da je po dolgem času, čeprav je tudi drugi člen zelo majhen, prvi člen še veliko manjši.

Za $b^2 = a\,m$ iz enačbe sledi

$$x = (C\,t + C_1)\,e^{-\frac{b\,t}{m}}.$$

Oba člena se s povečevanjem časa asimptotično približujeta ničli, vendar le drugi po preprostem eksponentnem zakonu. Tako kot v prejšnjem primeru bi bilo enostavno najti zvezo med začetno vrednostjo koordinate in začetno vrednostjo hitrosti, ki mora biti izpolnjena, da se pojavi le prvi ali le drugi člen. Gibanje v obeh obravnavanih primerih imenujemo ***aperiodično***.

Če je $b^2 < a m$, postaneta konstanti, označeni z α_1 in α_2, kompleksni, zato je treba imaginarne eksponentne funkcije na znan način nadomestiti s trigonometričnimi funkcijami:

$$x = \left[C \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + C_1 \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right] e^{-\frac{\lambda}{\tau}t}.$$

Pri tem smo uporabili okrajšavo:

$$\tau = \frac{\pi\,m}{\sqrt{m\,a - b^2}}, \quad \lambda = \frac{\pi\,b}{\sqrt{m\,a - b^2}} \tag{28}$$

tako da sta

$$\frac{b}{m} = \frac{\lambda}{\tau} \quad \frac{a}{m} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau^2}.$$

Ko se t poveča za τ, oba člena v izrazu za x, torej tudi sam x, spremenita predznak. Zato mora x v časovnem intervalu dolžine τ vsakič enkrat postati enak nič. Če izberemo trenutek, za katerega je $x = 0$, kot čas nič, potem je:

$$x = C\,e^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right). \tag{28b}$$

Vsakič po preteku časa τ, ne pa tudi sicer, je $x = 0$. Vmes ima x izmenično pozitivne in negativne maksimume, takoj ko je $dx/dt = 0$. To stanje se zaradi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{\tau}\, e^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\left[-\lambda \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + \pi \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right] \tag{29}$$

skrči na

$$\tan\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) = \frac{\pi}{\lambda}. \tag{30}$$

sako pozitivno in vsako negativno največjo številsko vrednost x imenujemo največji odmik. Če je t_1 koren te enačbe, ki leži med ničlo in $\frac{1}{2}\tau$, potem ima vsaka naslednja enačba obliko $t_1 + k, \tau$. τ je torej čas, ki preteče med nastopom največjega odmika in naslednjim odmikom, ki ga prav tako imenujemo točka obrata, torej čas celotnega poteka dogodkov, ki je seveda enak času poteka dogodkov in ga bomo imenovali perioda nihanja. To je tudi čas, ki preteče med dvema zaporednima prehodoma skozi mirujočo lego.

Če je x_k absolutna vrednost katerega koli največjega odmika, je absolutna vrednost naslednjega odmika $x_{k+1} = x_k, e^{-\lambda}$. Gibanje je torej prav tako periodično, tj. nihajno, vendar se največji nihaji približujejo ničli asimptotično po geometrijskem zaporedju. Iz zadnje enačbe ugotovimo:

$$\lambda = \ln \frac{x_k}{x_{k+1}} = \ln \frac{x_{k+1} + x_k}{x_{k+2} + x_{k+1}}$$

λ imenujemo ***logaritemski dekrement***. Enak je naravnemu logaritmu razmerja dveh zaporednih največjih odmikov ali razdalje med točkama obrata $k+1$ in $k+2$, oziroma k in $k+1$. Razdaljo med dvema zaporednima točkama obrata imenujemo ***amplituda nihanja***.

§ 19. Različni načini vzbujanja nihanja dušenega nihala. Kot prvo obravnavajmo naslednji način vzbujanja. Premična točka naj na začetku miruje. V času nič ji nenadoma dodelimo hitrost u_0. Za to je potreben sunek:

$$A_0 = \int X\, dt = m\, u_0.$$

Potem veljata enačbi (28b) in (29), saj je za $t = 0$ tudi $x = 0$. Pri slednjem velja, da je za $x = 0$ tudi $dx/dt = u_0$. Tako je

$$C = \frac{\tau u_0}{\pi}.$$

Največji odmik je zato

$$x_m = \frac{\tau u_0}{\pi}\, e^{-\frac{\lambda}{\tau}t_1} \sin\left(\frac{\pi t_1}{\tau}\right) = \frac{\tau u_0}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\pi}{\lambda}}. \tag{31}$$

Enako velja za $t = t_1$, ki je najmanjši pozitivni koren enačbe (30). Če sta torej znana λ in τ, lahko začetno hitrost izračunamo iz prvega največjega sunka. Če namesto u_0 vpeljemo A_0 in za m določimo njegovo vrednost iz druge od enačb (28a), sledi

$$x_m = \frac{A_0\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{a\,\tau}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Pri galvanometriji velja enačba, enaka enačbi (27), le da x označuje galvanski tok, A_0 integralni tok, a redukcijski faktor, m vztrajnostni moment.

Sedaj si oglejmo naslednjo, drugo metodo za vzbujanje gibanja materialne točke. Pri vsakem prehodu skozi mirovno lego ji določimo hitrost u_1 v smeri njenega gibanja. Skupni sunek, ki je za to potreben, je A_1. To imenujemo ***metoda balističnega pomnoževanja***. Sčasoma se vzpostavi stacionarno nihanja, pri katerem je največji nihaj vedno enak. Pri tem stanju je treba po vsakem povratku v mirovno lego hitrost, izgubljeno pri prejšnjem prehodu skozi to stanje, nadomestiti z novo podano vrednostjo u_1. Če je torej u_0 hitrost v trenutku ko ji dodamo hitrost u_1, potem je (prim. formulo (29)) $u_0 e^{-\lambda}$ hitrost, s katero se materialna točka ponovno vrne v mirujočo lego, in ker mora ta z dodajanjem u_1 ponovno preiti v u_0, imamo:

$$u_1 = u_0 \left(1 - e^{-\lambda}\right), \quad u_0 = \frac{u_1}{1 - e^{-\lambda}},$$

x_m je povezan z u_0 kot prej z enačbo, iz katere z zamenjavo u_1 dobimo

$$x_m = \frac{\tau u_1}{(1 - e^{-\lambda})\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{A_1\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{a\,\tau\,(1 - e^{-\lambda})}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\pi}{\lambda}}.$$

$2x_m$ je amplituda nihanja v stacionarnem stanju. Če bi bila hitrost u_1 vedno podana le pri prehodu skozi mirovno lego v eni smeri in ne pri prehodu v nasprotni smeri, se ne bi spremenilo nič drugega kot to, da bi bila

$$u_0 = \frac{u_1}{1 - e^{-2\lambda}}$$

V vsakem primeru lahko u_1 izračunamo iz amplitude nihanja v stacionarnem stanju, ter iz λ in τ. Če sta poleg tega znana m ali a, je mogoče ugotoviti tudi vsakokratni sunek.

Tretja metoda vzbujanja je ***metoda odboja***. Pri tej metodi se pri vsakem drugem prehodu skozi mirujočo lego v smeri, ki je nasprotna smeri gibanju, doda hitrost u_2. Če ima premična točka takoj za njo hitrost u_0, potem bo imela pri drugi vrnitvi v mirujočo lego hitrost $u_0 e^{-2\lambda}$, zato mora biti za stacionarno stanje

$$u_2 - u_0 e^{-2\lambda} = u_0,$$

torej

$$u_2 = \frac{u_0}{1 + e^{-2\lambda}}.$$

Prvo največje odstopanje je spet povezano z u_0 prek enačbe (31), drugo pa je $e^{-\lambda}$–krat manjše. Zamenjava u_0 z u_2 v tej enačbi je enostavna.

Razmislimo o četrti metodi vzbujanja, ki jo bomo poimenovali ***metoda pomnoževanja s trajno silo***. Na premično točko ves čas v smeri njenega gibanja deluje konstantna sila X. Med celotnim potekom gibanja nanjo deluje enaka in nasprotno silo, ki ima torej spet smer gibanja. Če dosežemo stacionarno stanje potem mirujoča lega ni v koordinatnem izhodišču, temveč v točki z absciso $\xi = X/a$, med gibanjem pa v točki z absciso $-\xi$. Če je torej $2x_m$ amplituda nihanja v stacionarnem stanju, je treba $x_m + \xi$ obravnavati kot prvi, $x_m - \xi$ pa kot drugi največji nihanje med gibanjem. Tako je

$$x_m + \xi = (x_m - \xi)\, e^{-\lambda}$$

ali

$$x_m = \xi \frac{e^\lambda + 1}{e^\lambda - 1} = \frac{X}{a} \frac{e^\lambda + 1}{e^\lambda - 1}.$$

Zadnji nalogi sta posebna primera splošnega problema pri katerem na materialno točko poleg dveh doslej obravnavanih sil, od katerih je prva sorazmerna z odklonom, druga pa s hitrostjo, deluje še sila, ki je poljubna funkcija $f(t)$ časa, tako da se enačba gibanja glasi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\,b \frac{dx}{dt} + a\,x = f(t)\,.$$

Splošna integracija te enačbe z metododami integracije nehomogenih linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti ni težavna. Kadar ta enačba

$$f(t) = B \sin \frac{\pi t}{\tau_1},$$

podaja resonanco elastičnega telesa ali drugega resonatorja s preprostim tonom, ima njen splošni integral obliko:

$$x = \left[C \sin \frac{\pi t}{\tau} + C_1 \cos \frac{\pi t}{\tau}\right] e^{-\frac{\lambda}{\tau} t} + \frac{B}{\omega} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau_1} - \vartheta\right).$$

Tudi tu sta τ in λ podana z enačbo, ω in ϑ pa sta konstanti, katerih vrednosti sta podani z enačbama

$$\omega \cos\vartheta = a - \frac{\pi^2 m}{\tau_1^2},$$
$$\omega \sin\vartheta = \frac{2\pi\, b}{\tau_1}.$$

V stacionarnem stanju v izrazu za x odpadejo vsi členi razen zadnjega. Tako materialna točka izvaja preprosto harmonično nihanje, ki ima enako periodo kot sila vzbujanja. Amplituda nihanja $2B/\omega$ je največja pri $\tau_1 = \pi m \big/ \sqrt{a\,m - 2b^2}$. Če je torej $\tau_1 = \pi\sqrt{m/a}$ enaka periodi nihanja, ki bi jo imela materialna točka, če bi nihala brez dušenja z enako silo, sorazmerno s koordinato, je hitrost v mirujoči legi največja in $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$; fazna razlika med nihanjem točke in nihanjem sile je torej $\frac{1}{2}\pi$ Za večje τ_1 je med nič in $\frac{1}{2}\pi$, za manjše pa med $\frac{1}{2}\pi$ in π.

§ 20. Osnovne enačbe centralnega gibanja. Oglejmo si naslednji primer. Naj bo rezultanta vseh sil, ki delujejo na premično materialno točko z maso m, katere koordinate v času t označimo z x, y, z, funkcija $f(r)$ njene oddaljenosti od točke O, ki je fiksirana v prostoru in se zmanjšuje v smeri r. Funkciji $f(r)$ ponovno damo pozitiven ali negativen predznak, odvisno od tega, ali sila teži k povečanju ali zmanjšanju razdalje r, torej odvisno od tega, ali je usmerjena stran od O ali proti O. Takšno silo imenujemo ***centralna sila***. Gibanje, ki ga materialna točka opravi pod njenim vplivom, se imenuje ***centralno gibanje***.

Take pogoje dobimo, če na premično materialno točko deluje ena sama točka, ki nanjo deluje s silo $f(r)$ na razdalji r in jo bodisi vedno drži neka naprava v fiksni točki O prostora, bodisi na začetku miruje in ima zelo veliko maso v primerjavi z maso gibljive točke. V slednjem primeru so pogoji seveda le približno izpolnjeni, saj je pospešek delujoče materialne točke vedno zelo majhen v primerjavi s pospeškom druge točke, zato sta tudi hitrost in sprememba lokacije delujoče materialne točke zelo majhni.

Če za izhodišče koordinat izberemo točko O, za ravnino na kateri se nahaja premična materialne točka in smer njene začetne hitrosti pa ravnino xy, potem enačba (9) vsebuje en sam člen, v katerem je za x_1, y_1, z_1, x_k, y_k, z_k, m_1, r_{1k} in $f_{1k}(r_{1k})$ treba zapisati x, y, z, 0, 0, m, r in $f(r)$ Če torej zapišemo enačbo, ki ustreza vsaki koordinatni osi, dobimo tri enačbe

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x}{r}f(r), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{r}f(r), \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{z}{r}f(r). \tag{32}$$

Ker je v začetnem času $z = dz/dt = 0$, je vse simetrično glede na ravnino xy, edino možno rešitev pa dobimo, če za vse čase izberemo $z = 0$. Če bi namreč z v katerem koli času imela vrednost različno od nič, bi bila enako možna tudi rešitev, pri kateri ima z enako nasprotno vrednost. Če pa kvocient prirastka r v prirastku $f(r)$ nikoli ne postane neskončen, potem je problem vedno enolično rešljiv, tj. v končnem času iz istih začetnih vrednosti nikoli ne moreta nastati dve različni kombinaciji vrednosti koordinat.

Zato lahko v nadaljevanju obravnavamo le prvi dve enačbi (32). Najprej izpeljemo enačbo za kinetično energijo po metodi, ki smo jo razložili že pri izpeljavi enačbe (20). Levo stran prve enačbe pomnožimo z $u\,dt$, desno stran z dx, levo stran druge enačbe (32) z $v\,dt$, desno stran z dy in nato obe enačbi seštejemo. Ker je

$$\frac{d^2x}{dt^2}dt = du$$

dobimo na levi

$$m\left(u\,du + v\,dv\right) = d\left(\frac{mc^2}{2}\right),$$

na desni strani pa

$$f(r)\,\frac{x\,dx + y\,dy}{r} = f(r)\;dr,$$

saj je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Z integracijo dobimo

$$\frac{mc^2}{2} = \varphi(r) + \frac{h\,m}{2}, \tag{33}$$

kjer je nedoločeni integral

$$\int f(r)\;dr = \varphi(r) \tag{34}$$

in h poljubna konstanta, tako da ima lahko integracijska konstanta nedoločenega integrala poljubno vrednost, ki jo lahko izberemo kar se da preprosto.

Odvod $\varphi'(r)$ funkcije $\varphi(r)$ je torej enaka $f(r)$.

Drugo integralsko enačbo (tj. enačbo s poljubno integracijsko konstanto) dobimo, če prvo od enačb (32) pomnožimo z $-y$, drugo z $+x$ in nato obe ponovno seštejemo. Iz tega sledi:

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

Ker m ne more biti nič, mora biti to izraz v oklepaju. Enako velja za odvod po času

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Z integracijo tako dobimo

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k, \tag{35}$$

kjer je k nova integracijska konstanta, ki jo določimo iz začetnih pogojev.

Zdaj je priporočljivo uvesti polarni koordinati r in kot ϑ daljice r, ki izhaja iz točke O, s pozitivno abscisno osjo. Potem sta:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta.$$

Odvod teh enačb da:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta,$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta$$

Zato je

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Enačbi (33) in (35) se preoblikujeta v:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\varphi(r) + h \tag{36}$$

in

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = k. \tag{37}$$

Iz zadnje enačbe sledi:

$$\int r^2 d\vartheta = k\,t. \tag{38}$$

t predstavlja poljuben čas. Integral na levi strani je treba vzeti po loku krivulje tira, ki ga v tem času prepotujemo in, kot je znano, predstavlja površino trikotnika, ki ga omejujejo ta lok in dve premici, ki povezujeta njegovi končni točki s koordinatnim izhodiščem. Lahko ga imenujemo območje, ki ga v času t prekrije usmerjena daljica r. Enačba pove, da je njegova površina sorazmerna s časom, v katerem daljica prepotuje to območje. Če iz enačb (36) in (37) odpravimo $d\vartheta/dt$, dobimo:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\varphi}{m}(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}} \tag{39}$$

in naprej v skladu s :

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2\varphi}{m}(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}}. \tag{40}$$

Če vzamemo $f(r) = -a\,r$, pri čemer je a konstanta, tj. če na materialno točko deluje privlačna sila, ki je neposredno sorazmeren z usmerjeno daljico r, potem ponovno dobimo poseben primer, ki izhaja iz že obravnavanih enačb, če v njih postavimo $z = 0$ in $a_{11} = a_{22} = a$, pri čemer seveda iz enačb tega paragrafa ne bomo ponovno izpeljevali že znanih rezultatov.

§ 21. Centralno gibanje po Newtonovem gravitacijskem zakonu. Naj bo centralna sila privlačna sila, ki je obratno sorazmerna kvadratu razdalje r. Če z λm označimo sorazmernostni faktor, kjer je λ konstanta, potem je

$$f(r) = -\frac{\lambda m}{r^2}.$$

V formuli (34) lahko določimo najprimernejšo vrednost integracijske konstante, zato izberemo $\varphi(r) = \lambda\,m/r$. Potem velja enačba (40)

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{h + \frac{2\lambda}{r} - \frac{k^2}{r^2}}}.$$

Če vzamemo

$$\frac{k}{r} = z + \frac{\lambda}{k}$$

dobimo

$$d\vartheta = -\frac{dz}{\sqrt{h + \frac{\lambda^2}{k^2} - z^2}}.$$

Pozitivni kvadratni koren iz $1 + \dfrac{h\,k^2}{\lambda^2}$ označimo z ε, tako da je

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{h\,k^2}{\lambda^2}. \tag{41}$$

Poleg tega damo integracijski konstanti, ki jo prištejemo k ϑ, vrednost nič. Rezultat integracije je zato

$$r = \frac{k^2}{\lambda\,(1 + \varepsilon\cos\vartheta)}. \tag{42}$$

Za $\vartheta = 0$ ima r najmanjšo vrednost. Izbira integracijske konstante poleg ϑ torej pomeni, da za pozitivno os abscise izberemo premico, ki poteka od središča privlaka do perihelija, tj. do tiste točke tira, ki je najbližje središču privlaka. Iz analitične geometrije vemo, da enačba predstavlja stožernico, v enem od njenih gorišč se nahaja koordinatno izhodišče, njena ekscentričnost je ε, njene osi pa imajo smer dveh koordinatnih osi. To velja za hiperbolo, če je $\varepsilon > 1$, torej je h pozitiven, parabolo, če $\varepsilon = 1$, torej $h = 0$, elipso, če je $\varepsilon < 1$ ali h negativen, ter krog za $\varepsilon = 0$. V tem zadnjem primeru je h enak $-\lambda^2\big/k^2$. e je h negativen in ima večjo absolutno vrednost, potem noben tir ni več mogoč. Pri tem mora biti pogoj vedno privlak, torej pozitivna vrednost λ..

e je h pozitiven, ima hitrost v neskončnosti vrednost $+\sqrt{h}$, če je $h = 0$, se z naraščajočo razdaljo približuje ničli, če pa je h negativen, potem hitrost v neskončnosti postane imaginarna. Nazadnje, če je $h = -\lambda^2 \big/ k^2$, potem je enostavno videti, da je privlak enaka centripetalni sili, ki ustreza krožni orbiti.

Če bi bila sila, ki je obratno sorazmerna kvadratu razdalje, odbojna, bi bil λ negativen. Pri realnih vrednostih hitrosti bi bil h vedno pozitiven, zato bi imeli $\varepsilon > 1$. Za k različen od nič bi torej gibanje vedno potekalo po hiperboli.

Nekaj razmisleka bomo namenili le primeru, ko je $\varepsilon < 1$ in je λ naravno pozitiven. Tir je torej elipsa, katere velika polos a je aritmetična sredina največje in najmanjše vrednosti r (perihelij in afelij oz. prisončje in odsončje). Tako je:

$$a = \frac{k^2}{\lambda\left(1-\varepsilon^2\right)} = -\frac{\lambda}{h}. \tag{43}$$

Mala polos je

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{\sqrt{-h}}.$$

Če sta za r in c dani začetni vrednosti r_0 in c_0 ter kot med njima (r_0, c_0), lahko z njimi izrazimo konstanti h in k po naslednjih enačbah:

$$h = c_0^2 - \frac{2\lambda}{r_0}, \quad k = r_0\, c_0 \sin\left(r_0\, c_0\right).$$

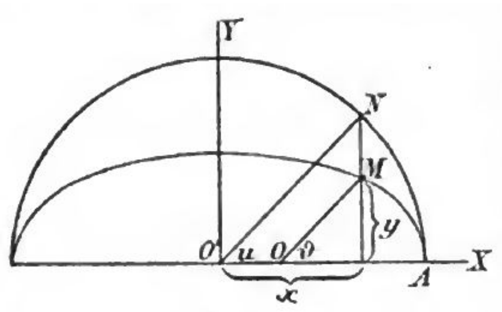
Za določitev r in ϑ kot funkciji časa, nam služi enačba, ki je v našem primeru reducira na

$$dt = \frac{r\, dr}{\sqrt{h\, r^2 + 2\lambda r - k^2}}. \tag{44}$$

Kot je znano, se je da integrirati z uvedbo pomožnega kota u [Hülfswinkel], ki je podan z enačbo

$$r = a\left(1 - \varepsilon \cos u\right). \tag{45}$$

u imenujemo ***srednja*** [mittlere], ϑ pa ***prava anomalija*** [wahre Anomalie].



Slika 3

Kot u lahko enostavno ponazorimo z naslednjo konstrukcijo. Dana naj bo tir elipsa, O' njeno središče, O njeno žarišče, OA njena velika os, M katerakoli njena točka na razdalji r od O s pravo anomalijo ϑ. Na sliki 3 narišemo krog s polmerom a in središčem O' okoli elipse. Naj se pravokotnica, ki poteka skozi M na OA, stika s polovico kroga, ki leži na isti strani kot M, v točki N. Naj bosta pravokotnici x in y. Nadalje naj bosta

x in y pravokotni koordinati točke M glede na koordinatni sistem, katerega izhodišče je v O', abscisna os ima smer glavne ordinatna os ima smer male osi elipse. Imamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nadalje je

$$y^2 = r^2 - (x - \varepsilon a)^2.$$

Če to vrednost y vstavimo v prejšnjo enačbo, dobimo

$$y^2 = r^2 - (x - \varepsilon a)^2.$$

Tako je $NO'A$ kot, ki smo ga poimenovali srednja anomalija točke M in ga označili z u. Iz enačbe (45) sledi

$$dr = a\,\varepsilon\,\sin u\,du,$$

iz enačb (43) in (45) dobimo

$$h\,r^2 = -\lambda\,a\,(1 - \varepsilon\cos u)^2, \quad k^2 = a\,\lambda\,\left(1 - \varepsilon^2\right),$$

zato

$$\sqrt{h\,r^2 + 2\lambda r - k^2} = \varepsilon\sqrt{a\lambda}\sin u.$$

Ko vse te vrednosti vstavimo v enačbo (44), dobimo po integracij:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}\,(u - \varepsilon\sin u) \tag{46}$$

pri čemer je konstanta določena tako, da je v trenutku preleta perihelija, tj. za $u = 0$, $t = 0$.

Predpostavimo, da je tir podan. Če se vprašamo, kdaj ima ϑ določeno vrednost, moramo najprej izračunati u, ki ustreza temu ϑ, npr. z geometrijsko konstrukcijo, in nato iz enačbe izračunati ustrezno vrednost t. Če se vprašamo obratno, katero vrednost ima ϑ na določenem tiru ob določenem času, potem moramo najprej poiskati u iz enačbe (46), ki je transcendentna za u (Keplerjev problem), nato pa poiskati r iz enačbe (45) in ϑ iz enačbe (42) ali iz geometrijske konstrukcije.

§ 22. Centralna sila vsebuje člen, ki je obratno sorazmeren s tretjo potenco razdalje. Doslej obravnavani primeri centralnega gibanja so verjetno edini, ki ustrezajo opaženim naravnim pojavom. Hertz je sliki narave, ki smo jo ponovno poskušali prikazati v tej knjigi, očital, da je preširoka, tj. da vsebuje neskončno število posebnih slik, ki jim ne ustrezajo nobena dejstva. Menim, da se je temu očitku težko izogniti in da velja tudi za Hertzovo mehaniko, saj od neskončnega števila pogojnih enačb ali skritih gibanj, ki so po Hertzovem prikazu mogoča, zagotovo le izjemno majhno število ustreza dejansko opaženim primerom.

Ampak, dokler je možnost slike, ki ne daje več kot dejstva, še vedno tako oddaljena kot je trenutno, se mi zdi pomembno, da posvetimo nekaj pozornosti tistim posebnim primerom trenutno najbolj obetavnih slik, ki nimajo zveze z doslej ugotovljenimi dejstvi Prvič, v prihodnosti bodo morda primerne za prikaz opaženih dejstev, drugič, le s preučevanjem vseh možnih primerov dobimo boljši vpogled nad notranjo povezanostjo tistih posebnih primerov, ki jih že uporabljamo.

V doslej obravnavanih primerih centralnega gibanja obstaja le nekaj posebnih oblik tirov, ki nam nikakor ne dajo predstave o splošnih značilnostih vseh možnih oblik tirov pri centralnem gibanju. Med oblikami tirov, ki jih še nismo srečali, pa so tudi tiste, v katerih so nekateri splošni izreki izraženi na najpreprostejši način in ki imajo bistveno vlogo pri bolj zapletenih, praktično ne nepomembnih problemih, npr. pri problemu treh teles. Zato bomo na kratko obravnavali toliko drugih najpreprostejših centralnih gibanj, kolikor jih bo potrebnih, da dobimo pregled nad splošnimi značilnostmi vseh možnih oblik tirov pri centralnem gibanju.

Najprej bomo izpeljali izrek, ki nam bo v tej zvezi koristil. Naj bo centralna sila sestavljena iz dveh delov. Naj bo en del $f(r)$ poljubna funkcija razdalje. Temu dodamo še silo $m\,a\big/r^3$, ki je obratno sorazmerna s tretjo potenco razdalje in deluje bodisi odbojno bodisi privlačno, odvisno od tega, ali je konstanta a pozitivna ali negativna. Naj bo $\varphi(r)$ funkcija, ki je v razmerju, danem z enačbo (40), enakovredna funkciji $f(r)$. Funkcija $\varphi(r)$, ki ustreza centrični sili $f(r) + m\,a\big/r^3$, ki jo obravnavamo, ima torej vrednost $\varphi(r) - m\,a\big/2\,r^2$. Zato se enačba za to centralno gibanje spremeni v naslednjo

$$d\vartheta = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2\varphi(r)}{m} + h - \dfrac{k^2+a}{r^2}}}.$$

To centralno gibanje bomo primerjali z drugim, pri katerem je centralna sila enaka le $f(r)$, h ima enako vrednost, vendar ima h vrednost $k_0 = \sqrt{k^2+a}$. Pri obeh centralnih gibanjih označimo vrednost ϑ, ki pripada enaki vrednosti r_0 z r, dani enkrat za vselej, z nič; vrednost ϑ, ki pripada kateri koli drugi vrednosti r, označimo za prvo centralno gibanje z ϑ, za drugo pa z ϑ_0.

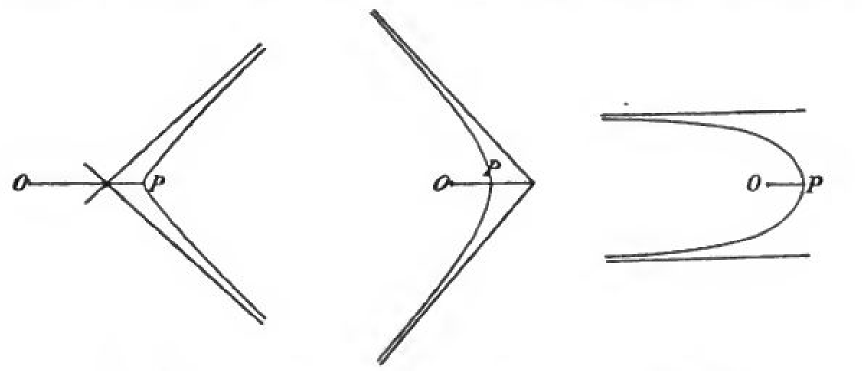
Enačbo, ki ustreza enačbi za drugo centralno gibanje, lahko nato enostavno prevedemo v obliko:

$$d\left(\vartheta_0\sqrt{\frac{k^2}{k^2+a}}\right) = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2\varphi(r)}{m} + h - \dfrac{k^2+a}{r^2}}}. \tag{47}$$

V primeru drugega centralnega gibanja je torej $\vartheta_0\sqrt{\dfrac{k^2}{k^2+a}}$ ista funkcija r kot pri prvem ϑ. Če poznamo tir drugega centralnega gibanja, najdemo iz njega tir prvega, tako da vsakemu r, ki mu v drugem centralnem gibanju pripada kot ϑ_0, pripada polarni kot $\kappa = \vartheta_0\sqrt{\dfrac{k^2}{k^2+a}}$. Časovni potek centralnega gibanja je torej vedno neposredno odvisen od izreka o vrtilni količini.

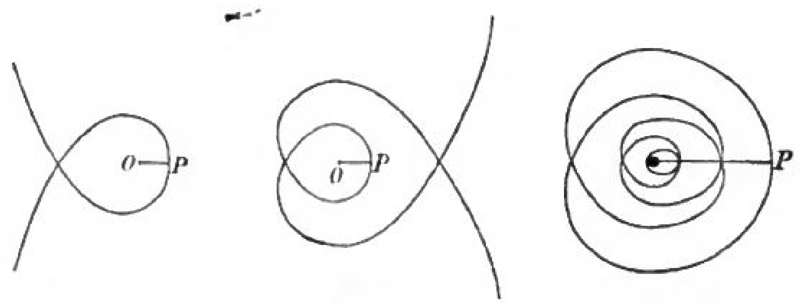
Prvi primer. Naj bo $f(r) = 0$. Potem se drugo centralno gibanje vrši po premici MN. Naj bo $OP = r_0$ njena najkrajša razdalja od O, A je katerakoli točka premice. Potem je AOP kot, označen s ϑ_0, in dobimo

$$OA = r = \frac{r_0}{\cos\vartheta_0} \tag{48}$$



Slike 4, 5, 6

Če je a pozitiven, prvo centralno gibanje nastane zaradi odboja, ki je obratno sorazmerna s tretjo potenco razdalje. Potem $\kappa < 1$. Tir najdemo tako, da pustimo dolžino vodilnega žarka OA vsake točke A premice MN nespremenjeno, a vsakič zmanjšamo kot $AOP = \vartheta_0$ v razmerju $1 : \kappa$ Njegova oblika je prikazana na sliki 4. Ima dve asimptoti, od katerih vsaka tvori kot $\frac{1}{2}\kappa\pi$ z razdaljo perihelija OP in ima razdaljo κr_0 od središča privlaka O.



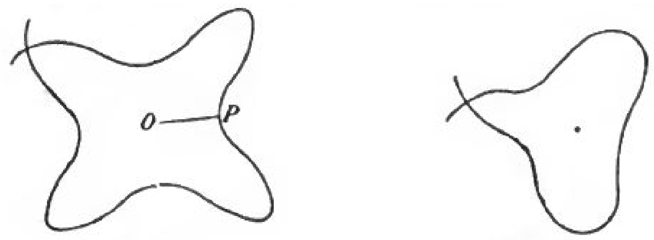
Slike 7, 8, 9

Če je a negativen, pride do prvega centralnega gibanja pod vplivom privlaka, ki je obratno sorazmerna tretji potence razdalje, in je $\kappa < 1$. Kot AOP je treba takrat povečati v razmerju $1 : \kappa$. Če je $-a < 3k^2\big/4$, potem je $\kappa < 2$, kot asimptote z razdaljo perihelija je potem $< \pi$, tir pa ima obliko, ki je prikazana na sliki 5. Če je $-a$ enak $3k^2\big/4$, potem je $\kappa = 2$, obe asimptoti sta vzporedni s premico, speljano od O do P (perihelijska razdalja), vendar sta usmerjeni v nasprotni smeri in sta vsaka na razdalji $2r_0$ od središča privlaka (slika 6). če je $-a$ med $3k^2\big/4$ in k^2, potem je tir spirala okoli središča privlaka (sliki 7 in 8), število obratov spirale pa se vedno bolj povečuje, ko se spremenljivki $-a$ in k^2 bližata druga drugi. Za $-a = k^2$ se gibanje odvija po hiperbolični spirali ali (vedno nestabilni) krožni orbiti. Če je $-a$ še vedno večji, potem je $\sqrt{\dfrac{-k^2}{a+k^2}} = \dfrac{1}{\kappa'}$. Neposredno integriranje enačbe za negativni h da

$$r = \frac{2\,r_0}{e^{\kappa'\vartheta} + e^{-\kappa'\vartheta}}.$$

Tako je zdaj $OP = r_0$ največja vrednost r, tir pa je sestavljena iz dveh vej simetričnih glede na OP, od katerih je vsaka spirala, ki se asimptotično približuje koordinatnemu izhodišču v neskončnem številu obratov (slika 9). Za $h = 0$ je tir logaritemska spirala, za pozitivni h pa spirala, ki se razteza od središča privlaka do neskončnosti z enačbo

$$r\left(e^{\kappa'\vartheta} - e^{-\kappa'\vartheta}\right) = \text{const.}$$

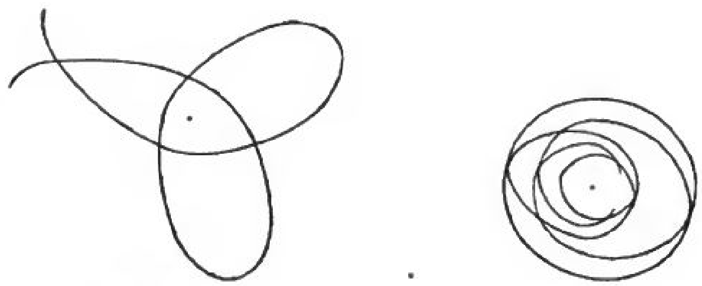


Sliki 10 in 11

Doslej smo v formuli določili $f(r) = \varphi(r) = 0$. Drugi primer, iz katerega dobimo nekatere nove vrste tirov [Bahntypen], dobimo, če v tej formuli določimo

$$f(r) = -\frac{m\,\lambda}{r^2}, \quad \text{zato} \quad \varphi(r) = \frac{m\,\lambda}{r}.$$

Drugo centralno gibanje postane identično gibanju planeta v skladu z Newtonovim gravitacijskim zakonom, prvo pa se zgodi pod vplivom sile, ki je sestavljena iz vsote, obratno sorazmerne s kvadratom in tretjo potenco razdalje. Zato najdemo tir za takšno silo tako, da pomnožimo polarni kot, ki pripada vsakemu r v planetarnih tirov, z κ. Tiri, ki tako nastanejo iz paraboličnih in hiperboličnih tirov, pa tudi tiste, ki jih dobimo za imaginarni κ, imajo v celoti tip ene od figur 4 do 9.



Sliki 12 in 13

Iz eliptičnih tirov pa nastanejo posebni zvezdasti zaprti ali odprti tiri, ki imajo, odvisno od tega, ali se κ spreminja od zelo majhne do zelo velike vrednosti, tip figur 10 do 13. Če tir ni zaprta, se premična točka, kot smo že ugotovili, da je to mogoče v primeru Lissajousovih krivulj, poljubno dolgo približuje vsaki točki, ki leži na delu ravnine, omejenem z dvema koncentričnima krožnicama. Enačba tira nam torej ne daje ene same ali končnega števila možnih ordinat za vsako absciso premična točke, temveč le smer in hitrost njenega nadaljnjega gibanja v vsaki točki prostora.

§ 23. Razprava o možnih vrstah tirov. Navedli bomo nekaj splošnih ugotovitev, da se prepričamo, katere druge vrste tirov [Bahntypen] so možne poleg tistih, ki smo jih doslej naključno spoznali. Enostavnega primera $k = 0$, tj. da je tir premica, ne bomo obravnavali.

Naj bo

$$\psi(r) = \frac{2}{m}\varphi(r) + h - \frac{k^2}{r^2}. \tag{49}$$

tako dobimo:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \psi(r);$$

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{r^4}{k^2}\psi(r) \tag{50}$$

$f(r)$ ima lahko katero koli pozitivno ali negativno vrednost, vključno z ničlo, vendar mora biti med $r = 0$ in $r = \infty$ enoznačna, končna in zvezna. Ker v fiziki ne dovoljujemo neskončnih sil, moramo v ta pogoj vključiti vrednosti $r = 0$ do $r = \infty$. Vseeno pa dopuščamo neskončno naraščanje sile za $r = 0$ in $r = \infty$, deloma zaradi splošnosti prikaza, deloma pa zaradi nekaterih uveljavljenih zakonov sile. Pod temi predpostavkami sta brez upoštevanja mej tudi $\varphi(r)$ in $\psi(r)$ med $r = 0$ in $r = \infty$ enolični, končni in zvezni.

Iz enačb (50) sledi, da se lahko, če je dan zakon sile ter vrednosti konstant h in k, na realnih tirih pojavijo le take vrednosti r, za katere $\psi(r)$ ni negativen. Po drugi strani pa bomo v vsaki točki A, za katero je $\psi(r)$ pozitiven, lahko našli pozitivno in enako negativno vrednost za $dr/d\vartheta$, ki bosta zadovoljili naše enačbe. Skozi vsako takšno točko torej potekata dva možna tira, ki sta, mimogrede, popolnoma skladni in zrcalni podobi glede na premico OA Skozi vsako drugo točko B, ki je enako oddaljena od točke O, po istem zakonu sile potekata dva skladna tira, ki ustrezata enakima vrednostma h in k in sta glede na tira, ki potekata skozi točko A, zasukani za kot BOA. Ker so vsi ti tiri med seboj skladni, jih bomo imenovali enotna oblika tira.

Če je $\psi(r)$ pozitiven za zelo majhen r in še vedno pozitiven ali enak nič za $r = 0$, potem se ena oblika tira konča v O. Seveda je $\psi(0)$ lahko nič ali pozitiven le, če $\varphi(r)$ postane neskončno velik reda $1\big/r^2$ ali še večji z zmanjševanjem r, torej sila $f(r)$ postane neskončna reda $1\big/r^3$ ali večja. Po nobenem drugem zakonu sile premična točka ne more doseči O, ne da bi $k = 0$. Čas τ, ki preteče, dokler se r ne zmanjša z majhne vrednosti ε na nič ali obratno, in skupni kot α, za katerega se zavrti usmerjeni žarek r, sta podana z

$$\tau = \int_0^\varepsilon \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\,r^2}{m}\varphi(r) + h\,r^2 - k^2}}, \tag{51}$$

$$\alpha = \int_0^\varepsilon \frac{k\,dr}{r\sqrt{\frac{2\,r^2}{m}\varphi(r) + h\,r^2 - k^2}}. \tag{52}$$

α se torej zmanjšuje z zmanjševanjem ε, če $r\sqrt{\varphi(r)}$ postane neskončen z zmanjševanjem r večjega reda od $\ln\left(\frac{1}{r}\right) \ln^2\left(\frac{1}{r}\right) \ln^3\left(\frac{1}{r}\right) \cdots$, kjer je ln naravni logaritem. V nasprotnem primeru postane α neskončen in tir neskončnokrat obkroži točko O. Čas, potreben za to, lahko postane neskončen le, če $2r^2\varphi(r)$ za majhne r od $m\,k^2 - m\,h\,r^2$ z majhnimi višjega reda od $r^4\left[\ln\left(\frac{1}{r}\right)\ln^2\left(\frac{1}{r}\right)\cdots\right]$ bi bilo drugačno.

Podobno tir doseže neskončnost, če je $\psi(r)$ pozitiven za $r = \infty$ ali se približuje ničelni meji iz pozitivne vrednosti, kar se lahko zgodi le za pozitiven h, ali če je $\varphi(r)$ pozitiven za velik r, tudi za $h = 0$, v primeru, ki je dejansko edini fizikalno pomemben, da $\varphi(\infty)$ izgine. Ali usmerjeni žarek r s tem opiše končni kot ali naredi neskončno veliko obratov, pa tudi, ali premična točka doseže poljubno veliko razdaljo v končnem ali le neskončnem času, je spet odvisno od zlahka določljive vrednosti dveh določenih integralov, ki sicer povsem ustrezata določenima integraloma (51) in (52); le da je njuna spodnja meja zelo velika, zgornja pa neskončna.

Ker je $\psi(r)$ zvezna, lahko prehaja iz pozitivne v negativno vrednost samo prek vrednosti nič. Glede na zakon sil želimo preučiti različne tire, ki ustrezajo določenemu paru vrednosti h in k. Za njihovo število je odločilno število pozitivnih korenov enačbe

$$\psi(r) = 0. \tag{53}$$

Najprej predpostavimo, da za dani par vrednosti h in k zgornja enačba (53) nima enakih pozitivnih korenov, torej da za nobeno pozitivno vrednost r, ki jo izpolnjuje, ne velja $\psi'(r) = 0$. Potem bo funkcija $\psi(r)$ za vsak pozitivni koren r_0 s povečevanjem r prešla iz negativne vrednosti v pozitivno ali obratno. Korenu $r = r_0$ pravimo v prvem primeru naraščajoči koren, v drugem pa padajoči koren. Za vsak tak koren velja $dr/d\vartheta = 0$.

Med vsakim korenom, pri katerem funkcija ψ pada, in naslednjim večjim korenom, pri katerem funkcija narašča, je $\psi(r)$ negativna, zato tir ni mogoč. Med korenom, pri katerem funkcija narašča, in naslednjim večjim korenom, pri katerem funkcija pada, je vedno možna oblika tira, katere perihelijska razdalja je koren, pri katerem funkcija narašča, afelijska razdalja pa koren, pri katerem funkcija pada. Oblika tira se mora torej po afeliju nadaljevati v veji, ki se vrača v perihelij in je zaradi iste strukture diferencialne enačbe skladna z delom, ki leži pred afeljem. Enako velja za vsak perihelij.

V primeru, da r_0 ni dvojni koren enačbe (53), je lahko r zelo blizu r_0 le za zelo kratek čas, kar zaradi izreka o vrtilni količini ustreza tudi zelo majhni spremembi ϑ. To vidimo iz rešitve diferencialne enačbe ki jo bomo dobili na znan način za primer, ko je r blizu r_0. Na tem mestu bom o tem razpravljal le na kratko. Naj bo r v času t_0 enak r_0, ki je naraščajoči enostavni koren enačbe V času $t_0 + \tau$ pa naj bo $r = r_0 + \rho$. Če postavimo $\sqrt{\psi'(r_0)} = 2a$, se prva od diferencialnih enačb za majhen ρ zreducira na

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\psi(r_0 + \rho)} = 2a\sqrt{\rho},$$

iz katere sledi $\rho = a^2\tau^2$. Dokler je ρ zelo majhen, bo r v zelo kratkem času vedno narasel od r_0 do $r_0 + \rho$. Enako velja za zelo majhno zmanjšanje ρ v afeliju.

Ker se v skladu s površinskim izrekom $d\vartheta/dt = 0$ njen predznak ne spreminja in lahko postane nič le na neskončni razdalji, tangenta na tir nikoli ne more iti skozi koordinatno izhodišče O. Namesto tega mora premična točka vedno krožiti okoli točke O v takšnem ali drugačnem smislu. Zato vedno dobimo zaprte ali odprte tirnice oblik prikazanih na slikah 10 do 13, katerih poseben primer je eliptični tir, pri čemer je treba upoštevati, da je polmer ukrivljenosti tira neskončen, kadar je $f(r) = 0$, medtem ko je tir konkaven ali konveksen na tisti strani tangente, na kateri leži O, če je $f(r)$ negativna ali pozitivna. To je razvidno, če razčlenimo $f(r)$ na tangencialno silo in centripetalno silo, usmerjeno proti središču ukrivljenosti tira Med perihelijem in afelijem se seveda ena in druga ukrivljenost lahko spreminjata pogosteje. Na slikah 5 do 9 je ukrivljenost vedno usmerjena proti O, na slikah 10 in 11 pa se med perihelijem in afelijem enkrat spremeni.

Če je $\psi(r)$ pozitiven za zelo majhne vrednosti r, potem mora biti najmanjši pozitivni koren enačbe (53), če ta sploh ima pozitivne korene, padajoč. Potem obstaja tir, ki se konča v koordinatnem izhodišču in katere afelij je ta najmanjši koren, ki pa gre v neskončnost, če pozitivnega korena ni. V prvem primeru premica, usmerjena v afelij, seveda ponovno razdeli tir na dve veji, ki sta zrcalni sliki glede na premico.

Če je $\psi(r)$ pozitivna za zelo velik r, potem je največji od teh korenov, če ima enačba (53) sploh pozitivne korene, naraščajoč in je enak perihelijski razdalji tira, ki sega v neskončnost, ki jo premica, potegnjena do perihelija, ponovno razdeli na dve veji, ki sta zrcalni glede na premico. Tiri, ki se končajo v središču privlaka ali gredo v neskončnost, so takšni, kot so prikazani na slikah 9 ali 4 do 8, čeprav se seveda lahko spreminjata tudi ukrivljenost navznoter in navzven. Pri prvih tir je število obratov okoli koordinatnega izhodišča seveda lahko poljubno majhno.

Če enačba (53) nima pozitivnih korenov, potem $\psi(r)$ med $r = 0$ in $r = \infty$ ne more spremeniti predznaka. Če je predznak negativen, tir sploh ni mogoč. Če pa je predznak pozitiven, se edina možna oblika tira razteza od središča privlaka do neskončnosti. To je edini primer, kjer poleg središča privlaka in točke v neskončnosti ne obstajata perihelij ali afelij, zato noben tir ni sestavljen iz dveh skladnih vej, ki sta zrcalni sliki ena druge. Namesto tega lahko ti dve zrcalni sliki obravnavamo kot dve ločeni obliki tira, saj se srečata le v neskončnosti ali v središču privlaka.

§ 24. Tirnice, ki se asimptotično približujejo krožnemu tiru ali pa nihajo. Upoštevati moramo še primer, da ima enačba (53) za nekatere pare vrednosti h in k, npr. $h = h_1$ in $k = k_1$, dva enaka korena $r = r_1$. Potem velja hkrati $\psi(r_1) = \psi'(r_1) = 0$, torej:

$$\frac{1}{m} f(r_1) + \frac{k^2}{r_1^3} = 0. \tag{54}$$

Zaradi prve od enačb (50) je $\dfrac{dr}{dt} = 0$, zato velja:

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{k}{r}$$

kar je enako celotni hitrosti c. Iz enačbe (54) sledi:

$$f(r) = -\frac{m\,c^2}{r}.$$

Centralna sila je privlačna in enaka centripetalni sili, ki ustreza krožnemu gibanju. Ker za $r = r_1$ velja enačba $\dfrac{dr}{d\vartheta} = 0$, se lahko gibanje nadaljuje zvezno po krogu.

Naj bo $\psi''(r_1)$ najprej negativen. To se zgodi, ko je $\psi'(r_1) = 0$, če je za $r = r_1$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2} m\, r^3 \psi'(r)\right] = \frac{d}{dr}\left[r^3 f(r)\right]$$

negativen za $r = r_1$, zato se $f(r)$ v neposredni bližini vrednosti $r = r_1$ z naraščanjem r zmanjšuje ali pa narašča manj hitro kot recipročna tretja potenca r, pomnožena s konstanto. Potem za dani par vrednosti h in k na obeh straneh krožnice $r = r_1$ leži območje, v katerem centralno gibanje ni možno. Če tir zelo malo motimo, tj. če zelo malo spreminjamo vrednosti h in k, potem mora tir vedno ostati neskončno blizu krožnemu gibanju; pravimo, da je krožno gibanje stabilno.

Če pa je $\psi''(r_1)$ pozitivna, tj. če sila v neposredni bližini vrednosti $r = r_1$ z naraščanjem r narašča hitreje kot recipročna tretja potenca r, pomnožena s konstanto, potem za obravnavani par vrednosti h in k na obeh straneh krožnice $r = r_1$ leži območje, kjer skozi vsako točko potekata dva tira (seveda oba kot zrcalni sliki drug drugega). Če je torej ρ majhna pozitivna ali negativna količina, potekata skozi vsako točko, ki je od središča privlaka oddaljena $r_1 + \rho$, dva tira, za kateri imata h in k enake vrednosti kot za gibanje po krožnici $r = r_1$.

Vrsto teh tirov ugotovimo z obravnavo diferencialne enačbe za primer, ko je blizu $r = r_1$. V prvo od enačb (50) vstavimo $r = r_1 + \rho$ in, ne da bi se spuščali v podrobno analizo razvoja vrste, s katero bi lahko natančno utemeljili naslednje rezultate, izpustimo vse člene razen tistih najnižjega reda. Če recipročno vrednost količine $\frac{1}{2}\psi''(r_1)$ označimo z b^2, dobimo:

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm\frac{\rho}{b}, \quad t - t_0 = \pm b \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

kjer je ρ_0 vrednost ρ v času t_0. Tako je neskončen tako čas, ki preteče, dokler ρ ne dobi končne vrednosti, kot tudi čas, ki preteče, dokler ρ ne postane natančno enak nič, tj. dokler gibanje ne postane natančno identično krožnemu gibanju. Zato bi lahko rekli, da so za dani par vrednosti h in k v neposredni bližini vrednosti $r = r_1$ možne tri vrste centralnih gibanj: eno natančno znotraj krožnice $r = r_1$, drugo zunaj, ki se, če ga prehodimo od zunaj navznoter, asimptotično približuje krožnici v neskončnem številu obratov, za katerega prehod potrebujemo neskončno dolgo časa, in tretje, ki se prav tako asimptotično približuje krožnici od znotraj. Vse tri lahko seveda obravnavamo tudi kot eno, pri čemer se premična točka, ko se na primer giblje od znotraj navzven, najprej približa krožnemu tiru, nato na njem ostane neskončno dolgo in ga šele nato v neskončnem številu zavojev spet zapusti navzven. Ker ni tira, ki bi imel perihelij in afelij zelo blizu krožnemu tiru, je slednji nestabilen, kar pomeni, da že najmanjša motnja povzroči, da se premična točka od njega vedno bolj oddaljuje za zelo dolgo časa in končno za končno količino.

Vsaka od tirnic, opisanih v prejšnjem odstavku, se lahko torej namesto perihelija ali afelija, ali pa obeh, približa krožnemu tiru z zunanje ali notranje strani.

Če h in k nista povsem natančna, vendar sta zelo blizu vrednosti h_1 in k_1, za kateri ima enačba enake korene, sta možna dva primera:

Primer 1: h in k imata vrednosti h_1 in k_1 tako zelo blizu h_2 in k_2, da ima $\psi(r_1)$ majhno negativno vrednost, kjer je r_1 spet dvojni koren enačbe, ki velja za $h = h_1$ in $k = k_1$. Potem je krog $r = r_1$ obdan z zelo ozkim obročem, znotraj katerega pri vrednostih konstant h_2 in k_2 ni mogoče nobeno centralno gibanje[5]. Tirnice, ki ležijo znotraj tega obroča in za katere konstante imajo te vrednosti, bodo zato po številnih skoraj krožnih zavojih, ko se bodo približale obroču, imele afelij na njegovem notranjem

[5]Ta obroč, ki označuje omejeno območje okoli krožnice, je lahko tudi v celoti znotraj ali v celoti zunaj krožnice, vendar vedno zelo blizu nje.

robu. Prav tako bodo tirnice zunaj obroča po številnih skoraj krožnih zavojih imele perihelij na zunanjem robu obroča, in premična točka nikoli ne more preiti iz notranjosti obroča na tir zunaj obroča.

Primer 2: h in k morata imeti vrednosti h_3 in k_3, ki prav tako zelo malo odstopata od h_1 in k_1, vendar v nasprotnem smislu kot h_2 in k_2, tako da $\psi(r)$ za nobeno vrednost r, ki je zelo blizu r_1, ne postane enaka nič ali negativna. Orbita, ki se začne z vrednostma h_3 in k_3 konstant znotraj kroga $r = r_1$, se bo sprva res približala temu krogu v zelo številnih zavojih, nato pa ga bo prebila in po nadaljnjem opisovanju zelo številnih zavojev, ki ležijo zelo blizu kroga, popolnoma zapustila proti zunanjosti.

Če torej izhajamo iz iste točke znotraj kroga $r = r_1$ in dopustimo tir z vrednostma h_2 in k_2, potem se pri vrednostih konstant h_3 in k_3 oba tira in tudi hitrosti gibanja v njiju sprva zelo malo razlikujeta. Vendar se bo prvi tir obrnil v neposredni bližini krožnice $r = r_1$, medtem ko bo zadnji tir to krožnico presegel za končno vrednost in nato potekal povsem drugače kot prvi tir. Podobno se seveda lahko zgodi tudi pri problemih s tremi telesi. Začudenje nad tem se mi zdi komaj upravičeno, saj je čas gibanja, po katerem se oba tira razideta drug od drugega, izjemno dolg. Po izjemno dolgem času pa se dva nezaključena tira, kakršna so prikazana na slikah 10 do 13, med seboj razlikujeta po legi, ne pa tudi po obliki, čeprav sta bila sprva tako tira kot hitrosti gibanja skoraj popolnoma enaki.

Razmerja se bistveno ne razlikujejo, če za $r = r_1$ poleg samega ψ odpade še več odvodov poleg prvega, pri čemer je prvi odvod, ki ne odpade, sodi. Šele takrat je čas, v katerem se $r - r_1$ zmanjša s končne na zelo majhno vrednost, višjega reda. Če pa je po drugi strani prvi odvod, ki ne odpade, lihi, potem se tirnice asimptotično približujejo krožnici s polmerom r_1 le z ene strani, medtem ko na drugi strani za obravnavani vrednosti h in k tirnice niso možne. Če vsi odvodi odpadejo, dobimo že obravnavani primer sile, ki je obratno sorazmerna s tretjo potenco razdalje. Za vse podrobnosti se je treba obrniti na izvirne razprave.[6] Dodajam nekaj besed o primeru, kjer je

$$f(r) = -\frac{a}{r^3} + b(r - r_1)^\gamma$$

pri čemer je $1 > \gamma > 0$. Tedaj je sila v bližini vrednosti $r = r_1$ enolična in zvezna funkcija r, katere odvod glede na r postane neskončen. V tem primeru tir ni vedno enoznačno določen z enačbami gibanja, začetno lego ter velikostjo in smerjo začetne hitrosti, saj se lahko premična točka za tiste vrednosti integracijskih konstant, za katere velja $\psi(r_1) = \psi'(r_1) = 0$, giblje tako po krožnici s polmerom r_1 kot tudi po drugi tirnici, ki se dotika te krožnice. Na tej drugi tirnici premična točka v končnem času doseže točko, ki je od krožnice oddaljena za končno vrednost. To se zlahka ugotovi, če postavimo $r = r_1 + \rho$, razvijemo funkcijo ψ po potencah ρ in poiščemo čas, v katerem ρ naraste od nič do majhne končne vrednosti.

Zato vedno predpostavljamo, da količnik povečanja razdalje glede na ustrezno povečanje sile ne more postati neskončen. Potem so po teoriji diferencialnih enačb neenolične rešitve znotraj končnega časa izključene.[7] V prej obravnavanih primerih tirov, ki se asimptotično približujejo krožnemu tiru, je res, da je premična točka, če je bila sprva na krožnem tiru, na nek način imela možnost izbire, ali bo ostala na tem

[6] Korteweg, Arch, neerl. Vol. 19; Boussinesq, Compt. rend. 84, p. 944

[7] Wien. Sitzber. 106, str. 12, 7. januar 1897

krožnem tiru ali pa se mu približala po asimptotično približujoči se tirnici. Toda ta izbira je postala navidezna, saj se gibanje v drugem primeru razlikuje od gibanja v prvem šele po neskončno dolgem času.

III

Splošni integrali enačb gibanja

§ 25. Gibanje dveh premičnih materialnih točk pod vplivom centralne sile. Kot preprost primer obravnavajmo ravninsko gibanje dveh materialnih točk z masama m_1 in m_2, med katerima deluje centralna sila $f(r)$. Integral $\int f\,(r)\,,dr$ z določeno konstanto, izbrano na najpreprostejši način, označimo z $\varphi\,(r)$. Naj bo r razdalja med dvema materialnima točkama, x_1, y_1, x_2, y_2 pa njune pravokotne koordinate v času t. Iz enačb (9) dobimo naslednje enačbe:

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= f\,(r)\,\frac{x_1-x_2}{r}, \quad & m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= f\,(r)\,\frac{y_1-y_2}{r}, \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= f\,(r)\,\frac{x_2-x_1}{r}, \quad & m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} &= f\,(r)\,\frac{y_2-y_1}{r} \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Če seštejemo enačbi, ki sta ena nad drugo, dobimo:

$$\frac{d^2\left(m_1x_1+m_2x_2\right)}{dt^2} = \frac{d^2\left(m_1y_1+m_2y_2\right)}{dt^2} = 0. \tag{56}$$

Daljico, ki v vsakem trenutku povezuje ti materialni točki, razdelimo v točki S na dva dela, ki se obnašata obratno sorazmerno s pripadajočima masama. Točka S, ki jo imenujemo ***težišče sistema***, ki ga tvorita obe masi, ali na kratko težišče obeh mas, ima v vsakem trenutku določeno lego, ki se s časom nenehno spreminja. O njenem gibanju lahko govorimo kot o gibanju materialne točke. Za koordinate težišča v času t s preprostim izračunom najdemo

$$\xi = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \quad \eta = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}. \tag{57}$$

Če sta obe masi enaki, potem leži težišče točno na sredini med njima, njegova abscisa pa je aritmetična sredina njunih abscis; enako velja za y koordinato. Če pa je ena masa večja, bo težišče toliko bližje tej masi, kolikor večja je ta masa. Enačbi se zato poenostavita na $\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = 0$, saj kot vedno obravnavamo masi kot konstanti. Težišče se torej giblje enakomerno po premici s hitrostjo, ki jo je imelo na začetku, tako kot materialna točka, na katero ne delujejo nobene sile.

Treba je določiti le relativno gibanje obeh materialnih točk glede na težišče. Zanima nas relativno gibanje mase m_1 glede na maso m_2. Tako sta v vsakem trenutku podani smer in dolžina vezne daljice med masama. Ker poznamo lego težišča v vsakem trenutku in vemo, v kakšnem razmerju deli to daljico, lahko takoj določimo lego vsake od **mas** v vsakem trenutku.

Uporabimo drugi koordinatni sistem, katerega osi ostajajo vzporedne z osmi prvega, vendar se v prostoru gibljejo vzporedno same s seboj, tako da njihova začetna koordinatna točka vedno sovpada s trenutno lego materialne točke m_1. Koordinate mase m_1 v času t glede na ta drugi koordinatni sistem označimo z x in y, brez indeksov. Potem velja:

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Če prvo enačbo v prvi vrstici enačb (55) delimo z m_1, nato od nje odštejemo enačbo pod njo, ki smo jo delili z m_2, in uvedemo še

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m \quad \text{ali} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

dobimo:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(r)\,\frac{x}{r}.$$

Podobno dobimo, če v prvi vrstici enačb (55) drugo enačbo delimo z m_1 in od nje odštejemo enačbo neposredno pod njo, ki smo jo delili z m_2:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f(r)\,\frac{y}{r}.$$

Ti dve enačbi sta popolnoma skladni z enačbo (32). Relativno gibanje materialne točke m_1 glede na točko m_2, kar pomeni zgolj spremembo koordinat x in y prve materialne točke glede na drugi koordinatni sistem, katerega osi so vedno vzporedne druga drugi in vedno potekajo skozi drugo materialno točko, poteka natančno po zakonih, ki smo jih spoznali za centralno gibanje okoli nepremične točke. Natančneje, kot da bi druga materialna točka mirovala v prostoru in bi na prvo delovala z enako centralno silo $f(r)$, pri čemer masa te sile ne bi bila m_1, temveč masa, označena z m. Poleg tega, kot da bi imela prva materialna točka na začetku točno takšno hitrost in smer hitrosti, kot jo ima v resnici glede na drugi koordinatni sistem, tj. kot da bi bile njene komponente hitrosti v koordinatnih smereh na začetku časa enake

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \quad \text{in} \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{dt}.$$

Ker že poznamo zakonitosti centralnega gibanja okoli nepremične točke, si pri reševanju problema, opisanega v tem poglavju, z navedenimi izreki prihranimo nove izračune. To gibanje v ravnini xy (ravnina tira) poteka nemoteno, tudi če imata obe materialni točki enako hitrost pravokotno na to ravnino.

§ 26. Načelo energije. Sedaj se vrnemo k obravnavi poljubnega števila materialnih točk. Koordinate katerekoli od njih (h-te) v času t označimo z x_h, y_h, z_h, njeno hitrost s c_h, komponente celotne sile, ki nanjo deluje v koordinatnih smereh, pa z X_h, Y_h, Z_h. Splošne enačbe zapišemo v obliki:

$$m\frac{d^2x_h}{dt^2} = X_h\,, \quad m\frac{d^2y_h}{dt^2} = Y_h\,, \quad m\frac{d^2z_h}{dt^2} = Z_h\,, \quad h = 1, 2, \ldots, n \tag{58}$$

Zadnji zapis tu in tudi kasneje pomeni, da enačbe veljajo za vse vrednost h od 1 do n. Ker velja:

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(c_h^2\right)}{dt} = \frac{dx_h}{dt}\frac{d^2x_h}{dt^2} + \frac{dy_h}{dt}\frac{d^2y_h}{dt^2} + \frac{dz_h}{dt}\frac{d^2z_h}{dt^2},$$

dobimo, če prvo enačbo v enačbah (58) pomnožimo z $\frac{dx_h}{dt}$, drugo z $\frac{dy_h}{dt}$, tretjo z $\frac{dz_h}{dt}$, in nato vse dobljene enačbe seštejemo za vsako dopustno vrednost h:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n}\left(X_h\frac{dx_h}{dt} + Y_h\frac{dy_h}{dt} + Z_h\frac{dz_h}{dt}\right). \tag{59}$$

Pri tem je

$$T = \sum_{h=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_h c_h^2 \tag{60}$$

kar imenujemo ***celotna kinetična energija*** vseh n materialnih točk.

Z integracijo dobimo:

$$T_1 - T_0 = \int \sum_{h=1}^{n} \left(X_h dx_h + Y_h dy_h + Z_h dz_h\right). \tag{61}$$

T_1 in T_0 sta vrednosti T v poljubnih časih t_1 in t_0; integracija mora zajemati celotno gibanje v času $t_1 - t_0$. Če ponovno uporabimo pojme iz § 16, je sprememba celotne kinetične energije sistema v katerem koli časovnem obdobju enaka skupnemu delu, ki ga opravijo vse sile, ki v tem času delujejo na njegove točke. Delo je pozitivno, če ima pot smer sile, ki deluje na zadevno točko. To lahko ugotovimo tudi, če postavimo enačbo za vsako točko sistema in nato seštejemo vse te enačbe (20).

Obravnavamo poseben primer, ko je izraz na desni strani enačbe pod znakom integrala popolni diferencial enolične funkcije $-V$, ki vsebuje le koordinate n materialnih točk. Takrat pravimo, da obstaja potencial sile , ki neposredno ne vsebuje časa, V pa imenujemo ***potencial*** [Kraftfunction]. V tem primeru je:

$$X_h = -\frac{\partial V}{\partial x_h}, \quad Y_h = -\frac{\partial V}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\frac{\partial V}{\partial z_h}, \quad h = 1, 2, \ldots, n \tag{62}$$

To pomeni, da je sila, ki deluje na katerokoli materialno točko v kateri koli koordinatni smeri, negativni parcialni odvod potenciala glede na zadevno koordinato. Če desno stran enačbe (61) integriramo, dobimo naslednji rezultat:

$$T_1 - T_0 = -V_1 + V_0,$$

kjer sta V_1 in V_0 vrednosti potenciala v poljubnih časih t_1 in t_0. Vsota celotne kinetične energije in vrednosti potenciala tako ostane konstantna med celotnim gibanjem. Ker mora biti V enolična funkcija koordinat, mora imeti enako vrednost, ko se vse točke sistema vrnejo v svojo prvotno lego; zato mora celotna kinetična energija vseh točk sistema vsakič znova dobiti enako vrednost. V skladu s § 8 potencial vedno obstaja, kadar so materialne točke ločene od vseh zunanjih vplivov in se gibljejo izključno pod vplivom centralnih sil, ki delujejo med njimi. V skladu z enačbo (10) je

$$V = -\sum\sum \varphi_{hk}\left(r_{hk}\right).$$

Podobno mora potencial obstajati, če na n materialnih točk delujejo centrične sile ν poljubnih drugih materialnih točk, ki imajo v prostoru nespremenljivo lego. Enačbo lahko uporabimo za sistem, ki ga tvori $n+\nu$ točk, nato pa koordinate ν točk postavimo kot konstantne oziroma njihove mase kot neskončno velike. Če je $F_{hk}\left(r_{hk}\right)$ sila, s katero ena od ν točk deluje na eno od n točk na razdalji r_{hk}, in če velja:

$$\int F_{hk}\left(r_{hk}\right)\,dr_{hk}=\Phi_{hk}\left(r_{hk}\right),$$

potem je:

$$V=-\sum\sum\varphi_{hk}\left(r_{hk}\right)-\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi_{hk}\left(r_{hk}\right). \tag{62a}$$

V vseh teh primerih bo vsota kinetične energije in potenciala ostala konstantna, tako da bo skupna kinetična energija n točk vsakič dosegla enako vrednost, ko se bo vsaka od njih vrnila v svojo prvotno lego v prostoru. Iz tega pa še ne sledi, da mora imeti vsaka posamezna materialna točka ponovno tudi prvotno hitrost. Natančneje, če imamo opravka s sistemom teles, ki je sestavljen iz zelo velikega števila materialnih točk, ki so tako gosto posejane, da posameznih točk ne moremo zaznati, potem iz slike, ki smo si jo ustvarili, logično sledi naslednje: lahko se pojavijo relativna gibanja posameznih materialnih točk druga proti drugi, ki jih, tako kot posamezne točke, seveda ne moremo neposredno podrobneje opazovati. Možno je, da imajo ti skriti premiki še druge zaznavne, količinsko merljive učinke, ki so sorazmerni s kinetično energijo teh nevidnih medsebojnih premikov materialnih točk, vključno z delom molekularnih sil, ki se pri tem izvaja s premiki točk, in so pomnoženi z ustreznim koeficientom. Potem mora biti vsota kinetične energije vidnega gibanja, potenciala vidno delujočih sil med telesoma in količine vseh drugih učinkov, pomnoženih z ustreznimi koeficienti, vedno konstantna. Če torej vsak od teh členov imenujemo energija, mora biti vsota vseh energij konstantna. To je ***načelo energije***.

Včasih je bila zadeva predstavljena tako, kot da bi bila celotna mehanska slika namenjena le razlagi tega načela. Seveda bi, ko bi bilo načelo jasno prepoznano, postala slika nepotrebna. Toda ***načelo ohranjanja energije*** je le majhen delček vsega, kar predstavlja slika, zato lahko skladnost s tem velikim splošnim načelom narave obravnavamo le kot eno, posebno in dragoceno potrditev naše slike. Šele ko bi bilo mogoče, brez vključevanja naše slike, predstaviti ravno toliko dejstev tako jasno in jedrnato kot s pomočjo slike, bi lahko rekli, da je slika postala odveč.

Če ν materialnih točk, ki delujejo na obravnavani sistem n točk, ne miruje, temveč se gibljejo po znani (predpisani) poti, potem v drugem členu izraza za V (enačba 62a) obravnavamo koordinate ν točk kot funkcije časa t. Zato V poleg koordinat n točk eksplicitno vsebuje tudi čas. Sila, ki deluje na katerokoli od n točk v kateri koli koordinatni smeri, je še vedno negativni parcialni odvod V glede na koordinato zadevne točke. Toda totalni odvod dV/dt glede na čas, tj. limita celotne spremembe V v času dt, deljena z dt, je sestavljena iz dveh delov: tistega, ki izhaja iz spremembe ν točk, kar pomeni, da izhaja iz dejstva, da V eksplicitno vsebuje čas (označili ga bomo z $\partial V/\partial t$), in tistega, ki izhaja iz dejstva, da se koordinate n točk v času dt spremenijo za $dx_1, dy_1, \ldots, dz_n$. Slednji je enak:

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_h}\frac{dx_h}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y_h}\frac{dy_h}{dt}+\frac{\partial V}{\partial z_h}\frac{dz_h}{dt}\right).$$

V skladu z enačbo (59) je le slednji izraz enak $-dT/dt$, če s T tako kot prej označimo skupno kinetično energijo n točk. V tem primeru je torej

$$-\frac{dT}{dt}=\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t}$$

iz česar seveda ne sledi, da mora biti $V+T$ konstanten. Zato zdaj skupna energija sistema n točk ni konstantna. Pravimo, da sistem točk n prejema energijo od ν točk in sil, ki vzdržujejo njihovo gibanje, oziroma jim energijo oddaja. Če se ν točke gibajo, ni nujno, da je energija n točk konstantna.

Kljub temu so možni primeri, ko je mogoče sile $X_1, Y_1, \ldots, Z_n$, ki delujejo na n točk, izraziti zgolj kot funkcije teh koordinat, npr. če je gibanje ν točk ciklično, tako da takoj, ko ena izmed teh točk zapusti svoje mesto, na njeno mesto stopi enaka točka, način tega cikličnega gibanja pa je odvisen od lege n točk, ali na splošno, če je gibanje ν točk na določen način odvisno od lege n točk. Lahko pa je $X_1dx_1+Y_1dy_1+\cdots+Z_ndz_n$ tudi diferencial večlične funkcije, ki vsebuje le koordinate n točk, ali pa sploh ni popoln diferencial.

Sile, ki delujejo na magnetni pol, so primer prvega primera, ko so v polju konstantni linearni, samostojni tokovi, in primer drugega primera, ko se magnetni pol nahaja v fizičnem vodniku, ki je povsod prepleten z električnimi tokovi. V obeh primerih so možni premiki n točk, pri čemer se občasno vrnejo v začetno lego, vendar se njihova skupna energija nenehno povečuje na račun energije teles, ki nanje delujejo od zunaj.

Še bolj zapleteni so seveda primeri, ko je gibanje ν točk tudi funkcija komponent hitrosti n točk ali drugih posebnosti njihovega gibanja, tako da tudi sile, ki delujejo na točke, postanejo funkcije te količine, v smislu, v katerem smo že v § 18 govorili o silah, ki so funkcije hitrosti, o čemer pa tu ne bomo več razpravljali.

§ 27. Izrek o gibanju težišča. Ponovno se vrnemo k najbolj splošnemu primeru, ko je vseh n točk podvrženih njihovemu medsebojnemu delovanju in vplivu ν zunanjih točk. Točka h izmed teh n točk ima maso m_h in v času t koordinate x_h, y_h, z_h. Rezultanta vseh sil, ki jih ν točk v času t deluje nanjo, je $\mathfrak{R}_h$, njene komponente v treh koordinatnih smereh pa so $\mathfrak{X}_\mathfrak{h}$, $\mathfrak{Y}_\mathfrak{h}$, $\mathfrak{Z}_\mathfrak{h}$. Vse te sile, s katerimi ν točk deluje na n točk, imenujemo sile, ki delujejo na sistem naših n točk od zunaj, tj. sile, ki izhajajo iz materialnih točk, ki ne pripadajo sistemu. V nasprotju s tem imenujemo centralne sile, ki delujejo med poljubnima dvema točkama sistema, ***notranje sile*** sistema. Naj bo $f_{hk}(r_{hk})$, kot prej, notranja sila, ki deluje med točkama h in k sistema. Enačbe (10), (13), in (58) se z uvedbo tega novega poimenovanja spremenijo v:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=\sum_{k=2}^{n} f_{1k}(r_{1k})\,\frac{x_1-x_k}{r_{1k}}+\mathfrak{X}_1 \tag{63}$$

z dvema podobnima enačbama za osi y,ter s $3n-3$ podobnih enačb za preostale materialne točke.

Če seštejemo vse te enačbe, ki se nanašajo na koordinato x, potem se vsi členi, ki vsebujejo funkcije f, izničijo, in sledi

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{h=1}^{n} m_hx_h=\sum_{h=1}^{n}\mathfrak{X}_h. \tag{64}$$

Podobne enačbe seveda dobimo tudi za osi y in z. S S_2 označimo težišče sistema, ki ga tvorita masi m_1 in m_2, z ξ_2 pa njegovo absciso. Na podlagi enačbe (57) velja:

$$\xi_2 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Nadalje predpostavimo, da se v točki S_2 nahaja masa, ki je enaka $m_1 + m_2$, tj. enaka vsoti mas, katerih težišče je S_2. Z S_3 označimo težišče sistema, ki ga tvori ta masa, ki se nahaja v S_2, in masa m_3, z ξ_3 pa absciso S_3. Potem velja ponovno, v skladu z enačbo:

$$\xi_3 = \frac{(m_1 + m_2)\,\xi_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Naj bo S_3 težišče treh mas m_1, m_2, m_3. Na enak način bomo težišče S_4 štirih mas m_1, m_2, m_3 in m_4 imenovali tisto točko, ki jo dobimo, ko iščemo težišče sistema, ki ga tvorita masa m_4 in masa $m_1 + m_2 + m_3$, ki se nahaja v točki S_3. Za abscisno vrednost velja enako kot prej:

$$\xi_4 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Če nadaljujemo na ta način, kar bomo imenovali ***sintetična*** definicija težišča, dobimo za koordinate ξ, η, ζ ***težišča*** [Schwerpunktes] vseh n mas vrednosti:

$$\xi = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{n} m_hx_h, \quad \eta = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{n} m_hy_h, \quad \zeta = \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{n} m_hz_h \tag{65}$$

kjer je $M = \sum_{h=1}^{n} m_h$ vsota vseh mas sistema, ki jo imenujem tudi njegova ***skupna masa*** [Gesammtmasse]. Definicijo težišča glede na te enačbe imenujemo ***analitična***. Takoj se pokaže, da v sintetični definiciji vedno dobimo isto točko kot težišče sistema materialnih točk, ne glede na to, v kakšnem vrstnem redu vzamemo različne mase sistema. Če uvedemo količine ξ, η, ζ, se enačba (64) in dve ustrezni enačbi, ki veljata za drugi dve koordinatni smeri, skrajšajo na

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{X}_h, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{Y}_h, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{Z}_h \tag{66}$$

Popolnoma enake enačbe bi veljale za gibanje materialne točke z maso M, na katero bi v vsakem trenutku delovala rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na vsako izmed teh n materialnih točk. Notranje sile, tj. centrične sile, ki delujejo med točkami sistema, so popolnoma zanemarjene. Zato lahko rečemo: težišče se giblje kot posamezna materialna točka z maso, enako vsoti mas vseh materialnih točk sistema, na katero v vsakem trenutku deluje sila, določena tako, da ***prijemališče*** vsake sile, ki deluje na katero koli materialno točko, premaknemo v to točko brez spreminjanja njene velikosti in smeri, nato pa poiščemo skupno rezultanto vseh teh sil. Komponenta te sile v posamezni koordinatni smeri mora biti vsota komponent vseh ***zunanjih sil*** v tej smeri, ki delujejo na vse materialne točke sistema. Seveda mora ta posamezna materialna točka imeti enako lego kot težišče sistema na začetku, njena začetna hitrost pa mora imeti enako velikost in smer [1].

Če se sistem n materialnih točk giblje zgolj pod vplivom centralnih sil, ki delujejo med katerima koli dvema od njih, potem ni zunanjih sil in težišče, če je mirovalo na začetku, ostane v mirovanju. V nasprotnem primeru se giblje po premici s konstantno hitrostjo. Notranje sile, ki smo jih iz enačb popolnoma izključili, torej ne vplivajo na gibanje težišča.

Če bi nabit top, ki lebdi v prostoru brez vpliva drugih teles, sprva miroval in se zaradi delovanja notranjih sil nenadoma sprožil, bi se krogla začela gibati v določeni smeri, top pa bi se začel gibati v nasprotni smeri s takšno hitrostjo, da bi težišče sistema, sestavljenega iz krogle in topa, ostalo v mirovanju. Enako velja za vsako telo, katerega deli se medsebojno gibljejo zgolj zaradi notranjih sil.

§ 28. Masa in teža grama. Dina. Izračun težišča. Sedaj smo prišli v stik z resničnostjo vsaj v enem pogledu. Videli smo, da lahko maso posamezne materialne točke izberemo povsem poljubno. Ker pa posameznih materialnih točk ne opazujemo, lahko namesto tega poljubno izberemo skupno maso določenega telesa. Na primer, vsoto mas vseh materialnih točk, ki so v kubičnem centimetru čiste destilirane vode pri tlaku, ki ustreza standardnemu odčitku barometra in temperaturi največje gostote, označimo z 1.

Teoretična možnost določitve mase katerega koli drugega telesa je naslednja. Rezultanta vseh sil, s katerimi materialne točke telesa A delujejo na materialne točke telesa B, mora biti, če si zamislimo, da vse delujejo v isti točki, enaka, vendar nasprotno usmerjena rezultanti sil, s katerimi materialne točke telesa B delujejo na materialne točke telesa A, saj to velja za vsako od teh sil. Masi dveh teles, ki sta v medsebojnem delovanju, sta zato v obratnem razmerju glede na opazne pospeške, ki jih imata njuni težišči zaradi tega delovanja, torej tudi v obratnem razmerju glede na celotno spremembo hitrosti, ki ju imata, ko trčita drug ob drugega.

Če formulam (9), (13) itd. ne dodamo konstantnega faktorja, moramo kot enoto sile določiti tisto silo, ki težišču telesa z maso 1 podeli pospešek 1 v enoti časa, pri čemer za enoti časa in dolžine izberemo sekunde in centimetre. To silo imenujmo dina. Če na primer na vrvico dolžine q cm pritrdimo majhno telo, katerega masa je p gramov, ki je torej s poskusi trkov ali drugimi preizkusi ugotovljena kot μ-krat večja od zgoraj definirane mase vode, in to telo niha v krogu na q cm dolgi vrvici tako, da v eni sekundi prepotuje pot γ cm, potem iz formule (15) vidimo, da je vrvica napeta s silo $\frac{\mu\gamma^2}{q}$ dyn.

Že zaključek v § 14 nakazuje, da zaradi vpliva težnosti v določeni točki na Zemlji vse točke vseh teles dobijo enak pospešek g (v naših zemljepisnih širinah na ravni morja približno 981 cm/s^2). Vse posledice, ki izhajajo iz te predpostavke, so bile popolnoma potrjene (glej zaključek v § 51), zato jo lahko štejemo za dobro utemeljeno izkustveno

[1] Zaradi velike razdalje med Zemljo in Soncem je sila, s katero po Newtonovem zakonu Sonce deluje na katero koli točko na Zemlji, skoraj obratno sorazmerna kvadratu razdalje med težiščem Zemlje in težiščem Sonca ter je usmerjena proti slednjemu. Če bi torej drug na drugega delovala le Zemlja in Sonce, bi se njuni težišči gibali kot materialni točki, obremenjeni z maso ustreznega nebesnega telesa, ki bi se privlačili s silo, obratno sorazmerno kvadratu njune razdalje, povsem v skladu z zakoni, razloženimi v §§ 21 in 25, kar pojasnjuje njihovo uporabo v praktičnih primerih. To velja tudi, če Zemljo in Sonce obravnavamo kot togi krogli, tudi brez zanemarjanja, kot bomo videli v teoriji potencialov.

dejstvo. Velikost sile, s katero težnost deluje na katero koli telo z maso m (teža tega telesa), je torej v skladu s formulo:

$$P = m\,g.$$

Teža telesa z maso enega grama je v naših krajih približno 981-krat večja od sile ene dine. Ta teža, ki jo imenujemo teža grama (ne smemo je zamenjati z maso grama), znaša približno 981 dyn. Dina je 981-ti del teže grama, kar približno ustreza teži miligrama.

Razmerje med masama dveh teles torej ni treba določati s poskusi trkov ali drugimi preizkusi njunih medsebojnih delovanj, saj je to razmerje enako razmerju njunih tež v isti točki na Zemlji, kjer ima g za vsa telesa enako vrednost. Slednje razmerje pa lahko prav tako priročno in natančno določimo s tehtnico, katere teorijo bomo spoznali kasneje (glej § 56).

Na ekvatorju ima vsako telo zaradi težnosti enak pospešek kot vsako drugo telo. Ta pospešek je nekoliko manjši kot v naših zemljepisnih širinah, medtem ko je v bližini pola nekoliko večji. Na ekvatorju je torej teža enega in istega telesa nekoliko manjša, v bližini pola pa nekoliko večja kot pri nas. Prav tako bi se ista elastična vzmet pri enaki temperaturi na polu nekoliko bolj raztegnila, na ekvatorju pa nekoliko manj kot pri nas, če bi nanjo pritrdili isto telo. Masa enega in istega telesa pa ostane povsod popolnoma enaka. Pri masi kubičnega centimetra vode je to preprosto posledica naše definicije enote mase. Stalnost razmerja med masama dveh teles izhaja iz skladnosti naše temeljne predpostavke 6 z izkušnjami.

Da bi pokazali, kako se število, ki izraža neko količino, spreminja z izbranimi enotami, vsaki količini pripišemo določene dimenzije. Pravimo, da ima vsaka dolžina dimenzijo $[l]$, tj. predstavlja jo l-kratno število, če izberemo enoto dolžine, ki je l-krat manjša. Površina ima dimenzijo $\left[l^2\right]$, prostornina $\left[l^3\right]$, saj se v teh primerih število poveča za l^2 oziroma l^3. Sila ima dimenzijo $\left[m \cdot l \cdot t^{-2}\right]$, saj jo predstavlja število, ki je $m \cdot l \cdot t^{-2}$-krat večje, če izberemo enoto mase m-krat manjšo, enoto dolžine l-krat manjšo in enoto časa t-krat manjšo. Te dimenzije so neposredno razvidne iz definicijske formule $X = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$; d in d^2 nimata dimenzij, saj izražata le spremembo.

Vektor, kot je dolžina, ne more biti enak sili ali hitrosti, tako kot število jabolk ne more biti enako številu hrušk. Le velikost prvega lahko izrazimo z istim številom kot intenziteto drugega. V redkih primerih si prizadevamo tudi za to, da bi bila ena dina predstavljena s puščico dolžine enega centimetra. Zato bi bilo bolje reči, da so velikosti vseh sil enake dolžinam puščic, pomnoženim z istim faktorjem zmanjšanja F. Le zato, ker verjamemo, da se to tako razume, opustimo omenjeni redukcijski faktor, ki ga je treba vedno dodati, ko zapišemo enačbo, kot je $P\,(\text{sila}) = AB\,(\text{dolžina})$.

Ker ustrezno sliko teles dobimo le, če si vsako telo zamislimo kot sestavljeno iz zelo velikega števila materialnih točk, ki jih ni mogoče posamezno našteti, dejansko ne bi mogli izvesti seštevanja, prikazanega v formuli (65), brez domneve o določeni pravilnosti v razporeditvi teh materialnih točk, s čimer dosežemo skladnost z izkušnjami. Najpomembnejša pravilnost je ta, da so vse materialne točke enake narave in enakomerno razporejene po celotnem volumnu telesa. Ta predpostavka pogosto dobro ustreza izkušnjam. V tem primeru je masa m, ki jo vsebuje kateri koli prostorninski del telesa, povezana s celotno maso M telesa tako, kot je prostornina ω tega dela povezana s celotno prostornino Ω telesa. Torej velja $m = \rho, \omega$, kjer je $\rho = \dfrac{M}{\Omega}$ masa na enoto prostornine (**gostota telesa**). Če takšne pravilnosti v razporeditvi **masnih delcev** [Massentheilchen] ni, potem domnevamo – kar je mogoče dokazati z vsaj približnim ujemanjem slik, ki iz tega izhajajo, z izkušnjami – da je ta pravilnost prisotna vsaj v neposredni bližini vsake točke telesa. To pomeni, da se količnik prostornine $d\omega$ vsakega prostorninskega elementa telesa z maso dm, ki jo ta vsebuje, z zmanjševanjem velikosti vedno bolj približuje določeni končni limiti ρ, katere vrednost se lahko zvezno spreminja od točke do točke v telesu. Če zanemarimo neskončno majhne prispevke višjega reda, tako dobimo:

$$dm = \rho \, do \, .$$

Vsote v formulah (65) se nato zamenjajo z integrali, ki zajamejo celotno prostornino telesa, in postanejo:

$$\begin{gathered} M = \int dm = \int \rho \, do \, , \\ \xi = \frac{1}{M} \int x\rho \, do \, , \quad \eta = \frac{1}{M} \int y\rho \, do \, , \quad \zeta = \frac{1}{M} \int z\rho \, do \, . \end{gathered} \tag{67}$$

Primer tankega lista ali ravne ali ukrivljene žice nas pripelje do pojma ravne ali ukrivljene ploskve in ravne ali ukrivljene linije, ki ju neprekinjeno prekrivajo materialne točke. Za ploskev naj bo df njen element, φ, df pa njena neskončno majhna masa. Za linijo naj bo ds njen element dolžine, σ, ds pa njena masa. V prvem primeru je torej:

$$\begin{gathered} M = \int \varphi \, df \, , \\ \xi = \frac{1}{M} \int x\varphi \, df \, , \quad \eta = \frac{1}{M} \int y\varphi \, df \, , \quad \zeta = \frac{1}{M} \int z\varphi \, df \, , \end{gathered} \tag{68}$$

v drugem pa

$$\begin{gathered} M = \int \sigma \, ds \, , \\ \xi = \frac{1}{M} \int x\sigma \, ds \, , \quad \eta = \frac{1}{M} \int y\sigma \, ds \, , \quad \zeta = \frac{1}{M} \int z\sigma \, ds \, . \end{gathered} \tag{69}$$

ρ imenujemo ***prostorska***, φ ***ploskovna***, σ pa ***linijska gostota*** porazdelitve mase. Če so mase enakomerno porazdeljene, so to seveda konstante, ki jih lahko izpostavimo pred integralnimi znaki.

§ 29. Moment sile. Smer vrtenja. Sedaj zapišemo enačbo, podobno enačbi (63) za os y, in jo pomnožimo z x_1, nato pa enačbo (63) pomnožimo z $-y_1$ in nazadnje seštejemo obe tako dobljeni enačbi. Rezultat je:

$$m_1 \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) = x_1 \mathfrak{Y}_1 - y_1 \mathfrak{X}_1 + \sum_{k=2}^{n} f_{1k} \, (r_{1k}) \frac{x_k y_1 - x_1 y_k}{r_{1k}} . \tag{69a}$$

Levo stran te enačbe lahko zapišemo v obliki:

$$\frac{d}{dt} \left[m_1 \left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right) \right] .$$

Če oblikujemo enačbe, podobne enačbi (69a), za vseh preostalih n materialnih točk našega sistema in vse te enačbe seštejemo, se členi, ki vsebujejo različne funkcije f, uničijo in dobimo:

$$\frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n} m_h\left(x_h\frac{dy_h}{dt}-y_h\frac{dx_h}{dt}\right)=\sum_{h=1}^{n}(x_h\mathfrak{Y}_h-y_h\mathfrak{X}_h). \tag{70}$$

Naj bo dana poljubna usmerjena premica O v prostoru; $\mathfrak{B}_h$ naj bo poljubna sila, A pa njeno prijemališče, katerega koordinate označimo kot x_h, y_h, z_h. AB je puščica, ki predstavlja to silo po velikosti in smeri. Kot običajno, izpustimo redukcijski faktor, čeprav bi bilo pravilneje določiti $\mathfrak{B}_h$ kot Γ krat AB.

Sedaj definiramo ***moment sile*** $\mathfrak{B}_h$ glede na premico G kot produkt:

$$\pm p\,K \tag{71}$$

kjer je K komponenta sile, pravokotna na premico, p pa razdalja od premice do smeri sile. Predznak je pozitiven ali negativen, odvisno od tega, ali je smer vrtenja sile okoli premice enaka ali nasprotna smeri, kot jo ima vrtenje od pozitivne osi x proti pozitivni osi y po najkrajši poti. Pomen te izjave lahko podrobneje pojasnimo na naslednji način. Polravnina, ki jo omejuje premica G, najprej poteka skozi začetno točko A puščice AB, ki predstavlja silo $\mathfrak{B}_h$, nato pa se po najkrajši poti zavrti tako, da še vedno poteka skozi končno točko B iste puščice, pri čemer je omejena s premico G. Če ta zasuk poteka v enakem smislu za oko, ki gleda v smer premice G, kot vrtenje, ki na najkrajši način spremeni pozitivno os x v pozitivno os y za oko, ki gleda v smeri pozitivne osi z, potem izberemo pozitiven predznak. Tej smeri vrtenja vedno pravimo pozitivna smer vrtenja okoli usmerjene premice. Po tem dogovoru določa smer, v kateri je os usmerjena, tudi pozitivno smer vrtenja okoli nje.

Če je točka A točka togega telesa, ki se lahko vrti okoli osi G, bo sila $\mathfrak{B}_h$ skušala zasukati to telo v pozitivnem smislu okoli osi G. Na kratko rečemo, da sila $\mathfrak{B}_h$ deluje v pozitivnem smislu vrtenja okoli usmerjene osi G.

V nasprotnem primeru, ko sila deluje v negativnem smislu vrtenja okoli osi G, moramo v formuli (71) izbrati negativni predznak. Ta formula kaže, da ima moment dimenzijo sile, pomnožene z dolžino. Moment lahko tudi konstruiramo na ta način.

Izberemo poljubno točko C na premici G in skozi njo položimo ravnino E, ki je pravokotna na premico. Naj bosta A' in B' projekciji točk A in B, ki sta končni točki puščice, ki predstavlja silo $\mathfrak{B}_h$, na to ravnino. Puščica $A'B'$ tako predstavlja komponento K sile $\mathfrak{B}_h$, ki je pravokotna na premico G. Produkt te komponente s pravokotno oddaljenostjo smeri sile od premice je torej dvakratnik površine trikotnika $CA'B'$, saj smo dolžino puščice AB postavili enako intenzivnosti sile $\mathfrak{B}_h$. Ta dvakratnik površine, ki ga moramo vzeti s pozitivnim ali negativnim predznakom glede na prej podano pravilo, znaša:

$$\pm 2CA'B' \tag{72}$$

kar je po naši definiciji enako momentu sile $\mathfrak{B}_h$ glede na premico G.

Lahko nadaljujemo tudi takole: Na ravnini trikotnika CAB, katerega površino označimo z CAB, postavimo v točki C normalo N v smislu, da sila $\mathfrak{B}_h$ deluje v pozitivnem smislu vrtenja okoli N. Potem velja:

$$CA'B' = \pm CAB\,\cos(N,G)$$

kjer velja enak predznak kot v izrazih (71) ali (72). Moment sile $\mathfrak{B}_h$ glede na os G je torej lahko definiran tudi kot količina:

$$2CAB\cos(N,G) \tag{73}$$

kjer predznaki niso vključeni. Predznak tega izraza določa, v katerem smislu deluje sila $\mathfrak{B}_h$ rotacijsko okoli osi G. Prav tako, kot bomo kasneje videli, je številčna vrednost te količine odločilna za intenzivnost, s katero ta sila poskuša zavrteti togo telo okoli osi G. Zato to količino imenujemo moment ali tudi ***vrtilni moment*** (Drehmoment) sile glede na to os.

Sedaj bomo v skladu z drugo definicijo poiskali moment sile $\mathfrak{B}_h$, katere prijemališče, kot je predpostavljeno v enačbi (70), ima koordinate x_h, y_h, z_h glede na os z kot os vrtenja, ki si jo seveda predstavljamo kot usmerjeno od negativnega proti pozitivnemu delu osi z. Točko C lahko nato izberemo kot koordinatno izhodišče, tako da ravnina xy nadomesti ravnino E. Ker so x_h, y_h, z_h koordinate prijemališča A sile, so x_h, y_h, 0 koordinate točke A'. Ker je torej $A'B'$ projekcija sile $\mathfrak{B}_h$ na ravnino xy, so:

$$x_h + \mathfrak{X}_h, \quad y_h + \mathfrak{Y}_h, \quad 0$$

koordinate točke B'. V skladu z znanim izrazom za površino trikotnika s koordinatami njegovih vrhov je v tem primeru dvakratnik površine trikotnika $CA'B'$ enak:

$$\pm\left(x_h\mathfrak{Y}_h - y_h\mathfrak{X}_h\right),$$

in zlahka vidimo, da je treba, tako kot v enačbah (71) in (72), ponovno upoštevati pozitiven ali negativen predznak, odvisno od tega, ali daljica OA' doseže lego OB' s pozitivnim ali negativnim vrtenjem okoli osi z po najkrajši poti. Tako je v vsakem primeru $x_h\mathfrak{Y}_h - y_h\mathfrak{X}_h$ tisto, kar smo opredelili kot moment sile $\mathfrak{B}_h$ glede na os z. Če bi uvedli redukcijski faktor Γ, s katerim bi dolžine puščic povezali z intenzitetami sile, bi ga zdaj, ko smo puščice ponovno izrazili s silami, ponovno opustili. Desna stran enačbe (70) je torej vsota momentov vseh sil, ki od zunaj delujejo na sistem n materialnih točk, glede na os z.

§ 30. Francoski in angleški koordinatni sistem. Za opazovalca, ki gleda na koordinatno izhodišče iz smeri, v katero kaže pozitivna os z, ni pomembno, v katero smer po najkrajši poti zasukamo pozitivno os x v pozitivno os y, če le obravnava zasuk okoli vsake usmerjene osi kot pozitiven v istem smislu. V tem primeru se zasuk od pozitivne osi y v pozitivno os z vedno zgodi po najkrajši poti okoli pozitivne osi x, zasuk od pozitivne osi z proti pozitivni osi x pa po najkrajši poti okoli pozitivne osi y, kot nam pokaže ciklična permutacija.

Če se ta smer zasuka ujema s smerjo vrtenja urinega kazalca, katerega številčnica je obrnjena proti smeri osi, se tak koordinatni sistem imenuje francoski, v nasprotnem primeru pa angleški[2]. Prvi koordinatni sistem lahko opišemo tudi tako: oseba, ki obrne svoj obraz proti pozitivni osi z in glavo v pozitivni smeri osi x, ima pozitivno os x na levi roki, ali: če je na tabli narisana pozitivna os z navzgor in pozitivna os y proti opazovalcu, je pozitivna os x usmerjena proti desni roki opazovalca. Ali: če v desko, ki

[2]Francoski sistem je levosučni, angleški pa desnosučni koordinatni sistem. (OP)

je vzporedna z ravnino xy, vrezujemo vijačno matico, se vijak, ki se vrti v njej, pomika naprej v pozitivni smeri osi z, tako kot se po najkrajši poti preide iz pozitivne smeri y v pozitivno smer x. Prav tako se hmeljeva vejica, ki raste navzgor in se ovija okoli osi z, vrti v isti smeri kot zasuk od pozitivne osi x proti pozitivni osi y, medtem ko se trtna vejica ovija v nasprotni smeri. Seveda se angleški koordinatni sistem v vseh teh primerih obnaša ravno obratno. Če sovpadata pozitivni osi x in y obeh koordinatnih sistemov, bo pozitivna os z enega koordinatnega sistema sovpadla z negativno osjo z drugega sistema. Tako se oba koordinatna sistema, če obravnavamo pozitivno in negativno smer kot različni, ne moreta popolnoma ujemati, temveč se obnašata kot zrcalni sliki, podobno kot desna in leva rokavica.

Odločitev v prid enega ali drugega sistema je treba sprejeti šele, ko začnemo obravnavati pojave, pri katerih nista obe smeri vrtenja enako upravičeni, tj. kadar imajo pomembno vlogo fizične rotacije, kot je vrtenje Zemlje, ali asimetrična naravna telesa, kot pri interakciji električnih tokov in magnetov, vrtenju polarizacijske ravnine svetlobe zaradi magnetizma ipd., ali kadar sami izvedemo prostorsko konstrukcijo.

Francoski koordinatni sistem ima naslednjo prednost: Če želimo pri konstrukciji ploskve $z = f\,(x, y)$ postaviti os x v ravnino in os z navpično navzgor, potem vrednosti osi x naraščajo v smeri, kot običajno pišemo, naraščajoče vrednosti osi y pa se pomikajo proti opazovalcu. Pri angleškem sistemu moramo bodisi zapisati $+x$ kot Orientalski narodi, bodisi tako, da os $+y$ narašča stran od opazovalca, ali pa pustiti, da je os $+z$ usmerjena navzdol, medtem ko mi gradimo navzgor. Ali pa moramo narisati os y v ravnino in os x proti opazovalcu, ali pa os y navzgor in os z proti opazovalcu, kar je vse skupaj bolj neprijetno ali vsaj neobičajno. Za fizika pa ima angleški sistem to prednost, da v njem pozitivni električni tok kroži okoli solenoida v pozitivnem smislu, če njegov severni pol (konec, ki kaže proti geografskemu severu in je običajno označen kot pozitiven) kaže proti točki, kjer je os vrtenja.

V nadaljevanju bomo v naših diagramih uporabljali francoski koordinatni sistem, pri čemer bomo pod pozitivnim vrtenjem okoli usmerjene osi razumeli vrtenje, ki se opazovalcu, ki gleda s točke, kamor je os usmerjena, zdi, da poteka v smeri urinega kazalca.

§ 31. Izrek o vrtilni količini. Podoba razmišljanja, kot smo jih podali v § 29, lahko uporabimo tudi za levo stran enačbe (70). Naj bo G spet poljubna premica, C njena točka, E pa ravnina, pravokotna na premico skozi to točko. Naj bo A točka v prostoru, kjer se v času t nahaja materialna točka z maso m_h, katere koordinate, tako kot v enačbi (70), označimo z x_h, y_h, z_h. Naj bo B točka, kjer se nahaja masa m_h v času $t + dt$, njene koordinate pa so $x_h + dx_h$, $y_h + dy_h$, $z_h + dz_h$. Končno, naj bosta A' in B' projekciji točk A in B na ravnino E, df_h in df'_h pa naj predstavljata dvakratnik površin trikotnikov CAB in $CA'B'$. Naj bo N normala na ravnino prvega trikotnika, potegnjena v točki C na tisto stran, da je zasuk premice CA v lego CB po najkrajši poti pozitiven zasuk okoli normale. Na kratko rečemo, da gibanje od A do B poteka v pozitivnem smislu okoli normale N. Produkt mase m_h, kosinusa kota (N, G) in limite, ki ji približujemo količnik df_h/dt, tj. količino:

$$m_h \cos{(N, G)}\, df_h/dt, \tag{74}$$

imenujemo ***vrtilna količina*** [Flächenmoment] mase m_h glede na os G. Ta je tudi enak:

$$\pm m_h \frac{df'_h}{dt} \tag{75}$$

kjer je treba, seveda, spet vzeti pozitiven ali negativen predznak, odvisno od tega, ali gibanje od A do B poteka v pozitivnem ali negativnem smislu okoli osi G.

V posebnem primeru, ko je G pozitivna os z, lahko namesto točke C uporabimo koordinatno izhodišče. V tem primeru so x- in y-koordinate treh točk C, A', in B' enake $0, 0$; x_h, y_h oziroma $x_h + dx_h, y_h + dy_h$. Torej:

$$df' = \pm\left(x_h dy_h - y_h dx_h\right),$$

kjer je predznak popolnoma enak kot v izrazu (75). Zato je v skladu z navedeno definicijo vrtilne količine:

$$m_h\left(x_h\frac{dy_h}{dt} - y_h\frac{dx_h}{dt}\right)$$

v trenutku t vrtilna količina mase m_h glede na os z.

Količina, ki se pojavi na levi strani enačbe (70) in je odvajana po t, je torej vsota W, vrtilna količina vseh n materialnih točk sistema glede na os z. Na kratko bomo W imenovali skupna vrtilna količina sistema glede na os z. V skladu z (74) je:

$$W = \sum_{h=1}^{n} m_h \cos\left(N, z\right)\frac{df_h}{dt}.$$

df_h je dvojna površina trikotnika, katerega oglišči sta lega materialne točke m_h v trenutku t in lega iste točke v času $t+dt$, tretje oglišče pa je koordinatno izhodišče. N je normala, postavljena na ta trikotnik tako, da je zasuk iz A proti B okoli nje pozitiven.

Skupna vrtilna količina sistema glede na katero koli usmerjeno premico G, speljano skozi koordinatno izhodišče, je:

$$U = \sum_{h=1}^{n} m_h\left(y_h\frac{dz_h}{dt} - z_h\frac{dy_h}{dt}\right) = \sum_{h=1}^{n} m_h \cos\left(N, x\right)\frac{df_h}{dt}$$

,

$$V = \sum_{h=1}^{n} m_h\left(z_h\frac{dx_h}{dt} - x_h\frac{dz_h}{dt}\right) = \sum_{h=1}^{n} m_h \cos\left(N, y\right)\frac{df_h}{dt}.$$

Toda skupna vrtilna količina sistema glede na katero koli usmerjeno premico G, speljano skozi koordinatno izhodišče, je:

$$\Phi = \sum_{h=1}^{n} m_h \cos\left(G, N\right)\frac{df_h}{dt} = U\cos\left(G, x\right) + V\cos\left(G, y\right) + W\cos\left(G, z\right) \tag{76}$$

Z Λ označimo pozitivni kvadratni koren $U^2+V^2+W^2$ in skozi koordinatno izhodišče potegnemo usmerjeno premico L, tako da velja:

$$\cos(L, x) = \frac{U}{\Lambda}, \quad \cos(L, y) = \frac{V}{\Lambda}, \quad \cos(L, z) = \frac{W}{\Lambda}$$

pri čemer so koti ostri ali topi, odvisno od tega, ali so U, V ali W pozitivni ali negativni. V skladu s to formulo je skupna vrtilna količina sistema glede na os L enaka Λ. Glede na katero koli os, ki poteka skozi koordinatno izhodišče O, je ta količina enaka projekciji vrtilne količine Λ, ki poteka v smeri L, na smer G. Ta projekcija je lahko pozitivna ali negativna, odvisno od tega, ali pade na pozitivno ali negativno stran premice G. Skupni površinski moment je torej glede na os L največji med vsemi osmi, ki potekajo skozi koordinatno izhodišče O (to je os največje vrtilne količine glede na točko O).

Glede na katero koli premico, ki poteka skozi O pravokotno na L, pa je skupna vrtilna količina nič.

lahka dokažemo, da je skupna vrtilna količina katerega koli sistema glede na katero koli os enaka momentu glede na vzporedno os, ki poteka skozi težišče sistema, povečanemu za vrtilno količino, ki bi jo imela celotna masa sistema glede na prvo os, če bi bila v težišču sistema in bi se gibala s hitrostjo težišča v smeri njegovega gibanja.

Prav tako lahko enostavno dokažemo povsem enake izreke o momentih vseh sil, ki delujejo na sistem od zunaj, z uporabo geometrijske predstavitve momentov sil s trikotnimi ploskvami. Če so:

$$D = \sum_{h=1}^{n}(y_h\mathfrak{Z}_h - z_h\mathfrak{Y}_h), \quad E = \sum_{h=1}^{n}(z_h\mathfrak{X}_h - x_h\mathfrak{Z}_h), \quad F = \sum_{h=1}^{n}(x_h\mathfrak{Y}_h - y_h\mathfrak{X}_h)$$

momenti glede na koordinatne osi, potem je moment teh sil glede na poljubno usmerjeno premico G, ki poteka skozi izhodišče O, enak:

$$D\cos(G,x) + E\cos(G,y) + F\cos(G,x) = H\cos(H,x)$$

kjer je H premica, ki poteka od O in ima dolžino $+\sqrt{D^2+E^2+F^2}$, ter tvori s koordinatnimi osmi kote, katerih kosinusi so D/H, E/H, F/H. Moment glede na os, ki ima smer premice H, je enak H, medtem ko je glede na katero koli premico, potegnjeno skozi O pravokotno na H, enak nič. Glede na katero koli drugo premico, potegnjeno skozi O, leži med $-H$ in $+H$. Končno je moment vseh sil, ki delujejo na sistem glede na katero koli os, enak momentu glede na vzporedno in enakosmerno os, povečanemu za moment, ki bi ga imele vse sile, ki delujejo na sistem glede na prvo os, če bi delovale brez spremembe velikosti in smeri v točki druge osi. Skupni moment notranjih sil sistema, tj. centričnih sil med dvema točkama, je seveda enak nič glede na vsako os.

Če na sistem od zunaj ne deluje nobena sila, so tudi momenti zunanjih sil enaki nič; torej je $D = E = F = 0$. Iz enačbe (70) in ustreznih enačb za osi y in z sledi, da morajo biti U, V in W tri konstante. Tako je os L, ki predstavlja največjo vrtilno količino in poteka skozi katero koli točko P, ki bodisi miruje bodisi se enakomerno in premočrtno premika, ter ravnina, pravokotna na to os, ki ostajata v prostoru nepremični (nepremična os, nepremična ravnina), vrtilna količina glede na katero koli tako os pa se ne spreminja s časom.

Na primer, če na telo, ki prosto lebdi v prostoru, od zunaj ne deluje nobena sila in so na začetku vsi njegovi deli mirovali, nato pa se zaradi notranjih sil en del telesa začne vrteti, se mora drugi del vrteti v nasprotni smeri, tako da skupna vrtilna količina glede na katero koli os ostane enak nič, saj je bil na začetku enak nič. V tem pogledu je izrek o vrtilni količini podoben izreku o težišču. Vendar obstaja bistvena razlika: pri slednjem so odvodi, ki so enaki nič (leve strani enačbe (64) in ustreznih enačb za preostale koordinatne osi), popolni diferenciali določenih količin, in sicer koordinat težišča. Količine, ki so v skladu z izrekom o vrtilni količini enake nič (leve strani enačbe

(70) in ustreznih enačb za preostale koordinatne osi), pa niso popolni diferenciali funkcij koordinat glede na čas.

Telo prosto lebdi v prostoru brez vpliva zunanjih sil. Na začetku miruje, kasneje pa se njegovi deli zaradi notranjih sil začnejo relativno gibati. Če imajo v dveh različnih časih t_1 in t_0 enako relativno lego, mora težišče telesa nujno imeti enako absolutno lego v prostoru, saj se ta lega ne spreminja. Vendar se lahko telo v času $t_1 - t_0$ poljubno zavrti okoli težišča, če se nekateri njegovi deli niso vrnili v prvotno lego po isti poti, po kateri so jo zapustili, temveč so se gibali po zaprtih tirih, ki pokrivajo omejeno območje.

Mačka, ki prosto lebdi v prostoru in na začetku miruje, se lahko poljubno obrača okoli svoje osi, če iztegnjene tačke premakne v levo od telesa, jih nato skrči proti telesu, jih premakne v desno, nato jih spet iztegne in ponovi isto gibanje. Vendar pa ta mačka ne more spremeniti lege svojega težišča. Dokler veliko število ladij pluje okoli Zemlje v smeri vrtenja Zemljine osi, se dolžina dneva podaljšuje. Vrtenje zemeljske osi, za katero predpostavljamo, da je fiksno, se vrne na prejšnjo hitrost takoj, ko se ladje ustavijo, vendar pa daljica, ki poteka od središča Zemlje do fiksne točke na ekvatorju, zaradi manevrov ladij nenehno zaostaja za svojo kotno rotacijo za določeno konstanto, kar pomeni, da se astronomski čas upočasnjuje.

IV

Načelo virtualnih premikov

§ 32. Toge in enostranske vezi Naredimo nov korak k stvarnosti. Izkušnje nam kažejo številna telesa, ki se v prostoru gibajo na najrazličnejše načine, ne da bi se njihova oblika, tj. medsebojna relativna lega posameznih delov, opazno spremenila. Takšna telesa imenujemo ***trdna***, in ustvarimo si ideal ***togega telesa***, tj. telesa, katerega deli ne morejo utrpeti niti najmanjše spremembe svojih relativnih leg.

Če si predstavljamo, da je takšno telo sestavljeno iz materialnih točk, potem morajo koordinate teh točk za ves čas gibanja ustrezati nekaterim osnovnim enačbam, ki izražajo, da razdalja med poljubnima materialnima točkama ostaja konstantna. Te enačbe imenujemo ***omejitve sistema*** [Bedingungen des Systems]. Njihov obstoj, kot tudi obstoj zelo različnih drugih materialnih točk med gibanjem, je mogoče dobro ponazoriti z uporabo prejšnje slike mehanike.

O gibanju togih teles dobimo nazorno sliko na naslednji način. Predstavljamo si sistem številnih zelo gosto posejanih materialnih točk. Te materialne točke se morajo v celoti gibati v skladu z do zdaj oblikovanimi zakoni. V določeni relativni legi materialnih točk (normalna lega), ki določa obliko trdnega telesa, mora biti rezultanta vseh notranjih sil, ki delujejo na vsako od njih, enaka nič. Čim se razdalja med poljubnima sosednjima materialnima točkama le malo poveča ali zmanjša, se takoj pojavijo izredno velike notranje sile, ki ju poskušajo spet vrniti na prvotno razdaljo (normalno razdaljo).

Ti pogoji so zagotovo izpolnjeni, če sprejmemo naslednje posebne predpostavke o notranjih silah. Za vsako materialno točko morajo obstajati vsaj tri ali več drugih točk, ki z njo ne ležijo v isti ravnini (imenovali jih bomo ***sosednje točke***) in imajo naslednjo lastnost: Sila $f(r)$, ki deluje med njimi in sosednjo točko na razdalji r, je enaka nič, takoj ko je r enaka normalni razdalji, vendar pa ima zelo veliko pozitivno vrednost, takoj ko je r nekoliko manjša, in zelo veliko negativno vrednost, takoj ko je r nekoliko večja od običajne razdalje. V prvem primeru mora torej takoj priti do zelo velikega odboja, v drugem pa do zelo velikega privlaka. Na kratko lahko rečemo, da sta materialni točki togo povezani, če centripetalna sila, ki deluje med njima, ne dopušča, da bi bila njuna razdalja bistveno večja ali manjša od normalne razdalje. Za vse druge materialne točke, ki se ne obnašajo tako kot tiste, ki smo jih imenovali sosednje točke, velja, da sila, ki deluje nanje na normalni razdalji in na razdaljah, ki se od te razdalje ne razlikujejo veliko, izgine.

Če poleg teh notranjih sil na sistem točk delujejo še druge ***zunanje sile*** [äussere Kräfte], ki izhajajo iz zunanjih točk, se takoj, ko materialne točke med gibanjem le malo spremenijo svojo relativno lego, pojavijo ogromne sile, ki jih skušajo vrniti v prvotno relativno lego; sistem bo torej približno podoben togemu telesu, če si notranje sile, ki jih povzročijo majhne deformacije, predstavljamo kot dovolj velike v primerjavi z zunanjimi silami. Vendar je to le približek; pri delovanju zunanjih sil se namreč vedno pojavijo majhne spremembe oblike, v nekaterih posebnih primerih, ko je ena od dimenzij prostora, ki ga zapolnjujejo točke, majhna, npr. ko ima obliko urne vzmeti, pa so možne tudi večje deformacije. Tako naša slika odstopa od ideala popolnoma togega telesa, vendar prav na enak način, kot od tega ideala odstopajo dejanska trdna telesa.

Poleg toge povezave dveh materialnih točk je zelo pomembna še ena vrsta povezave, ki jo bomo imenovali ***enostranska***. Doslej smo predpostavljali, da sila, ki deluje med dvema materialnima točkama, ne dopušča opaznega približevanja ali oddaljevanja v primerjavi z normalno razdaljo.

Sila mora imeti za vsako razdaljo, ki je le malo večja od običajne, zelo veliko negativno vrednost, vendar mora biti za običajno in vsako manjšo razdaljo enaka nič, ali pa mora imeti za vsako razdaljo, ki je le malo manjša od običajne, zelo veliko pozitivno vrednost, vendar mora biti za običajno in vsako večjo razdaljo enaka nič. V prvem primeru bo sila, ki deluje med dvema materialnima točkama, preprečila vsako oddaljevanje preko običajne razdalje, vendar ne bo ovirala poljubnega približevanja; v drugem primeru bo približevanje preko neke meje nemogoče, vendar nič ne bo oviralo oddaljevanja. V teh dveh primerih pravimo, da sta materialni točki enostransko povezani.

Približek prvega primera sta dve majhni telesi, povezani s tanko, skoraj neraztegljivo vrvico; za drugi primer služita dve togi krogli, katerih središči sta oddaljeni, vendar se ne moreta približati na razdaljo, manjšo od vsote njunih polmerov.

§ 33. Različne oblike omejitev, ki so jim lahko izpostavljeni sistemi točk. S takšnimi vezmi lahko obravnavamo primere, ko med koordinatami točk sistema obstajajo ***pogojne enačbe*** [Bedingungsgleichungen], npr. primer mase, ki mora med gibanjem ostati na predpisani ***ploskvi*** ali krivulji. V teh primerih poteka prikaz na naslednji način:

Naj bo krogla polmera a izredno gosto in enakomerno zapolnjena s togo povezanimi materialnimi točkami, tako da se obnaša približno kot toga materialna krogla. Poleg tega naj bi bili dve zvezni ***ploskvi***, katerih pravokotna razdalja je vedno in povsod enaka (enaka $2b$), neskončno gosto zasedeni z drugimi materialnimi točkami, ki jih bodisi nespremenljivo držijo v prostoru ustrezne sile bodisi se premikajo na predpisani način, vendar tako, da pravokotna razdalja obeh ploskev vedno in povsod ostaja enaka $2b$. Te zadnje materialne točke imenujemo točke naprave, ki omejuje svobodo gibanja.

Naj bo na začetku krogla točno med obema ploskvama. Sila, s katero poljubna materialna točka ene od ploskev deluje na poljubno materialno točko površine krogle, je na razdalji $b - a$ in večji enaka nič, že na nekoliko manjši razdalji pa je enaka izredno velikemu odboju. Med materialnimi točkami krogle in napravo ne smejo delovati druge sile. Razdalja dveh sosednjih materialnih točk mora biti zelo majhna v primerjavi s $b-a$ tako na krogli kot na obeh ploskvah. Tako smo ponazorili primer, ko se popolnoma gladka toga krogla giblje med dvema popolnoma gladkima trdnima ***ploskvama***. Težišče krogle, ki sovpada z njeno središčno točko, se mora, če nanjo delujejo tudi zunanje sile, gibati tako, da se nenehno zadržuje na ***ploskvi***, ki leži med obema ploskvama v sredini in je nespremenljiva ali spremenljiva s časom na določen način, glede na to, kakšni sta ti ploskvi. Tako bo med njegovimi koordinatami in gibanjem obstajala enačba, ki bo v slednjem primeru eksplicitno vsebovala čas. Če želimo predstaviti gibanje ene same materialne točke, ki je prisiljena ostati na ploskvi, potem si lahko predstavljamo, da so vse točke krogle brez mase, razen središča, ali pa kroglo nadomestimo z eno samo materialno točko, na katero delujejo zelo velike odbojne sile, če je njena oddaljenost od katere koli točke ene od ploskev nekoliko manjša od b.

Če materialne točke naprave tvorijo cev povsod enakega krožnega preseka, ki obdaja kroglo ali eno materialno točko, potem dobimo masno točko, ki se mora gibati po predpisani krivulji; potem med njenimi koordinatami med celotnim gibanjem obstajata dve enačbi.

Samoumevno je, da lahko z istimi pripomočki uresničimo zelo različne primere, ko se materialne točke gibljejo tako, da med njihovimi koordinatami obstaja določeno število enačb, ki eksplicitno vsebujejo čas ali pa so lahko od njega neodvisne.

Vsako omejitev sistema, ki jo lahko opišemo z enačbo

$$\varphi\left(t, x_1, y_1, \ldots, z_n\right) = 0 \tag{77}$$

med koordinatami x_1, y_1, $\ldots$,z_n njegovih materialnih točk, ki lahko vsebuje čas t eksplicitno ali ne, imenujemo ***holonomni pogoj***. Sistem, ki je podvržen le holonomnim omejitvam, imenujemo ***holonomni sistem***.

S togimi omejitvami materialnih točk lahko predstavimo tudi enačbe, ki poleg koordinat vsebujejo tudi njihove diferenciale v povezavi, ki predstavlja neintegrabilni diferencialni izraz. Če so koordinate materialnih točk ponovno x_1, y_1, $\ldots$,z_n, je najpreprostejša oblika teh enačb naslednja:

$$\tau\, dt + \xi_1 dx_1 + \eta_1 dy_1 + \cdots + \zeta_n dz_n = 0 \tag{78}$$

kjer so τ, ξ_1, η_1, $\ldots$, ζ_n poljubne funkcije t, x_1, y_1, $\ldots$, z_n, leva stran pa nima integracijskega faktorja. [1] Vsak pogoj, ki ga je mogoče podati le na ta način, imenujemo neholonomni (nicht holonome) sistem, pri katerem je vsaj ena omejitev neholonomna, pa imenujemo neholonomni sistem.

Takšna enačba bi nastala, če bi se toga krogla, katere površina je polna izredno velikega števila enako oddaljenih, zelo drobnih točk, gibala med gladko ploskvijo in ploskvijo s številnimi luknjami tako, da bi se točke vedno zataknile v luknje, s čimer bi lahko s poljubnim približkom predstavili stanje, v katerem se je toga krogla prisiljena kotaliti po fiksni ali spremenljivi ploskvi. Ali je mogoče neholonomske omejitve predstaviti z našo sliko drugače kot v tem smislu in s poljubnim približkom, puščam odprto.

V mehaniki se pogosto obravnavajo tudi primeri, ko med koordinatami nekaterih materialnih točk ne obstajajo enačbe, temveč neenačbe. Naj bo $\varphi\left(x, y, z\right)$ funkcija pravokotnih koordinat x, y, z točke, ki je na sklenjeni ***ploskvi*** (ploskvi F) enaka nič, znotraj nje je < 0, zunaj nje pa > 0. Pogoj, da mora biti za materialno točko v celotnem času njenega gibanja $\varphi\left(x, y, z\right) \leq 0$, lahko nato predstavimo tako, da zunaj ploskve F zgradimo drugo ploskev G, ki ima od ploskve F vedno pravokotno razdaljo a in je gosto poseljena z materialnimi točkami, ki na razdalji, večji ali enaki a, na drugo materialno točko ne delujejo z nobeno silo, na razdalji, le malo manjši od a, pa takoj izvajajo izredno velik odboj. Razdalja med sosednjima materialnima točkama na ploskvi G

[1] Še bolj splošne oblike, kot je npr. $(\frac{dy}{dx})^2 + sin\sqrt{(\frac{dy}{dx})^2 + 1} = 5$ izključimo.

mora biti zelo majhna glede na a. Tako smo ustvarili neprepustno, popolnoma gladko lupino, znotraj katere je materialna krogla.

Zaradi enostranskih omejitev lahko torej obstajajo neenačbe, ki vsebujejo le koordinate različnih materialnih točk in po možnosti eksplicitno tudi čas t, torej oblike

$$\varphi\left(t, x_1, y_1, \ldots, z_n\right) \leq 0. \tag{79}$$

Imenujemo jih ***holonomne pogojne neenačbe***. Vendar lahko obravnavane neenačbe vsebujejo tudi diferenciale koordinat, ki jih ni mogoče prevesti na obliko (79) (***neholonomske pogojne neenačbe***), v tem primeru se omejimo na tiste, ki jih je mogoče zapisati v obliki

$$\tau\, dt + \xi_1 dx_1 + \eta_1 dy_1 + \cdots + \zeta_n dz_n \leq 0. \tag{80}$$

Da bi prikazali raznolikost modelov, ki jih je mogoče sestaviti na ta način, si zamislimo izjemno veliko število materialnih točk iste narave, ki vse ne delujejo druga na drugo na zelo majhni razdalji a in na večji razdalji, temveč se na nekoliko manjši razdalji takoj zelo močno odbijajo. Vse te materialne točke v posodi G je treba z neko zunanjo tlačno silo stisniti tesno skupaj, tako da sta dve sosednji točki vedno zelo blizu druga drugi na razdalji a. Takrat se bodo obnašale kot drobna, popolnoma gladka zrnca peska ali kot delci nestisljive tekočine brez trenja. Popolno izhlapevanje slednjih lahko prepreči le tlak, ki deluje na njihovo površino.

Lahko se zgodi, da do istih enačb ali neenačb pridemo ne le na en, temveč na več načinov z različnimi pripomočki, npr. do neenačbe $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ tako, da materialno točko z neraztegljivo, a popolnoma prožno nitjo povežemo s fiksnim namišljenim koordinatnim izhodiščem ali pa jo ogradimo s togo votlo kroglo. Videli bomo, da so enačbe gibanja, ki jih dobimo iz mehanske slike, odvisne le od vrednosti neposrednih sil in oblike pogojnih enačb ali neenačb, ne pa od tega, ali so te enačbe ali neenačbe realizirane s takšno ali drugačno napravo. V vseh primerih, ko je gibanje enolično določeno z enačbami gibanja, začetnimi legami, začetnimi hitrostmi in njihovimi smermi, torej ne more biti odvisno od mehanske izvedbe teh pogojev.

Ko v nadaljevanju govorimo o kakršnih koli omejitvah, imamo v mislih vedno take, ki jih je mogoče na nek način uresničiti s togimi ali enostranskimi omejitvami. Z enačbami gibanja, ki veljajo v tem primeru, razumemo tiste, ki izhajajo iz teh omejitev v skladu z mehansko sliko. Za enačbe gibanja je samoumevno, da je lahko odločilna le omejitev, ki jo ima gibanje zaradi pogojev v naslednjem trenutku časa, in da je ta določena z razmerji, ki, tako kot enačbi (78) ali (80), vsebujejo linearne spremembe koordinat in v katerih lahko same koordinate obravnavamo kot konstantne.Dokazano je bilo, da lahko vsako linearno povezavo med spremembami koordinat ustvarimo s pomočjo togih in enostranskih omejitev. To pomeni, da lahko vse pogoje gibanja, tudi če se sčasoma spreminjajo, nadomestimo s primerno izbranimi materialnimi točkami, ki so povezane s togimi in enostranskimi omejitvami. Vendar se s tem ne želimo podrobno ukvarjati in ne želimo preverjati, ali je mogoče na ta način realizirati vse predstavljive enačbe in neenačbe med koordinatami; za nas obstajajo le taki pogoji, ki jih lahko realiziramo na ta način. Prav tako ne moremo in nočemo dokazati, da se telesa v naravi, za katera med gibanjem veljajo takšne pogojne enačbe, gibljejo v skladu z zakoni, ki izhajajo iz naše slike. Koliko je to res, je stvar eksperimentalne fizike.

§ 34. Pojem neposrednih in izgubljenih sil, virtualni premiki itd. Zdaj pa izpeljimo enačbe za najsplošnejši primer, ki ga lahko predstavimo z našo sliko. Naj bo podan sistem n materialnih točk, od katerih jih je poljubno število togo ali enostransko povezanih med seboj ali z drugimi μ materialnimi točkami, pri čemer slednje bodisi mirujejo, bodisi se v prostoru premikajo na predpisan način.

Sile, ki izhajajo iz teh omejitev, imenujemo ***sile vezi*** [Verbindungskräfte]. Poleg tega lahko vsaka od n materialnih točk, ki niso togo povezane, deluje s centričnimi silami druga na drugo (***notranje neposredne sile*** [inneren expliciten Kräfte]) ali pa obstajajo katere koli druge (ν) materialne točke, ki delujejo s centričnimi silami na katero koli od n materialnih točk (***zunanje neposredne sile*** [äusseren expliciten Kräfte]). Vse te sile imenujemo neposredne sile, ker ne izvirajo iz togih ali enostranskih omejitev med n točkami ali μ točkami med seboj. [2]

Omejitve lahko vedno nadomestimo z ustreznimi enačbami ali neenačbami med koordinatami n materialnih točk, ki jih imenujemo omejitve sistema.

Z m_h označimo maso poljubno (h–to) od obravnavanih n materialnih točk, z x_h, y_h, z_h njene koordinate v času t, $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ komponente rezultant vseh sil vezi, glede na koordinatne smeri, ter z X_h, Y_h, Z_h komponente rezultante vseh neposrednih sil, ki delujejo na to materialno točko v času t. V skladu s tem dobimo naslednje enačbe:

$$m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h + \mathfrak{x}_h \,, \quad m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} = Y_h + \mathfrak{y}_h \,, \quad m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} = Z_h + \mathfrak{z}_h \,. \tag{81}$$

Deloma zato, da bi olajšali razumevanje drugih knjig, v katerih se ti izrazi uporabljajo, in deloma zato, ker je opisna terminologija bistvenega pomena za razumevanje, uvedemo naslednje izraze: Vsoto (seveda vektorsko vsoto) neposrednih in sil vezi, ki delujejo na točko, imenujemo ***skupna sila*** [Totalkraft] na to točko. Komponente skupne sile, ki deluje na točko sistema v koordinatnih smereh, so torej izrazi (81). Enaka je ustrezni komponenti dejanskega pospeška te točke, pomnoženi z njeno maso, kar je samoumevno, saj skupna sila predstavlja vsoto vseh sil, ki delujejo na zadevno točko.

Po drugi strani pa dejanski pospeški niso enaki pospeškom, ki bi jih povzročile samo neposredne sile. Predpostavljamo, da se zaradi vezi del neposrednih sil izgubi. Ta del neposrednih sil, ki se izgubi pri dejanskem pospeševanju in premaguje le upor vezi, imenujemo ***izgubljena sila*** [verlorene Kraft]. Izgubljene sile so torej enake silam vezi [Verbindungenkräfte], vendar usmerjene v nasprotno smer, saj jih te uravnotežijo

$$-\mathfrak{x}_h, \quad -\mathfrak{y}_h, \quad -\mathfrak{z}_h. \tag{82}$$

so torej glede na koordinatne smeri komponente tiste sile, ki se izgubi zaradi neposredne sile, ki deluje na m_h. Če od neposredne sile, katere komponente so X_h, Y_h, Z_h, odštejemo skupno silo, katere komponente so $X_h + \mathfrak{x}_h$, $Y_h + \mathfrak{y}_h$, $Z_h + \mathfrak{z}_h$ in učinkuje sama, dobimo tisto, kar se izgubi zaradi sil vezi, tj. izraze (82).

V nasprotju z dejanskim pospeškom neke materialne točke, ki ima v smeri abscise komponento

$$\frac{d^2 x_h}{dt^2} = \frac{1}{m_h} \left(X_h + \mathfrak{x}_h \right), \tag{83}$$

[2]Neposredne sile seveda sovpadajo z zunanjimi, če med n materialnimi točkami ne delujejo druge sile, razen sil vezi, torej če med njimi ni drugih centričnih sil razen tistih, ki jih določajo pogojne enačbe, npr. v primeru delcev enega ali več trdnih ali tekočih teles, ki med seboj ne delujejo na daljavo.

a pospešek, ki bi ga imela ta ista materialna točka, če ne bi bilo omejitev, samo zaradi neposrednih sil, imenujemo ***neposredni pospešek***. Njegova projekcija v smeri abscise je

$$\frac{1}{m_h}X_h. \tag{84}$$

Zaradi omejitev neposredni pospešek postane dejanski pospešek. Pospešek, ki se izgubi zaradi sil vezi, dobimo tako, da od neposrednega pospeška odštejemo dejanski pospešek, tako da je

$$\frac{1}{m_h}X_h - \frac{1}{m_h}\left(X_h + \mathfrak{x}_h\right) = -\frac{1}{m_h}\mathfrak{x}_h, \tag{85}$$

komponenta ***izgubljenega pospeška*** [verlorenen Beschleunigung] točke m_h v abscisni smeri. Tudi ta je enak, vendar v nasprotni smeri od pospeška, ki ga povzročajo samo sile vezi.

Komponente X_h, Y_h, Z_h neposrednih sil obravnavamo kot dane, komponente sil vezi $\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ pa bomo odpravili v naslednjem paragrafu. V ta namen upoštevamo lego vseh materialnih točk ob nekem času t in si predstavljamo, da je vsaki točki v prostoru, v kateri se ob času t nahaja katera koli od n materialnih točk, dodeljen povsem poljuben, neskončno majhen premik. Koordinate x_h, y_h, z_h točke v prostoru, kjer je bila h–ta materialna točka v času t, se tako spremenijo za δx_h, δy_h, δz_h. Za vse te spremembe koordinat velja le en pogoj, in sicer da izpolnjujejo pogojne enačbe in neenačbe sistema v času t, pri čemer pa je treba čas t, v kolikor se v njih eksplicitno pojavlja, obravnavati kot konstanto. Omejitve tako dobljenega sistema bi torej morale ostati izpolnjene, če bi se vsaka materialna točka dejansko premaknila iz točke prostora, kjer se nahaja v času t, na mesto, kamor se je ta točka prostora premaknila.

Vse možne neskončno majhne premike, ki izpolnjujejo to edino zahtevo, imenujemo ***virtualni premiki*** [virtuelle Verschiebungen]. Teh nikakor ne smemo zamenjati s premiki, ki jih dejansko imajo materialne točke v časovnem razmiku dt, ki sledi času t. Slednje imenujemo ***dejanski premiki*** [wirklichen Verschiebungen] v času dt. Spremembe, ki jih imajo zaradi teh premikov koordinate h–te od n materialnih točk, označimo z dx_h, dy_h, dz_h in jih imenujemo ***diferenciali koordinat*** [Differentiale der Coordinaten], spremembe δx_h, δy_h, δz_h, pa imenujemo ***variacije koordinat***.

Če so materialne točke, ki smo jih poimenovali materialne točke μ, s katerimi smo tako ustvarili omejitve sistema, nepremične v prostoru, z drugimi besedami, če so omejitve sistema s časom ne spreminjajo, potem morajo diferenciali izpolnjevati enake pogoje kot variacije. Variacije so torej lahko enake tudi diferencialom, vendar je prvi pojem veliko bolj splošen, saj zajema na splošno vse možne neskončno majhne spremembe, ki izpolnjujejo omejitve, medtem ko drugi izraža le tiste posamezne spremembe, ki se v času dt dejansko pojavijo. Če pa omejitve sistema eksplicitno vsebujejo čas, so pogoji za diferenciale na splošno drugačni od pogojev za variacije. Upoštevajmo holonomno omejitev, ki neposredno vsebuje čas in je izražena z enačbo (77) ali neenačbo (79). Potem morajo koordinate spremenljivk $x_h + \delta x_h$, $y_h + \delta y_h$, $z_h + \delta z_h$ še vedno izpolnjevati pogoj, ki obstaja v času t, medtem ko morajo koordinate $x_h + dx_h$, $y_h + dy_h$, $z_h + dz_h$, ki ustrezajo času $t + dt$, izpolnjevati pogoj, ki obstaja v času $t + dt$. Če je torej funkcija φ odvedljiva za ustrezne vrednosti spremenljivk, je:

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\delta x_h + \frac{\partial\varphi}{\partial y_h}\delta y_h + \frac{\partial\varphi}{\partial z_h}\delta z_h\right) \leq 0 \tag{86}$$

medtem ko imamo za diferenciale zvezo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}dx_h+\frac{\partial\varphi}{\partial y_h}dy_h+\frac{\partial\varphi}{\partial z_h}dz_h\right)\leq 0. \tag{87}$$

Velja samo znak enakosti ali pa oba znaka, odvisno od tega, ali je pogoj določen z enačbo (77) ali neenačbo (79). Če omejitev ni holonomna, morajo diferenciali izpolnjevati zvezo (78) ali (80). Če v njej vzamemo t kot konstanto, dobimo zvezo, ki obstaja med variacijami. Torej je slednji

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\xi_h\delta x_h+\eta_h\delta y_h+\zeta_h\delta z_h\right)\leq 0, \tag{88}$$

kjer znak enakosti ustreza zvezi (78), znak neenakosti pa zvezi (80). Naj omenimo, da sta zvezi (86) in (87) le posebna primera zvez (80) in (88), ki ju dobimo, če vanju vstavimo

$$\tau=\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \xi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\quad \eta_1=\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ldots,\zeta_n=\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}. \tag{89}$$

Seveda zvezi (86) in (87) nista enakovredni zvezi (79), saj iz te izhaja veljavnost prvih zvez le, če začetne vrednosti koordinat izpolnjujejo enačbo (77). Če velja znak neenakosti, so možne tudi druge začetne vrednosti, in takrat zveza (79) ne pove ničesar o diferencialih ali variacijah. Možno bi bilo tudi, da neholonomska zveza v obliki (80) velja le v primeru obstoja nekaterih enačb med koordinatami, npr. le dokler se trdno telo dotika neke ploskve, ki jo lahko na eni strani zapusti. Virtualni premik sistema je v vsakem primeru vsak neskončno majhen premik sistema, pri katerem premiki vseh točk n sistema izpolnjujejo zvezo (86) ali (88), ki ju določa katerakoli omejitev sistema.

§ 35. Matematični zapis načela virtualnih premikov. Naj bo δx_1, δy_1, δz_1, …, δz_h sprememba koordinat, ki ustreza kateremukoli virtualnemu premiku sistema. Od enačb, ki jih dobimo iz (81), če postavimo $h=1$, pomnožimo prvo s δx_1, drugo z δy_1, tretjo z δz_1, prav tako od enačb, ki jih dobimo iz (81), če postavimo $h=2$, pomnožimo prvo s δx_2, drugo s δy_2, tretjo s δz_2 in tako naprej do zadnje. Če tako dobljene enačbe seštejemo, dobimo naslednje:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n}\left[m_h\frac{d^2x_h}{dt^2}-X_h\right]\delta x_h+\left[m_h\frac{d^2y_h}{dt^2}-Y_h\right]\delta y_h+\left[m_h\frac{d^2z_h}{dt^2}-X_h\right]\delta z_h\\ =\sum_{h=1}^{n}\left(\mathfrak{x}_h\delta x_h+\mathfrak{y}_h\delta y_h+\mathfrak{z}_h\delta z_h\right)\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Naj bo m_k druga materialna točka, s katero je togo ali enostransko povezana materialna točka z maso m_h. Koordinate te druge materialne točke so x_k, y_k, z_k, razdalja med materialnima točkama pa je r_{hk}, kjer $f_{hk}\left(r_{hk}\right)$ označuje silo, ki deluje med njima zaradi toge ali enostranske omejitve. Ta sila prinese na desno stran enačbe, odvisno od tega, ali točka m_k pripada točkam n ali točkam μ, tri ali šest dodatnih členov, katerih vsota je v vsakem primeru enaka

$$\left.\begin{aligned}\frac{f_{hk}(r_{hk})}{r_{hk}}&\left[(x_h-x_k)(\delta x_h-\delta x_k)+(y_h-y_k)(\delta y_h-\delta y_k)+(z_h-z_k)(\delta z_h-\delta z_k)\right]\\ &=f_{hk}(r_{hk})\delta r_{hk}\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

kjer je δr_{hk} sprememba razdalje r_{hk} zaradi virtualnih premikov. Pri tem velja

$$r_{hk}^2 = (x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2.$$

Izraz (91) velja nespremenjeno, ne glede na to, ali materialna točka m_k prav tako pripada materialnim točkam n ali pa pripada materialnim točkam μ; v slednjem primeru je namreč preprosto $\delta x_k = \delta y_k = \delta z_k = 0$, saj morajo virtualni premiki potekati brez spreminjanja pogojnih enačb, tj. brez spreminjanja lege materialnih točk μ. V slednjem primeru zadevna sila vezi doda le tri dodatne člene na desni strani enačbe (90).

Če sta zdaj materialni točki m_h in m_k togo povezani druga z drugo, potem je treba virtualne premike izbrati tako, da razdalja med točkama ostane nespremenjena, tj. $\delta r_{hk} = 0$. Potem se izraz (91) zreducira na nič. Če so vse vezi toge, potem se za vsako povezavo dveh od n točk po šest členov, za vsako povezavo ene od n točk z eno od μ točk pa po trije členi desne strani enačbe uničijo. Zato je celotna desna stran te enačbe enaka nič.[3]

Pri enostranskih vezeh dveh materialnih točk sta mogoča dva primera:

1. Sila, ki deluje med točkama, ne dovoli, da bi se razdalja med njima zmanjšala, ne da bi se sama pri tem povečala. Potem sila $f_{hk}(r_{hk})$, ki deluje med točkama, ne more biti privlačna, tj. ne more biti negativna. Toda tudi razdalja točk se ne more zmanjšati, kar pomeni, da δr_{hk} ne more biti negativen, zato izraz (91) ne more biti negativen, lahko je le enak nič ali pa pozitiven.

2. Sila preprečuje le povečanje razdalje, zato je lahko kvečjemu privlačna, nikoli odbojna, torej ne more imeti pozitivne vrednosti, prav tako pa δr_{hk} ne more biti pozitiven. Produkt (91) je torej spet enak nič ali pozitiven, nikoli negativen. Da bi bil negativen, bi moral biti en od členov negativen, drugi pa pozitiven. Iz tega sledi, da je lahko desna stran enačbe (90), če med njima obstajajo enostranske vezi, vedno enaka le nič ali pozitivna, nikoli negativna, torej

$$\sum_{h=1}^{n} (\mathfrak{x}_h \delta x_h + \mathfrak{y}_h \delta y_h + \mathfrak{z}_h \delta z_h) \geq 0. \tag{92}$$

Enako mora torej veljati tudi za levo stran, in tako dobimo:

$$\sum_{h=1}^{n} \left[\left(m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} - X_h \right) \delta x_h + \left(m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} - Y_h \right) \delta y_h + \left(m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} - X_h \right) \delta z_h \right] \geq 0. \tag{93}$$

kjer za toge vezi velja znak enakosti, za enostranske pa znak enakosti ali neenakosti.

Načelo, ki ga izraža ta enačba, imenujemo načelo virtualnih premikov, pri čemer ta izraz uporabljamo v nekoliko širšem smislu kot Lagrange in vključujemo tudi posplošitve, ki so jih zanj uporabili Fourier, Gauss in d'Alembertovo načelo.

Če obstaja več enostranskih vezi, se lahko zgodi, da se vsak virtualni premik sistema, takoj ko spremenimo predznak vseh variacij koordinat, ne da bi spremenili njihovo absolutno vrednost, ponovno spremeni v virtualni premik, tako da je vedno tudi nasprotni premik virtualni. Takrat mora v vseh pogojih veljati samo znak enakosti, saj se njihova pravilnost ne sme spremeniti s spremembo predznakov vseh variacij. Zato

[3] To, kar je navedeno v besedilu, je matematično natančno za toge vezi, vendar fizično velja le približno. Tako je treba poudariti, da se lahko pojav nevidnih nihanj točk ena proti drugi celo napove iz naše slike.

mora tudi v zvezi (93), tako kot pri vseh togih vezeh, vedno veljati znak enakosti, saj izraz na levi strani ne more biti pozitiven za noben virtualni premik; sicer bi bil namreč negativen za virtualni premik, ki mu je nasproten, kar pa je po splošnem načelu nemogoče. Primer tega imamo, ko se toga gladka krogla nahaja med dvema togima gladkima ploskvama, katerih razdalja je povsod enaka premeru krogle.

Ker je $\sum_{h=1}^{n}(\mathfrak{x}_h \delta x_h + \mathfrak{y}_h \delta y_h + \mathfrak{z}_h \delta z_h)$ delo, ki ga opravijo sile vezi pri obravnavanem premiku, lahko rečemo, da je delo, ki ga opravijo sile iz vezi, za vsak virtualni premik enako nič le, če imamo le enačbe, in nič ali pozitivno, če obstajajo tudi neenačbe.[4]elo sil vezi je enako, vendar z nasprotnim predznakom kot delo izgubljenih sil, katerih komponente smo ugotovili, da so enake $-\mathfrak{x}_h$, $-\mathfrak{y}_h$, $-\mathfrak{z}_h$. Zveza (92) torej pomeni, da delo teh sil pri prehodu iz dejanskega gibanja v drugo možno gibanje nikoli ne more biti pozitivno. Ker si sile prizadevajo ustvariti vsako gibanje, pri katerem opravijo pozitivno delo, lahko rečemo tudi, da dejansko gibanje poteka tako, da ne obstaja nobeno drugo možno gibanje, pri katerem bi izgubljene sile želele prehod iz dejanskega v drugo možno gibanje. Na primer, v primeru ravnotežja se vse neposredne sile izničijo, kar lahko obstaja le, če si te sile ne prizadevajo za nobeno možno gibanje, tj. če pri nobenem možnem gibanju ne opravijo pozitivnega dela. Če pogoji eksplicitno ne vsebujejo časa, kar pomeni, da veljajo neodvisno od časa, potem mora biti dejanski premik v času dt združljiv z istimi pogoji kot virtualni premiki, zato mora biti poseben primer slednjih. Zato mora delo sil vezi izpolnjevati zgornje pogoje tudi za dejanske premike. Nepremična, toga, gladka cev ne more prenesti dela na togo gladko kroglo, ki se natančno prilega vanjo, prav tako pa ne more prejmeti dela od nje. Če pa se lega središčne črte s časom spreminja, se lahko delo prenese na kroglo. Omeniti je treba, da tudi v primeru neenačb, ki se s časom ne spreminjajo, lahko neskončno majhna količina dela preide le v neskončno kratkem času gibanja, saj materialna točka, ki je vezana na eni strani, takoj zapusti napravo.

Morda bi lahko padli v skušnjavo, da bi kot a priori očitno sprejeli, da mora biti delo ***sil upora***, ki vzdržujejo nekatere pogoje, pri vsakem gibanju, ki ni v nasprotju s temi pogoji, enako nič. Toda v tej splošnosti bi bila ta trditev napačna, saj so sile upora lahko povezane s trenjem, ki porablja delo. Zato bi bilo treba to predpostavko omejiti na čiste sile upora, tj. tiste, ki nimajo nobenega drugega učinka kot vzdrževanje nekaterih pogojnih enačb. Ker odsotnost drugih učinkov težko opredelimo drugače kot z odsotnostjo dela pri gibanjih, ki so skladna s pogoji, bi bilo najbolje preprosto reči, da s čistimi silami upora razumemo tiste, pri katerih tega dela ni. Ta povsem negativna opredelitev je seveda najbolj splošna, vendar ne daje vpogleda v naravo delovanja teh sil.

Če s P_h označimo rezultanto vseh neposrednih sil, ki delujejo na materialno točko m_h, z δl_h pa premik njihovih prijemališč, tako da sta X_h, Y_h, Z_h in δx_h, δy_h, δz_h projekciji P_h in δl_h na koordinatne smeri, če nadalje označimo z $\delta p_h = \delta l_h \cos(P_h, \delta l_h)$ komponento $L_h = P_h \cos(P_h, \delta l_h)$ v smeri δl_h in P_h v smeri δl_h, potem velja:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n}(X_h \delta x_h + Y_h \delta y_h + X_h \delta z_h) &= \sum P_h \delta l_h \cos(P_h, \delta l_h) \\ &= \sum P_h \delta p_h = \sum L_h \delta l_h.\end{aligned} \tag{94}$$

[4] D

Projekcija δp_h je pozitivna ali negativna, odvisno od tega, ali je v smeri P_h ali v nasprotni smeri. Podobno določimo predznak L_h.

Podobno lahko izrazimo tudi:

$$\sum m_h \left(\frac{d^2 x_h}{dt^2} \delta x_h + \frac{d^2 y_h}{dt^2} \delta y_h + \frac{d^2 z_h}{dt^2} \delta z_h \right),$$

če uvedemo absolutno vrednost pospeška, njegovo komponento v smeri premika in projekcijo slednjega na smer pospeška.

Primer, ko je sistem na začetku v mirovanju in pod vplivom sil, ki delujejo nanj, ostane trajno v mirovanju, imenujemo ***ravnotežje v mirovanju***.

V tem primeru ni pospeškov, zato iz (93) dobimo:

$$\sum_{h=1}^{n} (X_h \delta x_h + Y_h \delta y_h + X_h \delta z_h) \leq 0, \tag{95}$$

ali po (94)

$$\sum P_h \delta l_h \cos (P_h, \delta l_h) \leq 0 \tag{96}$$

ali

$$\sum P_h \delta p_h \leq 0. \tag{97}$$

§ 36. Lagrangeev dokaz načela virtualnih premikov. Klasični Lagrangev dokaz je nastal kot rezultat prizadevanja, da se pokaže neodvisnost načela virtualnih premikov od kakršnegakoli pogleda na natančnejšo naravo sil. Predstavljamo si popolnoma gladko zanko R_1, pritrjeno na točko delovanja prve sile P_1, ki deluje na poljuben sistem pod poljubnimi pogoji, in drugo enako gladko zanko S_2, ki je pritrjena v prostoru v smeri zadevne sile. Podobno je zanka R_2 pritrjena na točko delovanja druge sile P_2, zanka S_2 pa je v prostoru pritrjena v smeri druge sile itd.

S poljubnim približkom lahko predpostavimo, da imajo vse sile skupno mero q, če to izberemo dovolj majhno. Naj bo

$$P_1 = n_1 q, \quad P_2 = n_2 q, \quad \ldots$$

Eden od koncev popolnoma gibke gladke vrvice se pritrdi na zanko S_1, nato pa se potegne skozi R_1, nato skozi S_1, spet skozi R_1 itd., dokler $2n_1$ ovojev vrvice ne poveže obeh zank R_1 in S_1. Zadnji ovoj vrvice gre skozi S_1 in nato potegne skozi S_2, nato skozi R_2, nato spet skozi S_2 itd., dokler ni skupaj $2n_2$ ovojev vrvice potegnjenih med R_2 in S_2. Nato se vrvica vodi do S_3 in tako naprej, dokler zadnji fiksni obroček ni povezan z zadnjim premičnim obročkom z ustreznim številom ovojev vrvice. Nato se drugi konec vrvice pusti viseti iz zadnjega obročka. Na ta konec se nato ročno uporabi vlečna sila q_2.

Ker je popolnoma gibka in gladka vrvica povsod enako napeta, imajo vsi deli vrvice enak učinek na vse gibljive obročke in prek njih na točke delovanja vseh sil kot prvotno dane sile. Prvotni sistem sil lahko torej izpustimo in njegov učinek nadomestimo s temi ovoji.

Točka delovanja prve sile in z njo zanka R_1 se sedaj premakne za neskončno majhen premik δl_1, katerega projekcija na smer sile P_1 je enaka p_1. To velikost označimo s pozitivnim znakom, če pade v smer sile P_1, in z negativnim znakom, če pade v nasprotno smer. Premik obročka R_1 skrajša vsak ovoj med R_1 in S_1 za velikost, ki je, če zanemarimo neskončno majhne vrednosti višjega reda, enaka δp_1; vsi ovoji med R_1 in S_1, se torej skupaj skrajšajo za velikost $2n_1\delta p_1$; negativni predznak δp_1 bi pomenil podaljšanje. Ker enako velja za vse druge ovoje, je skupno skrajšanje vseh teh ovojev in s tem, ker predpostavljamo, da je vrvica neraztegljiva, tudi skrajšanje, ki izstopi iz zadnjega obročka katerega konec je E, enako

$$2n_1\delta p_1 + 2n_2\delta p_2 + \cdots \tag{98}$$

Če so vsi obročki na začetku mirovali in je mogoč kakršen koli premik obročkov, pri katerem je ta količina pozitivna, tj. pri katerem konec vrvice E res sega dlje od fiksnega obročka, potem je to zagotovo posledica sile $\frac{1}{2}q$, ki jo izvajamo nanj. Ravnotežje torej lahko obstaja le, če izraz (98) ni pozitiven za noben možen premik. Ta izraz pa postane identičen z levo stranjo zveze (97) z množenjem z v bistvu pozitivno količino $\frac{1}{2}q$, s čimer je ta zveza dokazana za primer ravnotežja in mirovanja.

Ta dokaz odlikuje genialna preprostost in jasnost starega načina sklepanja, hkrati pa tudi njegove pomanjkljivosti. Da členi drugega reda vplivajo le na stabilnost ali nestabilnost, ne pa tudi na samo ravnotežje, oz. da se gibanje nastopi šele po neskončno dolgem času, če so možni le premiki, pri katerih se konec vrvice E podvrže neskončno majhnemu premiku višjega reda, se privzame kot samoumevno; prav tako so kot samoumevni privzeti zakoni o gibkosti in gladkosti vrvice ter tudi to, da so zakoni delovanja sil vedno enaki, najsi izvirajo iz vlečenja vrvice ali iz drugih vzrokov, in da veljajo tako splošno, da je povsem dopustna uporaba kakršnih koli idealnih primerov, kot so popolnoma gladke in gibke vrvice. Vsi ti zakoni so takrat veljali za veliko bolj zanesljive kot samo načelo. Dokaz zveze (93) za primer gibanja je nato izpeljan z utemeljitvijo d'Alembertovega načela, ki prav tako ni povsem brez ugovorov. Glede d'Alembertovega načela glej §§ 72 in 73.

§ 37. Materialna točka na ploskvi .

Najprej obravnavajmo ta primer kot najpreprostejšo ilustracijo izrekov, obravnavanih v prejšnjih dveh paragrafih.

Naj bo m masa materialne točke; x, y, z njene koordinate v času t. Pod neposrednimi ali zunanjimi silami razumemo vse sile, ki delujejo na materialno točko, z izjemo sil, ki izvirajo iz naprave, ki jo omejuje na ploskev. Vsota komponent zunanjih sil v smeri abscisne osi naj bo X; Y in Z pa imata enak pomen za drugi dve koordinatni smeri. Poleg tega je

$$\varphi\,(x, y, z, t) = 0 \tag{99}$$

enačba ploskve, na kateri se mora nahajati materialna točka in katere oblika se lahko s časom spreminja. Najprej izključimo primer, v katerem funkcija φ na mestu A, kjer se nahaja materialna točka, v danem trenutku nima odvoda ali da so vsi trije njeni parcialni odvodi po koordinatah hkrati enaki nič. Funkcija φ bo > 0 za točke na eni strani ploskve, ki so ji zelo blizu, na drugi strani pa < 0. Prvo stran imenujmo pozitivna, drugo pa negativna. Naj se materialna točka poljubno infinitezimalno premakne, njene koordinate x, y, z pa naj imajo poljubne infinitezimalne spremembe δx, δy, δz. Pogoj, da je premik virtualen, nam da enačbo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0. \tag{100}$$

Ker je tudi nasproten premik virtualen, velja znak enakosti v zvezi (93), ki se zato skrajša na:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z = 0. \tag{101}$$

Pri tem sta dve od treh koordinatnih sprememb δx, δy, δz povsem poljubni. Če pa smo za ti dve vrednosti privzeli določene vrednosti, potem je vrednost tretje vrednosti določena z enačbo (100). Nadaljujmo takole: enačbo (100) pomnožimo s faktorjem $-\lambda$, ki ga je treba ustrezno določiti, in jo dodamo enačbi (101). Tako oblikovano enačbo bomo imenovati enačba (102), zaradi varčevanja s prostorom pa je ne bomo zapisali.

Sedaj lahko izberemo spremenljivko λ tako, da v enačbi (102) pri spremembi ene od koordinat, npr. δx,[5], dobimo koeficient nič, tj. λ določimo z enačbo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{103}$$

Potem v enačbi (102) izpustimo člen, ki je pomnožen z δx. Enačba (102) mora zdaj veljati, pod pogojem, da je $\delta z = 0$ in δy različen od nič. Torej se mora v tej enačbi koeficient pri δy izničiti in iz podobnega razloga mora postati nič tudi koeficient pri δz, tako da dobimo dve enačbi

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Poleg treh koordinat x, y, z materialne točke smo uvedli še četrto neznanko λ. Imamo pa tudi štiri enačbe (99), (103) in obe enačbi (104). Te štiri neznanke lahko iz teh štirih enačb splošno določimo kot funkcije časa. Za ta namen morajo poleg enačbe ploskve v vsakem trenutku (torej funkcije φ) in zunanjih sil biti podane tudi začetne vrednosti koordinat ter komponent hitrosti materialne točke v koordinatnih smereh.

Za določitev teh šestih začetnih vrednosti zadoščajo štiri spremenljivke, saj obstajata dve enačbi med njimi. Najprej mora med začetnimi vrednostmi koordinat veljati enačba (99). Ker mora ta enačba veljati tudi ob času $t + dt$, po enačbi (87) sledi, da mora veljati tudi na začetku časa naslednja enačba:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \tag{105}$$

Iz enačb (103) in (104) je razvidno, da se gibanje dogaja natanko tako, kot če bi bila materialna točka povsem prosta, vendar nanjo poleg zunanjih sil deluje še neka sila, ki ima v treh koordinatnih smereh komponente

$$\mathfrak{x} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{y} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{z} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{106}$$

[5]Če bi bil $\partial\varphi/\partial x = 0$, potem bi izbrali δy, če bi bil tudi $\partial\varphi/\partial y = 0$, bi namesto δx izbrali δz, tako da λ ne bi postal neskončen ali nedoločen. Le če bi parcialni odvodi φ po vseh treh koordinatah odpadli, metoda ne bi bila uporabna, prim. § 39

V tem primeru se sila vezi reducira na to silo. Na kratko jo bomo imenovali ***upor*** [Widerstand] te ploskve ali naprave.

§ 38. Smer sile upora. Zdaj v točki A obravnavane ploskve, kjer se v času t nahaja materialna točka, postavimo normalo na ploskev proti tisti strani, ki smo jo imenovali pozitivna, tj. kjer ima funkcija φ v času t pozitivno vrednost, in z α, β, γ označimo kote, ki jih ta normala tvori s pozitivnimi koordinatnimi osmi. Kot je znano iz analitične geometrije, so kosinusi teh kotov podani z naslednjimi enačbami:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{107}$$

kjer je σ pozitivni kvadratni koren iz

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Te enačbe najlažje dobimo na naslednji način: Ploskev, ki ima v času t enačbo (99), imenujmo ploskev F. Naj bo F_1 neskončno bližnja ploskev, ki ima enačbo:

$$\varphi\,(x, y, z) = \varepsilon \tag{108}$$

kjer je ε zelo majhna pozitivna količina. Čas pod znakom funkcije je bil izpuščen, saj ga zdaj obravnavamo kot konstanto. Iz točke A, ki pripada ploskvi F, narišemo tri premice v smereh koordinatnih osi in eno normalno na ploskev F. Te štiri premice se srečajo s ploskvijo F_1 v točkah B, C, D in E. Premica AE ima smer normale, ki je potegnjena na tisto stran, kjer φ narašča. Ker funkcija φ nima singularne točke v bližini točke A, lahko ploskev F_1 obravnavamo kot ravno in vzporedno s ploskvijo F. Zato velja:

$$AE = AB\cos\alpha = AC\cos\beta = AD\cos\gamma. \tag{109}$$

Da bi bil v enačbah (109) predznak pravilen, obravnavajmo AE vedno kot pozitivno, medtem ko so AB, AC in AD lahko pozitivne ali negativne, glede na to, ali so usmerjene v smer pozitivnih ali negativnih koordinatnih osi, potegnjenih iz točke A. To pomeni, da so koti α, β in γ ostri ali topi, tako da ima AB vedno enak predznak kot $\cos\alpha$, prav tako AC kot $\cos\beta$ in AD kot $\cos\gamma$. Iz enačb (109) sledi:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{AB}}{\sqrt{\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2}}}, \tag{110}$$

pri čemer moramo pozitivnemu korenu dodeliti pozitiven predznak, saj imata AB in $\cos\alpha$ enak predznak.

Ker pa koordinate štirih točk B, C, D in E izpolnjujejo enačbo (108), je tudi pri

$$\varepsilon = \frac{\partial\varphi}{\partial x}AB = \frac{\partial\varphi}{\partial y}AC = \frac{\partial\varphi}{\partial z}AD$$

predznak pravilen, saj moramo AB, AC in AD jemati kot pozitivne ali negativne, odvisno od tega, ali padejo v pozitivno ali negativno smer koordinat, torej odvisno od tega, ali izražajo povečanje ali zmanjšanje obravnavanih koordinat. Če dobljene vrednosti za AB, AC in AD vstavimo v enačbo (110) in v podobni enačbi za $\cos\beta$ in $\cos\gamma$, dobimo enačbi (107) s pravilnim predznakom, saj je ε v bistvu pozitiven. Iz enačb (106) in (107) sledi, da je celotna intenzivnost upora površine, ki mora biti vedno pozitivna, podana z

$$i = \pm\lambda\,\sigma \tag{111}$$

Vrednosti njenih komponent v koordinatnih smereh lahko na podlagi enačb (107) zapišemo tudi v obliki:

$$\mathfrak{x} = \pm i\cos\alpha, \quad \mathfrak{y} = \pm i\cos\beta, \quad \mathfrak{z} = \pm i\cos\gamma.$$

Pri tem povsod velja pozitiven ali negativen predznak, odvisno od tega, ali je λ pozitiven ali negativen. Te formule kažejo, da je sila upora i, s katero naprava deluje na materialno točko, vedno pravokotna na površino, na kateri mora ostati, in da je usmerjena na stran, kjer se funkcija φ povečuje ali zmanjšuje, odvisno od tega, ali ima λ pozitivno ali negativno vrednost. Ker sta učinek in nasprotni učinek vedno enaka, vendar usmerjena v nasprotnih smereh, je tlak, ki ga materialna točka izvaja na napravo, vedno enak, vendar usmerjen v nasprotno smer od sile naprave na materialno točko. Naše formule nam zato v vsakem primeru povedo tudi velikost tega tlaka. Ta tlak je tisti del zunanje sile, ki se ne uporabi za pospeševanje materialne točke, temveč se izgubi pri premagovanju upora površine, torej je to izgubljena zunanja sila. Pospešek, ki bi ga ta sila prenesla na materialno točko, je pospešek, ki se izgubi zaradi upora površine.

Če se ploskev, ki jo opisuje enačba (99), s časom ne spreminja ali pa vedno poteka skozi točko, kjer se je premična točka na začetku nahajala, je njeno trajno mirovanje skladno s pogoji. Pri tem pospeški odpadejo, zato je pogoj za ***ravnotežje v stanju mirovanja***:

$$X = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{112}$$

Zato morajo biti zunanje sile v tem primeru pravokotne na ploskev. To iz formule (96) sledi brez potrebe po dodatnem izračunu, saj lahko izraz na levi strani te formule izgine samo takrat, ko je $\angle(P, \delta l) = 90°$.

Če je bila točka na začetku v mirovanju, bo v tem primeru ostala v mirovanju; njeni pospeški bodo enaki nič, vsa zunanja sila se ne bo uporabila za pospeševanje, temveč za premagovanje upora naprave. Sila, s katero materialna točka deluje na napravo, je natanko enaka celotni zunanji sili. Če se točka giblje in so zunanje sile vedno pravokotne na ploskev, ki jo opisuje enačba (99), s čimer so izpolnjeni pogoji (112), potem se gibanje, kot je razvidno iz enačb (103) in (104), dogaja tako, kot da bi veljali enaki pogoji in nanjo ne bi delovale zunanje sile. Tlaku, ki bi že deloval na napravo, pa se nato dodajo še zunanje sile.

§ 39. Singularni primeri. Pogoji, izraženi z neenakostmi. Omenili bomo le nekaj besed o primeru, ko so vsi trije parcialni odvodi funkcije φ glede na koordinate enaki nič ali ko je točka na obravnavani ploskvi singularna na drug način. Če premična točka prehaja skozi take singularne točke le v posameznih trenutkih, je gibanje običajno mogoče nedvoumno določiti z naslednjimi pravili: Če obstaja tir, pri katerem se hitrosti ne spreminjajo skokovito, se gibanje zgodi po tem tiru; če obstajata dva ali več takih tirov, se bo gibanje odvijalo po tistem, pri katerem pospešek najmanj odstopa od pospeška, ki ga povzročajo zunanje sile. Če pa se vsi možni tiri prelomijo, ali če več možnih tirov oscilira, ali če premična točka v končnem času preide skozi več singularnih točk, lahko gibanje postane matematično nedoločeno. To pa, kot smo videli, ni praktično pomembno, saj takšnih pogojev ni mogoče matematično natančno ustvariti z napravami, ki smo jih predpostavili.

V primeru ravnotežja v takšni singularni točki A, kjer se vsi trije parcialni odvodi φ izničijo, nam enačbe (če λ ne postane neskončen) dajo $X = Y = Z = 0$. Dejansko se $\varphi(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$ takrat reducira na:

$$\frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\gamma^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \beta\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} + \alpha\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \alpha\beta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{113}$$

Če se ta izraz ne reducira identično na nič ali na kvadrat linearne funkcije spremenljivk α, β, γ, kar v tej formuli predstavlja poljubno majhne spremembe koordinat, potem ima ploskev F v neposredni bližini točke A obliko stožčaste ploskve, katere vrh je v točki A, ali pa dveh ravnin, ki se sekata v točki A. Za vsako točko ploskve mora namreč veljati:

$$\varphi\,(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = 0.$$

Premična točka je torej lahko v ravnotežju le, če nanjo ne deluje nobena sila. Če pa je izraz (113) popoln kvadrat linearne funkcije α, β, γ, ali če odpadejo tudi vsi drugi parcialni odvodi funkcije φ, ali če te funkcije v obravnavani točki sploh ni mogoče razviti po Taylorjevem izreku, potem nastopijo še bolj zapleteni pogoji, ki zahtevajo posebno obravnavo vsakega posameznega primera, česar pa tukaj ne bomo podrobno obravnavali.

Zdaj povejmo nekaj besed o primeru, ko med koordinatami materialne točke ne obstaja enačba, temveč neenakost, ki jo lahko vedno zapišemo v obliki:

$$\varphi\,(x, y, z, t) \leq 0. \tag{114}$$

V tem primeru lahko premična točka neovirano zapusti ploskev, ki jo opisuje enačba (99), na negativni strani, ne more pa doseči pozitivne strani.

Ploskev lahko na premično točko deluje le s silo upora, ki je usmerjena s pozitivne strani proti negativni, in nasprotno, premična točka lahko na ploskev deluje le s ***tlačno silo*** [Druckkraft], ki je usmerjena z negativne proti pozitivni strani. Dokler ima sila upora to smer, tj. dokler je λ negativna, bo gibanje enako kot v prej obravnavanem primeru, pogoji za ravnotežje pa bodo ostali enaki. V trenutku, ko λ postane pozitivna, preneha veljavnost prej izpeljanih enačb, premična točka zapusti ploskev in se giblje kot popolnoma prosta materialna točka. (Prim. §§ 41 in 74.)

Dejansko gibanje [wirkliche Bewegung] bo vedno zadoščalo načelu virtualnih premikov, vendar nismo podali nobenega dokaza, da to vedno nedvoumno določa pospešek. Na posebnih primerih bomo pokazali, da je treba včasih pospešek najprej določiti posredno, z upoštevanjem zveznosti. (§ 69.)

Ko diferencialnega izraza, ki vsebuje tri neodvisne diferenciale, ni mogoče integrirati, lahko za eno materialno točko velja neholonomski pogoj v obliki

$$\tau\,dt + \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz \leq 0.$$

V tem primeru velja vse, kar smo povedali doslej, le da ξ, η, ζ nadomestijo $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ in $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Po tej zamenjavi je treba pospeške in λ ponovno določiti iz enačb (103) in (104), ki jim dodamo še enačbo:

$$\tau + \xi\frac{dx}{dt} + \eta\frac{dy}{dt} + \zeta\frac{dz}{dt} = 0,$$

ki velja med komponentami hitrosti. Upor naprave je vedno usmerjen vzdolž premice, katere smerni kosinusi so ξ/σ, η/σ, ζ/σ, kjer je $\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Če omogočimo premični točki vse možne neskončno majhne premike, za katere postane izraz $\xi, \delta x + \eta, \delta y + \zeta, \delta z$ enak nič, potem vse točke, kamor se premakne, ležijo na neskončno majhni ravnini. Stran te ravnine, kamor seže, če je pri premiku izraz $\xi, \delta x + \eta, \delta y + \zeta, \delta z$ pozitiven, imenujemo pozitivna, drugo pa negativna stran ravnine. Upor naprave zopet deluje glede na to, ali je λ pozitiven ali negativen. Prvi primer ne more nastopiti, če velja znak neenakosti.

§ 40. Enostavno nihanje. Zdaj obravnavamo zelo poseben primer, ko se težka točka giblje po nespremenljivi krogelni ploskvi, pri čemer nanjo poleg težnosti in sile, ki jo sili, da ostane na krogelni ploskvi, ne deluje nobena druga sila. Naj ima krogelna ploskev središče v koordinatnem izhodišču in polmer enak l, tako da ima enačbo: $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$. Torej je:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2.$$

Poleg tega, če poteka pozitivna os z navzdol, velja:

$$X = Y = 0, \quad Z = mg,$$

in enačbe gibanja (103) in (104) se spremenijo v:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 2\lambda z + mq, g. \tag{115}$$

Če seštejemo prvo enačbo, pomnoženo z $-y$, in drugo enačbo, pomnoženo z x, dobimo:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k. \tag{116}$$

Nato, če seštejemo prvo enačbo, pomnoženo z $\frac{dx}{dt}$, drugo enačbo, pomnoženo z $\frac{dy}{dt}$, in tretjo enačbo, pomnoženo z $\frac{dz}{dt}$, dobimo:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H + 2g\,z; \tag{117}$$

iz odvoda enačbe krogle, ki mora biti izpolnjena v vsakem trenutku, sledi:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0.$$

H in k sta integracijski konstanti.

Enačbi (116) in (117) sta seveda jasni; prva izraža načelo vrtilne količine glede na os z, na katero ne vplivata ne težnost ne upor krogle, ki vedno deluje vzdolž osi z; druga pa izraža načelo kinetične energije, na katero upor krogle prav tako ne vpliva.

Polarne koordinate uvedemo tako, da postavimo:

$$x = l\sin w\cos\vartheta\,,\quad y = l\sin w\sin\vartheta\,,\quad z = l\cos w\,. \tag{118}$$

S tem preoblikujemo enačbi (116) in (117) v:

$$\left.\begin{aligned} &l^2\sin^2 w\frac{d\vartheta}{dt} = k\\ &l^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + l^2\sin^2 w\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - 2g\,l\cos w = H. \end{aligned}\right\}$$

Iz teh enačb lahko izločimo $d\vartheta$ in najprej dobimo t, izražen kot funkcijo w. S pomočjo prve enačbe lahko ϑ najdemo z uporabo kvadratur kot funkcijo w, tako kot v primeru centralnega gibanja.

Če je premična točka le malo oddaljena od mirujoče lege, tj. če je w zelo majhen, postanejo enačbe celo popolnoma enake enačbam za centralno gibanje. Če v tem primeru določimo:

$$r = l\,w\,,\quad H + 2g\,l = h\,,$$

dobimo:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = k\,,\quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = h - \frac{g}{l}r^2\,.$$

Ti dve enačbi sta popolnoma enaki enačbama (36) in (37) iz § 20, če v slednji vstavimo:

$$\varphi\,(r) = -\frac{m\,g\,r^2}{2\,l}.$$

Projekcija materialne točke na ravnino xy se torej giblje popolnoma enako kot materialna točka, ki jo vleče sila $m, g, r/l$ proti mirujoči legi. Dejansko se lahko prepričamo, da se komponenta teže materialne točke v smeri, tangencialni na sferično ploskev, približuje tej vrednosti, medtem ko je komponenta, ki je normalna na sferično ploskev, izničena zaradi upora te ploskve.

Že takrat smo videli, da se gibanje odvija po elipsi, katere središče je lega krogle, in da je $\pi\sqrt{l/g}$ čas, v katerem je opisana polovica te elipse. Ta čas imenujemo ***perioda nihanja nihala***. Za poljubne, končne vrednosti w bomo obravnavali le primer, ko se materialna točka giblje v navpični ravnini, za katero lahko izberemo ravnino xz; takrat je $\vartheta = 0$ in dobimo:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{H}{l^2} + \frac{2g}{l}\cos w\,,$$

in iz tega z odvajanjem dobimo:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin w. \tag{120}$$

Če naj bi bilo sploh mogoče kakršno koli gibanje, H ne more biti enak $-2g,l$ ali imeti še večje negativne vrednosti; možni so torej trije primeri:

Prvi primer:

$$-2g\,l < H < +2g\,l.$$

V tem primeru vedno obstaja kot α, ki leži med ničlo in π, katerega kosinus je enak $-\frac{H}{2g,l}$. Z uvedbo tega kota dobimo:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos w - \cos\alpha\right) = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{w}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ker lahko $\frac{dw}{dt}$ spremeni svoj znak le tako, da gre skozi ničlo, mora w nihati med $+\alpha$ in $-\alpha$. Če nastavimo:

$$\sin\frac{w}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi$$

sledi:

$$dt = \sqrt{\frac{g}{l}}\,d\psi\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Če α, tj. amplituda nihanja, ni prevelika, razvoj po binomskem izreku vedno daje hitro konvergentno vrsto, ki jo je mogoče enostavno integrirati. Periodo nihanja (čas, v katerem w narašča od $-\alpha$ do $+\alpha$) dobimo z integriranjem med tema mejama, torej od $\psi = -\frac{\pi}{2}$ do $\psi = +\frac{\pi}{2}$, tako da je:

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{l}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\psi\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Če se pri tem ravnamo po binomski teoriji in postavimo

$$2\sqrt{-1}\sin\psi = e^{\psi\sqrt{-1}} - e^{-\psi\sqrt{-1}}$$

dobimo:

$$2^{2n}(-1)^n\sin^{2n}\psi = 2\binom{2n}{0}\cos 2n\psi - 2\binom{2n}{1}\cos(2n-2)\psi - \cdots(-1)^n\binom{2n}{n}$$

Iz tega sledi:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\psi\,d\psi = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

tako, da dobimo:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{a^2}{4} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}a^4 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}a^6 + \cdots\right),$$

pri čemer je $a = \sin\frac{\alpha}{2}$.

Drugi primer.

$$H = 2g\,l.$$

Iz tega sledi:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\,(1+\cos w) = \frac{4g}{l}\cos^2\frac{w}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\ln\cot\frac{\pi-w}{4} + \text{const.}$$

Premična točka se asimptotično približuje točki, ki je navpično nad njeno mirovno lego.

Tretji primer. Naj bo

$$H > 2g\,l.$$

Potem je

$$dt = \sqrt{\frac{l}{H+2g\,l}}dw\left(1 - \frac{4g\,l}{H+2g\,l}\sin^2\frac{w}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

kar lahko v skladu z binomskim izrekom vedno razvijemo v konvergentno vrsto in nato integriramo.

§ 41. Nitno nihalo. Izpeljane formule veljajo le, če nihalo ne more na nobeni strani zapustiti površine krogle. Kot prototip gibanja pri neenakosti bomo na kratko obravnavali primer, ko je materialna točka pritrjena na neraztegljivo, popolnoma gibko nit dolžine l, katere drugi konec je fiksiran, tako da lahko neovirano zapusti obravnavano krogelno površino navznoter. Gibanje poteka natančno po prej izpeljanih zakonih, dokler je nit napeta, tj. dokler je sila, s katero premična točka deluje na napravo, usmerjena od središča krogle (torej s strani, kjer velja $x^2+y^2+z^2-l^2<0$), proti strani, kjer velja $x^2+y^2+z^2-l^2>0$, in s tem dokler je λ negativen. V trenutku, ko λ preide iz negativne v pozitivno vrednost, bi morala nit premično točko potisniti stran od središča krogle, da bi ostala na površini krogle, vendar to ni mogoče, zato nit zapusti krožno površino in opiše običajno parabolo padanja.

Obravnavali bomo le primer, ko se premična točka giblje v ravnini, ki jo izberemo kot xz ravnino, tako da velja $y=\vartheta=0$. Enačbi (115) in (118), če ponovno označimo kotno hitrost dw/dt z ω, postaneta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -z\frac{d\omega}{dt} - x\omega^2 = \frac{2\lambda x}{m},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} - z\omega^2 = \frac{2\lambda z}{m} + g.$$

Seštevanje prve enačbe, pomnožene z x, z drugo enačbo, pomnoženo z z, daje:

$$2l\,\lambda = -m\omega^2 l - \frac{mgz}{l}.$$

To je upor niti, če je λ negativen, pri čemer pomeni, da je nit pod napetostjo, saj je količina, označena z σ v formuli (111), v našem primeru enaka $2l$. Jasno je tudi, da prvi člen predstavlja centrifugalno silo, drugi pa komponento težnosti v smeri niti. λ lahko postane nič ali pozitiven le pri negativnem z, zato, če postavimo $-z=h$ za pozitivni h, velja $\lambda=0$ pri:

$$h = \frac{\omega^2 l^2}{g}. \qquad (121)$$

Konstanto, ki jo dodamo v enačbo kinetične energije, oblikujemo tako, da ima ta enačba obliko:

$$\frac{m\omega^2 l^2}{2} = mg\,(z+k)\,. \tag{122}$$

Torej je k največja višina nad središčem krogle, do katere se premična točka lahko dvigne zaradikinetične energije, ki jo ima, in do katere se dejansko dvigne, če je prisiljena vedno ostati na površini krogle ter če velja $k \leq l$. Če v enačbi (122) ponovno vstavimo $z = -h$, dobimo:

$$\frac{l^2\omega^2}{g} = 2k - 2h.$$

Če določimo h kot višino nad središčem krogle, na kateri nitno nihalo zapusti površino krogle, potem je ω kotna hitrost, s katero se to zgodi, v zadnji enačbi enaka kot v enačbi (121). Iz obeh enačb sledi, da je $h = \frac{2k}{3}$. Nitno nihalo torej lahko zapusti površino krogle le, če je k pozitiven, torej če je njegova kinetična energija zadostna, da ga dvigne nad vodoravno ravnino, ki poteka skozi središče krogle. Če velja $0 < k < l$, bi se nihalo, če bi bilo togo povezano s središčem krogle, obrnilo na višini k nad vodoravno ravnino, ki poteka skozi kroglo. Če pa je povezano s prožno nitjo, zapusti krogelno površino že na višini $\frac{2k}{3}$.

Če velja $l < k < \frac{3l}{2}$, bi premična točka v prvem primeru opisala celoten krog. V drugem primeru zapusti krog na višini $\frac{2k}{3}$. Če pa velja $k \geq \frac{3l}{2}$, premična točka tudi v drugem primeru ne zapusti kroga. Ko premična točka zapusti površino krogle, sledi paraboli padanja in se po določenem času ponovno sreča s površino krogle, vendar ne tangencialno, temveč pod določenim kotom. Njeno nadaljnje gibanje je odvisno od tega, ali je viseča nit nihala popolnoma elastična, delno elastična ali pa povsem neelastična, kar so vprašanja, na katera odgovori niso zajeti v naših prejšnjih enačbah.

§ 42. Točka na prostorski krivulji. Zdaj obravnavamo materialno točko, ki je prisiljena ostati na določeni prostorski krivulji. Oznake ostanejo enake kot v § 37. Krivulja pa je opisana z dvema enačbama:

$$\varphi_1\,(x, y, z, t) = 0 \tag{123}$$

in

$$\varphi_2\,(x, y, z, t) = 0. \tag{121}$$

Ponovno velja enačba (101). Poleg tega, v primeru, da sta obe funkciji φ razviti v skladu s Taylorjevim izrekom, dobimo dve enačbi:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\delta z = 0$$

in

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\delta z = 0.$$

Prvi pogoj, pomnožen s faktorjem $-\lambda_1$, in drugi, pomnožen s faktorjem $-\lambda_2$, lahko dodamo enačbi (101). Nato izberemo λ_1 in λ_2 tako, da v tako dobljeni enačbi koeficienta

δx in δy odpadeta. Koeficient pri δz mora odpadati sam po sebi, saj obstajata le dve enačbi med tremi koordinatnimi variacijami. Dve enačbi, ki izražata želeno lastnost λ, združeni z enačbo, ki določa izničenje koeficienta δz, se glasita:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

Te tri enačbe skupaj z enačbama (123) in (124) dajo pet enačb, potrebnih za določitev petih neznank: x, y, z, λ_1 in λ_2. Z odpravo λ_1 in λ_2 dobimo enačbo med koordinatami:

$$\begin{vmatrix} m\dfrac{d^2x}{dt^2} - X & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \tag{126}$$

Upor, s katerim naprava deluje na materialno točko, lahko razumemo kot rezultanto dveh sil. Prva sila ima v koordinatnih smereh komponente $\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}$, $\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}$, $\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}$, zato je pravokotna na ploskev, ki jo podaja enačba (123), kot je bilo dokazano v § 38. Podobno velja za komponente druge sile, ki je pravokotna na ploskev, podano z enačbo (124). Rezultanta obeh, tj. skupni upor krivulje, mora biti pravokotna na površino, ki predstavlja povprečno linijo obeh ploskev.

Pogoj ravnotežja dobimo, če pospešek postavimo na nič. Izničenje determinante, ki jo dobimo iz determinante (126), predstavlja pogoj, da je vektor s komponentami X, Y, Z, torej zunanja sila, ki deluje na premično točko, pravokoten na presečišče ploskev, podanih z enačbama (123) in (124).

§ 43. Metoda nedoločenih množiteljev, kadar med poljubnimi točkami obstajajo poljubne pogojne enačbe. Metoda nedoločenih množiteljev se lahko brez težav uporabi v splošnem primeru, ko za kateri koli materialni sistem veljajo kakršni koli pogoji. Najprej predpostavimo, da je sistem holonomen in da so pogoji izraženi z enačbami. Pod enakimi oznakami, kot so uporabljene v §§ 34 in 35, lahko te pogoje zapišemo v obliki:

$$\varphi_l\,(t, x_1, y_1, \ldots, z_n) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, \sigma, \tag{127}$$

kjer mora biti $\sigma < 3n$, saj bi bile sicer vse koordinate določene s pogoji, zaradi česar gibanje ne bi bilo mogoče, razen v izjemnih primerih. Funkcije φ morajo biti odvedljive v skladu s Taylorjevim izrekom.

V zvezi (93) velja enakost. Pri tem se pojavijo naslednji pogoji:

$$\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\varphi_l}{\partial y_1}\delta y_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi_l}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, \sigma \tag{128}$$

. Zdaj pomnožimo prvo od teh pogojnih enačb z $-\lambda_1$, drugo z $-\lambda_2$, in tako naprej, vse skupaj pa dodamo k enačbi (93). Nato izberemo vse λ, tako da koeficienti vseh σ variacij odpadejo. Ker so samo σ teh variacij določene s pogojnimi enačbami, ostale pa so med seboj neodvisne, morajo tudi koeficienti preostalih variacij odpasti. Tako dobimo pogojne enačbe v obliki:

$$m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h + \sum_{l=1}^{\sigma} \lambda_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_h}, \quad h = 1, 2, \ldots, n. \tag{129}$$

Poleg teh pa obstajata še dve podobni enačbi za preostali dve koordinatni osi. Eliminacija λ zahteva, da mora determinanta vsake od $\sigma+1$ vodoravnih vrstic v tabeli (131) izničiti, kar pomeni, da dobimo skupaj $3n-\sigma$ neodvisnih enačb, ki jih bomo brez zapisa imenovali enačbe (130):

$$\left.\begin{array}{cccccc}
m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} - X_1, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_1} \\
m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} - Y_1, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m_1 \dfrac{d^2 z_n}{dt^2} - Z_n, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}, & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_n}, & \cdots, & \dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial z_n}
\end{array}\right\} \tag{131}$$

Če sistem ni holonomen, tj. če imajo nekatere pogojne enačbe obliko (78), se s tem ne spremeni nič drugega, kot da se parcialni odvodi ustreznih funkcij φ nadomestijo s količinami ξ_1, η_1, ..., ζ_n.

S tem so izpeljane enačbe gibanja v najsplošnejšem primeru, ko je sistem poljubnih materialnih točk podvržen poljubnim holonomnim ali neholonomnim pogojem, takoj ko jih lahko izrazimo z enačbami, pri čemer nobena ni predstavljena z neenakostjo.

Če iz pogojev (78) lahko določimo število diferencialov koordinat σ, lahko vedno iz $3n-\sigma$ enačb (131) določimo tudi pospeške. Če pa so pogoji (78) taki, da ni določeno σ diferencialov koordinat za končne vrednosti spremenljivk, potem vse pogojne enačbe med seboj niso neodvisne.[6] Zato je treba njihovo število zmanjšati. V posameznih primerih, kot so singularne vrednosti, lahko pride do tega, npr. če med koordinatami ene same materialne točke obstaja ena sama enačba $\varphi(x, y, z, t) = 0$ in so vsi parcialni odvodi φ glede na koordinate enaki nič, ali če med temi koordinatami obstajata dve enačbi $\varphi(x, y, z, t) = 0$ in $\psi(x, y, z, t) = 0$, pri čemer imata ploskvi, ki ju predstavljata ti enačbi, isto tangencialno ravnino za določene vrednosti x, y, z in t. Takrat lahko po načelu virtualnih premikov določimo več kot $3n-\sigma$ pospeškov. Vsi ti primeri, pa tudi primeri, ko so nekateri koeficienti ξ, η, ζ v enačbah (78) neskončni ali nedoločljivi ali če pogojne enačbe dobijo še bolj zapleteno obliko, seveda zahtevajo posebno obravnavo, zato bi bilo predolgo podrobno obravnavati vse možne primere tukaj. Tako kot v primeru gibanja materialne točke ob prisotnosti pogojne enačbe (začetek § 39), se tudi tukaj lahko zgodi, da naloga sploh ni enoznačno določena z geometrijskimi pogoji

[6] Znani analitični pogoj, da enačbe $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_\sigma = 0$ niso neodvisne druga od druge, je, da se vse determinante izrazov (130), ki predstavljajo koeficiente pospeškov v enačbah (131), izničijo. Ena od teh enačb se dejansko reducira na nič in zato ni primerna za določanje pospeškov.

sistema, npr. če je materialna točka prisiljena ostati na krivulji, ki se deli na dve ali več vej, ki oscilirajo v točki razvejitve, tako da bi tam imeli stik drugega ali višjega reda. Vendar takšne dvoumnosti niso praktično pomembne, saj do njih ne more priti, če so pogoji vzpostavljeni na način, ki ga predvidevamo, z uporabo končnega, čeprav zelo velikega, števila sil vezi, ki pa se nenadoma spremenijo. Take situacije se lahko pojavijo le z mejnim prehodom v neskončno število materialnih točk.

Primer, ko obstajajo tudi poljubni pogoji, izraženi z neenakostmi, bomo obravnavali v § 74. Še prej pa bomo obravnavali pomemben poseben primer.

V

Trdna telesa

§ 44 Določanje lege trdnega telesa. Sedaj bomo izpeljali enačbe gibanja za eno samo ***togo telo***, tj. za sistem materialnih točk, ki so med seboj povezane tako, da se njihove relativne lege med celotnim gibanjem ne morejo spremeniti, ali natančneje, da vsaka zelo majhna sprememba relativne lege povzroči tako velike notranje sile, da do zaznavne spremembe relativne lege ne more priti, če zunanje sile ne presežejo določene meje (prim. začetek § 32, telo miruje, če so zunanje sile pod to mejo). Da bi izrazili, da popolnoma toga telesa ne obstajajo, bomo telo vedno imenovali ***trdno***, čeprav ga geometrijsko obravnavamo, kot da bi bilo popolnoma ***togo***.

Lega danega trdnega telesa v prostoru je enolično določena s tremi točkami A, B, in C, ki ne ležijo na isti premici. Ker je podano telo trdno, je podana oddaljenost vsake druge njegove **masne točke** [Massenpunkte] od vsake od teh treh točk, ve pa se tudi, na kateri strani ravnine treh točk leži druga masna točka, če ne leži v tej ravnini. Tako je podana lega vsake druge masne točke. Niti ni nujno, da te točke dejansko pripadajo obravnavanemu telesu, ena, dve ali vse tri lahko ležijo tudi zunaj njega, če je le njihova relativna lega glede na telo stalna in če imajo vse te točke stalno medsebojno lego. Če je lega teh treh točk določena v prostoru, je z njimi določena lega vseh materialnih točk telesa.

Da nam ne bi bilo treba nenehno ponavljati teh in podobnih izrekov, si lahko predstavljamo neskončno število točk, ki zapolnjujejo celoten prostor, so trdno povezane s telesom in se skupaj z njim gibljejo v prostoru. Tem točkam pravimo razširjeno trdno telo; dejansko je snov prisotna le v nekaterih od teh prostorskih točk.

Za določitev lege prve točke A, ki določa lego trdnega telesa, so potrebne tri spremenljivke (koordinate). Za določitev lege druge točke B sta potrebni le dve, saj je oddaljenost AB podana. Za določitev lege tretje masne točke C je potrebna le še ena spremenljivka, saj je njena oddaljenost od točk A in B podana z dejstvom, da je telo trdno, tj. da je podana relativna lega vseh njegovih masnih točk. Tretja točka mora ležati v krogu, katerega ravnina je pravokotna na premico AB in katerega polmer je enaka dani oddaljenosti točke od te premice.

Na splošno torej šest spremenljivk zadostuje za določitev lege katerega koli telesa. Izjema so mejni primeri, ko vse materialne točke telesa ležijo na isti premici ali ko je telo sestavljeno iz ene same materialne točke. Potem zadostuje pet oziroma tri spremenljivke. Vendar bomo te mejne primere na splošno izključili iz naših razmišljanj.

Ker med materialnimi točkami telesa ne delujejo nobene druge sile razen sil vezi, so neposredne sile enake silam, ki delujejo na trdno telo od zunaj (zunanje sile). Tako so sile, katerih komponente so bile v formulah (63) do (70) označene z $\mathfrak{X}_\mathfrak{h}$, $\mathfrak{Y}_\mathfrak{h}$, $\mathfrak{Z}_\mathfrak{h}$, enake silam, katerih komponente so bile v formulah (81) do (95) označene z X_h, Y_h, Z_h. V vsakem primeru velja šest enačb (66) in (70) iz §§ 27 in 29, ki zadostujejo za izračun šestih spremenljivk, ki določajo lego trdnega telesa, tako da temeljne enačbe že imamo.

§ 45. Vzporedni premik in zasuk trdnega telesa. Da bi olajšali izbiro najprimernejših šestih spremenljivk, je treba natančneje preučiti geometrijo gibanja trdnega telesa. Hkrati se nam ponuja nova izpeljava enačb (66) in (70) iz načela virtualnih hitrosti. Če vsako točko trdnega telesa premaknemo za enako dolgo in enako usmerjeno razdaljo, se relativne lege vseh točk očitno ne spremenijo. Takšno gibanje je torej v vsakem primeru možno gibanje trdnega telesa. Imenujemo ga ***vzporedni premik***.

Če pri premiku trdnega telesa dve točki A in B, ki mu pripadata ali sta z njim trdno povezani, ne spremenita svoje lege v prostoru, potem tudi vse točke, ki ležijo na premici AB in so trdno povezane s telesom, ne morejo spremeniti svoje lege, saj bi sicer morale spremeniti svojo oddaljenost vsaj od ene od točk A ali B. Točka, ki ne leži na premici AB, mora, ker je njena oddaljenost od točk A in B nespremenljiva, opisovati krožni lok, katerega ravnina je pravokotna na AB in katerega središče leži na AB. Ker morajo medsebojne razdalje vseh drugih točk ostati enake, mora biti središčni kot, nad katerim je ta lok, enak za vse točke telesa, in vse te točke morajo opisovati lok v isti smeri. Tako definirano gibanje trdnega telesa, ki je edino možno, kadar dve njegovi točki ne spremenita svoje lege, imenujemo ***zasuk***. Premica, ki povezuje točki, ki ostajata v mirovanju, imenujemo ***os zasuka***, ustrezni središčni kot pa ***kot zasuka***, vendar za zdaj obravnavamo le začetno in končno lego, ne pa celotnega procesa prehoda.

Predstavitev vzporednega premika z vektorjem, tj. z daljico določene dolžine in smeri, ne potrebuje razlage. Vsaka daljica, ki je enako dolga in ima enako smer kot premik katere koli točke telesa, je lahko tak vektor. Tudi zasuk telesa lahko predstavimo z vektorjem, katerega začetna točka ni poljubna, temveč mora sovpadati s točko osi zasuka. Smer vektorja mora označevati smer osi zasuka, velikost vektorja pa mora biti sorazmerna s pozitivnim predpostavljenim kotom zasuka w, torej približno enaka Γw, pri čemer je Γ poljubna dolžina, vendar je treba predpostaviti, da je enaka za vse zasuke.

Če želimo smisel zasuka izraziti s smislom vektorja iz izhodiščne točke, je treba smer vektorja vedno izbrati tako, da zasuk okoli njega poteka kot os v pozitivnem smislu, torej da se njegova smer obnaša do smeri zasuka enako kot smer pozitivne z–osi do zasuka od pozitivne osi x do pozitivne osi y po najkrajši poti. Če torej uporabimo francoski koordinatni sistem, bi se moralo oko, ki gleda od točke, na katero kaže vektor, zasukati v smeri urinega kazalca.

Če je N oddaljenost katere koli točke telesa od osi zasuka, w kot zasuka in V vektor, ki predstavlja zasuk, potem je lok, ki bi ga opisala zadevna materialna točka, če bi se telo zvezno zavrtelo od začetne lege do končne lege:

$$Nw = \frac{NV}{\Gamma}\,, \tag{132}$$

pri čemer je seveda prav tako vseeno, ali zadevna točka res pripada telesu ali pa se le domneva, da je z njim trdno povezana. Točke osi, kot smo že omenili, ne spremenijo svoje lege. Os lahko leži tudi povsem zunaj telesa, vendar jo je treba v tem primeru obravnavati kot trdno povezano s telesom.

§ 46. Najsplošnejši premik trdnega telesa. Vsako trdno telo je mogoče iz poljubne lege premakniti v poljubno lego z vzporednim premikom in dvema zasukoma okoli dveh osi, ki potekata skozi poljubni točki prostora ali telesa. V posebnih primerih lahko seveda vzporedni premik ali zasuk odpadeta, tj. ju moramo opustiti. Če oba zasuka odpadeta, tj. če lahko telo iz prve lege v drugo prestavimo zgolj z vzporednim premikom, se druga lega imenuje translacija prvega. Gibanje trdnega telesa, pri katerem je vsaka lega translacija prvega, se imenuje ***translacijsko gibanje***. Točka telesa pri tem lahko opiše poljuben tir.

Naj bo A točka v prostoru, skozi katero morata potekati obe osi vrtenja. Tista točka a trdnega telesa, ki je v končni legi v A', je v začetni legi telesa v A. Trdno telo vedno mislimo v razširjenem smislu, kot smo ga opredelili prej, tj. točka, ki je v začetni legi in končni legi v A', čeprav v resnici ne pripada telesu, je z njim trdno povezana.

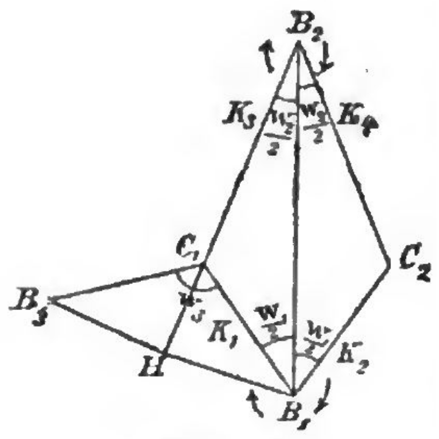
Zdaj obravnavajmo telo, ki mu v začetni legi določimo vzporedni premik AA', ki ga seveda ne bi bilo treba izvesti, če bi točki A in A' sovpadali. S tem se vse točke telesa premaknejo v isto smer za premik v dolžini AA', točka a telesa tako pride od A do A'. Vsaka druga točka b, ki pripada trdnemu telesu ali je z njim togo povezana in je bila v začetni legi telesa v točki B, pride v točko B'' samo s tem vzporednim premikom. V končni legi trdnega telesa praviloma ne bo v B'', temveč v B', pri čemer pa mora biti $A', B' = A', B''$, saj sta točki a in b trdno povezani. Nato zavrtimo telo okoli osi, ki poteka skozi A' in je pravokotna na ravnino $B'A', B''$, za določen kot, da točka b telesa preide iz B'' v B'. Ker os poteka skozi točko A', se njena lega ne spremeni več; tako sta točki a in b telesa že v položaju, ki ga morata imeti v končni legi. Če je bila točka b po vzporednem premiku že tam, kjer bi morala biti v končni legi telesa, potem se ta zasuk seveda spet izpusti.

Za tretjo točko c, ki pripada togemu telesu ali jo je treba misliti kot trdno povezano z njim in ki ne leži na isti premici s točkama a in b, pravimo, da je bila v začetni legi telesa v točki C in da je prišla v C''' prek vzporednega premika AA', prek prvega zasuka v C'', medtem ko pravimo za končno lego telesa, da je v C'. Nato pa pomislimo, da se telo, potem ko je že izvedlo vzporedni premik AA' in prvo rotacijo, žavrti"okoli osi, ki poteka skozi točki A' in B', za določen kot, da se tudi točka c prenese iz C'' v C'. Zdaj so tri točke togega telesa, ki ne ležijo na premici, dosegle mesta, ki jih morajo zasedati v končni legi telesa, posledično se je celotno telo preneslo v svojo končno lego, saj je njegova lega določena s temi tremi točkami.

Če sta torej podani začetna lega in končna lega, lahko vedno najdemo nek vzporedni premik in dva zasuka okoli dveh osi, ki potekata skozi katero koli dano točko, ki pripeljeta trdno telo iz dane začetne lege v dano končno lego. Če bi točka C'' že sovpadala s točko C', bi tretji zasuk izpustili.

§ 47. Sestavljanje dveh zasukov Če se trdno telo dvakrat zaporedoma zasuče okoli dveh osi, ki se sekata v eni točki, lahko celotno spremembo lege, ki jo s tem dobi, vedno nadomestimo z enim samim zasukom okoli druge osi, ki prav tako poteka skozi to točko. Naj bo A točka, v kateri se osi sekata. Okoli točke A kot središče narišemo krogelno ploskev s polmerom 1. To ploskev prebadata dani osi vrtenja v točkah B_1 in B_2. Naj bosta w_1 in w_2 kota, za katera se telo zaporedno vrti okoli teh osi. Na krogli polmera 1 konstruiramo dva največja kroga K_1 in K_2, ki potekata skozi B_1 in tvorita z največjim krogom B_1B_2 proti eni in drugi strani kot $\frac{1}{2}w_1$. Iz loka B_1B_2 pridemo do

K_2 po najkrajši poti v smislu vrtenja, ki ga opravi trdno telo okoli osi AB_1, do K_1 v nasprotnem smislu (slika 14).



Slika 14

Na enak način konstruiramo dva največja kroga K_3 in K_4, ki oba potekata skozi B_2 in vključujeta kot $\frac{1}{2}w_2$ z B_2B_1, tako da spet pridemo od B_2B_1 do K_3 po najkrajši poti v smislu, v katerem se telo zasuka okoli osi AB_1. Naj bosta C_1 in C_2 povprečni točki največjih krogov K_1 in K_2 oziroma K_3 in K_4, ki sta najbližji točkama B_1 in B_2. Točka telesa, ki je bila na začetku v točki C_1, se z zasukom, ki ga telo opravi okoli osi AB_1, premakne v točko C_2, z naslednjim zasukom okoli osi AB_2 pa se povrne v točko C_1, in ker se pri obeh zasukih ne spremeni lega točke A, lahko celotno spremembo lege, ki jo ustvarita oba zasuka, vedno nadomestimo z enim samim zasukom okoli osi AC_1, ki ga bomo imenovali rezultanta obeh prvotno danih vrtenj. Velikost ustreznih kotov zasuka je mogoče enostavno ugotoviti. Točka trdnega telesa, ki je bila na začetku v točki B_1, pri prvem zasuku ne spremeni lege. Z drugim zasukom okoli osi AB_2 bi morala opisati lok B_2B_3, katerega polovična točka je H. Zaradi nastale rotacije mora točka spremeniti svojo lego. Z nastalim vrtenjem se mora tudi ta točka trdnega telesa prenesti na B_3. Torej mora biti kot

$$w_3 = B_1C_1B_3 = 2B_1C_1H$$

kot zasuka skupnega zasuka. Vidimo, da se s tem skupnim zasukom tri točke trdnega telesa, ki so bile na začetku v C_1 in B_1 ter v središču krogle A in za katere lahko menimo, da so z njim togo povezane, čeprav ne pripadajo samemu telesu, prenesejo v iste lege, kot da bi telo najprej opravilo dani zasuk okoli osi AB_1, nato okoli osi AB_2, s čimer dokažemo, da se telo samo z dobljenim zasukom premakne v popolnoma enako končno lego kot z danima zasukoma, ki ju bomo imenovali sestavljeni zasuki ali komponenti.

Iz sfernega trikotnika $B_1B_2C_1$ ugotovimo:

$$\sin(B_1AC_1) : \sin(B_2AC_1) = \sin\frac{w_2}{2} : \sin\frac{w_1}{2}$$

in

$$\cos\frac{w_3}{2} = \cos\frac{w_1}{2}\cos\frac{w_2}{2} - \sin\frac{w_1}{2}\sin\frac{w_2}{2}\cos(B_1AB_2)\ .$$

Glede na to lahko dva zasuka iz izreka iz § 46 vedno nadomestimo z enim samim. Ta izrek je torej mogoče izraziti takole: Vsako trdno telo je mogoče prenesti iz katere koli lege v katero koli drugo z ustrezno izbranim vzporednim premikom in enim samim zasukom. Točko, skozi katero mora potekati os zasuka, izberemo, nato določimo njegovo lego v prostoru in kot zasuka.

§ 48. Zasuki so neskončno majhni. Formule za lego osi in velikost kota rezultantnega zasuka se poenostavijo, če sta kota zasuka w_1 in w_2 prvotno danih zasukov zelo majhna. Potem os AC_1 pade v ravnino obeh drugih osi zasukov AB_1 in AB_2. Nadalje je

$$\sin(B_1AC_1) : \sin(B_2AC_1) = w_2 : w_1$$

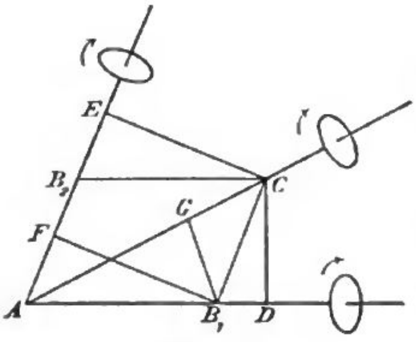
in

$$w_3^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2w_1w_2\cos(B_1AB_2)\ .$$

Če tri zasuke predstavimo z vektorji tako, da iz točke A na osi AB_1 narišemo razdaljo dolžine Γw_1, na osi AB_2 razdaljo dolžine Γw_2, na osi AC_1 pa razdaljo dolžine Γw_3, vidimo, da vektor, ki predstavlja rezultantni zasuk, najdemo iz vektorjev, ki predstavljajo komponente, z enako konstrukcijo kot rezultanto iz dveh danih sil[1].V tem primeru je tudi vseeno, katera od obeh sestavljenih zasukov se zgodi prej in katera pozneje, medtem ko to pri končnih zasukih vpliva na lego rezultantne osi vrtenja. Pri končnih zasukih je nadalje le v primeru dane začetne lege končna lega, ki jo telo zavzame zaradi rezultantnega zasuka, enaka tisti, ki jo zavzame, če najprej opravi prvi in nato drugi sestavljeni zasuk. Pri neskončno majhnih zasukih pa je rezultantni zasuk vedno ekvivalenten komponentam; natančneje: Če se telo najprej zavrti za $\frac{1}{n}$ kota w_1 okoli osi AB_1, nato za $\frac{1}{n}$ kota w_2 okoli osi AB_2, potem bo imelo do neskončno majhne spremembe drugega reda enako spremembo lege, kot če bi se zavrtelo za $\frac{1}{n}$ kota w_3 okoli osi AC_1, in enako velja, če se ponovno zavrti za $\frac{1}{n}$ teh kotov, dokler niso opisani vsi koti.

Vsi izreki o razstavljanju in sestavljanju sil izhajajo iz izreka o paralelogramu sil in jih je zato mogoče nespremenjene uporabiti za neskončno majhne zasuke, če te na

[1]Ta dokaz za zelo majhne zasuke izvedemo bolj preprosto, in sicer na naslednji način. Na sliki 15 naj bo AB_1CB_2 paralelogram. Naj bodo $CD,, CE, B_1G$ in B_1F pravokotni na AB_1, AB_2, AC in AB_2. Naj zdaj trije vektorji AB_1, AB_2, AC s slike 15 predstavljajo tri neskončno majhne zasuke poljubnega trdnega telesa okoli obravnavanih osi v smislu puščic, pritrjenih na rezine. $w_1 = \Gamma \cdot AB_1$, $w_2 = \Gamma \cdot AB_2$, $w_3 = \Gamma \cdot AB_3$. Naj bodo ustrezni koti zasuka. Točka A trdnega telesa se zaradi vseh treh zasukov ne premakne. Točka C ima zaradi prvega zasuka neskončno majhen premik $w_1 \cdot CD = \Gamma \cdot AB_1 \cdot CD$ za ravnino risbe, zaradi drugega zasuka pa premik $w_2 \cdot CD = \Gamma \cdot AB_2 \cdot CD$ pred ravnino risbe, oboje pravokotno na to ravnino. Ker sta ti dve količini enaki, kar je enostavno dokazati, zaradi obeh zasukov skupaj ne pride do nobenega premika, kar pomeni, da se zgodi enak premik, kot bi se zgodil zgolj z zasukom AC. Pri prvem zasuku točka B_1 končno nima nobenega premika, pri drugem pa premik $w_2 \cdot B_2F = \Gamma \cdot AB_2 \cdot B_1F$, pri tretjem pa premik $w_3 \cdot B_1G = \Gamma \cdot AC \cdot B_1G$, oba pravokotna na risalno ploskev pred njo. Iz enakosti trikotnikov AB_2B_1 in ACB_1, ki sta oba pol manjša od paralelograma AB_1CB_2, sledi enakost teh dveh premikov, saj je površina prvega trikotnika enaka $AB_2 \cdot B_1F$, površina drugega pa $AC \cdot B_1G$. Zato imajo vse tri točke A, C in B_1, torej celotno telo, enako spremembo lege zaradi zasuka AC kot zaradi dveh zasukov AB_1 in AB_2 skupaj. Slednji sklep bi bil neveljaven, če bi tri točke A, B_1, B_2 padle na isto premico. Vendar se je tudi takrat mogoče prepričati, da je izrek pravilen, saj se zasuki preprosto seštevajo ali odštevajo.



Slika 15

opisan način predstavimo z vektorji. Poljubno število neskončno majhnih zasukov okoli osi, ki se sekajo v eni točki, lahko združimo v eno samo rezultanto ali pa en zasuk razstavimo na poljubno število komponent okoli takšnih osi. Med drugim lahko vsak neskončno majhen zasuk okoli osi, ki poteka skozi koordinatno izhodišče, razstavimo v tri sestavljene zasuke okoli treh koordinatnih osi, pri čemer so puščice, ki predstavljajo zasuke, določene tako, kot da bi predstavljale sile.

§ 49. Splošne enačbe gibanja za trdno telo. Po tem, kar je bilo povedano, je enostavno najti analitično obliko za virtualni premik trdnega telesa, za katerega deli sicer ne veljajo nobeni pogoji, razen da so vsi togo povezani. Vsak neskončno majhen premik telesa lahko ustvarimo z vzporednim premikom in zasukom okoli osi, ki poteka skozi koordinatno izhodišče. Vzporedni premik lahko razstavimo na tri premike v smeri treh koordinatnih osi za dolžine $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, zasuk pa na tri sestavljene zasuke okoli treh koordinatnih osi za kote $\delta\alpha$, $\delta\beta$ in $\delta\gamma$. Teh šest količin

$$\delta\xi, \quad \delta\eta, \quad \delta\zeta, \quad \delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \delta\gamma \tag{133}$$

ima lahko očitno povsem poljubne vrednosti, ki so medsebojno povsem neodvisne.

Člen $\delta\xi$ v izrazu (93) poiščemo tako, da vse druge količine (133) postavimo na nič. Potem postanejo spremembe koordinat x za vse točke enake in enake $\delta\xi$, vse druge spremembe koordinat pa so enake nič. Leva stran izraza (93) se zato spremeni v:

$$\delta\xi \sum_{h=1}^{n} \left(m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} - X_h \right)$$

Člen $\delta\xi$ mora odpasti, saj je šest spremenljivk v (133) med seboj popolnoma neodvisnih. Iz tega sledi:

$$\sum_{h=1}^{n} m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = \sum_{h=1}^{n} X_h$$

Podobno velja za ustrezne enačbe, ki se nanašajo na druge koordinatne osi.

Pogosto, zlasti kadar je treba seštevati po več indeksih, zlahka pride do zmede, če vsake količine, ki ima v različnih členih vsote različno vrednost, ne označimo s priloženim indeksom. Vendar je zadeva tako preprosta, da bomo odslej izpustili indeks h ter mejne vrednosti nad in pod znakom vsote, ne da bi se bali kakršne koli napake glede načina tvorjenja vsote.

Poleg tega obstaja naslednja okoliščina: Lahko se zgodi, da na tiste materialne točke telesa, ki tvorijo njegovo ***celotno maso***, ne deluje nobena zunanja sila. Po drugi strani pa so lahko točke, na katere delujejo zunanje sile, povezane s telesom z napravami zanemarljivo majhne mase, kar vodi do domneve, da so te točke togo povezane s telesom prek idealiziranih, brezmasnih naprav. S tem lahko domnevamo, da materialne točke telesa niso enake točkam, kjer delujejo sile. Takrat je pogosto bolj priročno razširiti seštevanje z masami samo na prve točke, s silami pa samo na druge točke, čeprav lahko tudi takrat obe seštevanji razširimo na vse točke in preprosto določimo, da so sile enake nič za prve točke, mase pa enake nič za druge. Zato namesto zadnje formule preprosto zapišemo:

$$\sum \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X \,. \tag{134}$$

Da bi našli koeficient $\delta\alpha$ v izrazu (93), moramo ponovno določiti, da so vse druge količine razen $\delta\alpha$ enake nič, in določiti povečanja koordinat različnih točk telesa, ki se pojavijo v tem primeru. Ta povečanja koordinat so tista, do katerih pride, ko telo nima nobene druge spremembe lege kot zasuk za neskončno majhen kot $\delta\alpha$ okoli abscisne osi v smislu, v katerem pridemo do najkrajše poti od pozitivne osi y do pozitivne osi z. Tu točka s koordinatami x, y, z, ki leži na razdalji r od abscisne osi, opiše neskončno majhen lok kroga dolžine $r, \delta\alpha$, ki je pravokoten na premico r. Projekcije tega loka na abscisno os so enake kot projekcije abscisne osi. Projekcije tega loka na tri koordinatne smeri so torej: nič, $-z, \delta\alpha$, $y, \delta\alpha$. Spremembe koordinat obravnavane točke so torej:

$$\delta x = 0 \,, \quad \delta y = -z\,\delta\alpha \,, \quad \delta z = y\,\delta\alpha \,. \tag{135}$$

Z zamenjavo teh vrednosti se leva stran zveze spremeni v:

$$\delta\alpha \sum \left[m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} \right) + zY - yZ \right].$$

Tudi tu mora koeficient $\delta\alpha$ odpasti, kar privede do enačbe

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} \right) = \sum (zY - yZ) \,, \tag{136}$$

ki je enaka enačbi (70). Šest enačb, ki jih dobimo, če enačbama (134) in (136) dodamo podobni enačbi za osi y in z, je torej potrebnih in zadostnih za določitev šestih spremenljivk, potrebnih za določitev lege trdnega telesa kot funkcije časa, če so podane začetne vrednosti spremenljivk in njihovi odvodi po času, pa tudi zunanje sile. Slednje se pojavljajo le v šestih izrazih:

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum X, & B &= \sum Y, & C &= \sum Z \,, \\ D &= \sum (zY - yZ), & E &= \sum (zX - xZ), & F &= \sum (xY - yX) \,, \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

ki smo jih v § 29 že poimenovali vsote komponent in momente sil glede na koordinatne osi. Če na isto trdno telo, katerega delci imajo enake lege, hitrosti in smeri hitrosti, deluje kateri koli drug sistem sil, potem bo telo, če bodo v danem trenutku za ta drugi sistem sil teh šest količin enakih kot pri prvem sistemu sil, imelo enake pospeške kot pri prvem. V tem primeru rečemo, da sta si sistema sil ***ekvivalentna***. Če to velja za daljši čas in so lege, hitrosti in smeri hitrosti vseh materialnih točk na začetku tega časa enake, potem se bo telo pod vplivom ene ali druge sile ves čas gibalo enako[2].

Tako je vsaka sila enakovredna enaki sili v isti smeri, če premica, ki povezuje obe prijemališči, poteka v smeri sil. Pravimo, da lahko prijemališče katere koli sile premaknemo na katero koli drugo točko na njeni smeri, pri čemer ostaneta velikost in smer iste sile nespremenjeni, ne da bi se spremenil njen učinek na trdno telo; saj se s tem ne spremenijo niti velikosti A, B, C, niti momenti zadevne sile glede na smeri koordinat. Slednje izhaja neposredno iz geometrijske definicije momenta, kot je predstavljena z enačbo v § 29.

Če lahko na telo deluje katerikoli sistem sil in hkrati njemu enakovreden sistem, v katerem je smer vsake sile obrnjena, ne da bi se spremenila njena velikost, ima vseh šest veličin (137) vrednost nič; telo se tako giblje, kot da nanj ne bi delovale nobene sile, pri čemer seveda, če telo ni v mirovanju, pospeški vseh njegovih točk na splošno ne bodo enaki nič. Vsaka sila je torej v ravnotežju z obratnim ekvivalentom (prim. zaključek § 35 ter § 70 in 73). Vse sile sistema sil, ki delujejo na trdno telo, bodo ohranile ravnotežje, ko se bo šest spremenljivk (137) izničilo. Če so bile sprva vse točke trdnega telesa v mirovanju, bodo ostale v mirovanju; če je bilo telo v gibanju, se bo gibalo, kot da nanj ne bi delovale nobene sile; če pa je ravnotežje prevladalo le v določenem trenutku, bodo vse njegove točke v tem trenutku dobile enak pospešek, kot da nanj v tem trenutku ne bi delovale nobene sile.

Na tem mestu velja omeniti še izrek, ki ga bomo kasneje uporabili v teoriji elastičnosti. Ko na trdno telo delujejo sile, se to običajno nekoliko deformira. Če po deformaciji telo obmiruje in sile ohranijo ravnotežje, tega ravnotežja ni mogoče porušiti s togim povezovanjem delov telesa v lege, ki jih zavzamejo po deformaciji. Kajti delci med seboj že delujejo s takšnimi notranjimi silami, ki ohranjajo ravnotežje zunanjih sil. Zaradi toge povezave bi lahko ob najmanjši spremembi razdalje med njimi delovale sile vezi poljubne velikosti. Tako bi lahko ***delci*** [Teilchen] še bolj učinkovito izvajali medsebojne sile, ki jih že tako ali tako izvajajo drug na drugega.

§ 50. Kdaj imajo sile, ki delujejo na trdno telo, rezultanto? Glede na povedano lahko odgovorimo tudi na vprašanje, kdaj lahko sistem sil, ki delujejo na trdno telo, nadomestimo z eno samo silo, ki, če to velja le za en trenutek, povzroči v tem trenutku enak pospešek vsake točke telesa. Če pa lahko sistem sil, ki delujejo na trdno telo v vsakem trenutku končnega časa, nadomestimo z eno samo silo, ki se seveda lahko s časom spreminja po velikosti in smeri, bo ta sila povzročila enako gibanje kot sistem sil v celotnem tem času ob enakih začetnih pogojih. Za to posamezno silo potem rečemo, da je ***enakovredna sistemu sil*** ali da je njegova rezultanta.

Za to je potrebno, da ima šest količin enake vrednosti za eno samo silo (rezultanto) kot za dani sistem sil. Tako morajo biti A, B, C komponente rezultante glede na tri koordinatne smeri. Če so ξ, η, ζ koordinate njenega prijemališča, potem mora biti:

$$\eta C - \zeta B = D\,, \quad \zeta A - \xi C = E\,, \quad \xi B - \eta A = F\,. \tag{138}$$

[2]Če je sistem sil K enakovreden drugemu A, potem, kot je takoj razvidno iz naših enačb, tudi K skupaj s tretjim sistemom sil K' povzroča enako gibanje kot A skupaj s K'. Če sta K in K' v ravnotežju, sta v ravnotežju tudi A in K'.

Pri tem so A, B, C, D, E, F vrednosti šestih količin za dani sistem sil. Če seštejemo enačbe, potem ko smo prvo pomnožili z A, drugo z B in tretjo z C, sledi:

$$AD + BE + CF = 0. \tag{139}$$

Med šestimi količinami (137), ki jih pogojuje dani sistem sil, mora biti torej ta enačba nujno izpolnjena, če naj bi ga bilo sploh mogoče nadomestiti z eno samo silo, tj. če naj bi rezultanta sploh obstajala. Če je izpolnjena in je vsaj ena od količin A, B, C različna od nič, potem vedno obstaja rezultanta. Če je na primer A različen od nič, je iz zadnjih dveh enačb (138):

$$\eta = \frac{\xi B}{A} - \frac{F}{A}, \quad \zeta = \frac{\xi C}{A} + \frac{E}{A} \tag{140}$$

in zamenjava teh vrednosti pokaže, da je izpolnjena tudi prva od enačb (138). Ker med tremi koordinatami prijemališča rezultante obstajata le dve enačbi (140), je slednja določena po velikosti in smeri, za prijemališče rezultante pa lahko izberemo katero koli točko premice, določene z enačbami (140), ki ima smer rezultante. Če rezultanta obstaja, lahko za njeno prijemališče izberemo tudi katero koli drugo točko na njeni smeri, kar naravno sledi iz izreka o premičnosti sile na trdnih telesih. Če izbrano prijemališče rezultante ne bi bila del trdnega telesa, bi bilo seveda treba misliti, da je z njim trdno povezana (z brezmasnimi vezmi). Naše formule veljajo le za točke, ki so trdno povezane s telesom.

Če je $A = B = C = 0$, so enačbe izpolnjene le, če je tudi $D = E = F = 0$, torej če so sile danega sistema sil med seboj uravnotežene. Rezultanta je potem seveda enaka nič.

Poseben je primer, ko so vse sile, ki delujejo na trdno telo, med seboj vzporedne. Z a, b, c označimo smerne kosinuse z njimi vzporedne premice G, ki jo, če vse sile delujejo v istem smislu, v tem smislu tudi narišemo. Če ne, jih narišimo v smislu, da je seštevek velikosti sil, ki delujejo v istem smislu, večji od seštevka sil, ki delujejo v nasprotnem smislu. Potem je

$$X = aP\,, \quad Y = bP\,, \quad Z = cP\,.$$

Pri tem je P sila, ki deluje na katero koli točko telesa, katere koordinate so x, y, z. Damo ji pozitivni ali negativni znak, odvisno od tega, ali ima smer premice G ali nasprotno. X, Y, Z so komponente sile P v koordinatnih smereh. Faktor a je enak za vse sile, prav tako b in c. Torej je

$$A = a\sum P\,, \quad B = b\sum P\,, \quad C = c\sum P,$$

$$D = b\sum zP - c\sum yP\,, \quad E = c\sum xP - a\sum zP\,, \quad F = a\sum yP - b\sum xP\,.$$

Pogoj (139) je izpolnjen in vedno obstaja rezultanta, če ni $A = B = C = 0$, torej $\sum P = 0$, o tem primeru bomo govorili pozneje.

Velikost rezultante je $\sum P$, kar je algebrska vsota velikosti vseh posameznih sil. Ima smer premice G, je torej vzporedna z danimi silami in deluje v smeri, za katero je seštevek velikosti sil, usmerjenih vanjo, večji. Enačbe se reducirajo na

$$\frac{1}{a}\left(\xi - \frac{\sum xP}{\sum P}\right) = \frac{1}{b}\left(\eta - \frac{\sum yP}{\sum P}\right) = \frac{1}{c}\left(\zeta - \frac{\sum zP}{\sum P}\right)\,.$$

Te enačbe so zagotovo izpolnjene, če velja

$$\xi = \frac{\sum xP}{\sum P}, \quad \eta = \frac{\sum yP}{\sum P}, \quad \zeta = \frac{\sum zP}{\sum P}.. \tag{141}$$

očko, katere koordinate so določene s temi enačbami, imenujemo ***središče vzporednih sil***. Izberemo jo lahko za točko prijema rezultante. Za točko prijema lahko izberemo tudi katero koli drugo točko na premici, ki je speljana skozi njo in vzporedna s smerjo sil. Vendar ima prvo prijemališče delovanja posebno prednost. Vrednosti njenih koordinat, ki jih podajata enačbi, so neodvisne od a, b, c, tj. od smeri vzporednih sil. Tako ne preneha biti točka prijema rezultante, če se spremeni le ta smer, tj. če velikost vsake od sil ostane nespremenjena in tudi vsaka od njih deluje nespremenjeno na isto točko telesa, smer vseh sil pa se spremeni na enak način, tako da vse ostanejo vzporedne in tudi enako usmerjene.

Ker je pomembna le relativna sprememba lege, ostane središčna točka tudi točka prijema rezultante sil, če je ta trdno povezana s telesom in se telo poljubno vrti ali giblje v prostoru, takoj ko so točke prijema vzporednih sil, ki delujejo nanjo, prav tako trdno povezane s telesom in se te sile ne spremenijo ne velikosti ne smeri.

Doslej smo izključili primer $\sum P = 0$. V tem primeru je $A = B = C = 0$. Kot smo videli, rezultanta obstaja le, če je $D = E = F = 0$, tj. če so dane sile v ravnotežju.

§ 51. Primer vzporednih sil. Kot zelo poseben primer lahko navedemo delovanje dveh vzporednih sil na trdno telo. Za izhodišče koordinat izberemo prijemališče prve sile, pozitivno abscisno os pa potegnemo skozi prijemališče druge sile. Središčna točka je torej na premici, ki povezuje prijemališči sil, njena oddaljenost od teh točk pa je obratno sorazmerna z velikostjo sil. Če sta obe sili enako usmerjeni, središčna točka leži med njunima prijemališčema, v nasprotnem primeru pa zunaj prijemališča večje sile.

Izpeljava teh rezultatov iz enačb (141) je tako enostavna, da se z njo ne bomo ukvarjali. Če sta sili enaki, vendar nasprotno usmerjeni, ohranjata ravnotežje, če sta njuni smeri v isti premici. V nasprotnem primeru nimata rezultante, temveč tvorita tako imenovani dvojica sil, o katerem bomo govorili pozneje.

Videli smo že, da se vsak masni delec m težkega, vrženega, ne vrtečega se telesa giblje, kot da nanj deluje stalna sila mg (***njegova teža***), usmerjena proti središču Zemlje, pri čemer ima g enako vrednost za vse delce v isti točki na Zemlji in ga imenujemo ***težnostni pospešek***. Ob predpostavki, da je v vseh drugih primerih učinek težnosti enak pravkar opisani sili mg, zdaj iščemo rezultanto celotnega učinka težnosti na katero koli trdno telo. Zaradi velike oddaljenosti od središča Zemlje so vse sile, ki delujejo na različne masne delce, vzporedne in enako usmerjene.

Rezultanta vseh sil, ki jih težnost deluje na celotno telo, je torej prav tako usmerjena proti središču Zemlje; njena velikost

$$g \sum m$$

je enaka vsoti mas vseh materialnih delcev, ki jo imenujemo ***skupna teža telesa*** in je enaka ***skupni masi telesa***, pomnoženi s težnostnim pospeškom. Središče vzporednih sil ima zaradi enačb (141) koordinate

$$\xi = \frac{\sum m\, x}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum m\, y}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum m\, z}{\sum m}.$$

Zato je to točka, ki smo jo že imenovali težišče. Ko se telo vrti, se masa posameznih masnih delcev ne spreminja niti po velikosti niti po smeri niti po prijemališčih. Težišče, ki je trdno povezano s telesom, ne preneha biti prijemališče rezultante vseh težnostnih sil, ki delujejo na vse masne delce telesa, če se telo poljubno giblje. Če torej na težišče telesa deluje ena sama sila z velikostjo celotne teže telesa, bo ta sila vseskozi povzročila enako gibanje kot različne težnostne sile, ki delujejo na posamezne delce telesa. Lahko si predstavljamo, da je vsa teža telesa zbrana v njegovem težišču. Vendar ne smemo pozabiti, da to velja le, dokler telo velja za togo. Elastična deformacija telesa, npr. stiskanje ali upogibanje zaradi lastne teže, bi bila seveda povsem drugačna, če bi težnost namesto na vse delce telesa delovala le na njegovo težišče. Vse te zakone potrjujejo izkušnje, tako da lahko našo hipotezo o učinku težnosti na masne delce telesa štejemo za utemeljeno z izkušnjami.

§ 52. Teorija dvojice sil Kot dvojico sil razumemo dve enaki sili, usmerjeni v nasprotnih smereh, ki delujeta na trdno telo in nimata iste smeri kot premica, ki povezuje njuni prijemališči. Ravnina, ki vsebuje obe prijemališči in smeri obeh sil, se imenuje ***ravnina dvojice sil***. Normala, ki je postavljena nanjo, se imenuje ***os dvojice sil***. Vedno jo je treba narisati v smislu, da se dvojica sil skuša zasukati okoli nje v pozitivnem smislu, tj. da ima glede na smer zasuka dvojice sil enako lego, kot jo ima pozitivna z-os glede na obračanje od pozitivne osi x po najkrajši poti do pozitivne osi y. Tako se pri uporabi francoskega koordinatnega sistema dvojica sil vrti v smeri urinega kazalca, če gledamo od mesta, kamor kaže os.

Obe sili ponazorimo s puščicama, pri čemer je faktor sorazmernosti med silo in puščico enak 1. Paralelogram, ki ga dobimo, ko povežemo prijemališče vsake sile s končno točko druge sile, imenujemo ***paralelogram dvojice sil***, njegovo površino pa ***skupni moment***. Za vsako dvojico sil velja $A = B = C = 0$. Moment D obeh sil, ki tvorita dvojico sil glede na abscisno os, poiščemo po formuli (71), tako da projiciramo puščice, ki predstavljajo obe sili, na ravnino yz, pomnožimo vsako projekcijo s pravokotno razdaljo od izhodišča koordinatnega sistema in tvorimo razliko teh dveh produktov. Kot je takoj razvidno, je ta razlika enaka površini projekcije paralelograma dvojice sil, tj. njegovemu skupnemu momentu na ravnini yz, pri čemer je predznak pozitiven ali negativen, odvisno od tega, ali projekcija dvojice na ravnino yz telo zasuka v pozitivnem ali negativnem smislu okoli pozitivne abscisne osi. Podobno določimo E in F.

Vrednosti D, E in F so odvisne le od smeri ravnine dvojice, njenega skupnega momenta in smeri zasuka, ki ga dvojica poskuša povzročiti. Ker pa za vsako dvojico sil velja $A = B = C = 0$, so vse dvojice sil med seboj enakovredne, tj. povzročajo enako gibanje trdnega telesa, če so njihove ravnine vzporedne, njihovi skupni momenti enaki in smeri zasuka iste. Vsako dvojico sil lahko torej poljubno premikamo znotraj njene ravnine, zavrtimo njen paralelogram in ga nadomestimo z drugim z enako površino in enakim smislom vrtenja, prav tako pa lahko poljubno premikamo ravnino dvojice, ki ostaja vzporedna sama sebi, ne da bi se s tem spremenil učinek dvojice sil na trdno telo.

Tako kot zasuk lahko vsako dvojico sil predstavimo z vektorjem V. Ta vektor lahko poteka iz katere koli točke v prostoru, njegova smer mora biti smer osi dvojice sil, njegova dolžina, pomnožena z ustreznim redukcijskim faktorjem Γ, ki je konstanten, pa mora biti enaka skupnemu momentu dvojice sil. Če ne upoštevamo dimenzij, lahko faktor Γ postavimo enak 1.

Tri količine D, E, F so projekcije tega vektorja, pomnoženega z Γ, na tri koordinatne osi, pri čemer imajo pozitiven ali negativen predznak, odvisno od tega, ali padejo v pozitivno ali negativno koordinatno smer. D, E in F so torej enolično določeni z vektorjem. Vse dvojice sil, ki so na ta način predstavljene z istim vektorjem, so enakovredne, kar pomeni, da lahko dvojice sil seštevamo v rezultanto ali jih razstavljamo na komponente povsem enako kot preproste sile. Če so V_1, V_2, V_3 projekcije vektorja V, ki predstavlja našo dvojico sil, na tri koordinatne osi, potem ti trije novi vektorji predstavljajo dvojice sil, za katere imajo momenti glede na koordinatne osi vrednosti

$$D,\ 0,\ 0\,;\quad 0,\ E,\ 0\quad \text{oziroma}\quad 0,\ 0,\ F\,.$$

Za te tri dvojice sil skupaj je vsota momentov glede na koordinatne osi natanko enaka kot za prvotno dano dvojico sil, in ker za vse dvojice sil velja $A = B = C = 0$, so tri dvojice sil, ki jih predstavljajo vektorji V_1, V_2, V_3, skupaj enakovredne eni dvojici sil, ki jo predstavlja vektor V, enako kot so tri sile, ki jih predstavljajo puščice V_1, V_2, V_3, komponente sile, ki jo predstavlja vektor V. Ta izrek je pravzaprav le poseben primer uporabe konstrukcije paralelograma sil za dvojico sil; vendar lahko na podlagi tega izreka takoj dokažemo splošni primer, tako da vsako dvojico razstavimo na tri komponente glede na tri koordinatne osi in dokažemo, da so te komponente enake za rezultanto kot za vsoto vseh komponent.

§ 53. Redukcija poljubnih sil na silo in dvojico sil. Naj bo podan poljuben sistem sil, ki delujejo na trdno telo. Videli smo, da ni vedno mogoče najti ene same sile, ki bi bila enakovredna danemu sistemu sil. Vedno pa je mogoče najti silo in dvojico sil, ki sta skupaj enakovredni danemu sistemu sil, pri čemer lahko prijemališče sile izberemo poljubno. Če so A, B, C vsote komponent danih sil, D, E, F pa vsote njihovih momentov glede na koordinatne osi, potem lahko iz koordinatnega izhodišča, ki ga lahko poljubno izberemo, potegnemo vektorja OK in OP, ki predstavljata silo in dvojico sil s komponentami A, B, C oziroma D, E, F v koordinatnih smereh. Imenujemo ju rezultanta sile in rezultanta dvojice sil. Oba skupaj sta enakovredna danemu sistemu sil, saj za silo D, E in F, za dvojico sil pa A, B in C odpadejo, zato imajo sila in dvojica skupaj šest količin A, B, C, D, E, F enake vrednosti kot za prvotno dani sistem sil.

Dvojico sil lahko predstavimo s poljubnim vektorjem iste smeri, ki izhaja iz različnih točk prostora. Če pa za silo izberemo drugo prijemališče, ki ne leži v njeni smeri, moramo dvojico sil spremeniti na način, ki ga lahko ugotovimo z naslednjimi razmisleki.

Na trdno telo naj deluje ena sama sila. O naj bo njeno prijemališče, puščica OK pa predstavlja njeno velikost in smer. Njen učinek na trdno telo lahko vedno nadomestimo z enako silo iste smeri, ki deluje v neki drugi točki O', ki ni v smeri prejšnje sile, in s parom sil. To dokažemo tako, da dodamo dve sili $O'K'$ in $O'K'''$, ki delujeta v točki O', prva je enaka in enako usmerjena, druga pa prav tako enaka, vendar nasprotno usmerjena sili OK. Ker se ti dve sili medsebojno izničita, je dana sila OK enakovredna sistemu, sestavljenemu iz treh sil OK, $O'K'$ in $O'K'''$. Dve sili OK in $O'K'''$ tvorita dvojico sil, ki jo lahko predstavimo z vektorjem $O'P'$, ki je pravokoten na ravnino OKO' v smislu, da se okoli njega zasuka smer dvojice sil, torej tudi OK proti OO', po najkrajši poti v pozitivnem smislu. Moment dvojice sil, ki ga predstavlja $O'P'$, je enak površini paralelograma $OKO'K'''$, tj. dvakratni površini trikotnika OKO'. Ta dvojna površina je torej enaka dolžini vektorja $O'P'$, pomnoženi s Γ.

Tako najdena sila $O'K'$ in dvojica $O'P'$ sta vedno enakovredni eni sili OK, kar bomo imenovali izrek (142).

Naj bo dano poljubno trdno telo in poljuben sistem sil, ki delujejo nanj. Naj bo ta sistem enakovreden sili OK in dvojici OP. O' naj bo katerakoli druga točka. Naloga naj bo, da prvotno dani sistem sil nadomestimo s silo, ki deluje v točki O', in dvojico sil.

Dvojico sil lahko nadomestimo tudi s puščico $O'P'''$, vlečeno iz O', enako kot OP in enako usmerjeno, silo pa s silo $O'K'$, ki deluje na O', enako kot OK in enako usmerjeno, in še vedno z dvojico $O'P'$, določenim s pogoji (142). Obe dvojici $O'P'$ in $O'P'''$ lahko združimo v eno samo dvojico sil $O'P'''$, ki je zato enakovredna sili $O'K'$, združeni s prvotno danim sistemom sil, s čimer rešimo zastavljeni problem.

Nova rezultanta $O'K'$ je enaka prvotni OK in ima enako smer. Nova dvojica sil $O'P'''$ pa ima enak moment in enako smer kot prejšnja dvojica sil OP le, če točka O' leži v smeri sile OK.

Omeniti je treba, da lahko prijemališče O' rezultante sile vedno izberemo tako, da je pravokotno na ravnino dvojice sil, ki je enakovredna danemu sistemu sil, združenih z njo, tj. da ima os rezultante dvojice sil smer rezultante sile. Silo, ki deluje na trdno telo, in dvojico sil, ki prav tako deluje nanj, ter katere os ima smer sile, pogosto imenujemo ***dinama***.

Da lahko prijemališče rezultante sile res vedno tako izberemo, dokažemo na naslednji način. Kot vemo, v vsaki točki O vedno obstaja sila OK, ki deluje na katero koli točko O in je skupaj z dvojico OP enakovredna danemu sistemu sil. Dvojico sil lahko vedno razdelimo na dve komponenti, ki ju predstavljata vektorja OF in ON, od katerih prvi pade na isto premico kot sila OK, drugi pa je nanjo pravokoten. Nato postavimo premico OO' pravokotno na ravnino NOK na tisto stran, kjer zasuk, ki OK premakne po najkrajši poti do OO', za ON deluje v negativnem smislu. Dolžina odseka OO' je $\Gamma \cdot ON/OK$.

V skladu z izrekom (142) je sila OK zdaj enaka sili $O'K'$, ki deluje v O' in je usmerjena enako, ter dvojici sil, ki ima enako os in enak skupni moment, vendar nasproten smisel vrtenja kot dvojica sil ON, zato se slednja izniči. Dvojico sil OF pa lahko predstavimo tudi s puščico $O'F'$, ki jo potegnemo iz O' v isto smer. Sila $O'K'$ in dvojica sil $O'F'$, katere os poteka v smeri sile $O'K'$ in katere ravnina je pravokotna nanjo, sta torej enakovredni prvotno podanemu sistemu sil. Ker sta OF in ON kateti pravokotnega trikotnika, katerega hipotenuza je OP, velja, da je $OF < OP$.

Če torej rezultanta sil deluje v točki O' ali v kateri koli drugi točki neskončne premice $O'K'$, tako da ima smer osi rezultante dvojice sil, je njen moment manjši kot v kateri koli drugi legi prijemališča rezultante sil.

§ 54. Redukcija premika na zasuk in vzporedni premik. Vijačno gibanje. Popolnoma podobne izreke lahko izpeljemo za zasuke. Tako kot lahko vsak sistem sil nadomestimo z eno samo silo in eno samo dvojico sil, lahko vsako spremembo lege trdnega telesa ustvarimo z združitvijo enega samega zasuka in enega samega vzporednega premika. Tako kot lahko vektor, ki predstavlja dvojico sil, potegnemo iz katere koli točke v prostoru, lahko tudi vektor, ki predstavlja vzporedni premik, potegnemo iz katere koli točke v prostoru. Ta vektor označimo z OP. Vektor, ki predstavlja zasuk, lahko potegnemo iz katere koli točke osi vrtenja, prav tako kot vektor, ki predstavlja silo, potegnemo iz katere koli točke v njeni smeri. Vektor, ki predstavlja zasuk, zato označimo z OK. Vektor $O'K'$, narisan iz katere koli druge točke O', enake in enako usmerjene kot OK, nam predstavlja enako in enako usmerjeno zasukanje okoli vzporedne osi.

Tako kot je bila prej sila OK enaka sili $O'K'$ in dvojici $O'P'$, je tudi sprememba lege, ki jo povzroči zasuk OK, enaka tisti, ki jo povzroči zasuk $O'K'$ v kombinaciji z vzporednim premikom $O'P'$. Omejimo se na neskončno majhne zasuke in vzporedne premike, kjer je vzporedni premik $O'P'$ prav tako določen po velikosti in smeri po pravilih, podobnih tistim iz izreka (142), ki je določal dvojico $O'P'$.

Če je zasuk OK neskončno majhen, se točka O' premakne za $O'P'$, pravokotno na ravnino OKO', v smislu, da se premica OK po najkrajši poti v pozitivnem smislu zasuka proti OO'. Velikost tega premika je $w \cdot O'A$, kjer je w pripadajoči kot zasuka, ki jo predstavlja OK, $O'A$ pa je pravokotna razdalja točke O' od osi zasuka OK. Naj bo Γ redukcijski faktor, tako da je dolžina puščice OK enaka Γ, w, torej:

$$O'P' = \frac{OK \cdot O'A}{\Gamma} = \frac{2\,OKO'}{\Gamma}\,, \tag{143}$$

kjer je OKO' površina tega trikotnika.

Zdaj damo celotnemu trdnemu telesu vzporedni premik $O'P'$ in zasuk, ki ga predstavlja $O'K'$, okoli osi, vzporedne z OK, ki poteka skozi O', pri čemer sta smisel in kot zasuka enaka kot pri zasuku OK. Tako se točka A trdnega telesa in vse točke, ki so bile prvotno na premici OK, vrnejo v svoje prejšnje lege, kar lahko zlahka dokažemo. Poleg tega vse točke telesa, ki ležijo na premici, speljani skozi O' v smeri OK, in končno tudi celotno telo, pridejo v isto lego kot pri zasuku OK. Celotno telo ima tako enako spremembo lege pri zasuku OK kot pri zasuku $O'K'$ in vzporednem premiku $O'P'$, podanem s formulo (143).

Iz tega lahko takoj izpeljemo naslednje:

1. Naj bo OP vzporedni premik in OK zasuk, s katerima lahko povzročimo neskončno majhno spremembo lege poljubnega trdnega telesa, in naj bo O' poljubna točka. Naloga naj bo, da dosežemo enako spremembo lege z vzporednim premikom in zasukom okoli osi, ki poteka skozi O'. Vzporedni premik lahko predstavimo tudi s puščico $O'P''$, potegnjeno iz točke O' v isto smer kot OP. Zasuk OK pa lahko predstavimo s puščico $O'P'$. Toda zasuk OK lahko nadomestimo z zasukom, ki ga predstavlja puščica $O'P'$, enaka OK in usmerjena v isto smer, v kombinaciji z vzporedno translacijo $O'P''$. Velikost slednje je določena s formulo (143), njena smer pa s pravilom, navedenim v razvoju te formule. $O'P'$ mora biti pravokotna na ravnino OKO', da zasuk OK po najkrajši poti do OO' predstavlja pozitiven zasuk okoli $O'P'$. Problem je rešen, če lahko združimo dva vzporedna premika $O'P'$ in $O'P''$ v en sam premik $O'P'''$.

2. Točko O lahko ponovno izberemo tako, da vzporedni premik pade na isto premico kot os vrtenja. Da bi našli točko O', ki je primerna za ta namen, razdelimo parcialni premik OP na dve komponenti OF in ON, od katerih prva pade v smer OK, druga pa je nanjo pravokotna. Nato narišemo premico OO', pravokotno na ravnino KON, tako da se premica OK po najkrajši poti v negativnem smislu zasuka proti OO' glede na ON. Dolžina odseka OO' je

$$OO' = \frac{\Gamma \cdot ON}{OK}.$$

Potem bo zasuk OK povzročil enako spremembo lege kot zasuk, ki ga predstavlja puščica $O'K'$, z začetkom v O', enaka OK in usmerjena v isto smer, v kombinaciji z vzporednim premikom, ki izniči vzporedni premik ON. Zasuk in vzporedni premik OF vzdolž iste osi tako vsakič povzročita določeno spremembo lege trdnega telesa.

Zasuk, združen z vzporednim premikom v smeri osi zasuka, imenujemo ***vijačno gibanje***, saj vijak, ki se vrti v svoji matici, vedno opravlja takšno gibanje. Z enim samim gibom vijaka je mogoče doseči vsako neskončno majhno spremembo lege trdnega telesa, če so kot zasuka, os in korak vijaka ustrezno izbrani.

§ 55. Splošne enačbe zasuka trdnega telesa okoli nepremične osi. Sedaj se lotimo gibanja trdnega telesa, pri katerem sta dve točki in s tem tudi vse točke, ki ležijo na premici, ki ju povezuje, nepremične. Lahko si na primer predstavljamo os, ki gre skozi trdno telo in je z njim trdno povezana, njena konca pa sta koničasta in mirujeta v nepremičnih oporah.

Lega trdnega telesa je v tem primeru določena z lego ene same točke A, ki ne leži na osi. Da bi to določili, narišemo pravokotnico od točke A do osi in z w označimo kot med lego te pravokotnice na začetku časa in lego, ki jo ima v nekem času t. Ta kot pravzaprav meri zasuk, ki ga je telo opravilo od začetnega časa. Kot w lahko štejemo v kateri koli smeri, vendar pa smer osi vrtenja, okoli katere poteka to štetje v pozitivnem smislu, imenujemo pozitivna.

Enačbe, ki veljajo za popolnoma prosto telo, lahko uporabimo tudi v tem primeru, če med zunanje sile štejemo tudi sile, ki ohranjajo os vrtenja oz. oba ležaja v nespremenjeni legi.

Vsak masni delec m telesa ima v času t koordinate x, y, z in razdaljo r od osi vrtenja, ki jo izberemo za abscisno os (in sicer njeno pozitivno smer kot pozitivno abscisno os). Daljica r, ki poteka od osi proti točki m, s pozitivno ravnino xy zapira kot α, ki ga prav tako štejemo v pozitivnem smislu, tako da je

$$y = r\cos\alpha\,, \quad z = r\sin\alpha\,. \tag{144}$$

V času dt naj se kot w poveča za dw, tako da se telo zavrti okoli abscisne osi za kot dw, in sicer v pozitivnem ali negativnem smislu, odvisno od tega, ali je dw pozitiven ali negativen. Odvod dw/dt označimo z ω in ga imenujemo kotna hitrost (Winkelgeschwindigkeit). Zato je tudi prirastek $d\alpha$ kota α enak dw, medtem ko r in x ostajata konstantna. Iz enačb (144) torej ugotovimo:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{dt} = 0, & \dfrac{dy}{dt} = r\sin\alpha, \cdot\dfrac{dw}{dt} = -z\omega, & \dfrac{dz}{dt} = r\cos\alpha\cdot\omega = y\omega, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0, & \dfrac{d^2y}{dt^2} = -y\omega^2 - z\dfrac{d\omega}{dt}, & \dfrac{d^2z}{dt^2} = -z\omega^2 + y\dfrac{d\omega}{dt}. \end{array}\right\} \tag{145}$$

Nadalje bomo z $-A_l$, $-B_l$, $-C_l$ označili vsoto komponent sil, ki prek ležajev delujejo na os in prek nje na telo v treh koordinatnih smereh, z $-D_l$, $-E_l$, $-F_l$ pa vsoto njihovih momentov glede na koordinatne osi, s A_a, B_a, C_a, D_a, E_a, F_a pa iste količine glede na druge zunanje sile, ki delujejo na telo. Sile, ki delujejo na os, si lahko predstavljamo kot sile, ki delujejo na obeh koncih osi. Njihova prijemališča zato v vsakem primeru ležijo na abscisni osi, njihov moment glede na abscisno os pa je enak nič. Zato je $D_l = 0$.

Če vrednosti (144) in (145) za koordinate ter vrednosti za komponente sil in momentov vstavimo v enačbi (134) in (136), ki ju zapišemo v obliki $\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = D$, dobimo naslednje enačbe:

$$\left.\begin{aligned}
-A_l + A_a &= 0,\\
-B_l + B_a &= -\omega^2 \sum m\,y - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,z,\\
-C_l + C_a &= -\omega^2 \sum m\,z + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y,\\
-E_l + E_a &= \omega^2 \sum m\,x\,z - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,x\,y,\\
-F_l + F_a &= -\omega^2 \sum m\,x\,y - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,x\,z,\\
D_a &= \frac{d\omega}{dt}\sum m\left(y^2+z^2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Tu sta ω^2 in $\frac{d\omega}{dt}$ postavljena pred znaka za seštevanje, saj imata w in njegovi odvodi po času enake vrednosti za vse točke telesa.

Prvih pet enačb določa komponente sile $-A_l$, $-B_l$, $-C_l$ in vrtilna momenta $-E_l$ in $-F_l$, ki jih ležaji izvajajo na osi. Te enačbe služijo tudi za določitev vsot A_l, B_l, C_l komponent sil vzdolž koordinatnih osi ter vrtilna momenta E_l in F_l glede na osi y in z, ki jih telo izvaja na napravo, ki drži ležaje na mestu. Zadnja enačba pa služi za določitev gibanja telesa.

Vsota, pomnožena z $\frac{d\omega}{dt}$ na njegovi levi strani, nastane tako, da vsak masni delec telesa pomnožimo s kvadratom njegove oddaljenosti od osi in seštejemo vse tako nastale produkte. Imenujemo jo vztrajnostni moment telesa glede na to os in ga označimo s K. Ker se med gibanjem ne spreminjata niti masa delca niti njegova oddaljenost od osi vrtenja, je vztrajnostni moment med gibanjem konstanten. Če to upoštevamo, dobimo iz zadnje enačbe:

$$K\frac{d\omega}{dt} = D_a$$

,

$$\omega = \frac{dw}{dt} \tag{147}$$

Vidimo, da na kotni pospešek

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2w}{dt^2}$$

vpliva le količina D_a. Par sil, ki daje tej količini enako velikost, ima na telo okoli dane osi popolnoma enak vrtilni učinek, od koder izvira ime ***vrtilni moment*** glede na os.

§ 56. Enakomeren in enakomerno pospešen vrtenje. Fizično nihalo. Tehtnica. Enačbe (147) imajo popolnoma enako obliko kot enačbi (13) in (14) za gibanje telesa po premici ali krivulji. Vsak izrek, ki smo ga našli za slednje gibanje, lahko torej pretvorimo v ustrezen izrek za vrtenje trdnega telesa okoli nepremične osi z naslednjimi zamenjavami: namesto poti pišemo kot zasuka w, namesto hitrosti c v običajnem pomenu kotno hitrost ω, namesto mase vztrajnostni moment K telesa glede na os zasuka, in namesto vsote komponent sil v smeri gibanja telesa vsoto D_a momentov vseh sil, ki delujejo na telo glede na os zasuka.

Če je torej vsota momentov sil glede na os zasuka enaka nič, poteka vrtenje enakomerno; če je ta vsota konstantna, dobimo:

$$\omega = \frac{D_a t}{K}, \quad w = \frac{D_a t^2}{2\,K}.$$

Drug primer je naslednji: na magnet z vztrajnostnim momentom K, ki je v bakrenem ohišju obešen na nit, delujeta njegov torzijski moment in geomagnetizem z vrtilnim momentom $-a, w$ proti mirovni legi, ki je skoraj sorazmeren kotu odklona w; drugi vrtilni moment $-b, \omega$, ki izhaja deloma iz tokov, induciranih v ohišju, deloma iz upora zraka, je sorazmeren kotni hitrosti in deluje proti gibanju. Zato lahko v tem primeru vse formule iz § 18 uporabimo nespremenjene, če namesto m, x, u zapišemo K, w, ω, s čimer je ponazorjena njihova uporabnost v praktičnih primerih.

Telo, ki se pod vplivom težnosto vrti okoli nevtralne osi, imenujemo fizikalno nihalo. Če so nihanja majhna in upoštevamo zračni upor kot dušenje, ki je sorazmerno s kotno hitrostjo, spet veljajo popolnoma enake formule kot za magnet. Ne da bi se podrobneje ukvarjal s tem, bom podal nekaj ugotovitev o končnih nihanjih, ob izključitvi vseh drugih sil, razen težnosti ter sil telesa in osi.

Naj bo os vrtenja, za katero ponovno izberemo abscisno os, vodoravna. Naj bo os y narisana navpično navzdol. Naj bo σ dolžina pravokotnice, ki pada od težišča do osi zasuka in tvori kot w z ravnino xy. M naj bo skupna masa telesa, K pa njegov vztrajnostni moment glede na os abscise. Celotno težo Mg si lahko predstavljamo kot delujočo v težišču. Njen vrtilni moment glede na abscisno os je torej $-Mg, \sigma \sin w$, pri čemer je treba postaviti negativni predznak, saj zmanjšuje kot w. Tako dobimo enačbo:

$$K \frac{d^2 w}{dt^2} = -M\,g\,\sigma \sin w.$$

Če to primerjamo z enačbo (120), vidimo, da se kot w spreminja po popolnoma enakem zakonu kot pri preprostem nihalu, le da namesto dolžine nihala l zapišemo $K/M, \sigma$. Nihajni čas je torej:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{M\,\sigma\,g}} \left(1 + \frac{a^2}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} a^4 + \cdots\right) \tag{148}$$

pri čemer je α spet sinus največjega kota odklona. Če os zasuka ne bi bila vodoravna, bi namesto g prevzela komponenta težnostnega pospeška v smeri pravokotno na os zasuka, tj. g, pomnožena s sinusom kota med osjo zasuka in navpičnico. Enaki mehanski pogoji veljajo za nihalo.

Tehtnica je pod enakimi mehanskimi pogoji. Predstavljajmo si težko telo, ki se vrti okoli vodoravne osi. To telo je v stabilnem ravnotežju, kar pomeni, da ga njegova težnost ob vsaki manjši motnji, ko je težišče navpično pod osjo vrtenja, pripelje nazaj v ravnotežno lego (prim. § 70). V tej legi sta dve enako težki tehtnici pritrjeni na nasprotni strani osi vrtenja tako, da sta točki, na kateri pritiskata, popolnoma simetrični glede na navpično ravnino, ki poteka skozi os vrtenja. Če torej eno telo postavimo na eno ponev, drugo pa na drugo, lahko iz dejstva, da se ravnotežje ohrani brez zasuka telesa, sklepamo, da imata obe telesi enako težo in torej enako maso, saj je masa enaka zmnožku mase in težnostnega pospeška, ki pa je glede na izkušnje enak za vsa telesa. Če telo, ki leži na enem delu tehtnice, ohranja ravnotežje dveh drugih teles, ki ležita na drugem delu tehtnice in sta med seboj povsem enake narave, vidimo, da ima telo dvakrat večjo maso od vsakega od njiju itd.

Pravila za najpreprostejšo praktično določitev mase tako izhajajo iz dokaj zapletenih posledic naše slike. Toda to ni logična slabost, kot bi bila to v primeru, če bi temeljni pojmi in osnovne definicije izhajali iz posledic naše konstrukcije, za katero naj bi bili njihov temelj.

§ 57. Polmer vztrajnosti. Moment vztrajnosti glede na vzporedne osi.

Količino K imenujemo ***vztrajnostni moment***, ker nadomešča maso, ki je merilo upora telesa proti pospeševanju.

Če označimo $\lambda = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$, potem je λ razdalja, na kateri bi morala biti združena celotna masa M telesa v eni točki, oddaljeni od osi vrtenja, da bi imela enak vztrajnostni moment kot celotno telo. Če si torej predstavljamo, da je preostali del telesa brez mase in da je njegova masa zgoščena v eni sami točki, ki je pritrjena nanj ter se nahaja na razdalji λ od osi vrtenja, bi telo pod vplivom enakih sil in v enakih začetnih pogojih opravilo enak zasuk okoli namišljene nepremične osi vrtenja.

Ker je lahko katera koli premica skozi telo os vrtenja, je pomembno, da lahko enostavno določimo vztrajnostni moment telesa glede na katero koli premico skozi telo. V ta namen so uporabni izreki, ki jih bomo zdaj obravnavali in s katerimi lahko zlahka izračunamo vztrajnostni moment telesa glede na katero koli os, potem ko je bil izračunan vztrajnostni moment tega telesa glede na tri določene osi, ki potekajo skozi njegovo težišče.

Izrek o vztrajnostnem momentu glede na vzporedne osi.

Če je K vztrajnostni moment telesa glede na katero koli os, L vztrajnostni moment glede na vzporedno os, ki poteka skozi težišče, oddaljeno od prve osi za σ, in če je r razdalja katerega koli masnega delca m od prve osi, ρ pa od druge osi, potem v skladu z definicijo vztrajnostnega momenta velja:

$$K = \sum m\,r^2\,, \quad L = \sum m\rho^2\,.$$

Vrednosti teh količin se ne nanašajo na noben koordinatni sistem, zato sta neodvisni od njegove lege. Za izhodišče koordinat izberemo težišče in določimo pravokotno črto od težišča do prve osi kot abscisno os, os, ki je vzporedna s prvo osjo in poteka skozi težišče, pa kot z-os. Koordinate masne točke m označimo z x, y, z. Potem velja:

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$r^2 = (x-\sigma)^2 + y^2 = \rho^2 + \sigma^2 - 2\,\sigma\,x$$

Iz tega sledi:

$$\sum m\,r^2 = \sum m\,\rho^2 + \sigma^2 M - 2\,\sigma \sum m\,x.$$

M predstavlja skupno maso telesa. Ker abscisna os poteka skozi težišče, velja tudi $\sum m, x = 0$. Poleg tega je izraz na levi strani vztrajnostni moment glede na prvo os, prvi člen na desni pa vztrajnostni moment glede na drugo os, ki poteka vzporedno skozi težišče. Zato velja:

$$K = L + M\sigma^2. \tag{149}$$

Ta izraz omogoča izračun vztrajnostnega momenta glede na katero koli os, če sta podana skupna masa telesa in oddaljenost težišča od prve osi glede na vzporedno os, ki poteka skozi težišče.

Če je dana še ena os, vzporedna s prvo, in če je K' vztrajnostni moment istega telesa glede na to drugo os, σ' pa njena oddaljenost od težišča telesa, potem velja:

$$K' = L + M\sigma'^2$$

Iz tega sledi:

$$K' = K + M\left(\sigma'^2 - \sigma^2\right).$$

Iz zadnje enačbe lahko izračunamo vztrajnostni moment glede na katero koli os, če sta podani oddaljenosti obeh osi od težišča telesa in skupna masa telesa.

§ 58 Vztrajnostni elipsoid. Zdaj označimo z O katero koli točko znotraj ali zunaj trdnega telesa, skozi njo potegnemo osi v vseh možnih smereh v prostoru in si zadamo nalogo ugotoviti zvezo med vztrajnostnimi momenti istega telesa glede na te različne osi.

Točko O postavimo za izhodišče poljubnega koordinatnega sistema in skozi O potegnemo poljubno premico $\mathfrak{G}$, katere smerne kosinuse glede na ta koordinatni sistem označimo z α, β, γ. Naj bo K vztrajnostni moment telesa glede na premico $\mathfrak{G}$. Poleg tega naj bo m katerikoli masni delec telesa, r njegova oddaljenost od premice $\mathfrak{G}$, R dolžina daljice, ki poteka od koordinatnega izhodišča do mase m, λ, μ, ν, smerni kosinusi te daljice in ε kot, ki ga tvori z premico $\mathfrak{G}$. Nazadnje naj bodo $x = R\lambda$, $y = R\mu$ in $z = R, \nu$ koordinate masnega delca m. Potem je

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 \sin^2\varepsilon \\ &= R^2\left[1 - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)^2\right] = \\ &= \alpha^2\left(y^2 + z^2\right) + \beta^2\left(x^2 + z^2\right) + \gamma^2\left(x^2 + y^2\right) - 2\,\alpha\,\beta\,x\,y - 2\,\alpha\,\gamma\,x\,z - 2\,\beta\,\gamma\,y\,z \end{aligned}$$

Če torej določimo

$$\left.\begin{aligned} a &= \sum m\left(y^2 + z^2\right), & b &= \sum m\left(x^2 + z^2\right), & c &= \sum m\left(x^2 + y^2\right), \\ d &= \sum m\,y\,z, & e &= \sum m\,x\,z, & f &= \sum m\,x\,y. \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

dobimo za vztrajnostni moment glede na os $\mathfrak{G}$ vrednost:

$$K = \sum m\,r^2 = a\,\alpha^2 + b\,\beta^2 + c\,\gamma^2 - 2\,d\alpha\,\beta - 2e\,\alpha\,\gamma - 2f\,\beta\,\gamma \tag{151}$$

Poznavanje šestih konstant (150), od katerih so a, b, c očitno vztrajnostni momenti istega telesa glede na tri koordinatne osi, zadostuje za izračun vztrajnostnega momenta glede na katero koli os, ki poteka skozi O.

Odvisnost velikosti vztrajnostnega momenta od lege ustrezne osi, ki poteka skozi O, kot je izražena v formuli (151), si lahko jasno predstavljamo, če pomislimo na vse možne osi, ki potekajo skozi O, in za vsako od njih, začenši z O, uporabimo dolžino, ki je natančno enaka vztrajnostnemu momentu telesa glede na to os. (Faktor zmanjšanja, pri čemer ne upoštevamo dimenzij, postavimo enak ena.) Nasprotni končni točki vseh teh daljic bi tvorili ploskev, ki bi nam dala nazorno sliko odvisnosti velikosti vztrajnostnega momenta od smeri osi. Jasnost se ne bo bistveno zmanjšala, če za vsako os uporabimo kvadrat ali logaritem ali kakšno drugo preprosto funkcijo zadevnega vztrajnostnega momenta. Uporabili bomo recipročni kvadratni koren vztrajnostnega momenta, saj se potem zadevna ploskev izkaže za posebno preprosto. Tako za premico $\mathfrak{G}$ iz O uporabimo odsek $OP_1 = \mathfrak{r}$, katerega dolžina je $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$. Če označimo z $\mathfrak{x} = \mathfrak{r}\,\alpha$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{r}\,\beta$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{r}\,\gamma$ koordinate točke P_1, potem, če nadomestimo $\dfrac{1}{\mathfrak{r}^2}$ za K vrednost, sledi iz (151):

$$1 = a\,\mathfrak{x}^2 + b\,\mathfrak{y}^2 + c\,\mathfrak{z}^2 - 2\,d\mathfrak{y}\,\mathfrak{z} - 2\,e\mathfrak{x}\,\mathfrak{z} - 2\,f\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}q,. \tag{152}$$

Če potegnemo premice skozi O v vseh možnih smereh in za vsako od njih od O določimo razdaljo, katere dolžina je recipročni kvadratni koren vztrajnostnega momenta telesa glede na zadevno premico, potem koordinate drugih končnih točk vseh teh daljic ustrezajo enačbi (152). Enaka je torej enačba ploskve, ki jo tvorijo vse te končne točke. Imenujemo jo ***vztrajnostni elipsoid*** ali tudi osrednji elipsoid, ki pripada točki O obravnavanega telesa. Če izključimo primer, ko vse masne točke telesa ležijo na premici, potem K nikoli ne more postati nič, zato tudi r nikoli ne more postati neskončen. Ploskev, ki jo predstavlja enačba (152), se zato nikjer ne more raztezati v neskončnost. Ker je ta enačba druge stopnje, mora biti ploskev elipsoid (vključno s krogelno ploskvijo).

Ko izračunamo šest količin a, b, c, d, e, f, lahko sestavimo ta elipsoid in tako dobimo jasno sliko različnih vztrajnostnih momentov. Izbira koordinatnih osi je bila doslej povsem poljubna. Za koordinatne osi lahko vedno izberemo tri osi vztrajnostnega elipsoida (če gre za rotacijski elipsoid ali sferično ploskev, pa katere koli tri pravokotne osi). Te nove koordinatne osi označimo z OX_1, OY_1, OZ_1. Enačba vztrajnostnega elipsoida se nato, če so $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ koordinate točke elipsoida glede na nove koordinatne osi, reducira na

$$1 = a\,\mathfrak{x}_1^2 + b\,\mathfrak{y}_1^2 + c\,\mathfrak{z}_1^2. \tag{153}$$

Ker mora vse, kar je bilo prej dokazano na splošno, veljati tudi za nove koordinatne osi, potem so, če so x_1, y_1, z_1 koordinate poljubnega masnega delca m telesa glede na nove koordinatne osi:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum m\left(y_1^2 + z_1^2\right), & b_1 &= \sum m\left(x_1^2 + z_1^2\right), & c_1 &= \sum m\left(x_1^2 + y_1^2\right), \\ d_1 &= \sum m\,y_1\,z_1, & e_1 &= \sum m\,x_1\,z_1, & f_1 &= \sum m\,x_1\,y_1. \end{aligned}$$

Glede na (152) morajo biti zadnje tri vsote enake koeficientom yz, xz in xy v enačbi vztrajnostnega elipsoida za vsak koordinatni sistem, ki za naš sedanji koordinatni sistem odpadejo.

§ 59. Glavni vztrajnostni momenti. Vsako os vztrajnostnega elipsoida imenujemo ***glavno vztrajnostno os*** [Hauptträgheitsachse] telesa, ki pripada točki O, vztrajnostni moment, ki ji pripada, pa imenujemo ***glavni vztrajnostni moment*** [Hauptträgheitsmoment]. Ker so $1/\sqrt{a_1}$, $1\Big/\sqrt{b_1}$, $1/\sqrt{c_1}$ polosi vztrajnostnega elipsoida, ki ima, če njegove osi izberemo kot koordinatne osi, enačbo (153), so glavni vztrajnostni momenti recipročni kvadrati polosi vztrajnostnega elipsoida. Če je vztrajnostni elipsoid triosni elipsoid, potem so s točko O povezane le tri glavne osi vztrajnosti. Če gre za rotacijski elipsoid, potem za točko obstaja ***singularna glavna os vztrajnosti*** in vsaka pravokotnica nanjo je prav tako glavna vztrajnostna os. V tem primeru so tudi vsi vztrajnostni momenti glede na slednje osi enaki. To je očitno, če je telo simetrično glede na singularno glavno vztrajnostno os, na primer homogeno rotacijsko telo, napolnjeno z maso, pri čemer je točka O točka rotacijske osi. Vendar se to lahko pojavi tudi pri nesimetričnih telesih. Pri vsakem telesu, katerega vztrajnostni elipsoid ima tri osi, lahko z dodajanjem ene mase ali poljubnega števila mas na os srednjega vztrajnostnega momenta dosežemo, da je najmanjši enak temu momentu. Potem mora imeti nesimetrično telo enak vztrajnostni moment za vse osi, ki ležijo v isti ravnini.

Če je vztrajnostni elipsoid krogla, so vsi njeni polmeri glavne vztrajnostne osi in vsi vztrajnostni momenti glede na njih enaki. To se vedno zgodi pri pravilnih telesih (krogla, kocka), ki so enakomerno napolnjena z maso, če je točka O njihovo središče. Do neke mere pa se lahko to zgodi tudi pri precej nepravilnih telesih.

Če uvedemo tri glavne vztrajnostne osi kot koordinatne osi, potem v enačbi odpadejo vsi trije koeficienti d, e in f. Če nato zavrtimo y– in z–osi v ravnini yz, bo ne–ničelno vrednost dobil le d. Glavno vztrajnostno os, ki pripada O, lahko torej definiramo kot tisto, za katero, če jo izberemo za os x in O za izhodišče koordinat, z ne glede na lego osi y in z (seveda za pravokotne koordinate) velja

$$\sum m\,x\,y = \sum m\,x\,z = 0. \tag{154}$$

Če vsaki masni točki telesa, ki leži na eni strani katere koli ravnine, ustreza druga s popolnoma enako maso, ki je njena zrcalna slika glede na ravnino, potem to ravnino imenujemo ***ravnina simetrije telesa***. Če ima telo ravnino simetrije in izberemo, da je to ravnina yz, potem vsaki točki ustreza druga z enakimi m, y in z ter enakim, a nasprotno označenim x, tako da je

$$\sum m\,x\,y = \sum m\,x\,z = 0,$$

potem je vsaka premica, pravokotna na ravnino simetrije, glavna vztrajnostna os, ki pripada svojemu presečišču z ravnino simetrije. Podobno vidimo, da če ima telo dve ravnini simetrije, ki sta pravokotni druga na drugo, potem je njuna srednjica glede na vsako njuno točko glavna vztrajnostna os. Za vsako od teh točk lahko brez izračunavanja določimo glavne vztrajnostne osi, saj je vsaka os, speljana skozi točko v simetrični ravnini, ki je pravokotna na srednjo črto obeh, tudi glavna vztrajnostna os. Zato najprej izračunamo tri glavne vztrajnostne momente, ki pripadajo težišču, saj mora težišče prav tako ležati na srednjici obeh ravnin simetrije. Na podlagi tega lahko enostavno izračunamo vztrajnostni moment glede na katero koli drugo os, ki poteka skozi težišče, in nato še glede na katero koli vzporedno os.

Če telo nima simetrij, potem ne preostane drugega, kot da izračunamo šest koeficientov a, b, c, d, e, f na poljubnih koordinatnih oseh, po možnosti skozi težišče, in poiščemo osi elipsoida (152) z metodami analitične geometrije.

Za ugotavljanje vztrajnostnih momentov K_1, K_2 in K_3 telesa glede na tri koordinatne osi je pogosto priporočljivo najprej izračunati količine

$$L_1 = \sum m\,x^2 \quad L_2 = \sum m\,y^2 \quad L_3 = \sum m\,z^2\,. \tag{155}$$

Binetove, Mindingove vztrajnostne momente), ki imajo seveda podobne lastnosti kot običajni vztrajnostni momenti in jih lahko predstavimo s podobnimi elipsoidi[3] (Binetov, Darbouxov,Culmannov, Reyejev elipsoid). Nato je

$$K_1 = L_2 + L_3\,, \quad K_2 = L_1 + L_3\,, \quad K_3 = L_1 + L_2\,.$$

z tega sledi $K_1 + K_2 > K_3 > K_1 - K_2$. Dva vztrajnostna momenta glede na koordinatni osi imata lahko katero koli pozitivno vrednost, tretji pa mora ležati med njuno vsoto in razliko, ki jo dobimo tako, da odštejemo manjšo vrednost od večje. Ker to velja tudi za glavne vztrajnostne momente, ki so enaki recipročnim kvadratom polosi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vztrajnostnega elipsoida, mora biti tudi

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} > \frac{1}{\alpha_3^2} > \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2}\,.$$

Zato elipsoid, katerega polosi ne izpolnjujejo tega pogoja, ne more biti vztrajnostni elipsoid. Če velja za polos α_3 in če je α_1 manjša od preostalih dveh, mora ta pogoj veljati tudi za katero koli drugo polos.

Izključen primer, ko vse mase ležijo na premici, je singularen le, če točka O prav tako leži na tej premici. V tem primeru je vztrajnostni moment glede na to premico, ki je seveda glavna vztrajnostna os, enak nič. Tudi vsak vztrajnostni moment glede na katero koli pravokotnico na to premico, ki je hkrati glavna vztrajnostna os, je enak nič. Vztrajnostni elipsoid se tako spremeni v neskončen krožni valj.

Pri izračunu vztrajnostnih momentov ali izrazov (155) bomo trdno telo obravnavali kot prostornino, ki je neprekinjeno napolnjena z maso konstantne ali spremenljive gostote, ali kot ploskev ali linijo, ki je neprekinjeno prekrita z maso, podobno kot smo to storili v § 28 pri izračunu koordinat težišča. Tako bo treba zamenjati znak za vsoto z znakom za integral in pisati ρ, do, φ, df oziroma ρ, ds namesto m, pri čemer imajo oznake enak pomen kot v formulah (67), (68) in (69).

§ 60. Sile na ležaje Oglejmo si nekaj primerov uporabe izrekov o vztrajnostnih momentih.

Količine A_l, B_l, C_l, E_l, F_l, ki so določene z izrazi (146), predstavljajo vsote komponent sil glede na koordinatne osi in momentov glede na osi y in z, s katerimi telo, ki se vrti okoli stalne osi, deluje na svoje ležaje. Te enačbe najprej ponazarjajo samoumeven izrek, da so v mirovanju telesa te sile enake zunanjim silam, ki delujejo nanj. Vendar, ko se telo vrti, poleg zunanjih sil, ki delujejo nanj, na ležaje delujejo še dodatne sile, ki jih predstavljajo negativni členi na desni strani prvih petih enačb (146).

[3]Wied. Beibl. 7, 571, 1888; 8, 269, 1884.

Obravnavali bomo le poseben primer, ko na telo ne delujejo zunanje sile, tj. ko so $A_a = B_a = C_a = D_a = E_a = F_a = 0$. Telo se vrti enakomerno, zato je tudi $d\omega/dt = 0$, kar daje:

$$\left.\begin{array}{lll} A_l = 0, & B_l = \omega^2 \sum m\,y, & C_l = \omega^2 \sum m\,z, \\ E_l = -\omega^2 \sum m\,x\,z, & F_l = \omega^2 \sum m\,x\,y & \end{array}\right\} \tag{156}$$

Če so ξ, η, ζ koordinate težišča telesa in je M njegova skupna masa, potem sta $B_l = \omega^2 M\eta$ in $C_l = \omega^2 M\zeta$. To so komponente centrifugalne sile, ki bi jo ustvarila celotna masa telesa, če bi se vrtela skupaj z njim in bila vedno zgoščena v težišču telesa. Ta centrifugalna sila se zato prek osi prenaša na ležaje. Poleg tega na napravo, v kateri so ležaji, delujeta še vrtilna momenta E_l in F_l. Zlahka ugotovimo, da sta to momenta centrifugalnih sil posameznih masnih delcev telesa glede na osi y in z. Zaradi teh sil in momentov, ki nenehno spreminjajo svojo smer, se naprava, ki nosi os, trese, medtem ko se telo enakomerno vrti, kar imenujemo udarjanje osi [Schlagen der Axe]. Če os ne bi bila pritrjena na ležaje, bi se takoj premaknila iz svoje lege.

Če je Λ dolžina osi, tj. razdalja med obema ležajema, potem v smeri y na ležaj deluje sila $\frac{1}{2}B_l + \dfrac{F_l}{\Lambda}$, obrnjena proti pozitivni abscisni osi, in sila $\frac{1}{2}C_l - \dfrac{E_l}{\Lambda}$ v smeri z; na drugi ležaj pa ustrezni komponenti sil $\frac{1}{2}B_l - \dfrac{F_l}{\Lambda}$ in $\frac{1}{2}C_l + \dfrac{E_l}{\Lambda}$. Ti sili dajeta vsoti komponent B_l in C_l ter momentov E_l in F_l.

Le če izrazi (156) izginejo, pri odsotnosti zunanjih sil zaradi vrtenja na nobenega od ležajev ne deluje nobena sila, tako da os ne utripa, in bi tudi v primeru odstranitve ležajev ostala nespremenjena kot os vrtenja telesa. Takrat to os imenujemo os prostega zasuka. B_l in C_l odpadeta, ko os poteka skozi težišče. Odpasti pa morata tudi E_l in F_l ter $\sum m, x, y$ in $\sum m, x, z$, tj. os mora biti ena izmed glavnih vztrajnostnih osi, ki pripada težišču. V tem primeru je os prosta os vrtenja.

Formule (146) kažejo, da so, tudi če na telo delujejo zunanje sile, vsote komponent glede na koordinatne osi in momenti glede na y in z os enaki za sile, ki delujejo na ležaje, in zunanje sile, ki delujejo na telo. Zaradi rotacije, ne glede na to, ali je ta enakomerna ali pospešena, se na ležajih ne pojavijo nobene dodatne sile.

§ 61. Obrnljivo nihalo. [4] Če natančno poznamo dolžino l in nihajni čas τ enostavnega nihala, lahko s pomočjo njiju izračunamo izjemno pomembno količino g (težnostni pospešek), ki jo je sicer težko določiti neposredno, in sicer po formuli:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{157}$$

Na žalost je enostavno nihalo težko izdelati zelo natančno. Sestavljeno (fizikalno) nihalo je sicer možno preprosto izdelati, vendar je težnostni pospešek mogoče izračunati s pomočjo formule za nihajni čas le, če natančno poznamo vztrajnostni moment, težišče itd., kar pa je težko izračunati z zadostno natančnostjo. Zato je zelo dobrodošlo, da lahko s pomočjo nihanja sestavljenega nihala okoli dveh vzporednih osi enostavno določimo dolžino enostavnega nihala, ki bi imelo enako nihajno dobo kot sestavljeno

[4] Katerjevo nihalo. (OP)

nihalo. Če poleg tega natančno izmerimo tudi nihajni čas, lahko iz te dolžine izračunamo težnostni pospešek.

Da bi izpeljali potrebne izreke, si zamislimo katero koli trdno telo z maso M, ki ima vztrajnostni moment L glede na os, ki poteka skozi njegovo težišče. Naj bo:

$$\lambda = \sqrt{L/M}$$

kjer λ predstavlja vztrajnostni polmer glede na to os. Skozi telo potegnemo vzporedno črto s to osjo, ki je oddaljena za σ od težišča, in pustimo telo, da niha okoli slednje osi pod vplivom težnosti. Njegov vztrajnostni moment glede na to os je:

$$L + M\sigma^2 = M\left(\lambda^2 + \sigma^2\right),$$

zato je nihajni čas:

$$\pi\sqrt{\frac{L + M\sigma^2}{M\,g\,\sigma}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{\lambda^2}{\sigma} + \sigma} \tag{158}$$

Ta izraz velja za vse vzporedne osi na enaki razdalji od težišča.

Če v tem izrazu spremenimo samo σ, dobimo najmanjši nihajni čas, ko je $\sigma = \lambda$, ki je enak $\pi\sqrt{2\lambda/g}$. Nihajni čas je torej zelo velik, kadar je os zelo oddaljena od težišča, in se zmanjšuje, dokler oddaljenost osi od težišča ne postane enaka vztrajnostnemu polmeru, ki pripada vzporedni osi skozi težišče. Če os približamo še bolj, se nihajni čas znova povečuje in postane neskončen, ko se os neskončno približa težišču.

Zdaj pa se vprašajmo, kako velik mora biti σ, da bo nihajni čas enak nihajnemu času enostavnega nihala dolžine l. Če je l manjši od 2λ, potem je nihajni čas neskončen. Če je l enak 2λ, potem se enakost nihajnih časov pojavi le pri najmanjšem nihajnem času sestavljenega nihala, torej pri $\sigma = \lambda$. Če je $l > 2\lambda$, obstajata dve vrednosti σ, σ_1 in σ_2, pri katerih sta nihajna časa enaka. Rešitev kvadratne enačbe, ki izhaja iz izenačenja dveh nihajnih časov, torej dveh izrazov, je:

$$\sigma^2 - l\,\sigma + \lambda^2 = 0\,,$$

ki ima v tem primeru dve različni rešitvi. Iz lastnosti korenov kvadratne enačbe sledi, da je vsota $\sigma_1 + \sigma_2$ dveh razdalj osi od težišča, pri katerih je nihajni čas enak nihajnemu času enostavnega nihala, enaka dolžini l enostavnega nihala. Vztrajnostni polmer λ, ki pripada vzporedni osi skozi težišče, je geometrijska sredina obeh vrednosti σ.

Poskus poteka tako, da izdelamo nihalo, ki je čim bolj simetrično glede na ravnino, in nanj pritrdimo dva rezalna robova na nasprotnih straneh težišča, tako da sta obrnjena proti težišču. Robova lahko premikamo, da ostaneta čim bolj vzporedna in v ravnini simetrije. Nato ju nastavimo tako, da ima nihalo popolnoma enak nihajni čas na vsakem od robov, čeprav nista enako oddaljena od težišča. Vsota razdalj obeh robov od težišča je dolžina enostavnega nihala, ki bi imelo enak nihajni čas. Z natančnimi meritvami razdalj in nihajnih časov sestavljenega nihala lahko posredno določimo dolžino l enostavnega nihala z enakim nihajnim časom τ in nato iz tega izračunamo vrednost g. Popravki, ki so potrebni zaradi zračnega upora, majhnosti nihanj in nepopolnosti pogojev, so preobsežni, da bi jih tukaj podrobneje obravnavali, vendar ne bi bili težko izvedljivi.

§ 62. Središče nihanja. Ob tem dodajmo še nekaj pripomb, ki jih Maxwell podaja v svoji mehaniki. Če telo, ki se vrti okoli osi, ostaja togo in nanj delujejo enake sile, bi se, kot smo videli, pod enakimi začetnimi pogoji gibalo enako, kot če bi bila masa vseh preostalih masnih delcev tega telesa enaka nič in bi bila le masa enega samega masnega delca enaka celotni masi M telesa, ki je na razdalji od osi, enaki vztrajnostnemu polmeru λ. Lahko rečemo, da lahko vztrajnostni moment telesa glede na to os nadomestimo z vztrajnostnim momentom te posamezne mase. Nadomestimo jo lahko tudi z dvema masama μ_1 in μ_2, od katerih je ena v osi, druga pa na določeni razdalji od nje in ki sta skupaj enaki celotni masi telesa. Ker imamo zdaj na voljo še eno količino, lahko ta dva masna delca izberemo tako, da njuno skupno težišče sovpada s težiščem telesa. S tem dosežemo dvojno prednost.

Prvič, rezultanta težnostnih sil, ki delujejo na ta dva masna delca, je prav tako enaka težnostnim silam, ki delujejo na prvotno dano telo.

Drugič, v skladu z izrekom iz § 57 o vztrajnostnem momentu glede na vzporedne osi je tudi vztrajnostni moment obeh mas enak vztrajnostnemu momentu telesa glede na vsako od prvotno danih vzporednih osi.

Da bi ugotovili velikost in lego teh dveh mas, potegnemo pravokotnico SO od težišča S telesa do prvotno dane osi zasuka σ. V O mislimo na maso μ_1, na premici, speljani od O do S, v točki P za S drugo maso μ_2 na razdalji x od S; dobimo

$$\mu_1 + \mu_2 = M$$

ker je skupna masa,

$$\mu_1 \sigma^2 + \mu_2 x^2 = L = \lambda^2 M,$$

ker je vztrajnostni moment glede na os, ki poteka skozi težišče, in

$$\mu_1 \sigma = \mu_2 x$$

ker mora biti težišče enako za telo in za sistem, sestavljen iz obeh mas.

Če vrednost μ_2 iz prve enačbe vstavimo v drugo in tretjo ter nato vrednost μ_1 iz tretje enačbe v drugo, potem

$$x = \lambda^2 \big/ \sigma$$

ustreza

$$\mu_1 = \frac{M\lambda^2}{\lambda^2 + \sigma^2}, \quad \mu_2 = \frac{M\lambda^2}{\lambda^2 + \sigma^2}.$$

Ker ima sistem dveh togo povezanih mas μ_1 in μ_2 enak vztrajnostni moment glede na prvotno določeno os kot dano telo in tudi težnost nanj deluje enako, mora imeti enako periodo nihanja kot sestavljeno nihalo, ki pod vplivom težnosti niha okoli te osi, ki jo obravnavamo kot vodoravno. Ker poleg tega μ_1 leži v sami osi, je to perioda nihanja preprostega nihala, katerega masa je v P. Tako telo niha okoli zadevne osi popolnoma enako kot preprosto nihalo, katerega masa je v P, zato P imenujemo ***središče nihanja sestavljenega nihala***. Ker ima to preprosto nihalo dolžino

$$\sigma + x = \sigma + \lambda^2 \big/ \sigma$$

je to dolžina, prej označena z l, tistega preprostega nihala, ki ima enako periodo nihanja. Zdaj pa ima tudi togo povezan sistem dveh mas μ_1 in μ_2 glede na vsako vzporedno os enak vztrajnostni moment kot telo. Če torej zdaj pustimo oba sistema nihati okoli vzporedne osi, ki poteka skozi točko P, ki je bila prej središče nihanja, tj. skozi maso μ_2, pod vplivom težnosti, imata oba sistema spet enako periodo nihanja med seboj. Sistem dveh mas μ_1 in μ_2 pa je potem spet preprosto nihalo dolžine $l = \sigma + \frac{\lambda^2}{\sigma}$. Zato je zdaj O središče nihanja telesa, ki ima spet enako periodo nihanja kot prej, kjer je bila O središče vrtenja, P pa središče nihanja, in brez računanja vidimo, da ima telo enako periodo nihanja okoli obeh osi, kot tudi preprosto nihalo, katerega dolžina je razdalja med osema.

Preko ravninske deske potisnimo pletilko pravokotno na njeno ravnino, l naj bo razdalja središča nihanja od pletilke, ko je ta vodoravna, deska pa niha okoli nje kot nihalo z osjo. Na pletilko pritrdimo nit dolžine l, na koncu katere je majhna kroglica, ki se mora dotakniti plošče. S prsti primemo oba konca pletilke in jo poljubno premikamo gor in dol, sem in tja, vendar tako, da ostane vedno vodoravna, deska pa vedno v isti ravnini. Gibanje kroglice je neodvisno od absolutne vrednosti njene mase; če pa je ta ustrezno izbrana, sta vztrajnostni moment in učinek težnosti enaka za desko in majhno kroglico, zato se gibljeta na popolnoma enak način. Zato se kroglica vedno dotakne plošče v isti točki. Vodoravna premica, speljana skozi njeno središče, neprekinjeno poteka skozi središče nihanja plošče.

§ 63. Točka trka. Vrnímo se k prvotno danemu telesu in dvema togima masama μ_1 in μ_2. Telo in obe masi naj se vrtijo z enako kotno hitrostjo okoli prvotne osi. Vpliv težnosti lahko pri tem, če želimo, zanemarimo. Skozi maso μ_2 je položena druga os brez mase, vzporedna s prvotno osjo, ki je togo povezana z obema masama. Zamislimo si, da se ta druga os nenadoma ustavi, istočasno pa se odstranijo ležaji prvotne osi. Zaradi tega se bo masa μ_2 nenadoma ustavila, in ker je μ_1 že mirovala, bo sistem obeh mas obmiroval, ne da bi bil kakršen koli vpliv na prvo maso. Če pa bi po drugi strani nenadoma ustavili katero koli drugo os, ki je trdno povezana z obema masama in ne poteka skozi trenutno smer gibanja mase μ_2, bi sistem obmiroval le, če bi hkrati ustavili tudi prvotno os, ki bi tako utrpela sunek. Enako seveda velja za telo, saj je njegov vztrajnostni moment glede na vse te osi enak. Če telo nenadoma ustavimo s silo, katere smer poteka po premici, speljani skozi središče nihanja in vzporedno z osjo vrtenja ter pravokotno na ravnino, ki poteka skozi to os in os vrtenja, potem prvotna os vrtenja ne bo utrpela sunka.

Če je os vrtenja tudi glavna vztrajnostna os glede na točko, kjer seka ravnino, ki je nanjo pravokotna in vsebuje smer sile, potem ta os ne bo čutila nobenega vrtilnega momenta, zato nobena od podpor ne bo čutila trka. Točka na vznožju pravokotnice, ki je postavljena na smer sile, se v tem primeru imenuje središče trka. Ne samo, ko os, ki poteka vzporedno s prvotno osjo vrtenja, ampak tudi, ko se ta točka med vrtenjem nenadoma ustavi, nobena od podpor prvotne osi vrtenja ne bo čutila trka.

§ 64. Redukcija splošnega gibanja trdnega telesa na gibanje glede na nepremično točko. Kinetična energija gibanja glede na težišče. Če je ena od točk trdnega telesa nepremična, se telo še vedno lahko poljubno vrti okoli te točke v vseh smereh. Da bi našli zakonitosti tega zasuka, moramo poleg sil, ki sicer delujejo na trdno telo, upoštevati še silo, ki deluje na to nepremično točko in katere velikost ter smer moramo vedno določiti iz treh enačb (134), da ta točka ostane v mirovanju. Ta sila je natanko tista, s katero naprava, ki drži to točko, deluje na telo. Če to nepremično točko izberemo za koordinatno izhodišče, so momenti te sile glede na koordinatne osi enaki nič. Na ta način ta sila ne nastopa v treh enačbah (136), ki določajo gibanje telesa. Če označimo koordinate poljubne točke telesa glede na ta koordinatni sistem z x', y', z' in komponente skupne zunanje sile, ki deluje nanj, z X, Y, Z v smereh koordinatnih osi, potem dobimo, podobno kot pri enačbi (136), naslednjo enačbo:

$$\sum m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = \sum (y'Z - z'Y) \tag{159}$$

kot eno od treh enačb gibanja telesa pri zasuku okoli nepremične točke.

Videli smo, da je gibanje težišča pri kateremkoli sistemu določeno z enačbami (66) in da vedno poteka tako, kot da bi bila v težišču združena vsa masa telesa in bi nanjo delovale vse sile, ki delujejo na telo. Gibanje težišča je tako reducirano na enostavnejši, že obravnavani problem gibanja ene same materialne točke pod vplivom določenih sil. To torej velja tudi za poljubno togo telo. Zdaj, ko zunanjih sil ne označujemo z nemškimi, temveč z latinskimi črkami, se enačbe za takšno telo spremenijo v:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z, \tag{160}$$

kjer je M, tako kot v enačbah (66), skupna masa telesa.

Dokazali bomo, da vrtenje popolnoma prostega trdnega telesa okoli težišča vedno poteka natanko tako, kot če bi bilo težišče vpeto in bi na telo delovale enake sile. To imenujemo izrek o redukciji prostega zasuka trdnega telesa na vrtenje okoli nepremične točke. Problem gibanja popolnoma prostega trdnega telesa pod vplivom poljubnih sil bo torej rešen, ko bomo rešili problem njegovega zasuka okoli nepremične točke pod vplivom poljubnih sil. Slednji problem bomo podrobno obravnavali v drugem delu, tukaj pa podajamo dokaz izreka o redukciji prostega vrtenja trdnega telesa na vrtenju okoli nepremične točke. Momentna enačba (66) za popolnoma prosto telo v naših sedanjih oznakah je:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum (yZ - zY), \tag{161}$$

ki jo ponovno obravnavamo kot predstavnico dveh podobnih enačb za drugi dve koordinatni osi. Naj bodo ξ, η, ζ koordinate težišča S telesa. Zdaj uvedemo drugi gibljivi koordinatni sistem, katerega izhodišče je težišče S telesa in katerega osi so vedno vzporedne osjem prvega koordinatnega sistema. Naj bodo x', y', z' koordinate te točke telesa glede na drugi koordinatni sistem, ki ima koordinate x, y, z glede na prvi koordinatni sistem. Potem velja:

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad z = z' + \zeta. \tag{162}$$

Ker je težišče v vsakem trenutku izhodišče novega koordinatnega sistema, je vedno:

$$\sum mx' = \sum my' = \sum mz' = 0, \tag{163}$$

iz česar z odvajanjem po času sledi:

$$\sum m\frac{dx'}{dt} = 0, \quad \sum m\frac{d^2x'}{dt^2} =, \quad \text{itd.} \tag{164}$$

Z upoštevanjem vrednosti (162) sledi:

$$\sum my\frac{d^2z}{dt^2} = \sum m\left(y' + \eta\right)\left(\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) =$$
$$= \sum my'\frac{dz'}{dt} + \eta\sum m\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\sum my' + \eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}M.$$

Drugi in tretji člen v zadnji vrstici odpadeta zaradi (163) in (164), zadnji člen pa je enak $\eta\sum Z$. Zato sledi:

$$\sum my\frac{d^2z}{dt^2} = \sum my'\frac{d^2z'}{dt^2} + \eta\sum Z$$

in enako:

$$\sum mz\frac{d^2y}{dt^2} = \sum mz'\frac{d^2y'}{dt^2} + \zeta\sum Y.$$

Nadalje, ker velja:

$$\sum\left(yZ - zY\right) = \sum\left(y'Z - z'Y\right) + \eta\sum Z - \zeta\sum Y,$$

izhaja iz (161):

$$\sum m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = \sum\left(y'Z - z'Y\right) + \eta\sum Z - \zeta\sum Y.$$

Ta enačba je enaka enačbi (159). Slednje bi določilo gibanje istega telesa glede na tri nerotirajoče koordinatne osi, ki vedno potekajo skozi težišče, če bi na težišče poleg drugih sil, ki delujejo na telo, delovala še sila, ki bi ga ohranjala v mirovanju. Tako se zasuk okoli težišča zgodi natanko tako, kot da bi težišče ostalo na mestu, brez spremembe v silah, ki delujejo na telo.

Preden se lotimo zasuka trdnega telesa okoli nepremične točke, se moramo seznaniti s številnimi pomembnimi splošnimi načeli.

Najprej bomo na kratko dokazali splošno trditev, ki ne velja samo za trdna telesa. Naj bo danih n materialnih točk, ki so lahko togo povezane ali ne. Naj bodo ξ, η, ζ koordinate težišča sistema v času t glede na kateri koli fiksni koordinatni sistem, x, y, z koordinate materialne točke v istem času glede na isti koordinatni sistem, x', y', z' pa koordinate iste materialne točke glede na sistem koordinatnih osi, ki so vzporedne prvotnim osjem, vendar se v prostoru gibljejo tako, da vedno potekajo skozi težišče. Skupna kinetična energija sistema je podana z izrazom:

$$T = \sum\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

Izraz:

$$T' = \sum\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

lahko imenujemo ***kinetična energija relativnega gibanja*** materialnih točk glede na težišče.

Če v izrazu za T vstavimo vrednosti (162) in upoštevamo, da je

$$\sum m \frac{d\xi}{dt} \frac{dx'}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \sum m \frac{dx'}{dt},$$

kar odpade glede na (164), sledi:

$$T = T' + \sum \frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right].$$

Pri tem je zadnji člen kinetična energija, ki bi jo povzročila celotna masa vseh točk, če bi bila združena v težišču in bi se gibala z njim. To imenujemo kinetična energija ***premičnega gibanja*** [fortschreitenden Bewegung] težišča. Tako je skupna kinetična energija vseh točk sistema enaka vsoti kinetične energije njihovega gibanja glede na težišče in kinetične energije premičnega gibanja težišča.

VI

Primerjava načel, dobljenih z variacijo stanja ob določenem času

§ 65. Analitični dokaz posebnega primera Gaussovega načela. Sedaj se posvetimo izpeljavi novega načela mehanike. Naj bo dan poljuben holonomni sistem, katerega pogoji so določeni izključno z enačbami, ki jih lahko zapišemo v obliki

$$\varphi_l\,(t, x_1, y_1, \ldots, z_n) = 0\,, \tag{165}$$

kar je identično s (127). V vseh primerih bomo uporabljali oznake, ki smo jih uporabili v § 34. Gibanje, ki ga sistem pri določenem začetnem stanju opravi pod vplivom sil, ki delujejo nanj in pod danimi pogoji, imenujemo njegovo ***dejansko gibanje***. Pri tem so koordinate x_h, y_h, z_h h–te materialne točke funkcije $\chi\,(t)$, $\psi\,(t)$, $\omega\,(t)$ časa. Že v § 43 smo ugotovili, da je dejansko gibanje določeno z enačbami (129).

Zdaj pa koordinate x_h, y_h, z_h vsake materialne točke izberemo tako, da so enake nekim drugim funkcijam časa $\chi_1\,(t)$,$\psi_1\,(t)$, $\omega_1\,(t)$. Tako določeno gibanje sistema imenujemo gibanje, ***variirano na Gaussov način*** [Gauss' Manier]. Te druge funkcije časa je treba izbrati tako, da se ob določenem času, ki ga lahko poljubno izberemo, ne spremenijo niti vrednosti koordinat niti njihovi prvi odvodi po času, ki jih označimo s piko. Vrednosti spremenljivk $\ddot{x}_h$, $\ddot{y}_h$, $\ddot{z}_h$, ki veljajo v tem času, pa morajo imeti neskončno majhna povečanja $\delta\ddot{x}_h$, $\delta\ddot{y}_h$, $\delta\ddot{z}_h$ za vsako materialno točko, ki so sicer poljubna; zanje velja le pogoj, da mora gibanje spremenljivke izpolnjevati tudi pogoje sistema, tj. tudi zamenjava x_h, y_h, z_h s funkcijami $\chi_1\,(t)$, $\psi_1\,(t)$, $\omega_1\,(t)$ mora izpolnjevati pogoje sistema, ki imajo obliko (165). Vrednosti različnih spremenljivk pri prehodu iz dejanskega gibanja [wirklichen] v gibanje, variirano na Gaussov način, ponovno označimo s predpono δ. Zdaj pa dokažimo, da za prehod iz dejanskega gibanja v gibanje, variirano na Gaussov način, velja

$$\sum_{h=1}^{n} \left[(m_h\ddot{x}_h - X_h)\,\delta\ddot{x}_h + (m_h\ddot{y}_h - Y_h)\,\delta\ddot{y}_h + (m_h\ddot{z}_h - X_h)\,\delta\ddot{z}_h\right] = 0. \tag{166}$$

Seveda to velja le za obravnavani trenutek, za katerega se koordinate in komponente hitrosti ne spremenijo, torej je

$$\delta x_h = \delta y_h = \delta z_h = \delta\dot{x}_h = \delta\dot{y}_h = \delta\dot{z}_h = 0 \quad h = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{167}$$

Funkcije $\chi_1\,(t)$, $\psi_1\,(t)$, $\omega_1\,(t)$ lahko vedno izberemo tako, da izpolnjujejo to enačbo v poljubno izbranem trenutku, ne izpolnjujejo pa je za končno časovno obdobje. V slednjem primeru bi se morali tudi $\delta\ddot{x}_h$, $\delta\ddot{y}_h$, $\delta\ddot{z}_h$ ves čas izničiti. Enačbo dokažemo na naslednji način: za dejansko gibanje v času dt sledi iz enačbe (165)

$$\frac{\partial\varphi_l}{\partial t}+\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_h}\dot{x}_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial y_h}\dot{y}_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_h}\dot{z}_h\right)=0\,.$$

S ponovnim odvajanjem po t dobimo,

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_h}\ddot{x}_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial y_h}\ddot{y}_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_h}\ddot{z}_h\right)=\Phi\,, \tag{168}$$

pri čemer Φ vsebuje le čas t, ter koordinate in njihove prve odvode glede na čas. Ker pa se pri prehodu od dejanskega gibanja k gibanju, ki je variirano na Gaussov način, ne spremenijo niti koordinate niti njihovi prvi odvodi po času, se pri tem prehodu ne spremenijo niti Φ, niti $\partial\varphi_l/\partial x_h$, $\partial\varphi_l/\partial y_h$, $\partial\varphi_l/\partial z_h$. Iz enačbe torej izhaja

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_h}\delta\ddot{x}_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial y_h}\delta\ddot{y}_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_h}\delta\ddot{z}_h\right)=0\,. \tag{169}$$

Dejansko gibanje poteka v skladu z enačbo (129). Če enačbo (129) pomnožimo s $\delta\ddot{x}_h$, podobni enačbi za osi y in z pa s $\delta\ddot{y}_h$ in $\delta\ddot{z}_h$ ter seštejemo vse tako dobljene enačbe za vse vrednosti h, potem z upoštevanjem (169) neposredno sledi enačba (166). Če zdaj tvorimo izraz

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{m_h}\left[(m_h\ddot{x}_h-X_h)^2+(m_h\ddot{y}_h-Y_h)^2+(m_h\ddot{z}_h-X_h)^2\right], \tag{170}$$

se v njem pri prehodu od dejanskega gibanja k gibanju, ki je variirano na Gaussov način, spremenijo le spremenljivke $\delta\ddot{x}_h$, $\delta\ddot{y}_h$ in $\delta\ddot{z}_h$. Tako je prva variacija izraza podana z levo stranjo enačbe (166). Ta enačba pove, da prva variacija izraza pri prehodu iz dejanskega gibanja v gibanje, variirano na Gaussov način odpade v času t, in ker je druga variacija tega izraza v vsakem primeru pozitivna, je ta izraz minimum. Poveča pa se za vsak čas t, če v tem času preidemo od dejanskega gibanja k kateremu koli gibanju, variiranemu na Gaussov način.

Če pogoji vključujejo ne-holonomskih enačbe oblike (78), potem mora, da bi bil izraz (170) minimum, pri prehodu iz dejanskega v variirano gibanje vsakemu pogoju te oblike, ustrezati tudi variacija gibanja. Tako mora biti tudi za variirano gibanje

$$\tau+\sum_{h=1}^{n}(\xi_h\dot{x}_h+\eta_h\dot{y}_h+\zeta_h\dot{z}_h)=0\,.$$

Če to odvajamo po času dobimo

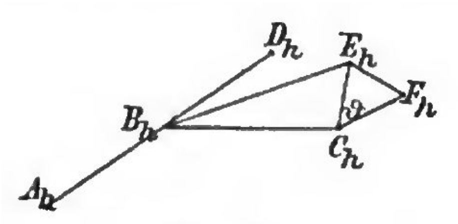
$$\sum_{h=1}^{n}(\xi_h\ddot{x}_h+\eta_h\ddot{y}_h+\zeta_h\ddot{z}_h)=\Phi\,,$$

kjer je Φ kot funkcija spremenljivk, katerih variacije se izničijo. Z variacijo zadnje enačbe tako dobimo

$$\sum_{h=1}^{n}(\xi_h\,\delta\ddot{x}_h+\eta_h\,\delta\ddot{y}_h+\zeta_h\,\delta\ddot{z}_h)=0\,. \tag{171}$$

To, kar je navedeno v tem paragrafu, je bistvo ***Gaussovega načela najmanjše prisile (ali siljenja)*** [Gauss'sehen Princips des kleinsten Zwanges]. Dodatno ga bomo ponazorili še z geometrijskimi konstrukcijami in s tem vključili tudi doslej izključen primer, da imajo nekateri pogoji obliko neenačb.

§ 66 Pojem prisile Predpostavimo lego vseh n materialnih točk v časih t, $t+dt$ in $t+2dt$. Naj bo h–ta materialna točka, katere masa je m_h, v teh časih v točkah A_h, B_h in C_h (slika 16).



Slika 16

Nadalje, naj bo D_h točka prostora, kamor bi ta materialna točka prispela v času $t+2dt$, če bi bila v času t v A_h in v času $t+dt$ v B_h, vendar brez vpliva kakršnih koli sil. Naj bo E_h točka prostora, kamor bi prispela v času $t+2dt$, če bi bila v času t v A_h in v času $t+dt$ v B_h, vendar pod vplivom neposrednih sil, katerih rezultanta ima komponente X_h, Y_h in Z_h v koordinatnih smereh.

Razdalja B_hD_h je enaka razdalji A_hB_h in obe ležita na isti premici. Daljica B_hE_h predstavlja pospešek, pomnožen z dt^2, ki bi ga imela materialna točka zaradi neposrednih sil med časoma t in $t+dt$, kar smo v § 34 imenovali neposredni pospešek. Projekcije razdalje B_hE_h na koordinatne osi so torej v skladu z (84)

$$\frac{1}{m_h}X_h dt^2\,, \quad \frac{1}{m_h}Y_h dt^2\,, \quad \frac{1}{m_h}Z_h dt^2\,.$$

Razdalja B_hC_h predstavlja dejanski pospešek, pomnožen z dt^2, ki ga povzročajo vse sile (neposredne in vezne skupaj).

V skladu z (85) so komponente sil vezi, ki delujejo na h–to točko, označene z $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$ in $\mathfrak{Z}_h$. Tako so projekcije daljice B_hC_h, deljene z dt^2, na koordinatne osi

$$\frac{1}{m_h}\left(X_h+\mathfrak{X}_h\right)=\frac{d^2x_h}{dt^2}=\ddot{x}_h\,, \quad \frac{1}{m_h}\left(Y_h+\mathfrak{Y}_h\right)=\ddot{y}_h\,, \quad \frac{1}{m_h}\left(Z_h+\mathfrak{Z}_h\right)=\ddot{z}_h\,.$$

Če povežemo točki E_h in C_h z daljico E_hC_h, ki predstavlja pospešek, pomnožen z dt^2, ki bi ga materialna točka imela samo zaradi sil vezi, so projekcije E_hC_h na koordinatne osi

$$\frac{1}{m_h}\mathfrak{x}_h\,, \quad \frac{1}{m_h}\mathfrak{y}_h\,, \quad \frac{1}{m_h}\mathfrak{z}_h\,.$$

Nasprotno usmerjena daljica C_hE_h, deljena z dt^2, je tisto, kar smo v § 34 imenovali izgubljeni pospešek. Ta količina predstavlja razliko med pospeškom, ki bi ga povzročile neposredne sile brez omejitev, in dejanskim pospeškom. Projekcije C_hE_h na koordinatne osi, deljene z dt^2, so v skladu z (85)

$$-\frac{\mathfrak{x}_h}{m_h}\,, \quad -\frac{\mathfrak{y}_h}{m_h}\,, \quad -\frac{\mathfrak{z}_h}{m_h}\,.$$

V skladu z (172) je izraz (170), za katerega smo dokazali, da je minimum za dejansko gibanje, enak

$$\frac{m_h(C_hE_h)^2}{dt^4}$$

kar pomeni, da je enak vsoti kvadratov izgubljenih pospeškov vseh materialnih točk, pomnoženih z maso, ali vsoti kvadratov vseh izgubljenih sil, deljenih z maso.

Če ne bi bilo sil vezi, bi materialna točka m_h v času $t+2dt$ pod vplivom neposrednih sil prispela v točko E_h. Zaradi sil vezi, določenih s pogoji sistema, pa je namesto tega prispela do točke C_h. Razdalja E_hC_h tako predstavlja odmik od gibanja, ki bi ga določale le neposredne sile, zaradi vpliva sil vezi.

Kot je znano, se pri metodi najmanjših kvadratov upošteva kvadrat odstopanja opazovane vrednosti od prave vrednosti, pomnožen z utežjo opazovanja. Na podoben način tukaj kvadrat odklona E_hC_h, pomnožen z maso materialne točke in deljen s dt^4 (ki ga obravnavamo kot konstanto), predstavlja mero motnje gibanja zaradi sil vezi, imenovano tudi ***mera prisile***. Vsota teh količin za vse točke sistema je ***prisila celotnega sistema*** v danem trenutku.

Izrek iz prejšnjega paragrafa pravi, da je prisila celotnega sistema pri dejanskem gibanju v vsakem trenutku minimalna, kar pomeni, da se pri prehodu iz dejanskega gibanja k poljubnemu gibanju, variiranemu na Gaussov način, prisila poveča.

Prisila sistema pri variiranem gibanju je izraz, ki ga dobimo iz (173), če točko C_h nadomestimo s točko F_h, kjer se nahaja točka pri variiranem gibanju v času $t+2dt$. Ta prisila je

$$\frac{1}{dt^4}\sum_{h=1}^{n} m_h(F_hE_h)^2 \tag{174}$$

Minimalna vrednost izraza (173) pomeni naslednje: v časih t in $t+dt$ so lege vseh točk podane. Na podlagi tega lahko izračunamo njihove lege v času $t+2dt$, če bi nanje delovale le neposredne sile brez omejitvenih pogojev. Točka m_h bi bila ob času $t+2dt$ v E_h, a dejanska lega točk, ki bodo izpolnjevali vezne pogoje in bodo ob času $t+2dt$, bodo takšni, da bo $\sum\limits_{h=1}^{n} m_h(E_hF_h)^2$ minimalna.

Če neposrednih sil ni, potem nobena od točk ne bo imela pospeška in točki D_h in E_h bosta sovpadali. E_hC_h bo enak celotnemu pospešku, in izraz (173) bo predstavljal vsoto kvadratov pospeškov vseh točk, pomnoženih z masami. Gibanje, za katero je ta vsota minimalna, imenujemo ***najravnejše gibanje***. Ko neposredne sile ne delujejo, se gibanje v skladu z načelom najmanjše prisile vedno zgodi zaradi omejitvenih pogojev sistema.

§ 67. Geometrijski dokaz načela najmanjše prisile. Zdaj bomo geometrijsko dokazali izrek, za katerega smo doslej v § 65 podali le analitični dokaz. S tem se bomo osvobodili omejitve, ki smo jo uvedli pri prejšnjem dokazu, in sicer da pogoji ne vsebujejo neenačb.

Najprej bomo obravnavali potek dejanskega gibanja in gibanja naših materialnih točk od časa t do časa $t+2dt$, ki smo ga prej imenovali variirano po Gaussovem načinu, zdaj pa ga bomo na kratko imenovali variirano gibanje. Pri slednjem morajo vse materialne točke ob času t in ob času $t+dt$ zavzeti enako lego kot pri dejanskem gibanju. S tem so pogoji (167) izraženi, da se ne smejo spremeniti niti koordinate niti njihovi prvi odvodi po času.

V času $t+2dt$ pa mora biti točka h pri dejanskem gibanju v točki C_h, pri variiranem gibanju pa mora imeti neko drugo lego v točki F_h. Vse te nove lege morajo biti skladne s pogoji sistema, ki veljajo ob času $t+2dt$, ti pa so izraženi z enačbami ali neenačbami.

Če s δa_h, δb_h in δc_h označimo projekcije premika točke C_hF_h materialne točke m_h na koordinatne osi, mora vsaka holonomna pogojna enačba oblike (165) namesto zveze (86) ustrezati enačbi ali neenačbi:

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_h}\delta a_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial y_h}\delta b_h+\frac{\partial\varphi_l}{\partial z_h}\delta c_h\right)\leq 0\,. \tag{175}$$

Vsaki neholonomski pogojni enačbi ali neenačbi, ki ima podobno obliko, pa ustreza enačba ali neenačba:

$$\sum_{h=1}^{n}(\xi_h\,\delta a_h+\eta_h\,\delta b_h+\zeta_h\,\delta c_h)\leq 0. \tag{176}$$

V teh dveh zvezah je dejansko potrebno zamenjati t z $t+2dt$, s čimer pa se obravnavana zveza le neskončno malo spremeni.

Po naših ugotovitvah je torej premik sistema iz dejanske lege v času $t+2dt$ v variirano lego v istem času virtualni premik, ki ustreza času $t+2dt$. Zvezi (175) in (176) se od zvez (86) in (88) razlikujeta le v tem, da namesto δx_h, δy_h, δz_h vsebujeta δa_h, δb_h, δc_h. Zato mora biti izpolnjena tudi zveza, ki vedno velja. Namesto spremenljivk δx_h, δy_h, δz_h, ki nastopajo v tej zvezi, je potrebno ponovno uporabiti projekcije δa_h, δb_h, δc_h premika materialne točke m_h na koordinatne smeri, ki jih označimo kot C_hF_h. Ta zveza se glasi:

$$\sum_{h=1}^{n}(\mathfrak{x}_h\,\delta a_h+\mathfrak{y}_h\,\delta b_h+\mathfrak{z}_h\,\delta c_h)\geq 0\,. \tag{177}$$

Po (172) so $-\mathfrak{x}_h$, $-\mathfrak{y}_h$, $-\mathfrak{z}_h$ projekcije C_hF_h, pomnožene z $\dfrac{m_h}{dt^2}$ na koordinatne smeri. Zato je:

$$\mathfrak{x}_h\,\delta a_h+\mathfrak{y}_h\,\delta b_h+\mathfrak{z}_h\,\delta c_h=-C_hE_h\cdot C_hF_h\cdot\cos\vartheta_h\cdot m_h\Big/dt^2\,.$$

Tu je ϑ_k kot med usmerjenima daljicama C_hE_h in C_hF_h (glej sliko 16).

Če ta izraz oblikujemo za vse materialne točke, dobimo skladno z zvezo:

$$\sum_{h=1}^{n}m_h\cdot C_hE_h\cdot C_hF_h\cdot\cos\vartheta_h\Big/dt^2\leq 0\,. \tag{178}$$

Prisila za dejansko gibanje je bila podana z izrazom (173), za variirano gibanje pa z izrazom (174); v trikotniku $C_hE_hF_h$ (glej sliko 16) velja:

$$F_hE_h{}^2=C_hE_h{}^2+C_hF_h{}^2-2\,C_hE_h\cdot C_hF_h\cos\vartheta_k\,.$$

Zato:

$$\sum_{h=1}^{n}m_h\frac{(F_hE_h)^2}{dt^4}=\sum_{h=1}^{n}m_h\frac{(C_hE_h)^2}{dt^4}+\sum_{h=1}^{n}m_h\frac{(C_hF_h)^2}{dt^4}-2\sum_{h=1}^{n}m_h\frac{C_hE_h\cdot C_hF_h}{dt^4}\cos\vartheta_k\,.$$

Če niso vsi $C_hF_h=0$ ali neskončno majhni višjega reda glede na dt^2, tj. če pospeški variiranega gibanja ne sovpadajo s pospeški dejanskega gibanja, je drugi člen na desni strani nujno pozitiven. Zaradi (178) tudi tretji člen ne more biti negativen. Ker leva stran predstavlja prisilo za variirano gibanje, prvi člen desne strani pa prisilo za dejansko gibanje, je prisila za dejansko gibanje vedno manjša kot za katero koli možno variirano gibanje.

Če prvi člen desne strani $(C_hE_h)^2$ nadomestimo z vsoto kvadratov njenih členov, podanih s (172) v koordinatnih smereh, potem ponovno dobimo:

$$\sum_{h=1}^{n} m_h \frac{(C_hE_h)^2}{dt^4} = \sum_{h=1}^{n} m_h \left[\left(\ddot{x}_h - \frac{1}{m_h}X_h\right)^2 + \left(\ddot{y}_h - \frac{1}{m_h}Y_h\right)^2 + \left(\ddot{z}_h - \frac{1}{m_h}Z_h\right)^2\right],$$

kar se ujema z (170). Ker v tem izrazu veljajo X_h, Y_h, Z_h za dane, pospeški pa za spremenljivke, je pogoj, da imamo minimum, v splošnem posledica zveze

$$\sum_{h=1}^{n} \left[(m_h\ddot{x}_h - X_h)\,\delta\ddot{x}_h + (m_h\ddot{y}_h - Y_h)\,\delta\ddot{y}_h + (m_h\ddot{z}_h - X_h)\,\delta\ddot{z}_h\right] \geq 0\,. \tag{179}$$

Pogoj, da morajo lege vseh materialnih točk v dveh neskončno bližnjih časih (časih t in $t + dt$) sovpadati z legami, ki veljajo za dejansko gibanje v teh časih, je geometrijski pomen enačb (167). To pogosto ni samoumevno, vendar je v vsakem primeru zaradi jasnosti treba to izrecno poudariti. Funkcije, ki podajajo časovno odvisnost koordinate dejanskega in variiranega gibanja, se lahko v obravnavanem času razlikujejo le v drugih odvodih, in še to le tako, da ostanejo izpolnjeni pogoji sistema, ki veljajo v tem času.

Omenimo še, da zlahka vidimo enakost zvez (178) in (179). Ker je C_hF_h povsem poljuben virtualni premik v času $t + 2dt$, smo v zvezi upravičeno nadomestili δx_h, δy_h, δz_h z njegovimi projekcijami δa_h, δb_h, δc_h na koordinatne osi.

Če pa primerjamo dejansko gibanje sistema z variiranim, vidimo, da je B_hC_h (slika 16) pospešek obravnavane materialne točke, pomnožen z dt^2 za dejansko gibanje, medtem ko je E_hF_h enak izraz za variirano gibanje. Zato je premik C_hF_h, pomnožen z dt^2, sprememba pospeška obravnavane materialne točke pri prehodu iz dejanskega v variirano gibanje. Projekcije δa_h, δb_h, δc_h premika C_hF_h, deljene z dt^2 na koordinatne osi, so torej spremembe $\delta\ddot{x}_h$, $\delta\ddot{y}_h$, $\delta\ddot{z}_h$, ki jih ima komponenta pospeška v koordinatnih smereh pri prehodu iz dejanskega v variirano gibanje. Če uporabimo te vrednosti in za projekcije C_hE_h uporabimo izraze (172), pomnožene z dt^2, sledi:

$$\begin{gathered} -C_hF_h \cdot C_hE_h \cdot \cos\vartheta_h = \\ = \left[\left(\ddot{x}_h - \frac{1}{m_h}X_h\right)\delta\ddot{x}_h + \left(\ddot{y}_h - \frac{1}{m_h}Y_h\right)\delta\ddot{y}_h + \left(\ddot{z}_h - \frac{1}{m_h}X_h\right)\delta\ddot{z}_h\right] dt^4\,. \end{gathered}$$

Glede na to zveza (178) takoj preide v (179), dt pa kot vedno velja za dano konstanto.

Če v zvezi (175) in (176) upoštevamo navedene vrednosti δa_h, δb_h, δc_h ter ju delimo z dt^2, dobimo naslednji zvezi:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_h}\delta\ddot{x}_h + \frac{\partial\varphi_l}{\partial y_h}\delta\ddot{y}_h + \frac{\partial\varphi_l}{\partial z_h}\delta\ddot{z}_h\right) \leq 0\,, \\ &\sum_{h=1}^{n}\left(\xi_h\,\delta\ddot{x}_h + \eta_h\,\delta\ddot{y}_h + \zeta_h\,\delta\ddot{z}_h\right) \leq 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

od katerih prva ustreza neki holonomni, druga pa neki neholonomni pogojni enačbi ali neenakosti. Ti dve zvezi sta torej najbolj splošna analitična izraza za pogoje, ki morajo biti poleg enačb (167) izpolnjeni, da izraz (170) postane minimum. (Glej enačbi (169) in (171)).

§ 68. Primerjava načela najmanjše prisile z načelom virtualnih premikov. Načelo najmanjše prisile smo izpeljali iz načela virtualnih premikov. Dokler velja znak enakosti, prvotna enačba izhaja iz izpeljane enačbe, saj smo izključili nedoločenosti. Če velja znak enakosti, je načelo virtualnih premikov enakovredno načelu najmanjše prisile.

Toda, če iz dveh neenačb sledi tretja, potem iz druge in tretje praviloma ne sledi spet prva. Zato druga in tretja nista enakovredni prvi in drugi. Zato tudi pogoji (180) niso enaki pogojem (86) in (88), in načelo najmanjše prisile, če obstajajo pogoji z neenakostmi, na splošno ni enakovredno načelu virtualnih premikov.

Za trajno mirovanje vseh materialnih točk pa sta obe načeli enakovredni tudi v slednjem primeru, tako da pogoji ravnotežja v ***stanju mirovanja*** vedno nedvoumno izhajajo tudi iz načela virtualnih premikov, kot je razvidno iz naslednjega. V primeru ravnotežja v mirovanju štiri točke A_h, B_h, C_h, D_h (§ 66, slika 16) sovpadajo, saj je začetna hitrost vseh točk enaka nič. Tako postane razlika C_hF_h med pospeškom pri variiranem in dejanskem gibanju enaka virtualnemu premiku obravnavane točke. Projekcije C_hF_h na koordinatne osi lahko torej pomenijo tako spremenljivke $\delta\ddot{x}$, $\delta\ddot{y}$ in $\delta\ddot{z}$ kot spremenljivke δx, δy in δz, in s tem zvezi (93) in (179) postaneta enaki.

Analitično je to izraženo z dejstvom, da lahko v vsakem trenutku $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ in $\ddot{z}$, ki so na začetku vsi enaki nič, v zelo kratkem času τ dobijo poljubne zelo majhne vrednosti $\delta\ddot{x}$, $\delta\ddot{y}$ in $\delta\ddot{z}$, združljive s pogoji. Zveza (179) velja v vsakem od teh trenutkov. Če dvakrat integriramo od 0 do τ, lahko sile obravnavamo kot konstantne, saj se sistem sprva giblje z ničelno hitrostjo, pozneje pa le z neskončno majhno hitrostjo; pospeški $\ddot{x}_h$, $\ddot{y}_h$ in $\ddot{z}_h$ pa so sprva enaki nič in vedno ostanejo zelo majhni glede na X_h/m, Y_h/m in Z_h/m, zato jih lahko zanemarimo.

Tako je

$$\sum_{h=1}^{n}\left(X_h\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta\ddot{x}_h+Y_h\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta\ddot{y}_h+Z_h\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta\ddot{z}_h\right)\le 0\,. \tag{180a}$$

Očitno pa je, da je

$$\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt\,\delta\ddot{x}_h$$

skupna sprememba koordinate δx_h, enako velja za osi y in z. Zveza (180a) je torej identična z

$$\sum_{h=1}^{n}\left(X_h\delta x_h+Y_h\delta y_h+Z_h\delta z_h\right)\le 0\,.$$

Podobno ugotovimo, da sta pogoja (180), ki veljata za načelo najmanjše prisile, enaka pogojema (86) in (88), ki veljata za načelo virtualnih premikov.

Tako je načelo virtualnih premikov enakovredno načelu najmanjše prisile za primer ravnotežja v mirovanju.

V primeru gibanja in pogojev z neenakostmi pa ni mogoče dokazati, da zveza (93), ki predstavlja načelo virtualnih premikov, vedno enolično določa nastale pospeške. Da bi to dokazali, je očitno dovolj, da na nekem posebnem primeru pokažemo, da so možni primeri, ko se zveza (93) nanaša na različne možne načine gibanja, iz nje pa ni mogoče ugotoviti, kateri od njih nastopi.

Takšen poseben primer, ki si ga je zamislil Gibbs[1], bomo obravnavali v naslednjem paragrafu.

§ 69. Primer, kjer je načelo najmanjše prisile primernejše kot načelo virtualnih premikov. Naj bo dana ploskev F, ki poteka skozi koordinatno izhodišče, tam stoji pravokotno na os abscise in se s svojo konkavno stranjo obrača v pozitivno smer abscise. Gibajoča materialna točka z maso m, katere pravokotne koordinate so x, y, z, preide v času t, za katerega iščemo njen pospešek, skozi izhodišče koordinat s hitrostjo v. Naj bo R polmer ukrivljenosti presečišča ploskve F in ravnine v kateri sta v in os abscise. Pogoj, v katerem je materialna točka v času t, je, da ne sme prečkati ploskve F na strani, obrnjeni v negativno smer abscise, lahko pa se poljubno oddalji v pozitivno smer abscise. Pri uporabi načela virtualnih premikov sta zato δy in δz poljubna, δx pa lahko prav tako zavzame poljubne vrednosti, vendar le pozitivne (vključno z ničlo). Zveza (93) zato zahteva, da velja $m\ddot{y} = Y$ in $m\ddot{z} = Z$. Ker je δx lahko le enak nič ali pozitiven, $\ddot{x}$ pa je zaradi omejitev sistema lahko enak ali poljubno večji od $v^2\Big/R$ (glej § 13), je zveza (93) vedno izpolnjena, če je $\ddot{x}$ enak večjemu od obeh izrazov $v^2\Big/R$ ali X/m ali pa še večji. Ta zveza ne določa povsem, ali se premična točka ne bi že pri vrednostih X, manjših od centrifugalne sile mv^2/R, odmaknila od ploskve. Da to ni mogoče lahko vidimo le posredno po tem, da bi se premična točka takoj, ko bi se ločila gibalo povsem prosto, njen pospešek v smeri abscise pa bi bil enak X/m, kar je manj kot v^2/R, zato bi se moralo takoj spet vrniti na ploskev.

Pri uporabi načela najmanjše prisile ni treba spreminjati niti lege materialne točke, niti njenih komponent hitrosti. Variaciji $\delta\ddot{y}$ in $\delta\ddot{z}$ komponent pospeška v smereh y in z sta poljubni, zato iz zveze (179) sledi $m\ddot{y} = Y$ in $m\ddot{z} = Z$, sama zveza pa se reducira na:

$$(m\ddot{x} - X)\,\delta\ddot{x} \geq 0. \tag{181}$$

Hitrost v ne more imeti negativne komponente v smeri abscise, saj materialna točka ne more doseči negativne strani abscisne osi. Prav tako ne more imeti pozitivne komponente v smeri abscise, saj bi to pomenilo, da je materialna točka prišla iz negativne smeri abscisne osi, kar pa ni mogoče brez spremembe smeri hitrosti, ki bi zahtevala neskončno silo. Zato je hitrost v pravokotna na smer abscise. To pomeni, da je pospešek $\ddot{x}$ v pozitivni smeri abscise, ko se materialna točka giblje po ploskvi F, enak $\dfrac{v^2}{R}$. Materialna točka se ne more gibati po manj ukrivljenem tiru ali celo po tiru, ukrivljenem v nasprotno smer, saj bi s tem prešla na tisto stran ploskve F, ki je obrnjena proti negativni smeri abscisne osi. Zato pospešek ne more biti negativen ali manjši od $\dfrac{v^2}{R}$. Po drugi strani pa je lahko tir močneje ukrivljen proti pozitivni strani abscisne osi, torej je $\ddot{x}$ lahko poljubno večji od $\dfrac{v^2}{R}$. Tako dobimo naslednje pogoje za $\delta\ddot{x}$: Če je $\ddot{x} = \dfrac{v^2}{R}$, je $\delta\ddot{x}$ lahko samo enak nič ali pozitiven. Če pa je $\ddot{x} > \dfrac{v^2}{R}$, je $\delta\ddot{x}$ lahko poljuben, tako kot $\delta\ddot{y}$ in $\delta\ddot{z}$.

Ko smo to ugotovili, preverimo, kaj izhaja iz načela najmanjše prisile, ki je bilo reducirano na zvezo (181). Razlikujemo naslednje primere:

[1] On the Fundamental Formulae of Dynamics,American Journal of Mathematics , Mar., 1879, Vol. 2, No. 1 (Mar., 1879), pp. 49-64 (OP)

1. X je negativen ali ima tako majhno pozitivno vrednost, da je $X/m < v^2\big/R$. Potem je prvi faktor nujno pozitiven, saj je $\ddot{x} \geq v^2\big/R$. Tako je primer, da je $\ddot{x} > v^2\big/R$, izključen z relacijo (181), saj je v tem primeru $\delta\ddot{x}$ in s tem leva stran lahko tudi negativna. V tem primeru, če je X negativen ali $< v^2\big/R$, je $\ddot{x} = v^2\big/R$, tj. premična točka ostane na ploskvi, kar je v skladu z izkušnjo, saj je takrat zunanja sila bodisi usmerjena na stran negativne abscise bodisi je, če ima nasprotno smer, manjša od centrifugalne sile, ki potiska premično točko ob ploskev.

2. Če je $X/m > v^2\big/R$, potem bi bil, če je $\ddot{x} = v^2\big/R$, prvi faktor leve strani zveze (neenačbe) (181) negativen. Ker ima lahko $\delta\ddot{x}$ v vsakem primeru pozitivne vrednosti, ta zveza ne bi bila izpolnjena. Potem mora biti $\ddot{x} > v^2\big/R$, ker pa je v tem primeru $\delta\ddot{x}$ lahko pozitiven in negativen, je zveza (neenačba) izpolnjena le, če je $m\ddot{x} = X$. Tako se premična točka odlepi od ploskve in se premika, kot da bi bila prosta. To se spet ujema z izkušnjami, saj je zdaj komponenta sile, ki premično točko odriva od ploskve, večja od centrifugalne sile.

3. Če je končno $X/m = v^2\big/R$, potem je v vsakem primeru $\ddot{x} = v^2\big/R$, kajti če je $\ddot{x} > v^2\big/R$, potem bi bil v (181) prvi faktor pozitiven, drugi pa bi bil lahko tudi negativen. Tir premične točke bi, če bi bila prosta, prav tako nihal po ploskvi F.

Iz navedenih razmišljanj neposredno sledi naslednje. Materialna točka se premika po ukrivljeni ploskvi, ki jo lahko zapusti na izbočeni strani, ne pa tudi na drugi strani. Komponenta N sile, ki deluje od zunaj, pravokotno na to ploskev, stalno narašča od vrednosti, manjše od $mv^2\big/R$, do večje ali pa nenadoma preskoči na takšno vrednost. V trenutku, ko postane $N \geq mv^2\big/R$, se premična točka odmakne od ploskve s pospeškom N/m. Iz načela najmanjše prisile to izhaja neposredno z njegovo uporabo za vsak posamezen trenutek, iz načela virtualnih hitrosti pa le z dodatnimi posebnimi premisleki, npr. o gibanjih, ki bi nastala za naslednje trenutke.

§ 70. Ravnotežje v mirovanju, kadar obstaja potencial. Pogoj ravnotežja za stanje mirovanja je še posebej preprost, če za dane sile obstaja potencial. Takrat so:

$$X_h = -\frac{\partial V}{\partial x_h}, \quad Y_h = -\frac{\partial V}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\frac{\partial V}{\partial z_h}$$

in iz (95) sledi $\delta V \geq 0$ za vse variacije koordinat, ki so združljive s pogoji.

Torej je izraz (95), ki vsebuje variacije in daje pogoj za ravnotežje, popolna variacija funkcije koordinat, ki lahko eksplicitno vsebuje še čas, ki se seveda ne spreminja. Z določitvijo te ene funkcije in pogojev sistema, če ti obstajajo, lahko vprašanje ravnotežja omejimo na povsem matematično nalogo, zato je potencial dobil tudi ime ***statični potencial***. V drugem delu bomo videli, da je v mnogih primerih mogoče obravnavo gibanja sistema omejiti na povsem matematično nalogo z zahtevo, da je ena funkcija, ki nato vsebuje tudi komponente hitrosti, mejna vrednost. To funkcijo bomo imenovali (srednji) ***kinetični potencial***.

Če je trajno mirovanje sistema združljivo s omejitvami sistema in obstaja statični potencial, potem bo sistem vedno ostal v ravnotežju, če je bil na začetku v mirovanju in če prva sprememba statičnega potenciala ni negativna za vsak neskončno majhen možen premik točk.

V tem primeru je tudi definicija stabilnosti ali labilnosti ravnotežja zelo preprosta. Ravnotežje je ***stabilno***, če takoj, ko vsaki točki sistema določimo zelo majhen premik in hitrost, ta ostaneta zelo majhna v vseh naslednjih časih, ko se sistem še naprej giblje pod vplivom danih eksplicitnih sil, ne glede na to, kakšna sta bila prvotno določena premik in hitrost, pod pogojem, da je njuna velikost pod neko mejo. Če je po drugi strani mogoče s poljubno majhnim začetnim premikom in hitrostjo povzročiti končno spremembo njihove lege in hitrosti, potem ravnotežje imenujemo ***nestabilno***. Prvi primer nastopi vedno, ko ima V, tudi ob upoštevanju neskončno majhnih količin višjega reda, za vse možne zelo majhne variacije koordinat le pozitivne spremembe, ki naraščajo sorazmerno s povečevanjem variacij koordinat.

Naj bo V_0 vrednost potenciala v mirujoči legi. Vsaki točki določimo neskončno majhen premik in hitrost, s katerima potencial dobi vrednost $V_0 + \Lambda_0$, kinetična energija pa vrednost T_0. Zdaj naj se sistem iz tega začetnega stanja premika v skladu z enačbami gibanja. V nekem poznejšem času t naj bi bili $V_0 + \Lambda$ in T vrednosti potenciala in kinetične energije. Potem je v skladu z načelom energije:

$$\Lambda_0 + T_0 = \Lambda + T.$$

Niti Λ, niti T ne moreta imeti večje vrednosti od zelo majhne vrednosti $\Lambda_0 + T_0$. Ker pa bi po naši predpostavki morala Λ nujno prej preseči vrednost Λ_0, ki je lahko poljubno majhna, preden bi se katera koli koordinata končno povečala, in ker bi tudi kinetična energija T nujno dobila večjo končno vrednost, če bi katera koli hitrost narasla na končno vrednost, morajo vse hitrosti vedno ostati zelo majhne in vse koordinate skoraj enake svojim prvotnim vrednostim.

Če se funkcija V ne more zmanjšati, ampak ostane konstantna do končnega povečanja ene ali več koordinat, ravnotežje imenujemo ***indiferentno***. Potem se lahko sistem po neskončno majhni motnji oddalji od svoje lege za končno količino, vendar ostane hitrost končna.

Če se vrednost V lahko zmanjša, se bo ob ustrezni majhni motnji, ki povzroči rahlo zmanjšanje V, padanje nadaljevalo, medtem ko se bo naraščajoča kinetična energija, in s tem tudi hitrost, povečevala, dokler formule, ki veljajo za majhne vrednosti, ne bodo več uporabne. Takšno ravnotežje imenujemo ***labilno***.

Znan primer je ravnotežje trdnega telesa pod vplivom težnosti. Če os z potegnemo navpično navzdol in ζ označuje z–koordinato težišča telesa, p pa njegovo težo, potem je $V = -p\zeta$. Ravnotežje nastopi, če se za vsak virtualni premik telesa ζ zmanjša ali poveča le za neskončno majhne vrednosti višjega reda. Če se težišče z vsakim majhnim premikom postavi višje, je ravnotežje stabilno. Če pride do majhnih premikov, pri katerih se težišče zniža (jajce stoji na vrhu), je ravnotežje nestabilno. Primer indiferentnega ravnotežja je krogla ali ravni krožni valj na vodoravni podlagi.

§ 71. Označevanje vseh koordinat z enakimi črkami. Načelo virtualnih premikov ali najmanjše prisile lahko zapišemo v obliki:

$$\sum_{h=1}^{n} \left[(m_h \ddot{x}_h - X_h)\, \delta x_h^\alpha + (m_h \ddot{y}_h - Y_h)\, \delta y_h^\alpha + (m_h \ddot{z}_h - X_h)\, \delta z_h^\alpha \right] \geq 0, \tag{182}$$

pri čemer je $\alpha = 0$ ali 2, tj. v celoti izpustimo ali nadomestimo z dvema pikama, odvisno od tega, ali gre za prvo ali drugo načelo. Variacije morajo izpolnjevati zveze (86), (88),

(169) ali (180), ki jih lahko zapišemo v oblik

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\xi_h^l\delta x_h^\alpha+\eta_h^l\delta y_h^\alpha+\zeta_h^l\delta z_h^\alpha\right)\leq 0 \tag{183}$$

in kjer veljata oba znaka ali samo enak znak, odvisno od primera v (79) ali (80). ξ, η, ζ lahko postavimo v obliko (89) ali ne, odvisno od tega, ali je zadevni pogoj holonomen ali ne. To je $\alpha = 0$ ali 2, odvisno od tega, ali uporabljamo načelo virtualnih premikov ali načelo najmanjše prisile.

Uvedimo spremembo v načinu označevanja, ki nam bo prihranila nekaj nepotrebnega pisanja. Maso prve materialne točke poimenujemo, kakor želimo, z m_1, m_2 ali m_3, tako da so m_1, m_2 in m_3 tri medsebojno enake količine. Pravokotne koordinate prve materialne točke označimo z x_1, x_2, x_3, komponente njene hitrosti in pospeška z $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{x}_3$, komponente neposrednih sil, ki delujejo nanjo, pa z X_1, X_2, X_3, vse komponente seveda razumemo v koordinatnih smereh. Podobno označimo maso druge materialne točke z m_4, m_5 ali m_6, pri čemer seveda spet velja $m_4 = m_5 = m_6$. Njene koordinate, komponente hitrosti in pospeška ter komponente neposrednih sil, ki delujejo nanjo, so označene z $\dot{x}_4$, $\dot{x}_5$, $\dot{x}_6$, $\ddot{x}_4$, $\ddot{x}_5$, $\ddot{x}_6$ in X_4, X_5, X_6. Tako nadaljujemo do zadnje materialne točke, katere masa je tako označena z $m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}$ itd.

Neenačba (182) ima sedaj preprostejšo obliko:

$$\sum_{h=1}^{3n}\left(m_h\ddot{x}_h-X_h\right)\delta x_h^\alpha\geq 0; \tag{184}$$

za ravnotežje v ***stanju mirovanja***, kjer vsi pospeški odpadejo, pa dobimo

$$\sum_{h=1}^{3n}X_h\delta x_h^\alpha\leq 0 \tag{185}$$

medtem ko lahko pogoje za variacije koordinat zapišemo v obliki

$$\sum_{h=1}^{3n}\xi_h^l\delta x_h^\alpha\leq 0 \tag{186}$$

saj je potrebno napisati ξ_2^l, ξ_3^l, ξ_4^l, ... tudi za η_1^l, ζ_1^l, ξ_2^l, ...

§ 72. D'Alembertovo načelo. Naj bo podan poljuben sistem materialnih točk. Pogojne enačbe naj bodo takšne, da je z njimi združljivo popolno mirovanje sistema ali vsaj izničenje hitrosti in pospeškov vseh točk sistema v določenem trenutku ϑ. Pogoj, da je sistem lahko v ravnotežju pod vplivom sil, ki nanj delujejo v času ϑ, je izražen z zvezo (185). Če je sistem v gibanju, so enačbe gibanja določene z zvezo (184). Vidimo torej, da enačbe gibanja dobimo tako, da pogojne enačbe za ravnotežje v stanju mirovanja preprosto zapišemo in komponente neposrednih sil X_h nadomestimo z izrazom

$$X_h-m_h\ddot{x}_h, \tag{187}$$

kar imenujemo prva oblika d'Alembertovega načela.

Zdaj predpostavimo, da se isti sistem pod vplivom sil giblje na kakršen koli način iz poljubnih začetnih pogojev, tako da velja zveza (184), ki določa zakone gibanja. V trenutku ϑ se na vsako točko sistema nenadoma doda sila, ki je enaka in nasprotna sili, ki smo jo v § 34 imenovali skupna sila. To je sila, katere smer je nasprotna trenutnemu pospešku točke, njena velikost pa je enaka produktu tega pospeška in mase zadevne točke; z drugimi besedami, komponenta v smeri h–te koordinate je enaka

$$-m_h \ddot{x}_h. \tag{188}$$

Sistem sil, ki nastane, ko te sile dodamo neposrednim silam, imenujmo sistem sil $\mathfrak{B}$. Če vse točke mirujejo, potem sistem preide v ravnotežje, kar imenujemo druga oblika d'Alembertovega načela.

To dokažemo na naslednji način: Komponenta h v eni od koordinatnih smeri je za sistem sil $\mathfrak{B}$ podana z:

$$X_h^v = X_h - m_h \ddot{x}_h. \tag{189}$$

Iz enačb gibanja (184), ki morajo biti izpolnjene za dejansko gibanje pod vplivom sil, katerih komponenta je X_h, sledi:

$$\sum_{h=1}^{3n} X_h^v \delta x_h^\alpha \leq 0. \tag{190}$$

Po (185) je to ravno pogoj, da je sistem pod vplivom sil $\mathfrak{B}$ lahko v stanju mirovanja in v ravnotežju. Sile $\mathfrak{B}$ so sicer enake tistim, ki smo jih v § 34 imenovali izgubljene sile, in so nasprotne veznim silam. Komponente izgubljenih sil so podane z izrazi (82), ki so, kot je razvidno iz (81), enake izrazu (189). Sistem neposrednih sil (komponenta h je X_h) lahko torej razdelimo na dva sistema sil: sistem skupnih sil (komponenta h je $m_h \ddot{x}_h$) in sistem izgubljenih sil (komponenta h je $X_h - m_h \ddot{x}_h$). Prvi sistem bi povzročil natanko tiste pospeške, ki jih točke v danem času dejansko imajo, če bi bile popolnoma svobodne. Drugi sistem sil je enak sistemu sil vezi, vendar nasprotno usmerjen. Če bi sistem v trenutku prešel v mirovanje, bi ostal v ravnotežju, če bi mirovanje sistema ustrezalo danim pogojem. Temu pravimo tretja oblika d'Alembertovega načela.

To ustreza izreku, dokazanen v opombi na str. 131 (§ 35), da ni mogoče, da bi izgubljene sile povzročile gibanje, različno od dejanskega gibanja. Jasno je, da lahko sile, ki so enake in nasprotne silam vezi, te sile izničijo in tako ohranijo ravnotežje.

Lahko se zgodi, da so sile podane kot funkcije hitrosti ali drugih količin, ki določajo stanje sistema. Ko rečemo, da je bil sistem nenadoma spravljen v mirovanje in da nanj delujejo iste sile, seveda ne mislimo, da so sile enake funkcijam hitrosti ali drugih količin, ampak da vektorji, ki predstavljajo sile, ostanejo enaki in usmerjeni na enak način. Če so sile le funkcije lege in časa, potem to velja, ker pri nenadnem mirovanju sistem ni spremenil svoje lege, le hitrosti.

Nazadnje podamo še naslednjo trditev, imenovano (čeprav ne v pravem pomenu besede) četrta oblika d'Alembertovega načela: Če nekatere sile ohranjajo ravnotežje sistema v mirovanju, te sile, dodane drugim silam, ne vplivajo na gibanje, ki ga povzročajo slednje.

§ 73. Definicija ravnotežja sil za gibajoče sisteme. Da bi vsi izreki, ki smo jih poimenovali različne oblike d'Alembertovega načela, ohranili pomen tudi v primeru, ko je mirovanje vseh točk sistema nezdružljivo z danimi pogoji, je potrebno podati definicijo ravnotežja sil za telo v gibanju, pri čemer ta definicija ne sme biti omejena le na primer, ko nobena od točk sistema nima pospeška. Vsi navedeni izreki ostanejo veljavni z relativno majhnimi spremembami, če za ravnotežje sil uporabimo naslednjo splošno definicijo, ki se, kadar sistem miruje, ujema z že omenjeno definicijo ravnotežja v stanju mirovanja. Tako zajema ta poseben primer, vendar je uporabna tudi v primeru, ko mirovanje sistema ni združljivo z danimi pogoji.

Naj bo podan materialni sistem. Mirovanje je lahko skladno ali neskladno s omejitvami. Če ni neposrednih sil, potem se ob dani začetni legi ter začetnih hitrostih materialnih točk pojavi neko gibanje, torej pospešek vseh točk. Če kljub delovanju določenih neposrednih sil isti sistem pod enakimi pogoji, v enaki legi ter z enakimi začetnimi hitrostmi pri določenem času izvede enako gibanje in se pojavijo enaki pospeški, pravimo, da te neposredne sile ob tem času vzdržujejo ravnotežje sistema. Tako kot pravimo za prosto materialno točko, da sile, ki delujejo nanjo, vzdržujejo ravnotežje, kadar se giblje enakomerno premočrtno, kot bi bilo to pri odsotnosti vseh sil.

Če ni neposrednih sil, iz (184) sledi:

$$\sum_{h=1}^{3n} m_h \ddot{x}_h \delta x_h^\alpha \geq 0. \tag{191}$$

Če naj bi po naši novi definiciji nekatere sile (njihove komponente glede na h koordinatno os označimo kot X_h^g) ohranjale ravnotežje, potem je pri enakem gibanju

$$\sum_{h=1}^{3n} \left(m_h \ddot{x}_h - X_h^g\right) \delta x_h^\alpha \geq 0.$$

Zato mora veljati

$$\sum_{h=1}^{3n} X_h^g \delta x_h^\alpha \leq \sum_{h=1}^{3n} m_h \ddot{x}_h \delta x_h^\alpha. \tag{192}$$

V primerih, kjer povsod veljajo le znaki enakosti, iz tega in iz (191) sledi

$$\sum_{h=1}^{3n} X_h^g \delta x_h^\alpha = 0. \tag{193}$$

Pogoj ravnotežja je torej podan z enako zvezo kot v prejšnji definiciji, in vse štiri oblike d'Alembertovega načela ostanejo v veljavi nespremenjene. Iz pogoja ravnotežja ponovno dobimo enačbe gibanja, tako da v njem zapišemo

$$X_h - m_h \ddot{x}_h \quad \text{za} \quad X_h^g \tag{194}$$

Izgubljene sile, katerih h–ta komponenta je $X_h - m_h \ddot{x}_h$, dobimo, ko poleg neposrednih sil vključimo še negativno prevzete skupne sile, tj. na vsako točko deluje sila, ki je nasprotna njenemu pospešku, in katere intenziteta je enaka produktu mase točke in njenega pospeška. Te sile morajo pri vsakem gibanju izpolnjevati pogoj (193), tj. ohranjati ravnotežje. Neposredne sile lahko vedno obravnavamo kot superpozicijo negativno prevzetih zadnjih (pozitivno prevzetih skupnih) in izgubljenih sil.

Če se katerikoli sile medsebojno uravnotežijo, izpolnjujejo pogoj (193). Če jih torej dodamo katerimkoli drugim silam, bo zveza (184) za vsoto obeh sil enaka neenakosti, ki nastane samo z drugimi silami. Ker ta neenakost v celoti določa gibanje, dodajanje uravnoteženih sil ne spremeni gibanja, ki ga povzročajo druge sile. Takoj vidimo, da ta dokaz velja tudi za sile, ki po stari definiciji ohranjajo ravnotežje v mirujočem sistemu, tudi če se med pogoji pojavijo neenakosti.

Pri silah, ki ohranjajo ravnotežje le po novi definiciji, so te trditve nekoliko omejene, čeprav je znak neenakosti dopusten. Zveza (neenakost) (184) bo zagotovo izpolnjena, če nekatere sile izpolnjujejo neenakost:

$$\sum_{h=1}^{3n} X_h^g \delta x_h^\alpha \leq 0. \tag{195}$$

Če označimo komponente $X_h - m_h \ddot{x}_h$ izgubljenih sil z X_h^g, potem izpolnjujejo zvezo (195). Izgubljene sile torej zagotovo ohranijo ravnotežje. D'Alembertovo načelo ostaja pravilno v svoji drugi in tretji obliki, čeprav izničenje vseh hitrosti in pospeškov ni združljivo s pogoji sistema. Z drugimi besedami: če poleg neposrednih sil na vsako točko delujejo še negativne skupne sile, tj. sila, ki je enaka produktu mase in pospeška ter usmerjena v nasprotno smer od pospeška, nastopi ravnotežje. Neposredne sile so superpozicija nasprotnih (pozitivnih skupnih) in izgubljenih sil v ravnotežju.

Po drugi strani pa prva in četrta oblika d'Alembertovega načela ne veljata več, saj iz enačbe (185) z zamenjavo (187) dobimo enačbe gibanja, medtem ko je ravnotežje določeno z zvezo (192), ki ni identična z (185) in tudi ne zagotavlja več, da dodajanje sil, ki izpolnjujejo to zvezo, ne spremeni gibanja, ki ga povzročajo druge sile.

Ker skupne sile vedno povzročijo enako gibanje sistema kot neposredne sile, sta ti dve glede na sistem vedno enakovredni.

Poleg navedene definicije ravnotežja nisem našel nobene druge, ki bi veljala tudi v primeru, ko izničenje vseh hitrosti in pospeškov ni združljivo s pogoji sistema. Če je združljivo, lahko definicijo ravnotežja v stanju mirovanja razširimo tudi na gibanje. Sile, ki ohranjajo ravnotežje gibajočega sistema, lahko definiramo kot sile, ki bi ohranjale ravnotežje na mirujočem sistemu v isti legi. To imenujemo druga definicija ravnotežja sil na gibajočem sistemu. Nato bi bilo ravnotežje podano z zvezo (195) in bi imeli prednost, da bi d'Alembertovo načelo veljalo v vseh štirih oblikah. Slabost pa bi bila, da ta definicija ne bi veljala, če mirovanje sistema ni združljivo z njegovimi pogoji. To bi bilo zaželeno, saj pogosto velja naslednji splošni izrek: vsak gibajoči sistem takoj pride v ravnotežje, če na vsako točko poleg že delujočih sil deluje še sila, ki je nasprotna pospešku in katere intenziteta je enaka produktu mase in pospeška.

Ker iz enačb (191) in (195) nujno sledi tudi enačba (192), morajo sile, ki po drugi definiciji vzdržujejo ravnotežje, to nujno zagotavljati tudi po prvi definiciji. saj ne vplivajo na mirovanje sistema, ki je mogoče tudi brez neposrednih sil. Sile lahko vzdržujejo ravnotežje po prvi definiciji, tudi če zveza (195) ni izpolnjena, vendar je leva stran (195) pozitivna in manjša od desne strani (192). V tem primeru so sile v ravnotežju po drugi definiciji, ne pa tudi po prvi. Primer tega je, ko se krogla giblje ob konkavni strani toge, gladke in ukrivljene stene. Sila, ki deluje pravokotno na konkavno stran stene, ne spremeni gibanja krogle, če je manjša od centrifugalne sile, vendar krogle v ravnotežju ne bi zadržala v mirovanju. Čeprav je taka sila po prvi definiciji v ravnotežju, pa lahko, če jo dodamo drugim silam, spremeni gibanje, ki ga povzročajo druge sile, če postane večja od centrifugalne sile.

Nauk o ravnotežju sil imenujemo ***statika***, nauk o gibanju teles pa ***dinamika***. Lahko pustimo odprto vprašanje, ali primeri, v katerih sile v gibajočih sistemih, predvsem če pogoji ne dopuščajo mirovanja, ohranjajo ravnotežje, spadajo v statiko ali dinamiko. Probleme statike in dinamike bomo vedno obravnavali enotno.

§ 74. Uporaba metode multiplikatorjev za najsplošnejši primer poljubnih holonomnih ali neholonomnih pogojnih enačb ali neenačb . Videli smo, da načelo najmanjše prisile, razen v določenih singularnih primerih, vedno enolično določa gibanje. To načelo je izraženo z zvezo (184) in pogojem (186), katerih skupno število je σ, vendar mora biti povsod $\alpha = 2$. Če torej najdemo rešitev, ki izpolnjuje zvezo (184) za vse vrednosti variacij, ki ustrezajo pogojem (186), potem je to rešitev mehanskega problema, pod pogojem, da vsebuje dovolj konstant, da zadostuje vsem možnim začetnim pogojem.

Zdaj bomo pokazali, kako lahko tako splošno rešitev najdemo z metodo nedoločenih multiplikatorjev. Med σ pogoji za dejansko gibanje lahko holonomne pogoje zapišemo v obliki

$$\varphi_l\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_{3n}\right) \leq 0 \tag{196}$$

neholonomske pa v obliki

$$\tau_l + \sum_{h=1}^{3n} \xi_h^l \dot{x}_h \leq 0\,. \tag{197}$$

Da bi poenostavili oblikovanje nadaljnjih izrekov, privzamemo, da so predznaki funkcij $\varphi, , \tau$ in ξ na levi strani v (196) in (197) izbrani tako, da vedno velja ≤ 0, nikoli pa ≥ 0. V vseh teh σ zvezah, ki izražajo pogoje sistema, bomo trenutno obravnavali le primere z znakom enakosti, tako da nadomestimo zveze (196) in (197) z naslednjimi:

$$\varphi_l\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_{3n}\right) = 0,$$

$$\tau_l + \sum_{h=1}^{3n} \xi_h^l \dot{x}_h = 0$$

Temu dodamo še enačbe

$$m_h \ddot{x}_h - X_h - \sum_{l=1}^{\sigma} \lambda_l \xi_h^l = 0,$$

kjer ima lahko h vse vrednosti od 1 do $3n$. Za pogoje podane v obliki (197) je ξ_h^l koeficient, kot je podano v (197). Pri pogojih v obliki (196) pa je ξ_h^l okrajšava za $\partial\varphi_l/\partial x_h$. Torej veljajo enačbe (89). Iz $3n + \sigma$ enačb (198), (199) in (200) lahko v splošnem določimo $3n + \sigma$ neznank $\ddot{x}$ in λ. Glede singularnih primerov, kjer pride do težav pri reševanju, velja enako kot na koncu § 43 in jih tukaj ne bomo ponovno obravnavali.

Predpostavimo, da smo splošno rešili enačbe (198), (199) in (200). Za vse vrednosti integracijskih konstant in časa, za katere noben λ ne postane pozitiven (indeks λ ustreza tisti zvezi, kjer velja tudi znak neenakosti), je rešitev mehanskega problema najdena, saj izpolnjuje zvezo (184) in pogoje (186), ki jasno določajo rešitev mehanskega problema, razen že omenjenih singularnosti.

Če enačbo pomnožimo z δx_h^α in seštejemo vse enačbe (200) za vse h, dobimo:

$$\sum_{h=1}^{3n} \left(m_h \ddot{x}_h - X_h\right) \delta x_h^\alpha = \sum_{l=1}^{\sigma} \sum_{h=1}^{3n} \lambda_l \xi_h^l \delta x_h^\alpha,$$

$\sum_{h=1}^{3n} \xi_h^l \delta x_h^\alpha$ je zdaj enaka nič za vse l, za katere v zvezi (186) velja le znak enakosti, in negativna (vključno z ničlo) za vse druge. Tako dejansko dobimo zvezo (184). Ker tako najdena rešitev vsebuje tudi potrebno število integracijskih konstant, predstavlja splošno rešitev mehanskega problema.[2] Konkretne primere smo že navedli v § 41 in na koncu § 43.

Če je λ_l pozitiven za nekatere (recimo σ') vrednosti l, za katere velja tudi znak neenakosti v zvezah (196) ali (197), potem je treba ustrezno enačbo izločiti iz enačb (198) ali (199), prav tako pa izločiti člen iz enačb (200), ki vsebuje ustrezni λ. Če bi se gibanje nadaljevalo v skladu z enačbama (198) ali (199), bi naprava, ki vzpostavlja ustrezno zvezo, potrebovala upor, ki bi jo lahko zagotovila le tako, da prepreči, da bi leva stran enačbe (196) ali (197) postala večja od nič. Zato gibanje poteka brez oviranja te naprave.

Zdaj imamo le še $3n + \sigma - \sigma'$ enačb, prav tako pa le $3n + \sigma - \sigma'$ neznank. Rešitve teh enačb imenujemo rešitvene vrednosti. Te izpolnjujejo zvezo (neenakost) (186) pod pogojem (neenakosti) (184) za $\alpha = 0$ in za $\alpha = 2$. Za $\alpha = 2$ ta zveza izraža načelo najmanjše prisile, ki določa, da mora biti količina, ki jo izračunamo za dejansko gibanje, vedno absolutni minimum in da ni več možnih minimumov. Ker smo našli pospeške, pri katerih se pojavi takšen minimum, smo prepričani, da predstavljajo pravilno rešitev mehanskega problema in da vrednosti, ki smo jih poimenovali rešitvene vrednosti, predstavljajo pravo gibanje. Te vrednosti predstavljajo rešitev problema v najbolj splošnem primeru, razen posebnih primerov, ki so bili obravnavani na koncu § 43.

Če bi bile začetne vrednosti koordinat in komponent hitrosti take, da sistem na začetku ne bi bil povezan z nobeno napravo ali bi bil že ločen od nje, potem ustrezne pogojne enačbe od začetka časa ne bi bilo treba več upoštevati. Merilo za popolno neučinkovitost naprave je vedno dejstvo, da zveza, ki ji ustreza, ne omejuje vseh pospeškov, saj je načelo najmanjše prisile edino pravilo, ki vedno jasno določa gibanje.

Takoj ko se taka omejitev ponovno vzpostavi, sistem ponovno vzpostavi medsebojno delovanje z napravo. ki jo je treba vključiti v σ pogojev. Če zadevni λ postane negativen, je treba ustrezno enačbo (198) ali (199) in člen, ki vsebuje λ, vključiti v enačbo (200).

Če so koordinate in hitrosti na začetku ali v trenutku, ko sistem ponovno vzpostavi medsebojno delovanje z napravo, take, da pogojnih enačb v naslednjem trenutku ni več mogoče izpolniti brez končnih sprememb velikosti ali smeri hitrosti (brez neskončnih pospeškov), potem naloge ni več mogoče rešiti z enačbami, ki smo jih doslej izpeljali. To pa ne govori proti metodi, saj lahko z natančnejšim preučevanjem problema dobimo nove enačbe, ki so primerne za njegovo rešitev. Upoštevati moramo, da so toge vezi nekoliko elastične, toga telesa rahlo deformabilna in da v telesih in napravah lahko pride do molekularnih premikov. Primer tega je trdno telo, ki poševno trči ob steno neprepustne lupine in se obnaša skladno z zakoni elastičnega ali neelastičnega trka.

[2] Vsaka od koordinat, ki jih odpravi ena od zvez (198), ne prinaša nobene integracijske konstante; vsaka koordinata, ki jo odpravi zveza (199), prinaša eno; vsaka druga koordinata prinaša dve integracijski konstanti. Enostavno vidimo, da imamo natanko toliko neodvisnih začetnih vrednosti.

Če je sistem sprva v medsebojnem delovanju z vsemi napravami, se popolna ločitev od katere koli naprave zgodi, ko se neposredne sile neprestano spreminjajo, v trenutku, ko λ preide iz nič v pozitivno vrednost.

V primeru ravnotežja v mirovanju morajo biti vsi pospeški enaki nič. Zato splošne enačbe (200) preidejo v

$$X_h + \sum_{l=1}^{\sigma} \lambda_l \xi_h^l = 0\,.$$

Vsakič, ko obstajajo vrednosti λ, ki izpolnjujejo te enačbe za obravnavane neposredne sile, in če λ, ki ustrezajo takim pogojem, niso pozitivne, je sistem pod vplivom teh neposrednih sil v ravnotežju, če je bil na začetku v mirovanju. Seveda se, kot vedno, predpostavlja, da so bile funkcije φ, τ in ξ na levi strani (196) in (197) od začetka vedno izbrane s takšnim predznakom, da vsak pogoj pomeni, da je leva stran $\leq$, nikoli pa $\geq$.

VII

Enačbe relativnega gibanja

[1]

§ 77. Absolutno in relativno gibanje. Lahko določimo le razdalje med deli različnih teles, torej le njihove relativne lege. Ne obstaja izkušnja, ki bi nam omogočila zaznati ***absolutni prostor***. Kljub temu smo na začetku prvega dela uvedli določen koordinatni sistem, ki skoraj prevzema vlogo absolutnega prostora. To smo storili zgolj zato, ker zakone ***relativnega gibanja*** teles lahko veliko lažje izrazimo z uvedbo tega določenega koordinatnega sistema, kot če bi uvedli druge povsem poljubno izbrane koordinatne sisteme.

S tem nikakor ne trdimo, da obstaja verjetnost ali celo nuja, da bi lahko našli nove izkušnje, s pomočjo katerih bi lahko natančneje določili ta posebni koordinatni sistem, ali ki bi omogočile izbiro določenega sistema izmed vseh sistemov, ki smo jih v § 11 prvega dela imenovali inercialni opazovalni sistemi, in s tem omogočile določitev absolutnega prostora, kar bi, če tako izrazimo, dokazalo obstoj tega absolutnega prostora.

V § 11 prvega dela smo namreč videli, da se do najpreprostejše oblike zakonov gibanja ne pride le na podlagi enega samega določenega koordinatnega sistema S, temveč lahko z enakim uspehom uporabimo zelo različne koordinatne sisteme. Vse te koordinatne sisteme imenujemo ustrezni opazovalni sistemi. Smer osi v prostoru za določen trenutek in lega izhodiščne točke koordinat za dva trenutka lahko povsem poljubno usmerimo glede na koordinatni sistem S, ki smo ga že prepoznali kot inercialni opazovalni sistem. Če smo izbrali smer osi v določenem trenutku, je ta smer določena tudi za vse druge trenutke. Vse smeri, ki jih ima določena os v vsakem trenutku, imenujemo vzporedne.

Če smo izbrali lego koordinatnega izhodišča v dveh trenutkih, je lega koordinatnega izhodišča določena tudi za vse druge trenutke. Gibanje, ki ga v tem primeru opravi koordinatno izhodišče, imenujemo ***enakomerno premočrtno gibanje***.

Vprašanje, kako se spremenijo zakoni gibanja telesa, tj. kako se spremenijo enačbe gibanja, če vzamemo za osnovo koordinatne sisteme, ki ne izpolnjujejo teh pogojev, je očitno zelo zanimivo za teorijo.

Ima pa tudi praktično vrednost, saj vedno opazujemo le relativno gibanje enega materialnega sistema glede na drugega, ki je skoraj nepremičen ali vsaj velja za nepremičnega. Tako opazujemo gibanje planetarnega sistema glede na nepremično zvezdno nebo, gibanje zemeljskih teles pa glede na Zemljo ali na katerikoli drug objekt, ki je nanjo trdno pritrjen. V nekaterih poskusih opazujemo tudi gibanje tekočin ali drugih

[1] II.del, poglavje VII. (OP)

predmetov glede na posodo ali ohišje, ki ga namerno rotiramo. Osebe v premikajoči se kočiji ali ladji lahko opazujejo gibanje svojih teles in drugih predmetov glede na kočijo ali ladjo itd.

V vseh teh primerih gre zgolj za relativno gibanje prvega sistema glede na drugega ali na koordinatni sistem, ki je trdno povezan z drugim. Slednji v vseh primerih, razen v prvem, zagotovo nima lastnosti ustreznega opazovalnega sistema. Narava zvezd stalnic nam je preveč neznana, zvezdno nebo pa je preveč nedoločen pojem, da bi se lahko z gotovostjo odločili, ali bi bil koordinatni sistem, ki je nanje vezan, inercialni opazovalni sistem. Toda lastna gibanja zvezd stalnic smo že ugotovili in tudi v tem primeru je pomembno vedeti, kakšen bi bil vpliv na enačbe gibanja planetarnega sistema, če koordinatni sistem, na katerem temeljijo, ne bi bil inercialni opazovalni sistem.

Če je treba izračunati gibanje enega sistema teles glede na drugega in je gibanje slednjega glede na inercialni opazovalni sistem znano, lahko v vsakem danem primeru ravnamo takole: najprej izračunamo gibanje prvega sistema glede na opazovalni sistem in šele nato izračunamo relativno gibanje prvega sistema glede na drugega iz gibanja obeh glede na skupni inercialni opazovalni sistem.

Vendar je zelo koristno, da tega ne ugotavljamo za vsak posamezen primer posebej, temveč da enkrat za vselej podamo pravila, s katerimi lahko takoj ugotovimo gibanje prvega sistema glede na drugi sistem ali nanj pritrjen koordinatni sistem, takoj ko je podano gibanje drugega sistema glede na inercialni opazovalni sistem, ki ga imenujemo ***mirujoči koordinatni sistem***. Predpostavljamo, da so vsi deli drugega sistema med seboj togo povezani, z njim pa je togo povezan tudi drugi ***(gibljiv) koordinatni sistem***. Problem je torej poiskati splošne enačbe za gibanje prvega sistema teles glede na gibajoči se koordinatni sistem.

§ 78. Prvi posebni primer. Gibljiv koordinatni sistem se ne vrti. Najprej bomo obravnavali poseben primer, ko se drugi sistem in z njim povezani gibljivi koordinatni sistem ne vrtita glede na inercialni opazovalni sistem. Osi tega opazovalnega sistema označimo z O_1X_1, O_1Y_1 in O_1Z_1. Osi OX, OY in OZ gibljivega koordinatnega sistema, ki so trdno povezane z drugim sistemom, izberemo v določenem trenutku tako, da so vzporedne s prejšnjimi koordinatnimi osmi. Te osi bodo nato ves čas vzporedne z njimi, lega gibljivega koordinatnega sistema glede na inercialni opazovalni sistem pa bo vedno določena, če poznamo koordinate a, b, c njegovega koordinatnega izhodišča O glede na inercialni opazovalni sistem.

Ker se po naši predpostavki vsa telesa gibljejo zvezno, bo tudi gibanje sistema, ki smo ga poimenovali drugi, takšno, da so a, b, c zvezne funkcije časa, ki imajo končne prve in druge odvode. To je treba predpostaviti, saj nasprotna domneva ne bi imela fizikalnega pomena. Gibanje drugega sistema je podano, zato so a, b, c znane funkcije časa.

Z x_1, y_1, z_1 označimo koordinate katerekoli materialne točke m prvega sistema glede na inercialni opazovalni sistem, medtem ko so koordinate drugega sistema in s tem tudi koordinate gibljivih koordinatnih osi podane.

Glede na definicijo ustreznega opazovalnega sistema za x_1, y_1, z_1 veljajo običajne enačbe mehanike:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z, \tag{434}$$

kjer so X, Y, Z komponente skupne sile, ki deluje na m v treh smereh koordinat.

Te tri enačbe bi določile gibanje materialne točke m glede na inercialni opazovalni sistem. Vendar ne iščemo tega, temveč gibanje glede na gibljivi koordinatni sistem, torej enačbe za spremembe koordinat x, y, z, masne točke m, ko jo povežemo z gibljivim koordinatnim sistemom.

Ker so osi obeh koordinatnih sistemov vedno vzporedne in so koordinate izhodišča gibljivega koordinatnega sistema glede na inercialni opazovalni sistem a, b, c, so

$$x_1 = x + a\,, \quad y_1 = y + bq,\,, \quad z_1 = z + c\,.$$

Če to vstavimo v enačbe (434), dobimo

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - m\frac{d^2a}{dt^2}\,, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - m\frac{d^2b}{dt^2}\,, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - m\frac{d^2c}{dt^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{435}$$

To so iskane enačbe, ki podajo spremembo koordinat x, y, z katerekoli masne točke m obravnavanega materialnega sistema, ki smo ga imenovali prvi sistem in katerega relativno gibanje glede na gibljivi koordinatni sistem, ki je togo povezan z drugim sistemom, želimo ugotoviti.

Gibanje prvega sistema glede na gibljivi koordinatni sistem torej poteka natanko tako, kot če bi bil ta inercialni opazovalni sistem in bi na vsak masni delec m poleg sil X, Y, Z, ki dejansko delujejo nanj, delovale še tri sile $-m\frac{d^2a}{dt^2}$, $-m\frac{d^2b}{dt^2}$, $-m\frac{d^2c}{dt^2}$ v treh koordinatnih smereh.

S tem smo novo nalogo spremenili v že znano. Izračun izvedemo povsem enako, kot če bi bil gibljivi koordinatni sistem inercialni opazovalni sistem; le da moramo dejansko delujočim silam dodati navedene nove sile, s čimer se enačbe gibanja pretvorijo v obliko, ki jo že poznamo; zato te sile, ki jih je treba dodati, imenujemo ***redukcijske sile*** [Reduktionskräfte][2].

Če je podano relativno gibanje prvega sistema glede na gibljivi koordinatni sistem in so

$$X_1 = X - m\frac{d^2a}{dt^2} \quad Y_1 = Y - m\frac{d^2b}{dt^2} \quad Z_1 = Z - m\frac{d^2c}{dt^2}$$

sile, ki bi povzročile tako gibanje glede na nek inercialni opazovalni sistem, potem so

$$X = X_1 + m\frac{d^2a}{dt^2} \quad Y = Y_1 + m\frac{d^2b}{dt^2} \quad Z = Z_1 + m\frac{d^2c}{dt^2}$$

sile, ki povzročijo tako relativno gibanje glede na koordinatni sistem, ki se giblje na predpisan način. Silam X_1, Y_1, Z_1, ki bi povzročile to gibanje glede na inercialni opazovalni sistem, moramo torej dodati sile $m\frac{d^2a}{dt^2}$, $m\frac{d^2b}{dt^2}$, $m\frac{d^2c}{dt^2}$, da bi sistem vodili tako, da bi izvajal enako gibanje glede na gibajoči koordinatni sistem, zaradi česar bomo slednje sile, ki jih je treba dodati, imenovali ***usmerjevalne sile*** [Führungskräfte].

[2]Vztrajnostne sile (OP)

Potrjeno je bilo, da so redukcijske sile enake nič, tj. prvotna oblika enačb gibanja se ohrani brez dodajanja novih sil le, če je gibanje drugega koordinatnega sistema glede na prvega enakomerno premočrtno.

Če bi na vsakega od obeh sistemov delovala sila, ki je sorazmerna njunima masama, se relativno gibanje obeh sistemov ne bi spremenilo. Takšne sile torej ne bi bile opazne za tiste, ki zaznavajo le ta dva sistema. Velikost in smer sile, ki deluje na enoto mase, bi se seveda lahko s časom še vedno poljubno spreminjala.

§ 79. Primeri. Kot primer redukcijskih sil si oglejmo železniški vagon, ki se premika v smeri abscisne osi. Naj bo neka njegova točka v času t na abscisi a. Na strop je pritrjena viseča svetilka, kozarec s tekočino pa je postavljen na majhno mizico, ki je trdno povezana z vagonom. Takoj, ko se hitrost vagona poveča ali zmanjša, se svetilka in tekočina v kozarcu, morda tudi sam kozarec, če nima zadostnega trenja ob mizno ploščo, za opazovalca, ki relativno miruje v vagonu, premikajo tako, kot da bi na vsak delček mase v vsakem trenutku poleg sil, ki dejansko delujejo nanj, delovala še sila $-m, d^2a/dt^2$ v smeri gibanja vagona.

Pojem usmerjevalnih sil ponazorimo z naslednjim primerom: Da bi človek mirno sedel na klopi v obravnavanem železniškem vagonu, je treba silo $m, d^2a/dt^2$ v smeri gibanja vagona prišteti silam, ki bi na vagonu delovale tudi, ko ta miruje. Ta sila izhaja iz naslonjala, sedeža ali opore stopal in se bo z notranjimi silami ustrezno porazdelila med masne delce telesa. Med pospeševanjem naslonjalo močneje pritiska na hrbet, med zaviranjem pa šibkeje. V primeru zelo močnega zaviranja, na primer če se vozilo nenadoma ustavi, je lahko potisk naslonjala na hrbet negativen; hrbet je treba na naslonjalo pritisniti s silo, na primer s potiskom stopal na oporo, da se zgornji del telesa ne nagne naprej.

Naslednji primer usmerjevalnih sil je naslednji: Enega od koncev vrvice, ki jo obravnavamo kot neraztegljivo, držimo v roki; na drugem koncu vrvice naj bo pritrjeno težko telo. Roka naj predstavlja tisti sistem, ki smo ga v splošni teoriji imenovali drugi, težko telo pa naj predstavlja prvi sistem. Če roka miruje ali se enakomerno premika, mora biti napetost v vrvici, če želi težko telo ostati v relativnem mirovanju glede na roko, natančno enaka njegovi teži. Če se roka premika z navpičnim pospeškom navzdol, se mora na težko telo, če naj vrvica obdrži enako dolžino, dodati usmerjevalna sila, ki deluje navzdol, zato se mora, ker teža telesa ostane nespremenjena, napetost v vrvici, ki vleče navzgor, zmanjševati. Če pa se roka premika s pojemkom navzdol ali pa pospešeno navzgor, se mora sila v vrvici povečati, tako da lahko ta tudi poči pri nenadnem zaustavitvi gibanja navzdol ali nenadnem začetku hitrega gibanja navzgor roke, tudi če je njena trdnost precej večja od teže obešene obremenitve.

§ 80. Drugi posebni primer. Koordinatni sistem se vrti. Zdaj bomo obravnavali poseben primer, ko se sistem, ki smo ga poimenovali drugi sistem, glede na inercialni opazovalni sistem vrti okoli stalne osi.

Za os vrtenja $OZ = O_1Z_1$ izberemo os Z. Naj bosta O_1X_1 in O_1Y_1 poljubni drugi koordinatni osi, medsebojno pravokotni in pravokotni na $OZ = O_1Z_1$, katerih lega glede na inercialni opazovalni sistem ostane nespremenjena, tako da koordinatne osi O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 tvorijo inercialni opazovalni sistem, saj so nanj pritrjene.

Po drugi strani pa naj bosta OX, OY dve drugi koordinatni osi, medsebojno pravokotni in pravokotni na OZ, ki prav tako potekata skozi točko O in ki v nekem trenutku (na začetku časa) sovpadata z O_1X_1, O_1Y_1, vendar se vedno vrtita z drugim sistemom, ki je z njima tesno povezan, tako da je kot X_1OX enak kotu w, za katerega se je drugi sistem v danem trenutku zasukal glede na inercialni opazovalni sistem v pozitivnem smislu. Ta kot naj bi bil dana funkcija časa, ki ima končni prvi in drugi odvod, s čimer je gibanje drugega sistema v celoti podano.

Iščemo relativno gibanje kateregakoli drugega masnega sistema (prvega) glede na drugega, tj. glede na osi OX, OY, OZ. Naloga je torej, da poiščemo spremembe koordinat x, y, z poljubnega ***masnega delca*** m iz prvega sistema glede na ta koordinatni sistem. Nalogo lahko rešimo na naslednji način.

Naj bodo x_1, y_1, z_1 koordinate obravnavanega masnega delca glede na koordinatni sistem O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1, in naj bodo X_1, Y_1, Z_1 komponente skupnih sil, ki delujejo na m v smereh O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1; potem je, ker slednje osi tvorijo inercialni opazovalni sistem

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1\,, \quad m\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1\,, \quad m\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1\,. \tag{436}$$

Ker je w kot med dvema osema x, imamo poleg tega še

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos w - y\sin w \\ y_1 &= x\sin w + y\cos w \\ z_1 &= z \end{aligned}\right\} \tag{437}$$

Ker je w podan kot funkcija t, lahko iz teh izračunamo druge odvode x_1, y_1, z_1 glede na čas. Če jih vstavimo v enačbe (436), iz njih po ustreznih okrajšavah dobimo iskane enačbe za druge odvode x, y, z po času.

Vendar pa je ta postopek, če ga ne poenostavimo z uporabo Lagrangeevih enačb, o čemer bomo govorili pozneje, nekoliko zapleten. Do cilja pridemo hitreje, če uvedemo polarne koordinate.

Naj bo r pravokotna razdalja masnega delca m od osi z in naj bosta ϑ in ϑ_1 kota, ki ju oklepa r z dvema pozitivnima abscisnima osema OX in O_1X_1. Potem so r, ϑ_1 in z običajne polarne koordinate za določanje lege glede na inercialni opazovalni sistem. Če torej smer pozitivne z–osi na kratko označimo kot smer z, smer podaljška r, ki poteka od osi z proti masi m, kot smer r, in smer, ki poteka pravokotno na obe v smislu, v katerem se m premika, ko ϑ in ϑ_1 rasteta, kot smer ϑ, ter z Z, R, in Θ označimo komponente skupne sile, ki deluje na m v teh treh smereh, dobimo po § 11

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2r}{dt^2} - m\,r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)^2 &= R, \\ m\,r\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + 2m\,r\frac{d\vartheta_1}{dt}\frac{dr}{dt} &= \Theta, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right\} \tag{438}$$

z teh enačb, ki nam podajo ***absolutno gibanje*** mase m, tj. njeno gibanje glede na inercialni opazovalni sistem, takoj najdemo iskano relativno gibanje, če namesto ϑ_1 uvedemo polarni kot ϑ s premično osjo OX, ker vrtenje ne vpliva na koordinate r in

z. Ker smo kot med abscisnima osema v času t označili z w, je, če kotno hitrost $\frac{dw}{dt}$ drugega koordinatnega sistema glede na opazovalni sistem označimo s ω,

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} + \omega, \qquad \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt}.$$

Če to vstavimo v enačbe (438), dobimo:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2r}{dt^2} - m\,r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 &= R + m\,r\,\omega^2 + 2mr\omega\frac{d\vartheta}{dt}, \\ m\,r\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + 2m\,r\frac{d\vartheta_1}{dt}\frac{dr}{dt} &= \Theta - mr\frac{d\omega}{dt} - 2m\omega\frac{dr}{dt}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{439}$$

§ 81. Razlaga izpeljanih enačb. Enačbe za spremembo r, ϑ in z so s tem ponovno prikazane v natanko isti obliki kot enačbe (438). Gibanje relativno proti vrtečemu se koordinatnemu sistemu tako poteka natanko tako, kot če bi bil ta negibljiv (tj. inercialni opazovalni sistem) in bi nanjo poleg sil, ki dejansko delujejo, delovale še naslednje dodatne sile:

1. Sila intenzitete m, r, ω^2 v smeri r, ki jo imenujemo ***centrifugalna sila*** K_1.
2. Sila velikosti $mr\frac{d\omega}{dt}$, ki deluje v nasprotni smeri ϑ. To drugo silo bomo imenovali ***tangencialna redukcijska sila*** in jo označili s K_2.
3. Sila velikosti $2, m, \omega, p$, pri čemer je p projekcija hitrosti materialne točke m na ravnino xy. To tretjo silo imenujemo ***Coriolisova sila*** K_3. Njena smer leži v ravnini xy, je pravokotna na smer komponente hitrosti, označene s p, torej tudi na samo hitrost c, in deluje tako, da se njena smer z rotacijo obrača v smer p v smislu, v katerem se vrti ***referenčno telo*** [Bezugskörper], torej v primeru pozitivnega ω v enakem smislu, kot se pozitivna os x obrača v pozitivno os y po najkrajši poti.

Te tri sile bomo poimenovali redukcijske sile. Če jih za vsako materialno točko m sistema, ki smo ga poimenovali prvi sistem, dodamo silam, ki nanjo delujejo v vsakem primeru, lahko izračunamo relativno gibanje tega sistema glede na vrteče se koordinatne osi (ali glede na drugi sistem, ki je z njim trdno povezan) natančno tako, kot če bi bil v mirovanju, tj. kot glede na inercialni opazovalni sistem.

Kar smo povedali v točkah 1 in 2 o centrifugalni sili K_1 in tangencialni redukcijski sili K_2, je razvidno iz enačb (439). Pojasniti je treba le še to, kar je bilo navedeno pod točko 3 o ***Coriolisovi sili*** K_3. Če smo dodali centrifugalno silo K_1 in tangencialno redukcijsko silo K_2, moramo, kot izhaja iz enačb (439), dodati še dve sili, da bi iz enačb (439) dobili takšne enačbe, ki imajo natanko takšno obliko kot enačbe (438), tj. da se gibanje odvija natančno tako, kot če bi bile osi OX, OY, OZ inercialni opazovalni sistem.

Ti dve sili, ki ju je treba vedno dodati, sta:

1. Sila $R' = 2, m, \omega, r d\vartheta/dt$ v smeri r.

2. Sila $\Theta' = -2, m, \omega, dr/dt$ v smeri ϑ.

Dokazati moramo še, da je Coriolisova sila K_3 dejansko rezultat teh dveh sil. To storimo takole: dr/dt, $d\vartheta/dt$ in dz/dt so tri komponente hitrosti c v treh smereh r, ϑ in z. Prvi dve od teh količin sta torej projekciji hitrosti p v smeri r in ϑ, tako da dobimo:

$$\frac{dr}{dt} = p\cos(p, r)\,, \quad r\frac{d\vartheta}{dt} = p\sin(p, r)\,.$$

Zato sta:

$$\left.\begin{aligned} R' &= 2m\omega p\sin(p,r) = 2m\omega p\cos[\angle(p,r) - 90^0],\\ \Theta' &= 2m\omega\sin(p,r)p\sin(p,r) = 2m\omega p\sin[\angle(p,r) - 90^0]. \end{aligned}\right\} \tag{440}$$

R' in Θ' sta torej dejansko komponenti ene same sile velikosti $K_3 = 2, m, \omega, p$, katere smer je zasukana za 90° v nasprotno smer od p, to je v smer, v kateri se pozitivna os y po najkrajši možni poti zasuka v smer pozitivne osi x.

Če pa določene sile R_1, Θ_1 povzročijo določeno gibanje glede na inercialni opazovalni sistem, jim je treba dodati sile $-K_1$, $-K_2$ in $-K_3$, da bi povzročili enako gibanje glede na koordinatni sistem, ki se vrti s spremenljivo kotno hitrostjo ω. To pomeni, da so $-K_1$, $-K_2$ in $-K_3$ usmerjevalne sile, ki jih je treba dodati silam, potrebnim za določeno gibanje glede na mirujoč koordinatni sistem, da bi katero koli maso usmerili tako, da bi opravila enako gibanje glede na rotirajoči se koordinatni sistem.

§ 82. Nadaljnja specializacija. Zamislimo si lahko določene zunanje sile, ki delujejo na prvi fizikalni sistem, in zdaj primerjamo sile, ki bi jih drugi sistem moral izvajati na prvega, če bi bil drugi v mirovanju, s silami, ki bi jih moral izvajati na prvega, če bi se drugi gibal na določen način, pri čemer v obeh primerih predpostavljamo enako relativno gibanje. Sile, ki jih je treba dodati v drugem primeru, so usmerjevalne sile.

Če se rotirajoči koordinatni sistem enakomerno vrti in vsak masni delec prvega sistema glede na njega miruje, potem K_2 in K_3 odpadeta. Drugi sistem mora torej za ohranjanje relativnega mirovanja delovati na prvega s popolnoma enakimi silami, kot če bi ob enakih zunanjih silah oba mirovala, vendar pa bi na vsak masni delec prvega sistema še vedno delovala centrifugalna sila K_1, ki je zato v tem primeru edina ***dodatna sila***.

Poleg sil, ki vzdržujejo ravnotežje, ko oba sistema mirujeta, mora na vsak masni delec prvega sistema delovati sila, nasprotno usmerjena centrifugalni sili, tj. centripetalna sila, ki je torej usmerjevalna sila, ki vodi vsak masni delec prvega sistema po krožnici, ki jo opisuje med vrtenjem.

Takoj ko se vrtenje drugega sistema pospeši ali zavira, se centripetalni sili doda sila, nasprotno usmerjena tangencialni redukcijski sili K_2, in zanjo velja enako kot za centripetalno silo. Toda takoj ko se prvi sistem premakne glede na drugega, tudi ti dve sili ne zadostujeta. Takrat se pojavi še sila K_3, nasprotno usmerjena Coriolisovi sili. Če želimo enačbam, ki veljajo za relativno gibanje prvega sistema glede na rotirajoči koordinatni sistem, dati enako obliko, kot če bi bil slednji inercialni opazovalni sistem, moramo dodati K_1, K_2, K_3. Toda silam, s katerimi drugi sistem, ki si ga predstavljamo v mirovanju, deluje na prvega, moramo dodati $-K_1$, $-K_2$ in $-K_3$, da bi ugotovili sile, ki jih mora pri svojem predpisanem gibanju delovati na prvega, da bi ohranil enako relativno gibanje s prvim.

Naj bo na primer notranjost posode rotacijsko telo z navpično osjo, okoli katere se posoda vrti s konstantno kotno hitrostjo. V posodi naj bo živo srebro, voda in olje ter po možnosti tudi druga trdna telesa. Zaradi trenja se stanje mirovanja vzpostavi šele takrat, ko vse tekočine in trdna telesa med seboj ali proti vrteči se posodi nimajo več nobenega relativnega gibanja. To ravnotežje je mogoče izračunati natančno tako, kot če bi posoda in njena vsebina mirovali, vendar bi na vsak masni delec posode poleg težnosti delovala tudi ustrezna centrifugalna sila. Na ta način se na steno posode v mirovanju ustvari enak tlak, kot je v premikajoči se posodi pod vplivom same težnosti.

Podobno lahko ravnotežje ***težkega telesa*** [schweren Körpers], obešenega na vrvico, ki se enakomerno vrti, ugotovimo natančno tako, kot če bi bilo v mirovanju in bi na vsak njegovo točko poleg težnosti delovala tudi centrifugalna sila. Upor zraka ne upoštevamo, saj se zrak vrti le delno. Da to ne bi bilo moteče, bi bilo treba nit skupaj z okoliškim zrakom zapreti v posodo, ki se vrti z enako hitrostjo.

Če je težko telo z neraztegljivo ali elastično vrvico obešeno nekje na Zemlji in glede nanjo miruje, potem se obnaša tako, kot da bi skupaj z Zemljo mirovalo, poleg Zemljine privlačnosti in napetosti vrvice pa bi nanj, zaradi vrtenja Zemlje, delovala tudi centrifugalna sila. Vrvica se torej postavi v smer rezultante Zemljine privlačnosti na telo in centrifugalne sile, ki je posledica vrtenja Zemlje. To smer imenujemo smer ***navidezne težnosti*** [scheinbaren Schwere] ali navideznega težnostnega pospeška ali na kratko navpična smer v zadevni točki na zemeljski površini. Če ta točka leži na severni polovici Zemlje, se ne stika z zemeljsko osjo v središčni točki Zemlje O', temveč južno od nje v točki O. Napetost v vrvici, ki nosi telo, tudi ni enaka privlačni sili Zemlje na to telo, temveč rezultanti te privlačnosti in centrifugalne sile. Ta rezultanta, ki vedno določa silo v vrvici ali tlak telesa na podlago v primeru, če to miruje relativno na Zemljino površje, imenujemo ***navidezna teža telesa*** v tej točki na Zemlji. Navidezna teža, deljena z maso telesa, imenujemo ***navidezni težnostni pospešek*** v tej točki na Zemlji. Če telo prosto pada, tj. če nanj ne deluje nobena druga sila razen težnostne privlačnosti Zemlje[3], potem ima, kot bomo videli, njegov pospešek glede na Zemljo točno takšno velikost in smer kot navidezni težnostni pospešek, ki prevladuje v dani točki, le v trenutkih, ko je njegova hitrost glede na Zemljo enaka nič.

V hidrostatiki bomo videli, da mora biti v primeru ravnotežja površina tekočine vedno pravokotna na rezultanto vseh sil, ki delujejo na delec površine. Površina morja, ki je v stanju relativnega mirovanja glede na Zemljo, mora biti torej na vsakem mestu pravokotna na navpično smer tega mesta. Izkušnje kažejo, da je tudi površina trdnega zemeljskega telesa, razen vzpetin, hribov in gora, ki so v primerjavi z dimenzijami Zemlje zanemarljivo majhni, pravokotna na to smer, morda zato, ker je bila Zemlja tekoča v času, ko je že imela skoraj enako hitrost vrtenja, morda tudi zato, ker je še vedno dovolj deformabilna, da je v tako dolgem času dobila ustrezno obliko. Zemlja torej ni krogla, temveč skoraj rotacijski elipsoid, ki je na polih sploščen.

§ 83. Ponovna uvedba pravokotnih koordinat. Najprej v enačbe (439) ponovno uvedemo pravokotne koordinate, ki se nanašajo na osi OX, OY, OZ, ki smo jih uporabili

[3]Dodatne sile, ki so posledica njegovega gibanja in vrtenja Zemlje, seveda niso dejansko vključene med sile, ki delujejo na telo, saj jih zgolj predstavljamo, da si olajšamo izračun.

že na začetku § 80. To najlažje storimo, če upoštevamo, da gibanje poteka natanko tako, kot da bi se dogajalo relativno glede na inercialni opazovalni sistem, če dejansko delujočim silam na m, katerih rezultanta v smereh treh koordinatnih osi OX, OY, OZ naj bi imela komponente X, Y, Z, prištejemo tri sile K_1, K_2, K_3, ki imajo vse ničelno komponento v smeri OZ. Ker ima K_1 smer r, sta $m, \omega^2 x$ in $m, \omega^2 y$ njeni komponenti v smereh OX in OY. Ker je nadalje sila $K_2 = m, r d\omega/dt$ pravokotna na r in deluje po prej navedenem pravilu v smislu, v katerem raste w, tako, da če sta $d\omega/dt$ in koordinate materialne točke m pozitivne, je njihova x komponenta pozitivna, y komponenta pa negativna, torej sta $m, y d\omega/dt$ in $-m, x d\omega/dt$ njuni komponenti v smereh OX in OY. Nazadnje, ker je K_3 pravokotna na hitrost, označeno s p, in ima za pozitivne vrednosti dx/dt in dy/dt pozitivno komponento v smeri x in negativno komponento v smeri y, sta torej $2, m, \omega dy/dt$ in $-2, m, \omega dx/dt$ njegovi komponenti v smeri OX in OY. Če vse te sile prištejemo silam X, Y, Z, ki dejansko delujejo na m, dobimo običajne enačbe gibanja, ki so po deljenju z m:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{m}X + \omega^2 x + y\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{m}Y + \omega^2 y - x\frac{d\omega}{dt} - 2\omega\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{1}{m}Z. \end{aligned}\right\} \tag{441}$$

Te enačbe je zelo enostavno izpeljati neposredno z uporabo L a g r a n g eevih enačb za posplošene koordinate. Očitno lahko koordinate x, y, z mase m glede na vrteči se koordinatni sistem obravnavamo kot spremenljivke, ki v vsakem trenutku enolično določajo njeno lego, in zato uporabimo Lagrangeeve enačbe, v katerih je treba za p_1, p_2, p_3 izbrati x, y, z. Iz enačb (437) sledi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}\cos w - \dot{y}\sin w - x\,\omega\sin w - y\,\omega\cos w, \\ \dot{y}_1 &= \dot{x}\sin w + \dot{y}\cos w + x\,\omega\cos w - y\,\omega\sin w. \end{aligned}$$

Živa sila mase m je

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) = m\left[\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + \left(x^2 + y^2\right)\frac{\omega^2}{2} + (x\dot{y} - y\dot{x})\,\omega\right].$$

Iz tega sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= m\left(\omega^2 x + \omega\,\dot{y}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m\left(\omega^2 y - \omega\,y\dot{x}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\left(\dot{x} - \omega\,y\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\left(\dot{y} + \omega\,x\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \end{aligned}$$

Če te vrednosti vstavimo v ***Lagrange***ve enačbe, ki so v tem primeru:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X$$

z dvema podobnima enačbama za osi y in z, takoj dobimo enačbe (441).

To je primer uporabe posplošenih koordinat, ki eksplicitno vsebujejo čas, zato je tudi tu kinetična energija T nehomogena kvadratna funkcija $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

§ 84. Osnovne enačbe za gibanje težkega telesa glede na vrtečo se Zemljo. Na kratko bomo obravnavali enega najpomembnejših problemov relativnega gibanja, in sicer gibanje bremena glede na vrtečo se Zemljo. Obravnavali bomo le gibanje težke materialne točke z maso m glede na Zemljo.

Naj bo N severni pol Zemlje, A pa točka na severni polobli, kjer je bila v začetnem času materialna točka m. V točko A postavimo pravokotni koordinatni sistem. Os $A\zeta$ kaže v nasprotno smer od navidezne težnosti v točki A. Negativna os $A\zeta$ seka zemeljsko os v točki O. Kot NOA označimo z $90 - \varepsilon$, tako da je ε geografska širina točke A. Os $A\eta$ je v točki A južna, os $A\xi$ pa zahodna. Normala iz točke A na zemeljsko os ima osnovno točko O', AA' pa je njen podaljšek izven točke A. Točka A in osi $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ so fiksno povezane z Zemljo med njenim vrtenjem.

V nekem času t ima točka m koordinate ξ, η, ζ glede na ta koordinatni sistem, c je njena hitrost glede na Zemljo, $u = \dfrac{d\xi}{dt}$, $v = \dfrac{d\eta}{dt}$, $w = \dfrac{d\zeta}{dt}$ pa njene komponente glede na koordinatne osi. Naj bodo Ξ, H, Z komponente celotne sile z vključeno centrifugalno silo, ki deluje na m, v koordinatnih smereh, tako da bi bila, če bi deloval le zemeljski privlak, v sami točki A $\Xi = \mathrm{H} = 0$, $-\mathrm{Z}$ pa enaka navidezni težnosti m, g mase m, če je g navidezni težnostni pospešek v A.

Enačbe mehanike, ki veljajo za mirujoča telesa, lahko uporabimo, če silam Ξ, H, Z dodamo Coriolisovo silo. Zlahka dokažemo, da je rezultanta Coriolisovih sil, ki jih povzroča več hitrosti, enaka Coriolisovi sili, ki jo povzroča rezultanta teh hitrosti.

Coriolisova sila, ki jo povzroča komponenta hitrosti u, ima velikost $2, m, u, \omega$ in je pravokotna na u v ravnini, normalni na zemeljsko os. Ima smer AO', saj zaradi vrtenja Zemlje po najkrajši poti preide v pozitivno smer $A\xi$. ω je kotna hitrost vrtenja Zemlje. Tako so komponente Coriolisove sile, ki jo povzroča u v smereh $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, enake nič, $-2, m, u, \omega \sin\varepsilon$, $-2, m, u, \omega\cos\varepsilon$.

Da bi ugotovili Coriolisovi sili, ki ju povzročata komponenti hitrosti v in w, moramo ti dve komponenti hitrosti projicirati na ravnino, ki je pravokotna na Zemljino os. Projekciji sta $v\sin\varepsilon$ in $w\cos\varepsilon$, obe pa imata smer AA'. Coriolisovi sili, ki ju povzročata, imata torej smer $A\xi$ in sta $2, m, \omega, v\sin\varepsilon$ oziroma $2, m, \omega, w\cos\varepsilon$.

Če vse te Coriolisove sile dodamo silam Ξ, H, Z, dobimo enačbe gibanja:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{m}\Xi + 2\omega\left(v\sin\varepsilon + w\cos\varepsilon\right), \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m}\mathrm{H} - 2\,\omega\,u\sin\varepsilon, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{m}\mathrm{Z} - 2\,\omega\,u\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{442}$$

Te enačbe običajno izpeljemo na drugačen način. Najprej izberemo O kot izhodišče koordinat, ON kot pozitivno z os, os y pa položimo skozi O v geografski poldnevnik kraja A. Če so x, y, z koordinate materialne točke m v trenutku t glede na ta koordinatni sistem, potem za x, y, z veljajo enačbe (441). Nato v te enačbe vstavimo ξ, η, ζ, ki jih dobimo s koordinatno transformacijo. Transformacijske enačbe so, kot je razvidno, naslednje:

$$\left.\begin{aligned} \xi = x, \quad \eta = y\sin\varepsilon - z\cos\varepsilon, \quad \zeta = y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon - OA, \\ y = \eta\sin\varepsilon + (\zeta + OA)\cos\varepsilon, \quad z = -\eta\cos\varepsilon + (\zeta + OA)\sin\varepsilon, \\ \Xi = X, \quad \mathrm{H} = Y\sin\varepsilon - Z\cos\varepsilon \quad \mathrm{Z} = Y\cos\varepsilon + Z\sin\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{443}$$

Tako smo ponovno izpeljali enačbe (442).

Pri tem imamo naslednjo možnost. Gravitacijsko delovanje Zemlje na m ima v vsakem primeru potencial φ, ki jo lahko z zadostnim približkom obravnavamo kot funkcijo z in $\sqrt{x^2+y^2}$. Če torej deluje samo gravitacija, so X, Y, Z negativni parcialni odvodi (443) $\psi = \varphi - \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)$ glede na koordinate.

Da bi izračunali $-\Xi$, $-\mathrm{H}$, $-\mathrm{Z}$, pa moramo v ta izraz le vstaviti x, y, z in nato parcialno odvajati glede na ξ, η, ζ.

Tako dobimo splošne enačbe:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{1}{m}\left(\Xi' - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + 2\omega\left(v\sin\varepsilon + w\cos\varepsilon\right),\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m}\left(\mathrm{H}' - \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) - 2\,\omega\,u\sin\varepsilon,\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{1}{m}\left(\mathrm{Z}' - \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) - 2\,\omega\,u\cos\varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{444}$$

pri čemer členi, ki vsebujejo ψ, predstavljajo učinek težnosti in centrifugalne sile, Ξ', H', Z' pa so komponente sil, ki na drug način delujejo na maso m.

Vendar pa lahko funkcijo ψ določimo le približno, zato si bomo pomagali z enačbami (442).

§ 85. Primeri. Naj se materialna točka m le malo oddalji od začetne točke A. Ker je tam os $A\zeta$ nasprotna navidezni težnosti, je tam, če deluje samo težnost, $\Xi = \mathrm{H} = 0$, $\mathrm{Z} = -m, g$. V neposredni bližini točke A imamo torej enačbe:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= 2\omega\left(v\sin\varepsilon + w\cos\varepsilon\right),\\
\frac{dv}{dt} &= -2\,\omega\,u\sin\varepsilon,\\
\frac{dw}{dt} &= -g - 2\,\omega\,u\cos\varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{445}$$

1. *Met proti jugu.* Materialna točka m ima na začetku zelo veliko vodoravno hitrost v proti jugu. Iz prve od enačb (445) sledi, da postopoma pridobi še hitrost proti zahodu $u = 2, \omega, t, v, \sin\varepsilon$. Zato se usmeri proti zahodu. Šele ko u postane večji, začne ponovno vplivati na v, in ko navpično gibanje traja dlje, vpliva tudi na u. Najprej pa je opazen premik proti zahodu. Ker je hitrost u sorazmerna s časom, je premik proti zahodu $\xi = \omega, t^2 v\sin\varepsilon$ sorazmeren kvadratu časa.

Podobno ima telo, ki ga vržemo proti zahodu, odklon proti severu; telo, ki ga vržemo proti severu, odklon proti vzhodu; telo, ki ga vržemo proti vzhodu, pa odklon proti jugu. Telo, ki ga vržemo proti jugu, prileti na območja, kjer je relativna vzhodna hitrost točk na zemeljski površini zaradi vrtenja Zemlje večja, in tako zaostane proti zahodu, medtem ko se telo, ki ga vržemo proti severu, premika proti vzhodu v primerjavi z zemeljsko površino pod njim.

Telo, ki ga vržemo proti zahodu, pa se v prostoru absolutno giblje v navpični ravnini, ki poteka skozi namišljeno točko A, fiksirano v prostoru. Če pa se točka premika z

Zemljo, se navpična ravnina, ki poteka skozi točko A, obrne, in sicer njena zahodna polovica proti jugu, tako da se prvotna navpična ravnina odkloni proti severu.

Benzenbergovi poskusi padanja. Naj materialna točka m prosto pade brez začetne hitrosti. V prvem približku je:

$$w = -g\,t\,, \quad u = -\omega g\,t^2\cos\varepsilon\,, \quad xi = -\frac{\omega}{3} g\,t^3\cos\varepsilon\,.$$

Tako telo ne pada v navpični smeri (smer niti, napete skozi breme v mirovanju), temveč ima odklon proti vzhodu, pri čemer je absolutna vrednost odklona sorazmerna s tretjo potenco časa padanja. Približek bi lahko enostavno izboljšali in izračunali vpliv ω^2, vendar zaenkrat to ni potrebno.

3. *Foucaultevo nihalo.* Če dolgo nihalo opisuje le majhne kote odklona, ga lahko z zadostnim približkom obravnavamo kot materialno točko, ki se giblje v ravnini $\xi\eta$, in na katero vedno deluje sila v smeri njene mirujoče lege A, sorazmerna z oddaljenostjo od nje. Zato je treba v enačbe (442) vnesti $w = 0$, $\Xi = -m, a^2\xi$, $\mathrm{H} = -m, a^2\eta$. Te se torej preoblikujejo v

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -a^2\xi + 2b\frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -a^2\eta - 2b\frac{d\xi}{dt}, \end{aligned}$$

kjer je $b = \omega\sin\varepsilon$.

Splošni integral je

$$\begin{aligned} \xi &= A\cos\left(n_1 t + B\right) + C\cos\left(n_2 t + D\right), \\ \eta &= A\sin\left(n_1 t + B\right) - C\sin\left(n_2 t + D\right), \end{aligned}$$

kjer je

$$n_1 = \sqrt{a^2+b^2} - b, \quad n_2 = \sqrt{a^2+b^2} + b$$

ali, ker je b majhen proti a,

$$n_1 = a - b, \quad n_2 = a + b.$$

Najpreprostejši poseben primer je

$$\begin{aligned} \xi &= A\left[\cos\left(a-b\right)t + \cos\left(a+b\right)t\right] = 2A\cos bt\cos at, \\ \eta &= A\left[\sin\left(a-b\right)t - \sin\left(a+b\right)t\right] = -2A\sin bt\cos at. \end{aligned}$$

Tako nihalo sprva niha v smeri zahod–vzhod, po času $\frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{2\omega\sin\varepsilon}$ pa v smeri sever–jug, kar pomeni, da se zahodni odmik (elongacija) nenehno spreminja v severni odmik itd. Ravnina nihanja se zavrti v $24/\sin\varepsilon$ urah za 360°, nasprotno od vrtenja Zemlje, tj. natanko tako, kot če bi bila lega ravnine nihanja v prostoru stalna, Zemlja pa bi se glede nanjo vrtela s kotno hitrostjo $\omega\sin\varepsilon$, ki je komponenta njene kotne hitrosti okoli navpičnice točke A kot osi. Vendar se ta način gibanja pojavi le, če je A eden od zemeljskih polov. Pri vseh drugih legah odstopanja zaradi navpičnega gibanja nihala povzročajo majhne odklone, ki smo jih pri teh navpičnih gibanjih zanemarili.

§ 86. Gibanje v ravnini navidezne težnosti. Ker je težnost velika v primerjavi s Coriolisovo silo, bodo pri gibanju mase m na daljši razdalji najprej opazna odstopanja, ki nastanejo zaradi spreminjanja težnosti po smeri in velikosti. Če je točka m prisiljena, da se giblje po nivojski ploskvi navidezne težnosti, se ta vedno izniči s protisilo, ki to točko zadržuje na ploskvi. Nato lahko z večjo natančnostjo izračunamo tir gibajoče se točke iz enačb (442), ne da bi bilo treba poznati funkciji φ in ψ.

Poleg navidezne težnosti in sile, ki deluje na točko m tako, da ta ostane na ploskvi, ne sme delovati nobena druga sila. Če je ploskev ravnina (ki sovpada z ravnino $\xi\,\eta$), potem iz (442) dobimo dve enačbi:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\omega\sin\varepsilon\,\frac{d\eta}{dt}\,, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -2\omega\sin\varepsilon\,\frac{d\xi}{dt}\,.$$

Če je za $t = 0$, npr. $\xi = \eta = 0$, $\dfrac{d\xi}{dt} = u_0$, $\dfrac{d\eta}{dt} = v_0$, dobimo po integraciji:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{v_0}{c}\,[1 - \cos{(c\,t)}] + \frac{u_0}{c}\sin{(c\,t)} \\ \eta &= \frac{u_0}{c}\,[\cos{(c\,t)} - 1] + \frac{v_0}{c}\sin{(c\,t)} \end{aligned}$$

kjer je $c = 2\,\omega\sin\varepsilon$. Enačba tira je

$$\left(\xi - \frac{v_0}{c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{v_0}{c}\right)^2 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{c^2}.$$

To je krog s polmerom $\dfrac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{2\omega\sin\varepsilon}$. To je razdalja, ki bi jo telo, ki se giblje s hitrostjo $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$, prepotovalo v približno $\dfrac{2}{\sin\varepsilon}$ urah. Celoten krog je opisan v $\dfrac{12}{\sin\varepsilon}$ urah, v tem času pa bi trenje verjetno že izničilo hitrost. Prej ugotovljeni stranski odkloni vodoravno vrženih teles so posledica dejstva, da se gibljejo po loku tega kroga. Nasprotno pa iz prej ugotovljenega dejstva, da se bočni odklon pri vsakem vodoravnem metu pojavi v isti smeri in povzroči enako ukrivljenost, gibanje po krogu sledi samo po sebi.

Če bi želeli izračunati gibanje težke točke [schweren Punktes] v ravnini z navidezno težnostjo, ki ni relativno glede na Zemljo, temveč absolutno v prostoru, bi morali upoštevati, da sama težnost ni pravokotna na obravnavano ravnino, temveč ima na njo tangencialno komponento, ki je vedno ravno nasprotna centrifugalni sili. Posledica te komponente je, da se telo, ki se mora gibati v ravnini navidezne težnosti in ima na začetku hitrost, ki jo ima ista točka na Zemlji zaradi vrtenja Zemlje, ne giblje absolutno v prostoru po geodetski liniji ravnine navidezne težnosti, temveč po vzporednem krogu, ki je pravokoten na zemeljsko os. Če ima hitrost v isti smeri, ki pa je večja ali manjša, ta komponenta pojasni stransko odstopanje, če izhajamo iz obravnave absolutnega gibanja telesa in ga šele nato primerjamo z gibanjem Zemlje.

§ 87. Najsplošnejše enačbe relativnega gibanja. Povedali bomo le nekaj besed o splošnem primeru, ko se kateri koli togi sistem (drugi sistem) giblje povsem poljubno, gibanje nekega drugega sistema (prvega sistema) pa je treba izračunati glede na njegovo gibanje.

Gibanje drugega sistema lahko sestavimo iz gibanja točke Ω (težišče ali katera koli druga točka) po krivulji in vrtenja okoli osi, ki vedno poteka skozi to točko – trenutna os vrtenja. Položaj osi in kotna hitrost vrtenja se lahko s časom neprestano spreminjata. Tako kot v § 80 uvedemo fiksni koordinatni sistem OX, OY, OZ in gibljivi $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$. Osi slednjega so pritrjene na drugi sistem, njegovo izhodišče pa je obravnavana točka Ω.

Iščemo enačbe za spremembo koordinat ξ, η, ζ poljubne materialne točke m prvega sistema glede na drugi gibljivi koordinatni sistem, medtem ko za koordinate x, y, z iste točke glede na fiksni koordinatni sistem uporabimo običajne gibalne enačbe mehanike. Najhitrejši način za to je nedvomno uporaba Lagrangevih enačb. Komponente hitrosti točke Ω drugega sistema v smereh $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, ki imajo v tem trenutku gibljive koordinatne osi, označimo, kot v § 26, z u, v, w. Komponente trenutne kotne hitrosti drugega sistema, torej tudi gibljivega koordinatnega sistema, v istih smereh $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ in $\Omega\zeta$ pa z λ, μ, ν. Če bi točka s koordinatami ξ, η, ζ mirovala glede na gibajoči se koordinatni sistem, tako da bi bile ξ, η, ζ neodvisne od časa, bi bile njene komponente hitrosti v smereh $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ in $\Omega\zeta$ skladne z enačbami (156).[4]

$$u + \mu\,\zeta - \nu\,\eta\,, \quad v + \nu\,\xi - \lambda\,\zeta\,, \quad w + \lambda\,\eta - \mu\,\xi\,. \tag{446}$$

Gibanje drugega sistema in s tem gibajočega se koordinatnega sistema si lahko predstavljamo tako, da sta nam v vsakem trenutku dani njegova začetna lega in vrednosti u, v, w, λ, μ, ν. Če je gibanje drugega sistema podano na kakršen koli drug način, lahko iz tega izračunamo vrednosti teh šestih količin za poljuben čas. Koordinate ξ, η, ζ masnega delca m prvega sistema glede na gibajoči koordinatni sistem so odvisne od časa. Njihovi odvodi glede na čas naj bodo $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$. Skupne komponente hitrosti masnega delca m v smereh, ki jih imajo $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ in $\Omega\zeta$ v trenutku, torej najdemo tako, da trem izrazom (446) prištejemo še $\dot\xi$ oziroma $\dot\eta$ in $\dot\zeta$. Te tri komponente skupne hitrosti masnega delca m so torej:

$$\dot\xi + u + \mu\,\zeta - \nu\,\eta\,, \quad \dot\eta + v + \nu\,\xi - \lambda\,\zeta\,, \quad \dot\zeta + w + \lambda\,\eta - \mu\,\xi\,,$$

trenutna kinetična energija masnega delca m pa je

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\dot\xi + u + \mu\,\zeta - \nu\,\eta\right)^2 + \left(\dot\eta + v + \nu\,\xi - \lambda\,\zeta\right)^2 + \left(\dot\zeta + w + \lambda\,\eta - \mu\,\xi\right)^2\right].$$

Če torej $X.$ označimo silo, ki deluje na premično točko v smeri $\Omega\xi$, je enačba glede na abscisno smer:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\xi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\xi} = X$$

ali po vnosu vrednosti za T

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\dot\xi + u + \mu\,\zeta - \nu\,\eta\right) - \frac{1}{m}X = \\
&\quad = \nu\left(\dot\eta + v + \nu\,\xi - \lambda\,\zeta\right) - \mu\left(\dot\zeta + w + \lambda\,\eta - \mu\,\xi\right) \\
&\quad = \nu\left(\dot\eta + v\right) - \mu\left(\dot\zeta + w\right) + \xi\left(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\right) - \lambda\left(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta\right).
\end{aligned}$$

[4] Enačba je v II. delu (OP)

Enačbe, ki se nanašajo na drugi dve koordinatni osi, dobimo iz te s ciklično zamenjavo. Enostavno bi bilo izpeljati enačbe, v katerih se pojavljajo druge spremenljivke, ki določajo gibanje drugega sistema, npr. komponente hitrosti Ω in hitrosti vrtenja v smereh nepremičnih koordinatnih osi, ter geometrijsko obravnavati različne dodatne ali redukcijske sile. Vendar se s tem ne želim podrobno ukvarjati, saj teh splošnih enačb doslej nismo uporabljali. Opozoriti je treba le, da če trenutno kotno hitrost togega sistema razdelimo na komponente, je dejanska trenutna hitrost vsake točke seštevek hitrosti, ki bi jih točka imela zaradi vsake posamezne komponente. Vendar to nikakor ne velja za pospeške, saj ti izhajajo iz neskončno majhnih količin drugega reda, ki so bile pri dokazu izreak o sestavljanju zasukov zanemarjene. Zato redukcijske sile in sile vodenja, ki jih je treba upoštevati zaradi vrtenja opazovalnega sistema, nikakor niso zgolj seštevek tistih, ki bi jih upoštevali za vsako komponento vrtenja posebej, če bi bila prisotna le ta komponenta.

§ 88. Zakon vztrajnosti. Na koncu se bomo vrnili k osnovni težavi, ki se pojavlja pri najpreprostejših temeljnih zakonih mehanike, in sicer pri oblikovanju zakona vztrajnosti, če ne želimo uvedbe absolutnega, transcendentnega prostora. Tej težavi smo se izognili na najpreprostejši način tako, da nismo govorili o ničemer resničnem ali obstoječem, temveč smo materijo nadomestili z miselnimi slikami, tj. materialnimi točkami, pri čemer nas ni skrbelo, ali tega ne bi bilo mogoče z enakim uspehom storiti tudi na drug način (npr. na podlagi drugega koordinatnega sistema).

Nihče nam ne more odreči pravice, da miselne slike oblikujemo po lastnih željah, zato vanje poleg materialnih točk lahko vključimo tudi koordinatni sistem (inercialni opazovalni sistem). Te miselne slike pozneje imenujemo resnične samo zato, ker so nam koristne za čim bolj popolno in enostavno napovedovanje prihodnjih pojavov (naših prihodnjih občutkov), tj. za prilagajanje naše volje tem pojavom.

Nobenega notranjega razloga ne vidim za trditev, da se miselne slike, ki vključujejo opazovalni sistem, ne bi mogle skladati z izkušnjami. Nasprotno, ugotavljam, da si prav ta trditev prizadeva že vnaprej povedati nekaj o izkušnjah, kar te prej niso nikoli same razkrile. V tem pogledu se torej ne morem strinjati z Machom, ki, če sem ga prav razumel, iz dejstva, da naše misli predstavljajo le odnose med objekti, sklepa, da bi lahko zakon vztrajnosti določal le svet zvezd stalnic. Če bi bila tukaj razvita slika absolutno pravilna, bi morali biti odnosi med objekti takšni, da bi njihovi najpreprostejši predstavitvi v mislih pripadal takšen opazovalni sistem. Da se zvezde stalnice glede na ta opazovalni sistem ne vrtijo, ni povsem nujno, da pa je temu skoraj tako, bi pa lahko razložili z veliko razdaljo, ki bi v primeru močne rotacije zahtevala ogromne centripetalne sile.

Za nekoga, ki bi raziskal celoten, končen svet zvezd stalnic, bi obstajala teoretična možnost, da s pomočjo Foucaultovega nihala ali žiroskopa določi njihovo vrtenje, kot bi ga lahko določili za Zemljo, če ne bi imeli svetlobe in s tem znanja o drugih nebesnih telesih. Vendar ta izjava ni brezpogojna. Če pa bi jo želeli zanikati, bi morali še veliko bolj nenaravno in v nasprotju s predpostavkami te knjige domnevati, da na vse mase deluje sila, ki je sorazmerna z maso in razdaljo, in poleg tega ustrezna Coriolisova sila, ki je prav tako odvisna od hitrosti in lege v prostoru (glede na svet zvezd stalnic). Prav tako ne bi zadostovalo eno samo Foucaultovo nihalo ali žiroskop, saj bi v tem primeru težko zanikali možnost tako majhnih motečih sil. Toda če bi najrazličnejša Foucaultova nihala, Streintzovi žiroskopi, materialne točke, ki jih je spuščal Lange, itd., v svojem relativnem gibanju proti ***zvezdnemu svetu*** [Sternenwelt], za katerega seveda predpostavljam, da je končen in opazljiv kot celota, kazali na vrtenje slednjega, bi potem lahko kot najverjetnejše sklepali, da je s to predpostavko, tj. s prevzemom opazovalnega sistema v naše miselne slike, mogoče pojave najlažje razložiti ali bolje rečeno opisati, jih miselno reproducirati, tako kot smo že prepričani, da lahko s predpostavko vrtenja Zemlje smiselno opišemo nekatere pojave v vesolju.

Zamisel, da bi obstajalo telo α, ki bi vedno mirovalo glede na naš inercialni opazovalni sistem in bi ga zato lahko nadomestilo, je absurdna. Ker gre le za miselno konstrukcijo, ga raje imenujem "opazovalni sistem"kot "telo α". Že ime "teloše mi zdi popolnoma neustrezno.

Zato se vrnimo k predpostavki, da slika, opisana v tej knjigi, natančno opisuje naravo in da je svet končen. Torej bi morala njegova stalna os, ki poteka skozi njegovo težišče, ohraniti stalno smer glede na kateri koli inercialni opazovalni sistem, skupna vrtilna količina sveta glede na to os pa bi morala biti konstantna. To nima drugega pomena kot naslednjega: Ves čas imamo na voljo le relativne lege vseh delov sveta. Lahko jih pripišemo kateremu koli koordinatnemu sistemu, ki ga izberemo, prav tako pa lahko dve časovni obdobji poimenujemo enako ali različno dolgi. Toda le če imajo časovna obdobja določeno dolžino in le če so lege teh koordinatnih sistemov v določenem zaporedju, je izpolnjen pogoj, da spremembe vsake materialne točke sveta, ki je z njimi povezana, izpolnjujejo preproste enačbe mehanike, podane v tej knjigi. Šele v tem primeru lahko časovno zaporedje teh koordinatnih sistemov imenujemo inercialni opazovalni sistem.

Za vsakega od teh ustreznih opazovalnih sistemov mora imeti os, ki poteka skozi težišče sveta in glede na katero je vsota vrtilnih količin sveta največja, stalno lego, ta vsota pa mora biti konstantna. Seveda še vedno velja predpostavka, da svet obravnavamo kot končen. Toda diferencialne enačbe mehanike za takšno zaporedje leg koordinatnega sistema bi lahko imele povsem preprosto obliko, pri kateri konstantna vrtilna količina sveta okoli njegove stalne osi, ki poteka skozi težišče, nima vrednosti nič, tako da bi se svet v nekem smislu vrtel, čeprav bi morala biti ta vrtenja majhna, kot je svet velik.

Ne glede na to, kako malo verjetno je, da se bo naše znanje kdajkoli tako razširilo, pa si še vedno lahko zamislimo, da bomo celoten svet zvezd poznali tako dobro, kot danes poznamo našo Zemljo, in da bomo lahko dokazali njegovo vrtenje tako zanesljivo kot vrtenje Zemlje. Če svetloba ne bi obstajala, če ne bi poznali nobenega nebesnega telesa razen Zemlje, bi do pojma absolutnega vrtenja zagotovo prišli veliko pozneje. Vsekakor pa bi do tega lahko prišli s poskusi z žiroskopi, nihali itd. in verjetno bi to tudi storili. Zato tega pojma nikakor ne določa le odnos do zvezd stalnic.

Zamisel, da bi zaporedne lege glavnih vztrajnostnih osi sveta glede na njihovo težišče tvorile inercialni opazovalni okvir, bi bila seveda mogoča in ne bi bila v nasprotju z našimi dosedanjimi izkušnjami, po katerih so primerni opazovalni okvirji osi, ki so stalno povezane s skoraj nespremenljivim zvezdnim nebom Če bi sprejeli to predpostavko, bi bilo nepotrebno vključevati poseben koordinatni sistem, saj bi bilo lego mogoče izračunati iz zaporednih relativnih leg vseh delov sveta v vsakem trenutku. Ker pa pravilnost te predpostavke ni dokazana ali dokazljiva, je prav, da opozorimo na njeno možnost, vendar bi bila njena postavitev na začetek mehanike neutemeljeno omejevanje splošnosti.

Povsem ločeno od tega pa je vprašanje, ali niso enačbe mehanike, ki jih razvijamo tukaj, in s tem tudi zakon vztrajnosti, morda le približno pravilne. Z natančnejšo formulacijo bi se lahko odpravila neugodna možnost ali nehomogenost, ki se kaže v tem, da moramo poleg materialnih točk v sliko vključiti tudi koordinatni sistem.

Mach je opozoril na možnost, da bi lahko dobili pravilnejšo sliko, če predpostavimo, da je pospešek spremembe razdalje med dvema masnima delcema odvisen predvsem od sosednjih mas, medtem ko je hitrost te spremembe določena s formulo, v kateri igrajo ključno vlogo zelo oddaljene mase. S tem se izognemo potrebi po vključitvi koordinatnega sistema v sliko, saj zdaj govorimo le o relativnih razdaljah. Res pa je, da Mach s tem uvaja nove težave, kot so končnost sveta, delovanje na daljavo za velike razdalje ipd. Te težave se meni osebno ne zdijo tako velike, kot morda drugim fizikom, vendar imajo to pomanjkljivost, da se zdi, da izključujejo vsakršno izkustveno preverjanje. Prav tako se mi ne zdi očitno, da bi lahko podali natančno izpeljavo načela superpozicije z neprestano uporabo nove oblike zakona o vztrajnosti glede na težišče mas, ki so v medsebojnem delovanju. Poleg tega je

$$\frac{d^2 \sum mr}{dt^2} = 0$$

le enačba in torej ni povsem enakovredna izreku, da se točka giblje enakomerno in premočrtno.

Vsekakor se mi zdi takšna širitev našega pogleda, ki opozarja na možnost, da je tisto, kar se nam zdi najbolj gotovo in očitno, morda le približno pravilno, izjemno dragocena. To je skladno z možnostjo, da bi se razdalje do zvezd stalnic morda lahko konstruirale le v neevklidskem prostoru z izjemno majhno ukrivljenostjo, kar je povezano z zakonom gravitacije v tem smislu, da bi se gibajoče telo, na katero ne delujejo nobene sile, po eonih[5]) vrnilo na svoje izhodiščno mesto, če bi bila ukrivljenost prostora pozitivna.

V vseh teh razmišljanjih smo izhajali iz predpostavke o končnosti celotnega sveta. Če pa si svet predstavljamo kot neskončen, potem pojmi, kot so težišče, stalna os, glavne vztrajnostne osi ipd., postanejo popolnoma brezpredmetni. V tem primeru bi bilo treba predpostaviti, da zakon vztrajnosti določa neka formula, po kateri imajo bližnje mase zanemarljiv vpliv, tiste na oddaljenosti, kot je Sirius, največjega, še bolj oddaljene mase pa znova zanemarljivega.

Elektromagnetna teorija snovi se izogne vsem težavam pri oblikovanju zakona vztrajnosti s predpostavko, da so Maxwellove enačbe, ki opisujejo obnašanje svetlobnega etra in gibanje elektronov v njem, primarne. Iz teh enačb izhajajo zakon vztrajnosti za gibanje relativno na svetlobni eter ter ostali zakoni mehanike, ki veljajo za ta eter. Zakon vztrajnosti pa ne velja za delce svetlobnega etra; Maxwellove enačbe bi bilo treba oblikovati tako, da bi določale zgolj medsebojno delovanje sosednjih volumnov, pri čemer absolutni prostor ni potreben. Razvoj te trenutno še popolnoma nedodelane teorije je zaenkrat še zelo oddaljen.

[5]zelo dolg čas, vek, doba (OP

Imensko kazalo

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783), francoski matematik in fizik.

Johann Friedrich Benzenberg (1777–1846), nemški fizik, geodet in publicist. Leta 1802 je izvedel poskus, v katerem je s cerkvenega stolpa v Hamburgu spustil svinčene kroglice, da bi dokazal vrtenje Zemlje. Povprečni odklon proti vzhodu je znašal približno devet milimetrov, medtem ko je Gauss izračunal teoretično pričakovani odklon 8,7 milimetra.

Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), francoski fizik.

Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906), avstrijski fizik in filozof.

Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929), francoski fizik in matematik.

Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843), francoski matematik in inženir.

Carl Culmann (1821–1881), nemški inženir.

Jean-Gaston Darboux (1842–1917), francoski matematik.

Leonhard Euler (17'7-1783), švicarski matematik, fizik, astronom, geograf, logik in inženir.

Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868), francoski fizik. Leta 1851 je s svojim dolgim težkim nihalom prikazal vrtenje Zemlje.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), francoski matematik in fizik.

Galileo Galilei (1564-1642), italjanski fizik, matematik , astronom in filozof.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nemški matematik, astronom, geodet in fizik.

Josiah Willard Gibbs (1839–1903), ameriški fizik, kemik in matematik.

Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), nemški fizik.

Henry Kater (1777–1835), angleški fizik. Njegovo obratno nihalo je omogočalo natančno merjenje gravitacijskega pospeška.

Johannes Kepler (1571-1630), nemški astronom in matematik.

Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), nemški fizik in matematik.

Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) nizozemski matematik.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), francoski matematik, fizik in astronom.

Ludwig Lange (1863–1936), nemški fizik. Leta 1885 je uvedel pojem inercialnega opazovalnega sistema.

Jules Antoine Lissajous (1822–1880), francoski fizik.

Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach (1838-1916), avstrijski fizik in filozof.

James Clerk Maxwell (1831-1979), škotski fizik in matematik.

Ferdinand Minding (1806–1885), nemško-ruski matematik.

Isaac Newton (1642-1727), angleški matematik, fizik, astronom in teolog.

Siméon Denis Poisson (1781–1840), francoski matematik in fizik.

Karl Theodor Reye (1838–1919), nemški matematik.

Heinrich Streintz (1848–1892), avstrijski fizik.

Charles Wheatstone (1802–1875), angleški znanstvenik in inovator. Njegov kaleidofon je bil zasnovan za prikaz obstojnosti vida človeškega očesa, hkrati pa je omogočal generiranje krivulj, ki so postale znane kot ”Lissajousove krivulje”.