V JET OSTNI ČUN IN ST TIS
R ET TNI R N IN S TIST
VE OST ČUN ATI TIKA
VER O I RAČU TI
V ETNO TNI RA N IN S ST A
E NO N Č N IN A IS I
V R ET STN RA UN TA TI A
VE ETN TNI AČU IN S A I IKA
T STN Č N S STI
R N I RA UN I T S K
E OS I Č N AT T
N NI A I T

VERJETNOSTNI RAČUN IN STATISTIKA

Rešene naloge za študente magistrskega študija gradbeništva

Marjeta Kramar Fijavž in Marjeta Škapin Rugelj

FGG
UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

2024

VERJETNOSTNI RAČUN IN STATISTIKA

REŠENE NALOGE

za študente magistrskega študija gradbeništva

Marjeta Kramar Fijavž in Marjeta Škapin Rugelj

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

2024

VERJETNOSTNI RAČUN IN STATISTIKA
Rešene naloge za študente magistrskega študija gradbeništva
Univerzitetni učbenik

Avtorici: Marjeta Kramar Fijavž, Marjeta Škapin Rugelj
Recenzenta: Damjana Kokol Bukovšek, Nik Stopar
Jezikovni pregled: Ana Bohte, Nataša Petek Hvala
Oblikovalec naslovnice: Primož Fijavž

Založnik: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdajatelj: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo

Ljubljana, 2024
Prva e-izdaja.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na: https://ebooks.uni-lj.si
DOI: 10.15292/9789612974930

To delo je ponujeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna licenca. / This work is licenced under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International licence.

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 218393347
ISBN 978-961-297-493-0 (PDF)

Predgovor

Zbirka je namenjena študentom magistrskega študija gradbeništva, ki poslušajo predmet Verjetnostni račun in statistika. V njej so naloge, ki so se nabrale pri sestavljanju kolokvijev in izpitov v več kot petnajstih letih poučevanja tega predmeta in njegovih predhodnikov (pred bolonjskim študijem je bil verjetnostni račun obravnavan v okviru predmeta Matematična analiza 4, kasneje nekaj časa v okviru predmeta Matematika 4).

Zbirka je razdeljena na tematska poglavja, ki imajo na začetku kratek teoretični uvod z osnovnimi definicijami in formulami, ki jih študenti potrebujejo pri reševanju nalog. Teoretičnemu uvodu sledijo naloge in na koncu poglavja tudi njihove rešitve. Ker je zbirka prvenstveno namenjena uporabi v elektronski obliki, ima vsaka naloga povezavo na rešitev in vsaka rešitev povezavo nazaj na nalogo. Zadnje poglavje zbirke vsebuje tabele porazdelitev, ki se pojavljajo v nalogah. Tabele še vedno uporabljamo pri statističnih nalogah na kolokvijih in izpitih. V praksi se statistični izračuni opravijo z ustreznim programskim orodjem, zato je v rešitvah nalog ponekod tudi rezultat, pridobljen z orodjem Mathematica [14].

Nekatere izmed nalog povezujejo več tem, da študenti začutijo prepletanje snovi. Take naloge so tudi dobra priprava na kolokvije in izpite, kjer so naloge pretežno takega tipa.

Ker sva želeli snov približati študentom, sva se trudili, da bi bili v nalogah obravnavani tudi primeri iz vsakdanjega življenja. Pri sestavi nalog, ki so bolj inženirsko obarvane, sva si pomagali s kar nekaj tuje literature iz verjetnosti in statistike, ki je namenjena inženirjem, pri čemer sva naloge ustrezno prilagodili. Vsa uporabljena literatura je zbrana na koncu poglavja.

Pri najstarejših nalogah v zbirki se za pregled zahvaljujeva Alešu Založniku, ki je bil nosilec predmeta Matematična analiza 4. Posebej skrbno sta celotno zbirko pregledala recenzenta Damjana Kokol Bukovšek in Nik Stopar. Zaradi njunih opomb in predlogov je marsikatera naloga lepše formulirana in rešitev bolje pojasnjena. Zahvaljujeva se tudi vsem študentom, ki so naju opozorili na napake, ko je zbirka še nastajala in so bile naloge z rešitvami objavljene kot gradivo v spletni učilnici predmeta. Med študenti posebej izpostavljava Nejo Fazarinc, ki je pri reševanju nalog našla kar nekaj napak in nama tako pomagala izboljšati zbirko.

Kazalo

1 Tehnike preštevanja

Navedimo nekaj osnovnih kombinatoričnih formul, ki nam pomagajo pri preštevanju elementov množic oziroma izidov poskusov.

Pravilo vsote. *Naj bodo* $M_1, \ldots, M_r$ *med sabo disjunktne množice, pri čemer množica* M_i *vsebuje* n_i *elementov,* $i = 1, \ldots, r$*. Potem lahko izbiro elementa iz* $M_1 \cup \cdots \cup M_r$ *opravimo na* $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ *načinov.*

Produktno pravilo. *Če neki postopek sestavlja* r *neodvisnih korakov, pri katerem je* i*-ti korak možno izvesti na* n_i *načinov, potem celoten postopek lahko izvedemo na* $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_r$ *načinov.*

Iz produktnega pravila sledi, da lahko iz množice z n elementi na r prostih mest razporedimo r elementov

- na n^r načinov, če je dovoljeno ponavljanje, oziroma
- na $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ načinov, če ponavljanje ni dovoljeno.

Če vrstni red izbranih elementov ni pomemben, lahko iz množice z n elementi brez ponavljanja izberemo r elementov na $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ načinov.

Vseh različnih razporeditev ali permutacij n elementov v vrsto je

- $n!$, če so vsi elementi med sabo različni, oziroma
- $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$, če je $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ in je v množici po n_i elementov istega tipa.

Naloge

1.1 Od mesta A do mesta B vodi šest cest, od mesta B do mesta C pa štiri ceste.

(a) Na koliko načinov se lahko iz mesta A peljemo v mesto C skozi mesto B?

(b) Na koliko načinov se lahko iz mesta A peljemo v mesto C in nazaj v A, če gremo v obeh smereh skozi mesto B?

(c) Na koliko načinov lahko opravimo vožnjo iz točke (b), če lahko vsako cesto uporabimo samo enkrat?

REŠITEV

1.2 Na ID-kartici je 5-mestna številska koda. Koliko različnih kartic je možnih, če

(a) se cifre lahko ponavljajo?

(b) se cifre ne smejo ponavljati?

REŠITEV

1.3 V neki državi imajo telefonske številke devet cifer. Prvi dve cifri (npr. 02) sta regijska oznaka in sta enaki znotraj regije. Zadnjih sedem cifer se ne sme začeti z 0. Koliko telefonskih številk je možnih znotraj ene regije?

REŠITEV

1.4 Oznaka na registrski tablici ima obliko XXxxx (X črka, x cifra) in je sestavljena iz dveh črk (25 možnosti) in treh cifer (10 možnosti). Koliko je vseh različnih tablic, če

(a) je ponavljanje dovoljeno?
(b) ponavljanje ni dovoljeno?

REŠITEV

1.5 Iz cifer $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ sestavljamo tromestna števila, v katerih lahko vsako cifro uporabimo samo enkrat.

(a) Koliko različnih števil lahko sestavimo?
(b) Koliko števil je manjših od 400?
(c) Koliko števil je sodih?
(d) Koliko števil je lihih?
(e) Koliko števil je deljivih s 5?

REŠITEV

1.6 Iz množice $\{0, 1, 3, 6, 7, 9\}$ sestavljamo tromestna števila, ki se ne začenjajo z 0.

(a) Koliko različnih števil, pri katerih se cifre lahko ponavljajo, lahko sestavimo?
(b) Koliko števil med njimi je lihih, če se cifre lahko ponavljajo?
(c) Koliko števil med njimi je sodih, če se cifre ne ponavljajo?
(d) Koliko števil, pri katerih se cifre lahko ponavljajo, je manjših ali enakih 900?

REŠITEV

1.7 V skupini je pet otrok, od tega so trije fantje in dve dekleti.

(a) Na koliko različnih načinov lahko sedijo v vrsti?
(b) Na koliko različnih načinov lahko sedijo v vrsti, če fantje sedijo skupaj in dekleti sedita skupaj?
(c) Na koliko različnih načinov lahko sedijo v vrsti, če dekleti sedita skupaj?

REŠITEV

1.8 V skupini je devet strokovnjakov, od tega so trije matematiki, štirje gradbeniki in dva fizika.

(a) Na koliko različnih načinov lahko sedijo v vrsti?
(b) Na koliko različnih načinov lahko sedijo v vrsti, če predstavniki iste stroke sedijo skupaj?

(c) Na koliko različnih načinov lahko sedijo v vrsti, če fizika ne smeta sedeti skupaj?

(d) Na koliko različnih načinov lahko izberejo dva predstavnika skupine?

REŠITEV

1.9 Koliko različnih besed lahko naredimo iz besede *ata* s premetavanjem črk? Kaj pa iz besede *mama* in *ananas*? Za besedo upoštevamo vsak niz črk, tudi če nima dejanskega pomena.

REŠITEV

1.10 V skupini je 11 strokovnjakov, od tega osem žensk in pet moških. Na koliko načinov lahko izmed njih izberemo 6-člansko komisijo, v kateri naj bodo tri ženske in trije moški?

REŠITEV

1.11 Iz črk slovenske abecede delamo nize, sestavljene iz petih črk, ki vsebujejo tri različne soglasnike in dva različna samoglasnika.

(a) Koliko različnih nizov lahko sestavimo?

(b) Koliko nizov vsebuje črko B?

(c) Koliko nizov vsebuje črki B in C?

(d) Koliko nizov se začne s črko B in vsebuje črko C?

(e) Koliko nizov se začne s črko B in konča s črko C?

(f) Koliko nizov vsebuje črki A in B?

(g) Koliko nizov se začne s črko A in vsebuje črko B?

(h) Koliko nizov se začne s črko B in vsebuje črko A?

(i) Koliko nizov se začne s črko A in konča s črko B?

(j) Koliko nizov vsebuje črke A, B in C?

REŠITEV

1.12 V družbi študentov je dvanajst deklet in osem fantov. Na koliko načinov lahko sestavijo skupino petih študentov,

(a) če v njej ni nobenega fanta?

(b) če so v njej tri dekleta in dva fanta?

(c) če je v njej vsaj eno dekle?

REŠITEV

1.13 Imamo pet vrtnic, štiri tulipane in tri gerbere. Vse rože so različnih barv. Na koliko načinov jih lahko posadimo v vrsto

(a) od leve proti desni?

(b) vrtnice na levo, tulipane na sredino in gerbere na desno?

(c) kakorkoli, le da so vrtnice skupaj?

(d) Koliko različnih šopkov s sedmimi cvetovi bi lahko sestavili iz omenjenih rož?

REŠITEV

1.14 Študent mora odgovoriti na natanko osem od desetih izpitnih vprašanj.

(a) Na koliko načinov jih lahko izbere?

(b) Koliko možnosti ima, če mora nujno odgovoriti na prva tri vprašanja, preostala pa lahko izbira?

(c) Koliko možnosti ima, če mora odgovoriti na vsaj štiri vprašanja od prvih petih?

REŠITEV

1.15 Trije bratje, Anže, Blaž in Maks, so se udeležili šahovskega turnirja. Na turnirju je vsak udeleženec igral z vsakim natanko enkrat.

(a) Na turnirju je bilo odigranih natančno 78 partij. Koliko je bilo vseh udeležencev turnirja?

(b) Koliko partij so odigrali bratje med sabo? V koliko partijah je igral vsaj eden od bratov?

REŠITEV

Rešitve

1.1 (a) Število načinov, kako se lahko iz mesta A peljemo v mesto C skozi mesto B, je enako $6 \cdot 4 = 24$.

(b) Število načinov, kako se lahko iz mesta A peljemo v mesto C in nazaj v A, če gremo v obeh smereh skozi mesto B, je enako $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$.

(c) Število načinov, kako se lahko iz mesta A skozi mesto B peljemo v mesto C in nazaj v A, če lahko vsako cesto uporabimo samo enkrat, je enako $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 360$.

NALOGA

1.2 (a) Število možnih kartic, če se cifre lahko ponavljajo, je enako 10^5.

(b) Število možnih kartic, če se cifre ne smejo ponavljati, je enako $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$.

NALOGA

1.3 Število telefonskih številk znotraj regije je enako $9 \cdot 10^6$.

NALOGA

1.4 (a) Če je ponavljanje dovoljeno, je $25^2 \cdot 10^3 = 625\,000$ različnih tablic.

(b) Če ponavljanje ni dovoljeno, je $25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 432\,000$ različnih tablic.

NALOGA

1.5 (a) Sestavimo lahko $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ različnih števil.

(b) Števil, ki so manjša od 400, je $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$.

(c) Sodih števil je $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$.

(d) Lihih števil je $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$.

(e) Števil, deljivih s 5, je $4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$.

NALOGA

1.6 (a) Če se cifre lahko ponavljajo, lahko sestavimo $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ različnih števil.

(b) Če se cifre lahko ponavljajo, je med njimi $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ lihih števil.

(c) Če se cifre ne ponavljajo, je med njimi $5 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 36$ sodih števil.

(d) Če se cifre lahko ponavljajo, je med njimi $4 \cdot 6 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 145$ števil manjših ali enakih 900.

NALOGA

1.7 (a) V vrsti lahko sedijo na $5! = 120$ različnih načinov.

(b) Če fantje in dekleti sedijo skupaj, lahko sedijo v vrsti na $2 \cdot 3! \cdot 2! = 24$ različnih načinov.

(c) Če dekleti sedita skupaj, lahko sedijo v vrsti na $4 \cdot 2! \cdot 3! = 48$ različnih načinov.

NALOGA

1.8 (a) V vrsti lahko sedijo na $9! = 362\,880$ različnih načinov.

(b) Če predstavniki iste stroke sedijo skupaj, lahko sedijo v vrsti na $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2! = 1728$ različnih načinov.

(c) Če fizika ne smeta sedeti skupaj, lahko sedijo v vrsti na $9! - 2 \cdot 8! = 282\,240$ različnih načinov.

(d) Dva predstavnika lahko izberejo na $\binom{9}{2} = 36$ različnih načinov.

NALOGA

1.9 Iz besede *ata* lahko s premetavanjem črk sestavimo $\frac{3!}{2!} = 3$, iz besede *mama* $\frac{4!}{2!2!} = 6$ in iz besede *ananas* $\frac{6!}{2!3!} = 60$ različnih besed.

NALOGA

1.10 6-člansko komisijo, v kateri bodo tri ženske in trije moški, lahko sestavimo na $\binom{8}{3}\binom{5}{3} = 560$ načinov.

NALOGA

1.11 (a) Sestavimo lahko $\binom{20}{3}\binom{5}{2}5! = 1\,368\,000$ različnih nizov.

(b) Sestavimo lahko $\binom{19}{2}\binom{5}{2}5! = 205\,200$ nizov, ki vsebujejo črko B.

(c) Sestavimo lahko $\binom{18}{1}\binom{5}{2}5! = 21\,600$ nizov, ki vsebujejo črki B in C.

(d) Sestavimo lahko $\binom{18}{1}\binom{5}{2}4! = 4320$ nizov, ki se začnejo s črko B in vsebujejo črko C.

(e) Sestavimo lahko $\binom{18}{1}\binom{5}{2}3! = 1080$ nizov, ki se začnejo s črko B in končajo s črko C.

(f) Sestavimo lahko $\binom{19}{2}\binom{4}{1}5! = 82\,080$ nizov, ki vsebujejo črki A in B.

(g) Sestavimo lahko $\binom{19}{2}\binom{4}{1}4! = 16\,416$ nizov, ki se začnejo s črko A in vsebujejo črko B.

(h) Sestavimo lahko $\binom{19}{2}\binom{4}{1}4! = 16\,416$ nizov, ki se začnejo s črko B in vsebujejo črko A.

(i) Sestavimo lahko $\binom{19}{2}\binom{4}{1}3! = 4104$ nizov, ki se začnejo s črko A in končajo s črko B.

(j) Sestavimo lahko $\binom{18}{1}\binom{4}{1}5! = 8640$ nizov, ki vsebujejo črke A, B in C.

NALOGA

1.12 (a) Skupino, v kateri ni nobenega fanta, lahko sestavijo na $\binom{12}{5} = 792$ načinov.

(b) Skupino, v kateri so tri dekleta in dva fanta, lahko sestavijo na $\binom{12}{3}\binom{8}{2} = 6160$ načinov.

(c) Skupino, v kateri je vsaj eno dekle, lahko sestavijo na

$$\binom{12}{1}\binom{8}{4} + \binom{12}{2}\binom{8}{3} + \binom{12}{3}\binom{8}{2} + \binom{12}{4}\binom{8}{1} + \binom{12}{5}\binom{8}{0} = 15\,448$$

načinov. Še hitreje pa lahko pridemo do rezultata, če od vseh možnih načinov izbire petih študentov odštejemo tiste načine, pri katerih izberemo same fante:

$$\binom{20}{5} - \binom{8}{5} = 15\,448.$$

NALOGA

1.13 (a) Od leve proti desni lahko rože posadimo v vrsto na $12! = 479\,001\,600$ načinov.

(b) Če so vrtnice na levi, tulipani na sredini in gerbere na desni, jih lahko posadimo na $5! \cdot 4! \cdot 3! = 17\,280$ načinov.

(c) Če so vrtnice skupaj, jih lahko posadimo na $8! \cdot 5! = 4\,838\,400$ načinov.

(d) Iz omenjenih rož bi lahko sestavili $\binom{12}{7} = 792$ šopkov s sedmimi cvetovi.

NALOGA

1.14 (a) Študent ima $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$ različnih možnosti.

(b) Če mora odgovoriti na prva tri vprašanja, ima $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$ možnosti.

(c) Če mora odgovoriti na vsaj štiri vprašanja od prvih petih, ima $\binom{5}{4}\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\binom{5}{3} = 35$ možnosti.

NALOGA

1.15 (a) Če z n označimo število udeležencev, potem je $\binom{n}{2} = 78$. Torej je $n = 13$.

(b) Bratje so med sabo odigrali $\binom{3}{2} = 3$ partije.
Vsaj eden od bratov je igral v $78 - \binom{10}{2} = 33$ partijah.

NALOGA

2 Osnove verjetnosti

Dogodki

Poskus je postopek, ki ga je mogoče poljubno mnogokrat ponoviti pod enakimi pogoji. Dogajanje je bodisi sproženo namenoma bodisi ga le opazujemo. **Vzorčni prostor** je množica vseh možnih elementarnih izidov poskusa. **Dogodek** je poljubna podmnožica vzorčnega prostora. Uporabljamo jezik in operacije teorije množic z izrazi oz. oznakami, zbranimi v Tabeli 1.

Oznaka	Teorija množic	Verjetnostni račun	Oznaka
$\mathcal{S}$	univerzalna množica	vzorčni prostor	$\mathcal{S}$
A	množica	dogodek	A
a	element	elementarni izid	a
$\emptyset$	prazna množica	nemogoč dogodek	N
$\mathcal{S}$	celotna množica	gotov dogodek	G
$A \subseteq B$	podmnožica	način	$A \subseteq B$
$A \cup B$	unija	unija/vsota	$A \cup B \equiv A + B$
$A \cap B$	presek	presek/produkt	$A \cap B \equiv AB$
$A^{\complement}$	komplement	nasproten dogodek	$\overline{A}$
$A \cap B = \emptyset$	disjunktnost	nezdružljivost	$A \cap B = N$

Tabela 1: Oznake in operacije pri računanju z dogodki

Pri računanju z dogodki veljajo enaka pravila kot pri računanju z množicami (lahko si pomagamo z Vennovimi[1] diagrami):

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) & (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
A \cup G &= G & A \cap G &= A \\
A \cup N &= A & A \cap N &= N \\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} & \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\
A \cup \overline{A} &= G & A \cap \overline{A} &= N
\end{aligned}
$$

Dogodka A in B sta **nezdružljiva**, če se ne moreta zgoditi hkrati, tj. ko je $A \cap B = N$. Dogodki $A_1, \ldots, A_n$ sestavljajo **popoln sistem dogodkov**, če se v vsaki ponovitvi poskusa

[1] John Venn (1834–1923)

zgodi natanko eden izmed njih, to pomeni,

$$A_i \neq N \quad \text{za vse } i, \qquad A_i \cap A_j = N \quad \text{za } i \neq j \qquad \text{in} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = G.$$

Definicija verjetnosti

Verjetnost je preslikava P, ki vsakemu dogodku iz $\mathcal{S}$ priredi neko število na $[0,1]$ ter ustreza naslednjim aksiomom[2]:

(i) $P(A) \geq 0$ za vsak $A \subseteq \mathcal{S}$,

(ii) $P(G) = 1$,

(iii) za nezdružljiva dogodka A in B velja: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Navajamo nekaj lastnosti, ki sledijo iz aksiomov.

- Če so $A_1, \ldots, A_n$ **paroma nezdružljivi** dogodki (tj. $A_i \cap A_j = N$ za $i \neq j$), potem je

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(N) = 0$
- $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Posebni primeri

- Če vzorčni prostor $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sestavljajo enako verjetni in paroma nezdružljivi elementarni izidi a_i in je za dogodek A ugodnih k izmed teh izidov, je verjetnost dogodka A enaka $P(A) = \frac{k}{n}$.
- Če je $\mathcal{S}$ zvezen vzorčni prostor, v katerem elementarne izide lahko predstavimo kot enakovredne točke na delu premice, ravnine ali prostora ter m predstavlja ustrezno **mero** na $\mathcal{S}$ (kot npr. dolžino, ploščino ali prostornino), potem verjetnost dogodka A dobimo kot $P(A) = \frac{m(A)}{m(\mathcal{S})}$.

[2]Andrej Kolmogorov (1903–1987)

- Če se v n ponovitvah poskusa dogodek A zgodi k-krat, imenujemo število $f_n(A) = \frac{k}{n}$ **relativna frekvenca** dogodka A. Po dovolj veliko ponovitvah poskusa se relativne frekvence dogodkov ustalijo okoli neke fiksne vrednosti, ki je enaka verjetnosti dogodka[3]: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(A) = P(A)$.

Pogojna verjetnost in neodvisnost dogodkov

Naj bo B dogodek s pozitivno verjetnostjo, tj. $P(B) \neq 0$. **Pogojna verjetnost dogodka** A **pri pogoju, da se je zgodil** B, je enaka

$$P(A|B) = P_B(A) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Pogojna verjetnost ima prav take – le ustrezno prirejene – lastnosti, kot smo jih na strani 14 navedli za brezpogojno. Na primer, za verjetnost nasprotnega dogodka velja $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja katerakoli od ekvivalentnih enačb:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{oziroma} \quad P(B|A) = P(B) \quad \text{oziroma} \quad P(A\cap B) = P(A)P(B).$$

Dogodki $A_1, \ldots, A_n$ so **paroma neodvisni**, če velja

$$P(A_i|A_j) = P(A_i) \quad \text{oziroma} \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

za vsak par $i \neq j$. Dogodki $A_1, \ldots, A_n$ so **(medsebojno) neodvisni**, če je

$$P\left(A_{j_1}|A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k}\right) = P(A_{j_1}) \quad \text{oziroma} \quad P\left(A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}\right) = P(A_{j_1})\cdots P(A_{j_k})$$

za vse možne različne indekse $j_1, \ldots, j_k$.

Formula o polni verjetnosti. *Naj $H_1, \ldots, H_n$ sestavljajo popoln sistem dogodkov in naj bo A neki dogodek. Potem je*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

Bayesova formula[4]. *Naj $H_1, \ldots, H_n$ sestavljajo popoln sistem dogodkov in naj bo A neki dogodek s pozitivno verjetnostjo. Potem je*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

[3] Bernoullijev zakon stabilnosti, Jacob Bernoulli (1655–1705)
[4] Thomas Bayes (1701–1761)

Naloge

2.1 Med 15 žarnicami je pet pokvarjenih. Naključno izberemo tri žarnice. Določi verjetnost, da za izbrane žarnice velja:

(a) nobena ni pokvarjena,

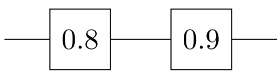
(b) natančno ena je pokvarjena,

(c) vsaj ena je pokvarjena.

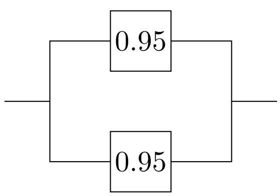
REŠITEV

2.2 Naslednje vezje deluje samo, če obstaja pot delujočih naprav z leve proti desni. Verjetnost, da posamezna naprava deluje, je prikazana na diagramu. Predpostavimo, da se naprave pokvarijo neodvisno druga od druge. Kolikšna je verjetnost, da vezje deluje?

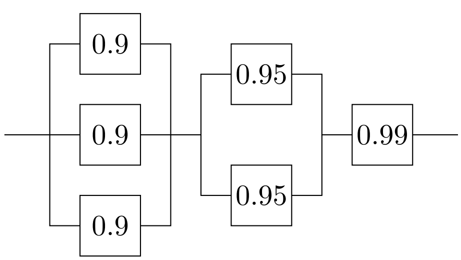
(a)



(b)



(c)



REŠITEV

2.3 V skladišču kemične tovarne imajo 24 cistern. Predpostavimo, da je v šestih cisternah snov, ki ima višjo viskoznost, kot jo zahteva kupec, in v štirih snov z veliko nečistočami. Preostalih 14 cistern vsebuje snov z ustreznimi lastnostmi. Naključno izberemo štiri cisterne.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo v vzorcu natanko ena cisterna, ki vsebuje snov s previsoko viskoznostjo?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bo v vzorcu vsaj ena cisterna, ki vsebuje snov s previsoko viskoznostjo?

(c) Kolikšna je verjetnost, da bosta v vzorcu natanko ena cisterna s previsoko viskoznostjo in natanko ena cisterna s preveč nečistočami?

(d) Kolikšna je verjetnost, da bosta v vzorcu vsaj dve cisterni s previsoko viskoznostjo in vsaj ena cisterna s preveč nečistočami?

REŠITEV

2.4 Ana in Barbara pogosto igrata šah. Verjetnost, da zmaga Ana, je $\frac{1}{2}$, verjetnost, da zmaga Barbara, $\frac{1}{3}$, verjetnost, da se partija konča z remijem, pa $\frac{1}{6}$. Odločili sta se, da bosta igrali tri partije zaporedoma.

(a) Kolikšna je verjetnost, da Ana premaga Barbaro v vseh treh partijah?

(b) Kolikšna je verjetnost, da se bosta natanko dve partiji končali z remijem?

(c) Kolikšna je verjetnost, da bosta zmagovali izmenično?

(d) Kolikšna je verjetnost, da Barbara Ano premaga vsaj enkrat?

REŠITEV

2.5 (a) Matematično izrazi naslednje dogodke z dogodki A, B in C:

$D_1 \ldots$ dogodek, da se ne zgodi niti A niti B niti C,

$D_2 \ldots$ dogodek, da se zgodi natanko eden od teh treh dogodkov,

$D_3 \ldots$ dogodek, da se zgodita vsaj dva od teh treh dogodkov.

(b) Pokaži, da D_1, D_2 in D_3 predstavljajo popoln sistem dogodkov, in izračunaj njihove verjetnosti, če poznamo: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.45$, $P(C) = 0.6$, $P(B \cap C) = 0.3$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = 0.2$ in $P(A \cap B \cap C) = 0.1$.

REŠITEV

2.6 (a) Za poljubna dogodka A in B izpelji formulo:

$$P(\text{zgodi se natanko eden izmed } A \text{ in } B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

(b) Označimo naslednja dogodka:

$R \ldots$ država bo v recesiji,

$I \ldots$ inflacija bo naraščala.

Finančni strokovnjak za naslednje leto oceni, da je $P(R) = \frac{5}{8}$ in $P(I) = \frac{2}{3}$. Recimo, da finančnik predvidi tudi $P(R \cap I) = \frac{1}{2}$. Kolikšne so potem verjetnosti naslednjih dveh dogodkov?

$D_1 \ldots$ Ne bo niti recesije niti porasta inflacije.

$D_2 \ldots$ Bodisi bo recesija bodisi bo inflacija naraščala, oboje hkrati pa se ne bo zgodilo.

Ali bi lahko glede na ocenjene vrednosti $P(R)$ in $P(I)$ finančnik predvidel, da je $P(R \cap I) = \frac{1}{4}$? Odgovor utemelji!

REŠITEV

2.7 Sistem vsebuje vzporedni komponenti C in D, ki delujeta neodvisno. Da bo sistem deloval, mora delovati vsaj ena od komponent.

(a) Komponenta C ne deluje z verjetnostjo 0.08, komponenta D pa z verjetnostjo 0.12. Kolikšna je verjetnost, da sistem deluje?

(b) Komponenti C in D ne delujeta z verjetnostjo p. Pri kateri vrednosti p bo verjetnost, da sistem deluje, enaka 0.99?

(c) Imamo tri vzporedno povezane, neodvisno delujoče komponente, ki ne delujejo z verjetnostjo p. Pri kateri vrednosti p bo verjetnost, da sistem deluje, enaka 0.99?

(d) Vzporedno povezane, neodvisno delujoče komponente ne delujejo z verjetnostjo 0.5. Kolikšno je minimalno število komponent, da bo sistem deloval vsaj z verjetnostjo 0.99?

REŠITEV

2.8 Dve ladji pristajata na istem pomolu, vendar se ne moreta istočasno privezati. Njuna prihoda sta neodvisna in kadarkoli v 24 urah enako verjetna. Prva ladja se ob pomolu zadrži dve uri, druga pa štiri ure. Kolikšna je verjetnost, da mora ena ladja pred pristaniščem čakati na prost privez?

REŠITEV

2.9 Naj za dogodka A in B velja: $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ in $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Izračunaj $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$, $P(A \cap \overline{B})$ in $P(\overline{A} \cap B)$. Ali sta dogodka A in B nezdružljiva? Ali sta neodvisna?

REŠITEV

2.10 Dogodka A in B sta neodvisna, njuni verjetnosti pa znašata $P(A) = 2x$ in $P(B) = 3x$. Izračunajte neznano vrednost x, če je $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

REŠITEV

2.11 (a) Dokaži, da iz neodvisnosti dogodkov A in B sledi neodvisnost tako dogodkov A in $\overline{B}$ kot dogodkov $\overline{A}$ in B.

(b) Za poljubna dogodka A in B poznamo verjetnosti $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ in $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Izračunaj $P(A|B)$, $P(\overline{B}|A)$ in $P(\overline{B}|\overline{A})$.

REŠITEV

2.12 (a) Zapiši, kako iz verjetnosti dogodkov $A \cap B$ in $A \cap \overline{B}$ dobimo verjetnost dogodka A.

(b) Ali poznavanje pogojnih verjetnosti $P(A|B)$ in $P(A|\overline{B})$ zadošča za poznavanje verjetnosti dogodka A? Odgovor utemelji!

(c) Recimo, da so verjetnosti $P(A|B) = 0.4$, $P(A|\overline{B}) = 0.2$ in $P(B) = 0.8$. Izračunaj $P(A)$ in $P(B|A)$ ter ugotovi, ali sta A in B neodvisna dogodka.

REŠITEV

2.13 (a) Recimo, da sta A in B neodvisna dogodka, C pa poljuben dogodek z verjetnostjo $P(C) > 0$. Ugotovi, ali za pogojno verjetnost velja formula (zapiši dokaz ali protiprimer!):

$$P((A \cap B)|C) \stackrel{?}{=} P(A|C)\, P(B|C).$$

(b) Pri metu dveh kock za poljuben k, $1 \leq k \leq 12$, označimo dogodek:

$D_k \ldots$ vsota pik na obeh kockah skupaj je deljiva s k.

(i) Izračunaj verjetnosti dogodkov D_2, D_3 in D_4 ter ugotovi, ali so paroma neodvisni.

(ii) Recimo, da je vsota pik deljiva z 2. Izračunaj verjetnosti dogodkov, da je pri tem vsota pik deljiva tudi s 3, 4 oziroma 12.

REŠITEV

2.14 (a) Ali sta dva nezdružljiva dogodka s pozitivno verjetnostjo med sabo odvisna ali neodvisna? Zakaj?

(b) Naj bodo A, B in C poljubni dogodki, $P(C) > 0$. Dokaži oziroma ovrzi trditev

$$P((A \cup B)|C) \stackrel{?}{=} P(A|C) + P(B|C).$$

REŠITEV

2.15 Opazujemo diagnostični test za neko bolezen. Označimo dogodka:

$B \ldots$ oseba je bolna in $T \ldots$ test je pozitiven.

Recimo, da za občutljivost in specifičnost testa velja: $P(T|B) = 0.90$ in $P(\overline{T}|\overline{B}) = 0.95$ ter da je $P(B) = p$ za neki $0 < p < 1$.

(a) *Napovedovalna moč pozitivnega testa* je verjetnost, da je naključno izbrana oseba s pozitivnim rezultatom testa res bolna: $P(B|T)$. Zapiši napovedovalno moč pozitivnega testa kot funkcijo p ter ugotovi, ali vrednost s p narašča ali pada. Zakaj?

(b) Podobno je *napovedovalna moč negativnega testa* verjetnost, da je naključno izbrana oseba z negativnim rezultatom testa zdrava. Ponovi izračune v točki (a) za to vrednost in komentiraj dobljene rezultate.

REŠITEV

2.16 Temelji visoke stavbe lahko popustijo bodisi zaradi prehude obremenitve – dogodek A – bodisi zaradi zmanjšane nosilnosti tal – dogodek B. Recimo, da poznamo

$$P(A) = 0.001, \quad P(B) = 0.008 \quad \text{in} \quad P(A|B) = 0.1.$$

(a) Kolikšna je verjetnost, da popustijo temelji?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je nosilnost tal zmanjšana in obenem obremenitev ni prehuda?

(c) Izračunaj še verjetnost zmanjšane nosilnosti tal pri pogoju, da je obremenitev prehuda.

(d) Pri danih vrednostih za $P(A)$ in $P(B)$ vrednost $P(A|B)$ ne more biti večja od $\frac{1}{8}$. Zakaj?

REŠITEV

2.17 Kontrolor kakovosti v proizvodnji ima 99 % možnosti, da pravilno identificira okvarjen izdelek in 0.5 % možnosti, da dober izdelek označi kot okvarjen. Tovarna v povprečju izdela 0.9 % okvarjenih izdelkov.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo izdelek, izbran za pregled, označen kot okvarjen?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbran izdelek, ki je označen kot dober, v resnici dober?

REŠITEV

2.18 Ekipa štirih študentov meri padavine. Študent A, ki naredi povprečno eno napako na 20 meritev, opravi 25 % meritev. Študent B, ki naredi povprečno eno napako na 10 meritev, opravi 35 % meritev. Študent C, ki naredi povprečno eno napako na 15 meritev, opravi 30 % meritev. Preostale meritve opravi študent D, ki naredi povprečno eno napako na pet meritev.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrana meritev napačna?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je meritev opravil študent A, če je meritev napačna?

REŠITEV

2.19 Tovor med krajema A in B potuje po kopnem, zraku ali morju. Pri tem gre v povprečju polovica tovora po kopnem, 30 % po morju, preostanek po zraku. 40 % kopnega prevoza poteka po cesti, preostalo po železnici.
Delež poškodovanega tovora je 10 % pri cestnem, 5 % pri železniškem, 6 % pri morskem in 2 % pri zračnem prevozu.

(a) Kolikšen delež tovora se pri prevozu v povprečju poškoduje?

(b) Recimo, da smo prejeli poškodovan tovor. Kolikšna je verjetnost, da je prispel po kopnem/morju/zraku?

REŠITEV

2.20 Avtocestna kraka A_1 in A_2 se združita v avtocesto A_3 (zanima nas le promet v tej smeri). Cesti A_1 in A_2 imata enaki zmogljivosti, promet na njiju v konicah pa se razlikuje. Naj G_i označuje gost promet na A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Poznamo verjetnosti dogodkov: $P(G_1) = 0.1$, $P(G_2) = 0.2$ in $P(G_1|G_2) = 0.5$.

(a) Izračunaj verjetnosti $P(G_2|G_1)$, $P(G_1 \cap G_2)$ in $P(G_1 \cup G_2)$.

(b) Recimo, da je zmogljivost A_3 enaka zmogljivostma A_1 in A_2 ter da je verjetnost gostega prometa na A_3 v primeru, ko na A_1 in A_2 promet ni gost, enaka 0.2. Kolikšna je verjetnost gostega prometa na A_3?

(c) Privzemimo zdaj, da je zmogljivost A_3 dvakrat tolikšna kot pri A_1 ali A_2. Če je samo na A_1 gost promet, je verjetnost gostega prometa na A_3 enaka 0.15. Podobno, če je samo na A_2 gost promet, je verjetnost gostega prometa na A_3 enaka 0.15. Kolikšna je v tem primeru verjetnost gostega prometa na A_3?

REŠITEV

2.21 Preden začnejo izdelke serijsko proizvajati, dajo vzorčne modele oceniti potencialnim kupcem. V preteklosti je dobre predhodne ocene dobilo 95 % prodajno zelo uspešnih, 60 % prodajno srednje uspešnih in 10 % prodajno slabo uspešnih izdelkov. Od proizvedenih izdelkov jih je bilo 40 % zelo, 35 % srednje in 25 % slabo prodajno uspešnih.

(a) Kolikšna je verjetnost, da izdelek dobi dobro predhodno oceno?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bo izdelek prodajno zelo uspešen, če je dobil dobro predhodno oceno?

(c) Kolikšna je verjetnost, da bo izdelek prodajno zelo uspešen, če je dobil slabo predhodno oceno?

REŠITEV

2.22 Delež deklet med vsemi študenti gradbene fakultete je 35 %. Osemdeset odstotkov deklet je končalo gimnazijo, med fanti pa je takih 70 %.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrana oseba z gradbene fakultete končala gimnazijo in je ženskega spola?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrana oseba z gradbene fakultete končala gimnazijo?

(c) Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrana oseba z gradbene fakultete končala gimnazijo ali je ženskega spola?

(d) Naključno izbrana oseba z gradbene fakultete je končala gimnazijo. Kolikšna je verjetnost, da je moškega spola?

REŠITEV

2.23 Avtomobile določene znamke sestavljajo v dveh tovarnah. V tovarni A sestavijo dvakrat toliko avtomobilov kot v tovarni B. Proizvajalec, ki dobavlja motorje in menjalnike tovarni A, proizvede 10 % okvarjenih motorjev in 2 % okvarjenih menjalnikov. Proizvajalec, ki dobavlja tovarni B, pa proizvede 8 % okvarjenih motorjev in 4 % okvarjenih menjalnikov. Motorje in menjalnike v obeh tovarnah montirajo neodvisno.

(a) Kolikšna je verjetnost, da ima naključno izbran avto dober motor?

(b) Kolikšna je verjetnost, da ima avto, ki je sestavljen v tovarni A, okvarjen motor ali okvarjen menjalnik?

(c) Kolikšna je verjetnost, da je avto, ki ima okvarjen motor in dober menjalnik, sestavljen v tovarni B?

REŠITEV

2.24 Proizvajalec elektronske komponente dostavlja v paketih po 20. Recimo, da 60 % paketov ne vsebuje okvarjenih komponent, 30 % paketov vsebuje eno okvarjeno komponento in 10 % paketov dve okvarjeni komponenti.

(a) V nekem paketu naključno izberemo dve komponenti. Kolikšna je verjetnost, da nobena ni okvarjena?

(b) Testiranje pokaže, da nobena od izbranih dveh komponent ni okvarjena. Kolikšna je verjetnost, da v paketu ni okvarjenih komponent?

REŠITEV

2.25 Pri proizvodnji kovinskih ploščic za elektromotorje prihaja do odstopanj pri njihovi debelini. Ploščice, ki ustrezajo specifikacijam, so pripravljene za vgradnjo. Tiste, ki so predebele, brusijo še enkrat. Ploščice, ki so pretanke, izločijo. Privzemimo, da po prvem brušenju standarde izpolnjuje 70 % ploščic, 20 % ploščic brusijo še enkrat, preostalih 10 % pa izločijo. Od tistih ploščic, ki so brušene še enkrat, jih 90 % zadošča standardom, preostalih 10 % pa zavržejo.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je bila ploščica brušena samo enkrat?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je bila ploščica izločena?

(c) Kolikšna je verjetnost, da je bila ploščica brušena dvakrat, če je bila izločena?

(d) Kolikšna je verjetnost, da je bila ploščica brušena dvakrat, če ustreza standardom?

REŠITEV

2.26 Onesnaženost rek je velika težava, zato je v marsikateri reki kopanje iz zdravstvenih razlogov prepovedano. Označimo dogodke:

A ... reka je onesnažena,

B ... v vzorcu vode so zaznali onesnaženje,

C ... kopanje je dovoljeno.

Naj velja: $P(A) = 0.3$, $P(B|A) = 0.75$, $P(B|\overline{A}) = 0.2$, $P(C|A \cap B) = 0.2$, $P(C|\overline{A} \cap B) = 0.15$, $P(C|A \cap \overline{B}) = 0.8$ in $P(C|\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.9$.

(a) Kolikšna je verjetnost, da so v vodi zaznali onesnaženost?

(b) Recimo, da so zaznali onesnaženje. Kolikšna je verjetnost, da je reka res onesnažena?

(c) Kolikšna je verjetnost, da je kopanje dovoljeno?

REŠITEV

2.27 Na določeni bencinski postaji 40 % strank toči bencin, preostale pa dizel. Od tistih kupcev, ki uporabljajo bencin, jih le 30 % natoči poln rezervoar goriva. Od strank, ki uporabljajo dizel, jih poln rezervoar natoči 70 %.

Predpostavimo, da imamo še naslednje informacije:

- 65 % vseh strank, ki natočijo poln rezervoar bencina, uporablja kreditno kartico.
- 45 % vseh strank, ki natočijo bencin, a ne polnega rezervoarja, uporablja kreditno kartico.
- 55 % vseh strank, ki natočijo poln rezervoar dizla, uporablja kreditno kartico.
- 35 % vseh strank, ki natočijo dizel, a ne polnega rezervoarja, uporablja kreditno kartico.

(a) Kolikšna je verjetnost, da naslednja stranka kupi dizel in napolni rezervoar?

(b) Kolikšna je verjetnost, da naslednja stranka napolni rezervoar?

(c) Če naslednji kupec napolni rezervoar, kolikšna je verjetnost, da uporablja bencin?

(d) Kolikšna je verjetnost, da naslednja stranka plača s kreditno kartico?

REŠITEV

2.28 Vržemo standardno igralno kocko, zatem pa še pošten kovanec tolikokrat, kolikor pik pade na kocki.

(a) Kolikšna je verjetnost dogodka, da bomo dobili enako število grbov kot cifer?

(b) Recimo, da smo vrgli enako število grbov kot cifer. Kolikšna je verjetnost, da je na kocki padla šestica?

REŠITEV

2.29 Čas dokončanja gradbenega projekta je odvisen od tega, ali bodo tesarji in vodovodarji stavkali. Možnost zamude je 100 %, če stavkajo oboji, 80 %, če stavkajo samo tesarji, 40 %, če stavkajo samo vodovodarji, in 5 %, če nihče ne stavka. Če stavkajo tesarji, potem je 60 % možnosti, da bodo stavkali tudi vodovodarji. Če bodo stavkali vodovodarji, je 30 % možnosti, da jim bodo sledili tudi tesarji. Možnost, da stavkajo vodovodarji, je 10 %.

(a) Določi verjetnost, da bo gradbeni projekt končan z zamudo.

(b) Če je bil projekt končan z zamudo, določi

  (i) verjetnost, da so stavkali tesarji in vodovodarji,

  (ii) verjetnost, da so stavkali samo tesarji,

  (iii) verjetnost, da so stavkali tesarji.

REŠITEV

Rešitve

2.1 (a) Verjetnost, da ni okvarjena nobena žarnica, je enaka $\binom{10}{3}/\binom{15}{3} = \frac{24}{91}$.

(b) Verjetnost, da je okvarjena natanko ena žarnica, je enaka $\binom{10}{2}\binom{5}{1}/\binom{15}{3} = \frac{45}{91}$.

(c) Ker je dogodek, da je okvarjena vsaj ena žarnica, nasproten dogodku, da ni okvarjena nobena, je njegova verjetnost enaka $1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$.

NALOGA

2.2 (a) Ker vezje deluje, če delujeta obe napravi, deluje z verjetnostjo $0.8 \cdot 0.9 = 0.72$.

(b) Vezje deluje, če deluje vsaj ena naprava, torej deluje z verjetnostjo $1 - 0.05^2 = 0.9975$.

(c) Ker vezje deluje, če delujejo vsi trije sklopi naprav, deluje z verjetnostjo

$$(1 - 0.1^3)(1 - 0.05^2)0.99 = 0.9865.$$

NALOGA

2.3 (a) Verjetnost, da je v vzorcu natanko ena cisterna, ki vsebuje snov s previsoko viskoznostjo, je enaka

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{18}{3}}{\binom{24}{4}} = \frac{816}{1771} \approx 0.461.$$

(b) Verjetnost, da je v vzorcu vsaj ena cisterna, ki vsebuje snov s previsoko viskoznostjo, je enaka

$$1 - \frac{\binom{18}{4}}{\binom{24}{4}} = \frac{1261}{1771} \approx 0.712.$$

(c) Verjetnost, da sta v vzorcu natanko ena cisterna s previsoko viskoznostjo in natanko ena cisterna s preveč nečistočami, je enaka

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}\binom{14}{2}}{\binom{24}{4}} = \frac{52}{253} \approx 0.206.$$

(d) Verjetnost, da sta v vzorcu vsaj dve cisterni s previsoko viskoznostjo in vsaj ena cisterna s preveč nečistočami, je enaka

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{14}{1}}{\binom{24}{4}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{\binom{24}{4}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{24}{4}} = \frac{15}{611} \approx 0.093.$$

NALOGA

2.4 Označimo dogodke:

A ... partijo dobi Ana,

B ... partijo dobi Barbara,

R ... partija se konča z remijem.

Potem so verjetnosti $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ in $P(R)=\frac{1}{6}$.

(a) Verjetnost, da Ana premaga Barbaro v vseh treh partijah, je enaka $(P(A))^3=\frac{1}{8}$.

(b) Verjetnost, da se dve partiji končata z remijem, je enaka

$$3P(R)^2(1-P(R))=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}.$$

(c) Verjetnost, da Ana in Barbara zmagujeta izmenično, je enaka

$$P(A)P(B)P(A)+P(B)P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{36}.$$

(d) Verjetnost, da Barbara Ano premaga vsaj enkrat, je enaka

$$1-(1-P(B))^3=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}.$$

NALOGA

2.5 (a) $D_1=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$
$D_2=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$
$D_3=G-D_1-D_2=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$

(b) Preverimo: $D_i\neq N, i=1,2,3$, $D_1\cup D_2\cup D_3=G$ in $D_1\cap D_2=D_2\cap D_3=D_1\cap D_3=N$, torej D_1, D_2 in D_3 predstavljajo popoln sistem dogodkov. Pri računanju njihovih verjetnosti si pomagamo z Vennovimi diagrami:

$$\begin{aligned}
P(D_1) &= 1-P(A)-P(B)-P(C)+P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(A\cap C)\\
&\quad -P(A\cap B\cap C)=0.25\\
P(D_2) &= P(A)+P(B)+P(C)-2P(A\cap B)-2(B\cap C)-2P(A\cap C)\\
&\quad +3P(A\cap B\cap C)=0.25\\
P(D_3) &= P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(A\cap C)-2P(A\cap B\cap C)=0.5
\end{aligned}$$

Za izračun $P(D_3)$ bi lahko uporabili dejstvo, da D_1, D_2 in D_3 predstavljajo popoln sistem dogodkov, torej je $P(D_3)=1-P(D_1)-P(D_2)$.

NALOGA

2.6 (a) Dogodek »zgodi se natanko eden izmed A in B« zapišemo kot $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$. Če A zpišemo kot vsoto nezdružljivih dogodkov, dobimo: $P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)$, podobno naredimo za B. Z upoštevanjem nezdružljivosti $A\cap\overline{B}$ in $\overline{A}\cap B$ skupaj dobimo:

$$\begin{aligned}
P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)) &= P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)\\
&= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\
&= P(A)+P(B)-2P(A\cap B)
\end{aligned}$$

(b) $P(D_1) = P(\overline{R} \cap \overline{I}) = P(\overline{R \cup I}) = 1 - P(R \cup I) = 1 - P(R) - P(I) + P(R \cap I) = \frac{5}{24}$
$P(D_2) = P((R \cap \overline{I}) \cup (\overline{R} \cap I)) = P(R) + P(I) - 2P(R \cap I) = \frac{5}{8} + \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$
Vrednost $P(R \cap I) = \frac{1}{4}$ pri danih podatkih ni mogoča, saj bi bila v tem primeru npr. $P(\overline{R} \cap \overline{I}) < 0$.

NALOGA

2.7 Označimo dogodke:

C ... komponenta C deluje,

D ... komponenta D deluje.

Potem je $P(C) = 0.92$ in $P(D) = 0.88$.

(a) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C)P(D)$
$= 0.92 + 0.88 - 0.92 \cdot 0.88 \approx 0.9$

(b) Iz enačbe $p^2 = 1 - 0.99$ dobimo $p = 0.1$.

(c) Iz enačbe $p^3 = 1 - 0.99$ dobimo $p = 0.215$.

(d) Iz enačbe $p^n = 1 - 0.99$, kjer je $p = 0.5$, dobimo $n = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.5} \approx 6.64$. Minimalno število komponent, da bo sistem deloval vsaj z verjetnostjo 0.99, je torej 7.

NALOGA

2.8 Označimo dogodke:

$\check{C}_i$ ... i-ta ladja čaka na privez,

l_i ... čas prihoda i-te ladje.

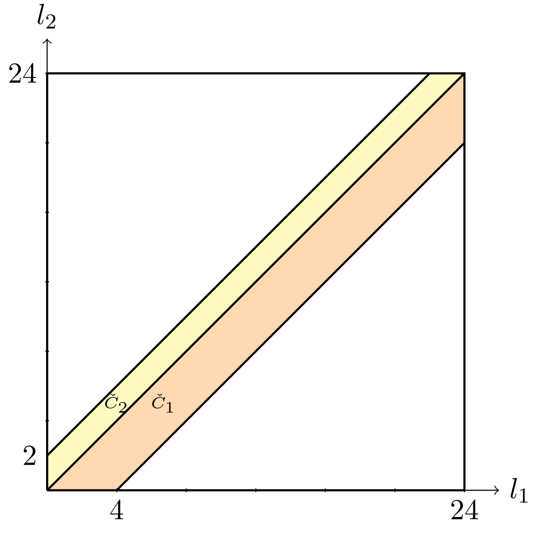
Prva ladja čaka na privez, če velja $l_2 \leq l_1 \leq l_2 + 4$, druga pa pri pogoju $l_1 \leq l_2 \leq l_1 + 2$. Ker sta dogodka $\check{C}_1$ in $\check{C}_2$, nezdružljiva, je verjetnost

$$P(\check{C}_1 \cup \check{C}_2) = P(\check{C}_1) + P(\check{C}_2).$$

Pomagamo si s skico. V oranžno označenem območju čaka na privez prva, v rumeno označenem območju pa na privez čaka druga ladja.

Verjetnost lahko izračunamo na podlagi ploščin likov

$$P(\check{C}_1 \cup \check{C}_2) = 1 - \frac{\frac{20^2}{2} + \frac{22^2}{2}}{24^2} = \frac{67}{288} \approx 0.23$$



NALOGA

2.9 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{8}$; $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{2}$;
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$; $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{8}$;
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Dogodka nista nezdružljiva, saj $P(A \cap B) \neq 0$.

Dogodka sta odvisna, saj $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

NALOGA

2.10 Ker sta dogodka A in B neodvisna, velja $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$. Torej je $\frac{2}{3} = 2x + 3x - 2x \cdot 3x$. Rešitvi te kvadratne enačbe sta $x_1 = \frac{2}{3}$ in $x_2 = \frac{1}{6}$. Rešitev $x_1 = \frac{2}{3}$ ni smiselna, saj bi bili verjetnosti dogodkov A in B večji od 1.
Torej je $x = \frac{1}{6}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ in $P(B) = \frac{1}{2}$.

NALOGA

2.11 (a) Zapišemo $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ in z upoštevanjem neodvisnosti A in B dobimo $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A)P(B)$, oziroma $P(A \cap \overline{B}) = P(A)\,(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$, torej sta dogodka A in $\overline{B}$ neodvisna. Podobno pokažemo neodvisnost dogodkov $\overline{A}$ in B.

(b) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{3}{4}$

$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}$

$P(\overline{B}|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{1 - P(A)} = \dfrac{5}{6}$, saj je

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \tfrac{5}{12}$$

NALOGA

2.12 (a) Ker sta $A \cap B$ in $A \cap \overline{B}$ nezdružljiva dogodka, je $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

(b) Ne, poznati bi morali še $P(B)$, saj je $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$.

(c) $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \dfrac{8}{9}$. Ker $P(B) \neq P(B|A)$, sta dogodka A in B odvisna.

NALOGA

2.13 (a) Formula v splošnem ne velja. Npr., če kot pri točki (b) opazujemo met dveh kock in označimo $A = D_2$, $B = D_3$ ter

$$C \ldots \text{ vsota pik na obeh kockah je največ 5,}$$

potem je $P((A \cap B)|C) = 0 \neq 0.4 \cdot 0.2 = P(A|C)\, P(B|C)$.

(b) (i) Iz tabele za vsoto pik na obeh kockah, kjer je v prvi vrstici zapisano število pik na eni, v prvem stolpcu pa število pik na drugi kocki,

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

lahko razberemo, da je $P(D_2) = \frac{1}{2}$, $P(D_3) = \frac{1}{3}$ in $P(D_4) = \frac{1}{4}$.

Ker je $P(D_2 \cap D_3) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(D_2) \cdot P(D_3)$, sta dogodka D_2 in D_3 neodvisna.

Ker je $P(D_2 \cap D_4) = P(D_4) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(D_2) \cdot P(D_4)$, sta dogodka D_2 in D_4 odvisna.

Ker je $P(D_3 \cap D_4) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = P(D_3) \cdot P(D_4)$, sta dogodka D_3 in D_4 odvisna.

(ii) $P(D_3|D_2) = \dfrac{P(D_3 \cap D_2)}{P(D_2)} = \dfrac{1}{3}$; $P(D_4|D_2) = \dfrac{P(D_4 \cap D_2)}{P(D_2)} = \dfrac{1}{2}$;

$P(D_{12}|D_2) = \dfrac{P(D_{12} \cap D_2)}{P(D_2)} = \dfrac{P(D_{12})}{P(D_2)} = \dfrac{1}{18}$

NALOGA

2.14 (a) Za nezdružljiva dogodka A in B velja: $A \cap B = N$, oziroma $P(A \cap B) = 0$. Upoštevamo še, da imata pozitivno verjetnost, in ugotovimo: $P(A)P(B) \neq 0 = P(A \cap B)$, torej sta A in B odvisna dogodka.

(b)

$$\begin{aligned}
P((A\cup B)|C) &= \frac{P\left((A\cup B)\cap C\right)}{P(C)} = \frac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)} \\
&= \frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)} \\
&= P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C)
\end{aligned}$$

Torej trditev v splošnem ne velja (velja le, če je $P(A\cap B\cap C)=0$).

NALOGA

2.15 (a) $P(B|T)=\dfrac{0.9p}{0.85p+0.05}$. Ker je odvod pozitiven, funkcija s p narašča.

(b) $P(\overline{B}|\overline{T})=\dfrac{0.95-0.95p}{0.95-0.85p}$. Ker je odvod negativen, funkcija s p pada.

Pogostejša je bolezen, večja je napovedovalna moč pozitivnega testa in manjša je napovedovalna moč negativnega testa.

NALOGA

2.16 (a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.0082$

(b) $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.0072$

(c) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=0.8$

(d) Iz $A\cap B\subseteq A$ sledi $P(A\cap B)\leq P(A)$. Potem je

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\leq\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1}{8}.$$

NALOGA

2.17 Označimo dogodke:

D ... izdelek je dober,

Z ... izdelek je označen kot okvarjen in zato zavrnjen.

Potem so verjetnosti $P(Z|\overline{D})=0.99$, $P(Z|D)=0.005$, $P(\overline{D})=0.009$, torej $P(D)=0.991$.

(a) $P(Z)=P(Z|D)P(D)+P(Z|\overline{D})P(\overline{D})=0.01387$

(b) $P(D|\overline{Z})=\dfrac{P(\overline{Z}|D)P(D)}{P(\overline{Z})}=\dfrac{(1-P(Z|D))P(D)}{1-P(Z)}=0.99991$

NALOGA

2.18 Označimo dogodke:

A ... meritev opravi študent A,

B ... meritev opravi študent B,

C ... meritev opravi študent C,

D ... meritev opravi študent D,

N ... pri meritvi je bila narejena napaka.

Iz podatkov dobimo $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.35$, $P(C) = 0.3$, $P(D) = 0.1$, $P(N|A) = \frac{1}{20}$, $P(N|B) = \frac{1}{10}$, $P(N|C) = \frac{1}{15}$ in $P(N|D) = \frac{1}{5}$.

(a) $P(N) = P(A)P(N|A) + P(B)P(N|B) + P(C)P(N|C) + P(D)P(N|D) = \frac{7}{80}$

(b) $P(A|N) = \dfrac{P(A)P(N|A)}{P(N)} = \dfrac{1}{7}$

NALOGA

2.19 Označimo dogodke:

T... tovor je poškodovan,

C... prevoz poteka po cesti,

V... prevoz poteka po železnici,

K... prevoz poteka po kopnem,

M... prevoz poteka po morju,

Z... prevoz poteka po zraku.

Potem je $P(K) = 0.5$, $P(M) = 0.3$, $P(Z) = 0.2$, $P(C) = 0.2$, $P(V) = 0.3$, $P(T|C) = 0.1$, $P(T|V) = 0.05$, $P(T|M) = 0.06$ in $P(T|Z) = 0.02$.

(a) S formulo o popolni verjetnosti dobimo

$$P(T) = P(C)P(T|C) + P(V)P(T|V) + P(M)P(T|M) + P(Z)P(T|Z) = 0.057.$$

(b) Uporabimo Bayesovo formulo.

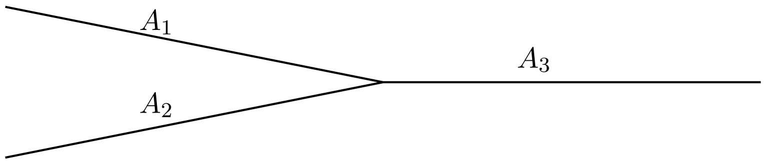
$$P(K|T) = P(C|T) + P(V|T) = \frac{P(T|C)P(C)}{P(T)} + \frac{P(T|V)P(V)}{P(T)} = 0.614$$

$$P(Z|T) = \frac{P(T|Z)P(Z)}{P(T)} = 0.07$$

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)} = 0.316$$

NALOGA

2.20 Avtocestni kraki so prikazani na spodnji skici.



(a) $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1|G_2)P(G_2) = 0.1$; $P(G_2|G_1) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1)} = 1$;
$P(G_1 \cup G_2) = P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 \cap G_2) = 0.2$

(b) Podatki nam povejo: $P(G_3|(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2)) = 0.2$ in $P(G_3|G_1) = P(G_3|G_2) = 1$.
Uporabimo formulo o popolni verjetnosti.

$$\begin{aligned} P(G_3) &= P(G_3|(G_1 \cup G_2))P(G_1 \cup G_2) + P(G_3|(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2))P(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2) \\ &= 1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 = 0.36 \end{aligned}$$

Vmes smo upoštevali:

$$P(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2) = P(\overline{G_1 \cup G_2}) = 1 - P(G_1 \cup G_2) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

(c) V tem primeru velja: $P(G_3|(G_1 \cap \overline{G}_2)) = P(G_3|(\overline{G}_1 \cap G_2)) = 0.15$, $P(G_3|(G_1 \cap G_2)) = 1$ in $P(G_3|(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2)) = 0$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} P(G_3) &= P(G_3|(G_1 \cap G_2))P(G_1 \cap G_2) + P(G_3|(G_1 \cap \overline{G}_2)P(G_1 \cap \overline{G}_2) + \\ &\quad P(G_3|(\overline{G}_1 \cap G_2))P(\overline{G}_1 \cap G_2) + P(G_3|(\overline{G}_1 \cap \overline{G_2}))P(\overline{G}_1 \cap \overline{G_2}) \\ &= 1 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0 + 0.15 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.8 = 0.115. \end{aligned}$$

V zgornjem računu smo upoštevali:

$$P(G_1 \cup G_2) = P(G_1) + P(\overline{G}_1 \cap G_2) = P(G_2) + P(G_1 \cap \overline{G}_2).$$

Tako dobimo $P(G_1 \cap \overline{G}_2) = P(G_1 \cup G_2) - P(G_2) = 0.2 - 0.2 = 0$ in
$P(\overline{G}_1 \cap G_2) = P(G_1 \cup G_2) - P(G_1) = 0.2 - 0.1 = 0.1$.

NALOGA

2.21 Označimo dogodke:

Z ... izdelek je zelo prodajno uspešen,

S ... izdelek je srednje prodajno uspešen,

N ... izdelek je slabo prodajno uspešen,

D ... izdelek je dobil dobro oceno.

Potem so verjetnosti $P(Z) = 0.4$, $P(S) = 0.35$, $P(N) = 0.25$, $P(D|Z) = 0.95$, $P(D|S) = 0.6$ in $P(D|N) = 0.1$.

(a) $$\begin{aligned} P(D) &= P(D|Z)P(Z) + P(D|S)P(S) + P(D|N)P(N) \\ &= 0.95 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.35 + 0.1 \cdot 0.25 = 0.615 \end{aligned}$$

(b) $P(Z|D) = \frac{P(D|Z)P(Z)}{P(D)} = \frac{0.95 \cdot 0.04}{0.615} = 0.618$

(c) $P(Z|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|Z)P(Z)}{P(\overline{D})} = \frac{(1-P(D|Z))P(Z)}{1-P(D)} = \frac{(1-0.95)0.4}{1-0.615} = 0.052$

NALOGA

2.22 Označimo dogodke:

D ... študent je dekle,

F ... študent je fant,

G ... študent je končal gimnazijo.

Potem so verjetnosti $P(D) = 0.35$, $P(F) = 0.65$, $P(G|D) = 0.8$ in $P(G|F) = 0.7$.

(a) $P(D \cap G) = P(D)P(G|D) = 0.35 \cdot 0.8 = 0.28$

(b) $P(G) = P(G|D)P(D) + P(G|F)P(F) = 0.8 \cdot 0.35 + 0.7 \cdot 0.65 = 0.735$

(c) $P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G) = 0.35 + 0.735 - 0.28 = 0.805$

(d) $$P(F|G) = \frac{P(G|F)P(F)}{P(G)} = \frac{0.7 \cdot 0.65}{0.735} = 0.619$$

NALOGA

2.23 Označimo dogodke:

A ... avtomobil sestavijo v tovarni A,

B ... avtomobil sestavijo v tovarni B,

T ... motor je okvarjen,

S ... menjalnik je okvarjen.

Potem so verjetnosti $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(T|A) = 0.1$, $P(S|A) = 0.02$, $P(T|B) = 0.08$ in $P(S|B) = 0.04$.

(a) $P(\overline{T}) = P(A)P(\overline{T}|A) + P(B)P(\overline{T}|B) = \frac{2}{3} \cdot 0.9 + \frac{1}{3} \cdot 0.92 \approx 0.907$

(b) $$\begin{aligned} P((T \cup S)|A) &= P(T|A) + P(S|A) - P((T \cap S)|A) \\ &= P(T|A) + P(S|A) - P(T|A)P(S|A) \\ &= 0.1 + 0.02 - 0.1 \cdot 0.02 = 0.118 \end{aligned}$$

(c) $P((T\cap\overline{S})|A) = P(T|A)P(\overline{S}|A) = 0.1\cdot 0.98 = 0.098$

$P((T\cap\overline{S})|B) = P(T|B)P(\overline{S}|B) = 0.08\cdot 0.96 = 0.0768$

$P(T\cap\overline{S}) = P(A)P((T\cap\overline{S})|A)+P(B)P((T\cap\overline{S})|B)\approx 0.090$

$$P(B|(T\cap\overline{S})) = \frac{P(B)P((T\cap\overline{S})|B)}{P(T\cap\overline{S})}\approx 0.2816$$

NALOGA

2.24 Označimo dogodke:

A ... nobena od dveh izbranih komponent ni okvarjena,

N ... v paketu ni okvarjenih komponent,

E ... v paketu je ena okvarjena komponenta,

D ... v paketu sta dve okvarjeni komponenti.

Potem so verjetnosti $P(N) = 0.6$, $P(E) = 0.3$, $P(D) = 0.1$, $P(A|N) = 1$,

$$P(A|E) = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{2}} \quad \text{in} \quad P(A|D) = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{2}}.$$

(a) Verjetnost, da nobena od izbranih dveh komponent ni okvarjena, je enaka

$$P(A) = P(A|N)P(N) + P(A|E)P(E) + P(A|D)P(D) \approx 0.9505.$$

(b) Verjetnost, da v paketu ni okvarjenih komponent, če izbrani komponenti nista okvarjeni, je enaka

$$P(N|A) = \frac{P(A|N)P(N)}{P(A)} \approx 0.6312.$$

NALOGA

2.25 Označimo dogodke:

D ... ploščica je dobra (ustreza standardom),

S ... ploščica je slaba (izločimo jo),

B ... ploščica je bila brušena dvakrat.

Potem so verjetnosti $P(D\cap\overline{B}) = 0.7$, $P(S\cap\overline{B}) = 0.1$, $P(B) = 0.2$, $P(D|B) = 0.9$ in $P(S|B) = 0.1$.

(a) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0.8$

(b) $P(S) = P(S\cap\overline{B}) + P(S\cap B) = P(S\cap\overline{B}) + P(S|B)P(B) = 0.12$

(c) $P(B|S) = \dfrac{P(S|B)P(B)}{P(S)} \approx 0.167$

(d) $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{P(D|B)P(B)}{1-P(S)} \approx 0.205$

NALOGA

2.26 (a) $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.75 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.365$

(b) $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \dfrac{0.75 \cdot 0.3}{0.365} \approx 0.616$

(c) Ker $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ in $\overline{A} \cap \overline{B}$ tvorijo popoln sistem dogodkov, za izračun popolne verjetnosti $P(C)$ potrebujemo njihove verjetnosti:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B|A)P(A) = 0.75 \cdot 0.3 = 0.225 \\
P(A \cap \overline{B}) &= P(\overline{B}|A)P(A) = (1 - P(B|A))P(A) = 0.25 \cdot 0.3 = 0.075 \\
P(\overline{A} \cap B) &= P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.2 \cdot 0.7 = 0.14 \\
P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A}) = (1 - P(B|\overline{A}))P(\overline{A}) = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56
\end{aligned}$$

Verjetnost $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ bi lahko izračunali tudi drugače:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) - P(A \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap B) = 1 - 0.225 - 0.075 - 0.14 = 0.56.$

Potem je

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C|A \cap B)P(A \cap B) + P(C|A \cap \overline{B})P(A \cap \overline{B}) + \\
&\quad P(C|\overline{A} \cap B)P(\overline{A} \cap B) + P(C|\overline{A} \cap \overline{B})P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&= 0.2 \cdot 0.225 + 0.8 \cdot 0.075 + 0.15 \cdot 0.14 + 0.9 \cdot 0.56 = 0.63.
\end{aligned}$$

NALOGA

2.27 Označimo dogodke:

B ... stranka kupi bencin,
D ... stranka kupi dizel,
N ... stranka natoči poln rezervoar goriva,
K ... stranka plača s kreditno kartico.

Iz podatkov razberemo: $P(B) = 0.4$, $P(D) = 0.6$, $P(N|B) = 0.3$, $P(N|D) = 0.7$, $P(K|B \cap N) = 0.65$, $P(K|B \cap \overline{N}) = 0.45$, $P(K|D \cap N) = 0.55$, $P(K|D \cap \overline{N}) = 0.35$.

(a) $P(D \cap N) = P(D)P(N|D) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

(b) $P(N) = P(B)P(N|B) + P(D)P(N|D) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.54$

(c) $P(B|N) = \dfrac{P(B)P(N|B)}{P(N)} = \dfrac{0.4 \cdot 0.3}{0.54} = \dfrac{2}{9} \approx 0.222$

(d) Ker $B\cap N$, $B\cap\overline{N}$, $D\cap N$ in $D\cap\overline{N}$ tvorijo popoln sistem dogodkov, za izračun popolne verjetnosti $P(K)$ potrebujemo njihove verjetnosti:

$$\begin{aligned}
P(B\cap N) &= P(N|B)P(B) = 0.3\cdot 0.4 = 0.12\\
P(B\cap \overline{N}) &= P(\overline{N}|B)P(B) = (1-P(N|B))P(B) = 0.7\cdot 0.4 = 0.28\\
P(D\cap N) &= P(N|D)P(D) = 0.7\cdot 0.6 = 0.42 \quad \text{(glej točko (a))}\\
P(D\cap \overline{N}) &= P(\overline{N}|D)P(D) = (1-P(N|D))P(D) = 0.3\cdot 0.6 = 0.18
\end{aligned}$$

Verjetnost $P(D\cap\overline{N})$ bi lahko izračunali tudi drugače:

$P(D\cap\overline{N}) = 1 - P(B\cap N) - P(B\cap\overline{N}) - P(D\cap N) = 1-0.12-0.28-0.42 = 0.18.$

Potem je:

$$\begin{aligned}
P(K) &= P(K|B\cap N)P(B\cap N) + P(K|B\cap\overline{N})P(B\cap\overline{N}) +\\
&\quad P(K|D\cap N)P(D\cap N) + P(K|D\cap\overline{N})P(D\cap\overline{N})\\
&= 0.65\cdot 0.12 + 0.45\cdot 0.28 + 0.55\cdot 0.42 + 0.35\cdot 0.18 = 0.498.
\end{aligned}$$

NALOGA

2.28 Označimo dogodke:

K_2 ... na kocki padeta dve piki,
K_4 ... na kocki padejo štiri pike,
K_6 ... na kocki pade šest pik,
A ... enako število grbov kot cifer.

Potem so verjetnosti $P(K_2) = P(K_4) = P(K_6) = \frac{1}{6}$ ter

$$P(A|K_2) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},\quad P(A|K_4) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8},\quad P(A|K_6) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}.$$

(a) $P(A) = P(A|K_2)P(K_2) + P(A|K_4)P(K_4) + P(A|K_6)P(K_6) = \frac{19}{96}$

(b) $P(K_6|A) = \dfrac{P(A|K_6)P(K_6)}{P(A)} = \dfrac{5}{19}$

NALOGA

2.29 Označimo dogodke:

Z ... gradbeni projekt bo končan z zamudo,
T ... tesarji stavkajo,
V ... vodovodarji stavkajo.

Iz podatkov razberemo: $P(Z|T\cap V) = 1, P(Z|T\cap\overline{V}) = 0.8, P(Z|\overline{T}\cap V) = 0.4,$
$P(Z|\overline{T}\cap\overline{V}) = 0.05, P(V|T) = 0.6, P(T|V) = 0.3, P(V) = 0.1.$

(a) Iz zveze $P(T\cap V) = P(T|V)P(V) = P(V|T)P(T)$ izračunamo:

$$P(T) = \frac{P(T|V)P(V)}{P(V|T)} = \frac{0.3\cdot 0.1}{0.6} = 0.05.$$

Ker $T\cap V$, $T\cap\overline{V}$, $\overline{T}\cap V$ in $\overline{T}\cap\overline{V}$ tvorijo popoln sistem dogodkov, za izračun popolne verjetnosti $P(Z)$ potrebujemo njihove verjetnosti:

$$\begin{aligned}
P(T\cap V) &= P(T|V)P(V) = 0.3\cdot 0.1 = 0.03\\
P(T\cap\overline{V}) &= P(\overline{V}|T)P(T) = (1-P(V|T))P(T) = 0.4\cdot 0.05 = 0.02\\
P(\overline{T}\cap V) &= P(\overline{T}|V)P(V) = (1-P(T|V))P(V) = 0.7\cdot 0.1 = 0.07\\
P(\overline{T}\cap\overline{V}) &= 1-P(T\cap V)-P(T\cap\overline{V})-P(\overline{T}\cap V) = 1-0.03-0.02-0.07 = 0.88
\end{aligned}$$

Potem je po formuli o popolni verjetnosti:

$$\begin{aligned}
P(Z) &= P(Z|T\cap V)P(T\cap V) + P(Z|T\cap\overline{V})P(T\cap\overline{V}) +\\
&\quad P(Z|\overline{T}\cap V)P(\overline{T}\cap V) + P(Z|\overline{T}\cap\overline{V})P(\overline{T}\cap\overline{V})\\
&= 1\cdot 0.03 + 0.8\cdot 0.02 + 0.4\cdot 0.07 + 0.05\cdot 0.88 = 0.118.
\end{aligned}$$

(b) Uporabimo Bayesovo formulo.

(i) $P(T\cap V|Z) = \dfrac{P(Z|T\cap V)P(T\cap V)}{P(Z)} = \dfrac{1\cdot 0.03}{0.118} = 0.254$

(ii) $P(T\cap\overline{V}|Z) = \dfrac{P(Z|T\cap\overline{V})P(T\cap\overline{V})}{P(Z)} = \dfrac{0.8\cdot 0.02}{0.118} = 0.136$

(iii) $P(T|Z) = P(T\cap V|Z) + P(T\cap\overline{V}|Z) = 0.254 + 0.136 = 0.390$

NALOGA

3 Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija, ki vsakemu izidu poskusa priredi neko realno število: $X\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. **Porazdelitvena funkcija** slučajne spremenljivke X je funkcija $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, definirana s predpisom

$$F_X(x) := P(X \leq x).$$

Nekatere lastnosti porazdelitvene funkcije:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ in $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
- F_X je monotono naraščajoča: iz $x_1 \leq x_2$ sledi $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$;
- $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$;
- F_X je z desne zvezna: $\lim\limits_{h \downarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x)$, v nekaj (največ števno mnogo) točkah ima lahko skok.

Za poljubno funkcijo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $Y := g \circ X = g(X)\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ spet slučajna spremenljivka. Če je funkcija g strogo naraščajoča in surjektivna, za porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke Y velja:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Diskretne slučajne spremenljivke

X imenujemo **diskretna slučajna spremenljivka**, kadar njeno zalogo vrednosti sestavlja števno mnogo točk: $\mathcal{Z}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Določena je z **verjetnostno shemo**,

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

kjer so $p_k := P(X = x_k)$ vrednosti **verjetnostne funkcije** p_X, za katere velja:

$$p_k \geq 0 \quad \text{in} \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Matematično upanje diskretne slučajne spremenljivke X označimo z $E(X)$ in definiramo kot

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Predstavlja pričakovano oziroma srednjo vrednost X in ne obstaja vedno.

Osnovne lastnosti matematičnega upanja:

- za poljubno funkcijo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $E\left(g(X)\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$ za vse $a, b \in \mathbb{R}$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Disperzijo (ali **varianco**) diskretne slučajne spremenljivke X označimo z $D(X)$ (tudi $V(X)$, $\sigma^2(X)$). Meri razpršenost porazdelitve in jo dobimo kot

$$\begin{aligned} D(X) &:= E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2\, p_i \\ &= E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\right)^2. \end{aligned}$$

Standardni odklon (ali **standardna deviacija**) slučajne spremenljivke X je $\sigma(X) := \sqrt{D(X)}$. Za vse $a, b \in \mathbb{R}$ velja:

$$D(aX + b) = a^2 D(X) \quad \text{in} \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Pomembnejše diskretne porazdelitve[5] so zbrane v Tabeli 2.

---

[5]Za enakomerno porazdelitev je v tabeli predstavljena le taka, pri kateri slučajna spremenljivka X zavzame n celih števil od nekega $a \in \mathbb{R}$ dalje. V splošnem lahko enakomerna porazdelitev zavzame poljubnih n vrednosti, a v tem primeru izraza za $E(X)$ in $D(X)$ nista tako preprosta.

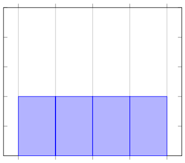
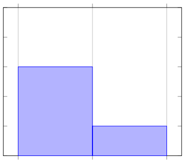
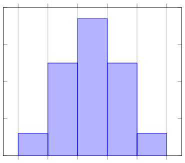
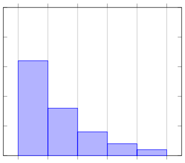
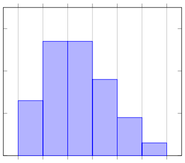
Porazdelitev	Verjetnostna shema	Matematično upanje in disperzija
Enakomerna diskretna	$\begin{pmatrix} a & a+1 & \cdots & a+n-1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ 	$E(X) = \frac{2a+n-1}{2}$ $D(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Bernoullijeva	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ 	$E(X) = p$ $D(X) = (1-p)p$
Binomska $B(n,p)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ P_n(0) & P_n(1) & \cdots & P_n(n) \end{pmatrix}$ $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 	$E(X) = np$ $D(X) = n(1-p)p$
Geometrijska $G(p)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$ $p_k = (1-p)^{k-1}p$ 	$E(X) = \frac{1}{p}$ $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Poissonova $P(\lambda)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k & \cdots \\ p_\lambda(0) & p_\lambda(1) & \cdots & p_\lambda(k) & \cdots \end{pmatrix}$ $p_\lambda(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ 	$E(X) = \lambda$ $D(X) = \lambda$

Tabela 2: Diskretne porazdelitve

Zvezne slučajne spremenljivke

X je **zvezna slučajna spremenljivka**, če je njena porazdelitvena funkcija F_X v vseh točkah zvezna. **Gostota verjetnosti**[6] zvezne slučajne spremenljivke X je taka nenegativna integrabilna funkcija p_X, da za poljubna $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, velja:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)\, dx.$$

Pri tem je

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, dx = 1 \quad \text{in} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\, dt.$$

Če je p_X zvezna v točki x, je F_X odvedljiva v x in velja: $F_X'(x) = p_X(x)$.
Matematično upanje $E(X)$ zvezne slučajne spremenljivke X definiramo kot

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\, dx.$$

Predstavlja pričakovano oziroma srednjo vrednost X in ne obstaja vedno. Osnovne lastnosti:

- za poljubno funkcijo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $E\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x)\, dx$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$ za vse $a, b \in \mathbb{R}$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Disperzija $D(X)$ zvezne slučajne spremenljivke X je definirana s predpisom

$$\begin{aligned} D(X) &:= E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 p_X(x)\, dx \\ &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\, dx\right)^2. \end{aligned}$$

Standardni odklon (ali **standardna deviacija**) slučajne spremenljivke X je $\sigma(X) := \sqrt{D(X)}$. Za vse $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$D(aX + b) = a^2 D(X) \quad \text{in} \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

[6] Nekatere zvezne slučajne spremenljivke nimajo gostote verjetnosti. Omejimo se na take, ki jo imajo.

Standardizirana slučajna spremenljivka slučajne spremenljivke X je definirana kot

$$X^* := \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

Zanjo velja: $E(X^*) = 0$ in $D(X^*) = 1$.

Pri $p \in (0, 1)$ je **p-ti kvantil** (ali **100p-ti percentil**) zvezne porazdelitve slučajne spremenljivke X tista vrednost x_p, za katero velja: $P(X \leq x_p) = p$. Posebni kvantili:

- **mediana** je $x_{0.5}$,
- **kvartili** so $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ in $x_{0.75}$, **interkvartilni razpon (IQR)** je enak $x_{0.75} - x_{0.25}$,
- **decili** so $x_{0.1}$, $x_{0.2}, \ldots$, $x_{0.9}$.

Nekatere pomembnejše zvezne porazdelitve so zbrane v Tabeli 3. Posebej je pomembna standardizirana Gaussova[7] porazdelitev, ki ji rečemo tudi **standardna normalna porazdelitev** in jo označimo z $N(0, 1)$, slučajno spremenljivko s tako porazdelitvijo pa z Z. Oznaka $Z \sim N(0, 1)$ pomeni, da je Z porazdeljena standardno normalno. Njena porazdelitvena funkcija $\boldsymbol{\Phi}$ je **Gaussov integral**:

$$F_Z(z) = \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt,$$

katerega vrednosti so tabelirane na strani 146. Z Gaussovim integralom lahko izrazimo porazdelitveno funkcijo splošne **normalno ali Gaussovo porazdeljene** slučajne spremenljivke $X \sim N(\mu, \sigma)$ kot

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

ter **lognormalno porazdeljene** slučajne spremenljivke $X = e^Y$, $Y \sim N(\mu, \sigma)$, kot

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right).$$

Pri zadnjih dveh prazdelitvah v Tabeli 3 nastopa v formulah za gostoto funkcija gama:

$$\Gamma(s) = \int\limits_{0}^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Na straneh 147-148 so tabelirani izbrani kvantili Studentove[8] porazdelitve $T(n)$, na straneh 149-150 pa izbrani kvantili porazdelitve hi-kvadrat $\chi^2(n)$.

[7] Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

[8] William Sealy Gosset (1876–1937)

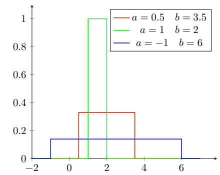
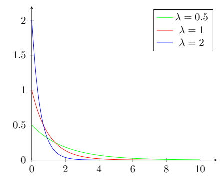
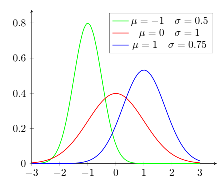
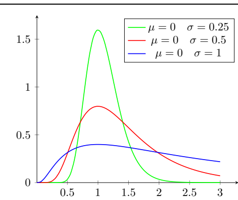
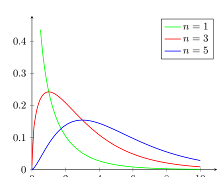
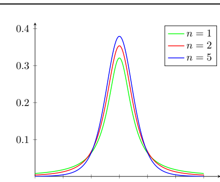
Porazdelitev	Gostota verjetnosti		Matematično upanje in disperzija
Enakomerna zvezna na intervalu $[a,b]$	$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$		$E(X) = \frac{a+b}{2}$ $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Eksponentna $X \sim E(\lambda)$	$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$		$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normalna ali Gaussova $X \sim N(\mu, \sigma)$	$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$		$E(X) = \mu$ $D(X) = \sigma^2$
Lognormalna $X = e^Y$ $Y \sim N(\mu, \sigma)$	$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}$		$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ $D(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$
hi-kvadrat $X \sim \chi^2(n)$	$p_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$		$E(X) = n$ $D(X) = 2n$
Studentova $T \sim T(n)$	$p_T(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{n}{n+x^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$		za $n > 1$ je $E(T) = 0$ za $n > 2$ je $D(T) = \frac{n}{n-2}$

Tabela 3: Zvezne porazdelitve

Naloge

3.1 Pri kontroli izdelkov v tovarni uporabljajo tri neodvisne naprave. Vsaka od naprav odkrije napako z verjetnostjo 0.8.

(a) Kolikšna je verjetnost, da napake ne bo odkrila nobena naprava?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bosta napako odkrili vsaj dve napravi?

(c) Koliko naprav bi potrebovali, da bi bila verjetnost, da napaka ni bila odkrita, največ 0.0001?

(d) Predpostavimo, da so se odločili, da bodo uporabljali tri naprave. Kolikšna mora biti njihova učinkovitost, da bi napako odkrili enako uspešno kot v točki (c)?

REŠITEV

3.2 Recimo, da pojav visokih valov na nekem območju v obdobju enega leta lahko opišemo z Bernoullijevo porazdelitvijo. Ladijski pomol je projektiran tako, da zdrži t. i. 10-letne valove, to je valove, ki se v povprečju pojavijo na 10 let.

(a) Kolikšna je verjetnost, da se bo visok val pojavil v prvih treh letih? In verjetnost, da se bo visok val prvič pojavil v tretjem letu po zgraditvi pomola? Izračunaj še verjetnost vsaj ene pojavitve visokega vala v treh letih.

(b) Pri visokem valu je verjetnost poškodbe pomola enaka 0.2. Kolikšna je verjetnost poškodbe pomola v treh letih? Privzemimo, da je verjetnost več kot enega visokega vala na leto zanemarljiva.

REŠITEV

3.3 Verjetnost, da bodo na klic v telefonski centrali odgovorili v manj kot 30 sekundah, je enaka 0.75. Privzemi, da so tvoji klici neodvisni.

(a) Kolikšna je verjetnost, da boš dobil odgovor v manj kot 30 sekundah na natanko devet klicev, če boš klical desetkrat?

(b) Kolikšna je verjetnost, da boš dobil odgovor v manj kot 30 sekundah na vsaj šestnajst klicev, če boš klical dvajsetkrat?

(c) Kolikšno je pričakovano število odgovorov v manj kot 30 sekundah, če kličeš dvajsetkrat?

(d) Kolikšna je verjetnost, da boš šele pri četrtem klicu dobil odgovor v manj kot 30 sekundah?

(e) Kolikšno je pričakovano število klicev do prvega klica, v katerem dobiš odgovor v manj kot 30 sekundah?

REŠITEV

3.4 V tovarni, kjer vsak dan nadzirajo onesnaženost svojih odplak, je verjetnost, da dnevno ne ustrezajo standardom enaka 90 %.

(a) Kolikšna je verjetnost, da odplake ne ustrezajo standardom natanko dvakrat v naslednjih sedmih dneh?

(b) Kolikšna je verjetnost, da odplake ne ustrezajo standardom več kot dva dneva v naslednjih sedmih dneh?

(c) Kolikšna je verjetnost, da prvič ne bodo ustrezale standardom peti dan?

(d) Kdaj pričakujemo, da prvič ne bodo ustrezale standardom?

REŠITEV

3.5 V tovarni pakirajo enake izdelke v škatle, ki vsebujejo pet izdelkov. Privzemimo, da je delež izdelkov, ki so okvarjeni, 15 %.

(a) Kolikšna je verjetnost, da v naključno izbrani škatli ni okvarjenih izdelkov?

(b) Kolikšna je verjetnost, da vsaj v osmih od desetih naključno izbranih škatlah ni okvarjenih izdelkov?

(c) Kolikšno je pričakovano število testiranih škatel do prve, ki ne vsebuje okvarjenega izdelka?

REŠITEV

3.6 Nasip ob reki je bil zgrajen tako, da bi preprečil poplave 50-letnih padavin (to so močne padavine, ki se v povprečju pojavijo vsakih 50 let). Če količina padavin preseže predvideno vrednost, potem so v mestu poplave.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bodo poplave prvič v sedmem letu po zgraditvi nasipa?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bodo prve poplave v prvih sedmih letih po zgraditvi nasipa?

(c) Kolikšna je verjetnost natanko enih poplav v sedmih letih?

REŠITEV

3.7 V skladišču imajo na zalogi 100 enakih izdelkov. Verjetnost, da je izdelek okvarjen in zato neuporaben, je enaka 0.02.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bodo lahko izpolnili 100 naročil, ne da bi iz tovarne naročili dodatne izdelke?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bi brez dodatnega naročanja izpolnili vsaj 100 naročil, če bi imeli na zalogi 102 izdelka?

(c) Kolikšna je verjetnost, da bo natanko dvajseti izdelek, ki ga bodo želeli prodati, prvi okvarjen?

REŠITEV

3.8 Iz spodnje tabele lahko razberemo, kolikšen je lahko razmik med dvema zaporednima spremembama na spletni strani in kakšne so verjetnosti, da se tak razmik zgodi.

Število dni do zadnje spremembe	Verjetnost
1.5	0.05
3	0.25
4.5	0.35
5	0.20
7	0.15

Določi porazdelitveno funkcijo in skiciraj njen graf.

Privzemo, da je prišlo do 10 neodvisnih popravkov.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je prišlo do spremembe v manj kot štirih dneh v dveh ali manj od 10 popravkov?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je do vsaj enega od 10 popravkov prišlo v manj kot štirih dneh?

(c) Kolikšno je pričakovano število popravkov, ki se zgodijo v manj kot štirih dneh?

REŠITEV

3.9 V livarni, kjer vlivajo kovinske izdelke, vsako uro pregledajo vzorec 20 izdelkov. Naj X označuje število neustreznih izdelkov v vzorcu, ki jih je treba predelati. Privzemimo, da je delež izdelkov, ki jih je treba predelati, $1\,\%$.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo v vzorcu več kot en neustrezen izdelek?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bo v vzorcu več kot en neustrezen izdelek prvič po 10 urah?

(c) Kolikšna je verjetnost, da bo več kot en neustrezen izdelek v vsaj enem od vzorcev v naslednjih petih urah?

(d) Kolikšno je pričakovano število ur do prvega vzorca, ki vsebuje več kot en neustrezen izdelek?

REŠITEV

3.10 V tovarni pakirajo izdelke v pakete po 25 izdelkov. Preden paket pošljejo v prodajo, iz njega naključno izberejo tri izdelke. Če nobeden od izdelkov ni okvarjen, pošljejo paket v prodajo, sicer pa ga vrnejo nazaj, da pregledajo vse izdelke.

(a) Kolikšna je verjetnost, da dajo v prodajo paket, ki vsebuje tri okvarjene izdelke?

(b) Kolikšna je verjetnost, da paket, ki vsebuje samo en okvarjen izdelek, pošljejo nazaj v pregled?

(c) Predpostavimo, da so spremenili shemo kontrole. Paket pregledujejo trije kontrolorji. Prvi vzame en izdelek, ga stestira in vrne v škatlo. Isti postopek ponovita tudi druga dva kontrolorja. Paketa ne pošljejo v prodajo, če katerikoli od kontrolorjev najde okvarjen izdelek.
Kakšna bi bila odgovora na vprašanji (a) in (b) pri tej shemi?

REŠITEV

3.11 Košarkar A ima učinkovitost meta 80 %, košarkar B pa 75 % (učinkovitost pomeni verjetnost zadetka pri posameznem metu).

(a) Najprej vsak igralec posebej meče na svoj koš do prvega zadetka. Slučajni spremenljivki X_A in X_B predstavljata število metov do prvega doseženega koša. Zapiši njuni verjetnostni shemi in ugotovi, kateri znani porazdelitvi ustrezata. Za vsakega igralca posebej izračunaj pričakovano število metov do prvega zadetka in standardni odklon od tega števila.

(b) Zdaj igralca izmenoma mečeta na koš, dokler eden od njiju ne zadene. Igro začne igralec A. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja skupno število vseh metov do prvega doseženega koša. Zapiši prvih šest členov verjetnostne sheme slučajne spremenljivke X. Kolikšna je verjetnost, da koš prvi zadene igralec A?

REŠITEV

3.12 Recimo, da ulov ribiča sledi Poissonovemu procesu s povprečnim ulovom dve ribi na uro.

(a) Kolikšna je verjetnost, da ulovi eno ribo v prve pol ure lova? In verjetnost, da ulovi dve ribi v naslednji uri in pol?

(b) Izračunaj verjetnost, da porabi več kot dve uri za ulov prve ribe.

(c) Koliko časa v povprečju ribič čaka na ribo in kolikšen je standardni odklon od tega časa?

REŠITEV

3.13 Za modeliranje prometnega toka pogosto uporabljamo Poissonov proces. Neko križišče v povprečju prevozi šest avtomobilov na minuto. Za pravilno nastavitev signala na semaforju nas zanimajo naslednje verjetnosti.

(a) Kolikšna je verjetnost, da v 30 sekundah skozi križišče ne pripelje nihče?

(b) S kolikšno verjetnostjo pripeljejo v 30 sekundah skozi križišče vsaj trije avtomobili?

(c) Poiščite najmanjše število N, pri katerem je verjetnost, da v 30 sekundah pripelje kvečjemu N avtomobilov, vsaj 90 %.

REŠITEV

3.14 Recimo, da rojstvo otrok sledi Poissonovemu procesu in da se v povprečju rodi 60 otrok dnevno.

(a) Določi verjetnost, da se v eni uri ne rodi noben otrok.

(b) Kolikšna je verjetnost, da se v eni uri rodita več kot dva otroka?

(c) Poišči najmanjše naravno število N, pri katerem je verjetnost, da se v eni uri rodi kvečjemu N otrok, vsaj $90\,\%$.

(d) Kolikšna je verjetnost, da bosta med zaporednima rojstvoma dveh otrok minili več kot dve uri?

REŠITEV

3.15 Pri obsežnem gradbenem projektu pri vrtanju v tla večkrat naletijo na balvane. Predpostavimo, da lega balvanov sledi Poissonovemu procesu in da sta v povprečju dva na 50 metrov.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bodo v naslednjih 30 metrih naleteli na natanko en balvan?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bodo v naslednjih 50 metrih naleteli na največ dva balvana?

(c) Poišči najmanjše naravno število N, pri katerem je verjetnost, da je v 50 metrih največ N balvanov, večja od 0.8?

(d) Kolikšna je verjetnost, da bo med dvema zaporednima balvanoma več kot 50 metrov?

(e) Recimo, da v zadnjih 100 metrih niso naleteli na balvan. Kolikšna je verjetnost, da tudi v naslednjih 50 metrih ne bodo naleteli nanj?

REŠITEV

3.16 Rezervacijska služba zaposluje pet informacijskih operaterjev, ki prejemajo zahtevke za informacije neodvisno drug od drugega. Predpostavimo, da prihod zahtevkov za informacije sledi Poissonovem procesu in da vsako uro pride v povprečju 120 zahtevkov na operaterja.

(a) Kolikšna je verjetnost, da prvi operater v enominutnem intervalu dobi natanko tri zahtevke?

(b) Kolikšna je verjetnost, da prvi operater v enominutnem intervalu dobi vsaj tri zahtevke?

(c) Kolikšna je verjetnost, da prva dva operaterja v enominutnem intervalu ne dobita zahtevka?

(d) Kolikšna je verjetnost, da v enominutnem intervalu natanko štirje od petih operaterjev ne dobijo zahtevka?

REŠITEV

3.17 Recimo, da lega bencinskih servisov vzdolž avtoceste sledi Poissonovemu procesu in da je v povprečju ena bencinska črpalka na 10 kilometrov. Z verjetnostjo 0.3 na bencinskem servisu ne bodo imeli bencina. Privzemimo, da je razpoložljivost bencina na različnih servisih neodvisna.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je največ en bencinski servis v naslednjih 15 kilometrih avtoceste?

(b) Kolikšna je verjetnost, da na treh naslednjih bencinskih servisih ne bodo imeli bencina?

(c) Voznik na avtocesti opazi, da mu merilnik goriva kaže, da je rezervoar prazen; iz izkušenj ve, da lahko prevozi še 15 kilometrov. Kolikšna je verjetnost, da je v naslednjih 15 kilometrih en bencinski servis, toda voznik obtiči na avtocesti brez bencina?

(d) Kolikšna je verjetnost, da je naslednji bencinski servis oddaljen vsaj 30 kilometrov?

REŠITEV

3.18 Čas med dvema klicema v pisarno podjetja je eksponentno porazdeljen in v povprečju znaša 10 minut.

(a) Kolikšna je verjetnost, da v obdobju pol ure ni nobenega klica?

(b) Kolikšna je verjetnost, da so v obdobju pol ure več kot trije klici?

(c) Kolikšna je verjetnost, da v obdobju dveh ur ni nobenega klica?

(d) Določi tak x, da bo verjetnost, da v obdobju x minut ni nobenega klica, enaka 0.01.

REŠITEV

3.19 Življenjska doba mehanskega zgloba pri vibracijskem testu je eksponentno porazdeljena s povprečno vrednostjo 400 ur.

(a) Kolikšna je verjetnost, da se zglob pokvari v manj kot 100 urah?

(b) Kolikšna je verjetnost, da zglob deluje več kot 500 ur, preden se okvari?

(c) Zglob je uspešno prestal 400 ur testiranja. Kolikšna je verjetnost, da se pokvari v naslednjih 100 urah?

(d) Testiramo 10 zglobov. Kolikšna je verjetnost, da se vsaj eden pokvari v manj kot 100 urah? Privzemimo, da se zglobi okvarijo neodvisno drug od drugega.

REŠITEV

3.20 Razdalja med dvema nesrečama na avtocesti je eksponentno porazdeljena in je v povprečju 10 kilometrov.

(a) Kolikšna je verjetnost, da na razdalji 20 kilometrov ni nobene nesreče?

(b) V prvih 20 kilometrih ni bilo nesreče. Kolikšna je verjetnost, da ne bo nesreče v naslednjih 10 kilometrih?

(c) Poišči mediano za razdaljo med dvema nesrečama.

(d) Kolikšna je verjetnost, da so na 20 kilometrov dolgem odseku avtoceste več kot tri nesreče?

REŠITEV

3.21 Recimo, da življenjska doba neke naprave (v mesecih) sledi eksponentni porazdelitvi. Proizvajalec trdi, da je verjetnost okvare v prvem mescu delovanja 1 %.

(a) Določi parameter λ za porazdelitev.

(b) Kolikšna je verjetnost, da je življenjska doba naprave od 5 do 10 mesecev?

(c) Po kolikšnem času je verjetnost okvare 10 %?

(d) Kolikšna je povprečna življenjska doba naprave?

REŠITEV

3.22 Čas med prihodom taksijev na neko turistično točko je eksponentno porazdeljen, s povprečnim razmikom 10 minut.

(a) Kolikšna je verjetnost, da turist na tistem mestu na taksi čaka več kot eno uro?

(b) Recimo, da nekdo že čaka eno uro. Kolikšna je verjetnost, da se taksi pojavi v naslednjih 10 minutah?

(c) Določi tak čakalni čas T, da bo verjetnost čakanja manj kot T minut enaka 0.9.

REŠITEV

3.23 Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x(1-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi parameter α tako, da bo f gostota neke slučajne spremenljivke X, in nariši graf gostote verjetnosti.

(b) Določi porazdelitveno funkcijo in nariši njen graf.

(c) Izračunaj $P(X > \frac{1}{3})$.

(d) Kolišna je pričakovana vrednost slučajne spremenjivke X?

REŠITEV

3.24 Paretova slučajna spremenljivka X s pozitivnima parametroma α in c ima gostoto verjetnosti

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha c^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq c; \\ 0, & x < c. \end{cases}$$

(a) Poišči porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X.

(b) Določi mediano spremenljivke X.

(c) Naj bo $\alpha = 3$ in $c = 2$. Pri danih vrednostih parametrov izračunaj matematično upanje, določi porazdelitveno funkcijo in jo skiciraj.

Kolikšna je verjetnost $P(4 < X \leq 6)$?

REŠITEV

3.25 Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2; \\ \alpha(4-x), & 2 \leq x \leq 4; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi parameter α tako, da bo f gostota neke slučajne spremenljivke X in skiciraj graf gostote verjetnosti.

(b) Določi porazdelitveno funkcijo in skiciraj njen graf.

(c) Izračunaj $P(|X-2| \leq 1)$.

(d) Kolišna je pričakovana vrednost slučajne spremenjivke X?

REŠITEV

3.26 Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^2, & 1 \leq x \leq 2; \\ c, & 2 < x < 3; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi parameter c tako, da bo f gostota neke slučajne spremenljivke X in skiciraj graf gostote verjetnosti.

(b) Določi porazdelitveno funkcijo in skiciraj njen graf.

(c) Izračunaj $P\left(|X-2| \leq \frac{1}{2}\right)$.

REŠITEV

3.27 Naj bo X slučajna spremenjivka z gostoto verjetnosti

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Poišči porazdelitveno funkcijo in skiciraj njen graf.

(b) Poišči povprečno vrednost slučajne spremenljivke X.

(c) Poišči verjetnost, da se vrednost slučajne spremenljivke od povprečja razlikuje za največ 0.1.

(d) Poišči standardni odklon σ spremenljivke X.

REŠITEV

3.28 Število nalivov na leto v porečju neke reke je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Povprečno število nalivov na leto je 35 s standardnim odklonom 5.5.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je število nalivov v določenem letu med 25 in 40?

(b) Pri katerem številu n lahko rečemo, da bo s 95-odstotno verjetnostjo število nalivov vsaj n?

REŠITEV

3.29 Teža izdelka je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s povprečno vrednostjo 12 kg in standardnim odklonom 0.5 kg.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je izdelek težji od 13 kg?

(b) Poišči tretji kvartil teže izdelka.

(c) Pri kateri vrednosti standardnega odklona bi proizvajalec lahko rekel, da je 99 % njihovih izdelkov lažjih od 13 kg?

REŠITEV

3.30 Debelina zaščitne folije je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s povprečno vrednostjo 5 mm in standardnim odklonom 0.2 mm.

(a) Predpisi zahtevajo, da debelina folije leži na intervalu 5 ± 0.5 mm. Kolikšen delež folije ne ustreza predpisom?

(b) Pod katero vrednostjo je debelina 95 % vseh vzorcev?

(c) Kolikšen bi moral biti v predpisih maksimalni dovoljeni odmik od 5 mm, da bi predpisom ustrezalo 95 % vseh vzorcev?

REŠITEV

3.31 Dolžina brizganih plastičnih delov je normalno porazdeljena s povprečno dolžino 90 mm in standardnim odklonom 0.1 mm.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je dolžina daljša od 90.3 mm ali krajša od 89.7 mm?

(b) Poišči dolžino, ki jo preseže 90 % plastičnih delov.

(c) Recimo, da smo izmerili 10 delov, in predpostavimo, da so njihove dolžine neodvisne. Kolikšna je verjetnost, da je dolžina vseh 10 delov med 89.7 in 90.3 mm?

REŠITEV

3.32 Teža blokov, ki se uporabljajo v gradnji, je normalno porazdeljena s povprečno vrednostjo 3 kg in standardnim odklonom 0.25 kg. Predpostavimo, da so teže blokov med sabo neodvisne. Naključno izberemo vzorec, ki vsebuje 20 blokov.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bodo vsi bloki v vzorcu težji od 2.75 kg?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bo najtežji blok v vzorcu težji od 3.75 kg?

REŠITEV

3.33 Čas (v sekundah), ki ga uporabnik prebije na spletni strani, je lognormalna slučajna spremenljivka s parametroma $\mu = 1$ in $\sigma = 0.5$ (tj. $X = e^Y$, kjer je Y normalno porazdeljena s parametroma μ in σ).

(a) Kolikšna je verjetnost, da uporabnik na strani prebije manj kot pet sekund?

(b) Kolikšen je povprečen čas, ki ga uporabnik prebije na strani? Izračunaj tudi mediano in interkvartilni razpon časa uporabnika na strani ter interpretiraj rezultate.

REŠITEV

3.34 Življenjska doba polprevodniških laserjev je porazdeljena lognormalno s povprečno vrednostjo 10 000 ur in standardnim odklonom 20 000 ur.

(a) Izračunaj parametra lognormalne porazdelitve.

(b) Določi verjetnost, da bo življenjska doba več kot 10 000 ur.

(c) Določi življenjsko dobo, ki jo preseže 90 % laserjev.

REŠITEV

3.35 Na določeni lokaciji je globina X, do katere se da zabiti pilot, ne da bi naleteli na plast skal, lognormalna spremenljivka s povprečno vrednostjo 9.5 metra in standardnim odklonom 1.9 metra.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo globina X med 5 in 15 metri?

(b) Določi še prvi kvartil globine X.

REŠITEV

3.36 Poraba vode v nekem naselju je lognormalno porazdeljena s povprečno vrednostjo 100 000 litrov na uro in standardnim odklonom 60 000 litrov na uro.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo poraba večja od 300 000 litrov na uro?

(b) Določi porabo vode, ki je presežena v 1 % ur.

REŠITEV

3.37 Življenjska doba stroja je lognormalno porazdeljena s povprečno vrednostjo tri leta in standardnim odklonom 1.5 leta.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo delal več kot štiri leta?

(b) Določi tretji kvartil življenjske dobe.

REŠITEV

3.38 Izvajalec gradbenih del pričakuje, da bo projekt končal v 30 dneh. Zaradi vremenskih razmer ni prepričan, da bo delo lahko opravil pravočasno, je pa 90-odstotno prepričan, da bo projekt končan v 40 dneh. Naj slučajna spremenljivka X označuje število potrebnih dni za končanje projekta.

(a) Privzemimo, da je X normalno porazdeljena. Na osnovi danih informacij določi matematično upanje μ, standardni odklon σ in verjetnost, da bo projekt končan v manj kot 50 dneh.

(b) Privzemimo zdaj, da je X lognormalno porazdeljena z enakim matematičnim upanjem in standardnim odklonom kot v primeru (a). Kolikšna je v tem primeru verjetnost, da bo projekt končan v manj kot 50 dneh?

REŠITEV

3.39 Mesto obdajata dve reki, označimo ju z A in B. Maksimalni letni pretok v reki A lahko modeliramo z normalno porazdelitvijo s povprečno vrednostjo 50 m^3/s in standardnim odklonom 10 m^3/s, medtem ko maksimalni letni pretok v reki B modeliramo z lognormalno porazdelitvijo s povprečno vrednostjo 35 m^3/s in standardnim odklonom 8.75 m^3/s. Maksimalni zmogljivosti rečnih strug sta 65 m^3/s za reko A in 55 m^3/s za reko B. Pretoka v rekah A in B sta med sabo neodvisna.

(a) Za vsako od rek posebej izračunaj verjetnost, da bo poplavila.

(b) Kolikšna je verjetnost, da v nekem letu ne bo poplavila nobena od obeh rek?

(c) Reko A so poglobili in pri njej zmanjšali verjetnost poplave na 2 %. Kolikšna je nova zmogljivost njene struge?

REŠITEV

Rešitve

3.1 Označimo z X število odkritih napak. Verjetnost, da naprava odkrije napako, je $p = 0.8$.

(a) $P(X = 0) = (1 - p)^3 = 0.2^3 = 0.008$

(b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3p^2(1 - p) + p^3 = 3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8 + 0.8^3 = 0.896$ ali $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1 - p)^3 - 3 \cdot (1 - p)^2 p = 0.896$

(c) Iz $P(X = 0) = (1 - p)^n \leq 0.0001$ dobimo $n \geq \frac{\ln 0.0001}{\ln 0.2} \approx 5.723$. Torej potrebujemo vsaj šest naprav.

(d) Iz $P(X = 0) = (1 - p_{nov})^3 \leq 0.0001$ dobimo $p_{nov} \geq 0.954$.

NALOGA

3.2 Verjetnost, da se v letu pojavi visok val, je enaka 0.1.

(a) Verjetnost, da se bo visok val pojavil v prvih treh letih, je $1 - 0.9^3 = 0.271$, kar je tudi enako verjetnosti vsaj ene pojavitve visokega vala v treh letih. Verjetnost, da se bo visok val prvič pojavil v tretjem letu po zgraditvi, je $0.9^2 \cdot 0.1 = 0.081$.

(b) Laže je izračunati verjetnost nasprotnega dogodka, tj. da v treh letih ne pride do poškodbe. Pri tem upoštevamo, da število pojavitev vala leži med 0 in 3 in da je pri vsaki pojavitvi verjetnost, da ne pride do poškodbe, enaka 0.8. Tako dobimo

$$P(\text{ni pošk.}) = 0.9^3 + 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 \cdot 0.8 + 3 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 \cdot 0.8^2 + 0.1^3 \cdot 0.8^3 = 0.941.$$

Verjetnost poškodbe pomola v treh letih je torej 0.059.

NALOGA

3.3 Označimo z A dogodek, da bodo na klic v telefonski centrali odgovorili v manj kot 30 sekundah. Potem je $P(A) = p = 0.75$.

(a) Naj bo X število ponovitev dogodka A v 10 klicih. Potem je $X \sim B(10, p)$ in

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} p^9 (1 - p) \approx 0.1877.$$

(b) Naj bo Y število ponovitev dogodka A v 20 klicih. Potem je $Y \sim B(20, p)$ in

$$P(Y \geq 16) = \sum_{k=16}^{20} \binom{20}{k} p^k (1 - p)^{20-k} \approx 0.4148.$$

(c) Ker je $Y \sim B(20, p)$, je $E(Y) = 20p = 15$.

(d) Naj bo Z zaporedna številka klica, ko se prvič zgodi dogodek A. Potem je Z geometrijsko porazdeljena, $Z \sim G(p)$, in $P(Z = 4) = (1 - p)^3 p = 0.25^3 \cdot 0.75 \approx 0.0117$.

(e) $E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{4}{3}$

NALOGA

3.4 Označimo z A dogodek, da odplake ne ustrezajo standardom. Potem je $P(A) = p = 0.9$.

(a) Naj bo X število ponovitev dogodka A v sedmih dneh. Potem je $X \sim B(7, p)$ in

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5 \approx 0.00017.$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - \binom{7}{0}(1-p)^7 - \binom{7}{1} p(1-p)^6 - \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5 \approx 0.99982 \end{aligned}$$

(c) Naj bo Z zaporedna številka dneva, ko se prvič zgodi dogodek A. Potem je Z geometrijsko porazdeljena, $Z \sim G(p)$, in $P(Z = 5) = (1-p)^4 p = 0.1^4 \cdot 0.9 \approx 0.00009$.

(d) $E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{10}{9} \approx 1.11111$

NALOGA

3.5 (a) Če z O označimo dogodek, da je izdelek okvarjen, je $P(O) = 0.15$. Verjetnost, da v škatli ni okvarjenega izdelka, je enaka $p = P(\overline{O})^5 = 0.85^5 \approx 0.44$.

(b) Naj bo X število škatel, ki ne vsebujejo okvarjenih izdelkov, če naključno izberemo 10 škatel. Potem je X binomsko porazdeljena, $X \sim B(10, p)$, in

$$P(X \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} P(X = k) = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2 + \binom{10}{9} p^9 (1-p) + \binom{10}{10} p^{10} \approx 0.024.$$

(c) Naj bo Y zaporedna številka škatle, ki prva ne vsebuje okvarjenega izdelka. Potem je Y geometrijsko porazdeljena, $Y \sim G(p)$, in $E(Y) = \frac{1}{p} \approx 2.274$.

NALOGA

3.6 Verjetnost, da bodo v nekem letu poplave, je enaka $p = 0.02$.

(a) Naj bo X zaporedna številka leta, ko so prvič poplave. Potem je X geometrijsko porazdeljena in

$$P(X = 7) = (1-p)^6 p = 0.98^6 \cdot 0.02 \approx 0.0177.$$

(b) Prve poplave bodo v prvih sedmih letih, če bodo prvič v prvem ali v drugem ali ... ali v sedmem letu.

$$P(X \leq 7) = \sum_{k=1}^{7} P(X = k) = \sum_{k=1}^{7} (1-p)^{k-1} p \approx 0.1319$$

(c) Naj bo Y število poplav v sedmih letih. Potem je $Y \sim B(7, p)$ in

$$P(Y = 1) = \binom{7}{1} p(1-p)^6 \approx 0.124.$$

Opomba: $P(X \leq 7) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1-p)^7$.

NALOGA

3.7 Označimo z A dogodek, da izdelek ni okvarjen. Potem je $P(A) = p = 0.98$.

(a) Naj bo X število neokvarjenih izdelkov, če imamo na zalogi 100 izdelkov. Potem je $X \sim B(100, p)$ in $P(X = 100) = p^{100} = 0.98^{100} \approx 0.133$.

(b) Naj bo Y število neokvarjenih izdelkov, če imamo na zalogi 102 izdelka. Potem je $Y \sim B(102, p)$ in

$$\begin{aligned} P(Y \geq 100) &= \sum_{k=100}^{102} P(Y=k) \\ &= \binom{102}{100} 0.98^{100} \cdot 0.02^2 + \binom{102}{101} 0.98^{101} \cdot 0.02 + \binom{102}{102} 0.98^{102} \\ &\approx 0.665. \end{aligned}$$

(c) Naj bo Z zaporedna številka izdelka, ko se prvič zgodi, da izberemo okvarjen izdelek. Potem je Z geometrijsko porazdeljena, $Z \sim G(1-p)$, in

$$P(Z = 20) = 0.98^{19} \cdot 0.02 \approx 0.0136$$

NALOGA

3.8

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1.5; \\ 0.05, & 1.5 \leq x < 3; \\ 0.30, & 3 \leq x < 4.5; \\ 0.65, & 4.5 \leq x < 5; \\ 0.85, & 5 \leq x < 7; \\ 1, & x \geq 7. \end{cases}$$

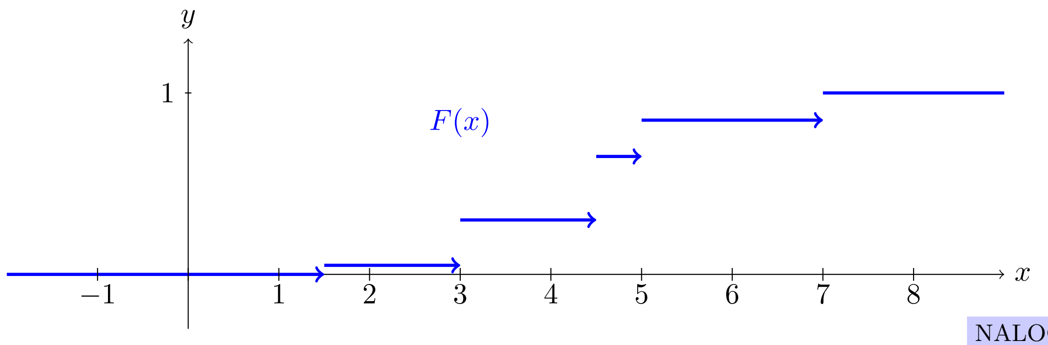
Iz porazdelitvene funkcije razberemo, da je verjetnost, da pride do spremembe v manj kot štirih dneh, enaka $p = 0.3$. Naj bo X število sprememb v manj kot štirih dneh v desetih neodvisnih popravkih. Potem je $X \sim B(n, p)$, kjer je $n = 10$.

(a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} + \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 + \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 \approx 0.3828 \end{aligned}$$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}p^0(1-p)^{10} \approx 0.9718$

(c) $E(X) = np = 10 \cdot 0.3 = 3$



NALOGA

3.9 (a) Naj bo X število neustreznih izdelkov v vzorcu, ki vsebuje 20 izdelkov. Potem je $X \sim B(n, p)$, kjer je $n = 20$ in $p = 0.01$. Potem je verjetnost, da bo v vzorcu več kot en neustrezen izdelek,

$$\tilde{p} = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$
$$= 1 - \binom{20}{0}p^0(1-p)^{20} - \binom{20}{1}p^1(1-p)^{19} \approx 0.0169.$$

(b) Naj bo Y zaporedna številka vzorca, ko se prvič zgodi, da je v vzorcu več kot en neustrezen izdelek. Potem ima Y geometrijsko porazdelitev s parametrom $\tilde{p}$, $Y \sim G(\tilde{p})$, in

$$P(Y = 10) = (1 - \tilde{p})^9 \tilde{p} \approx 0.0145.$$

(c) Naj bo Z število vzorcev, ki vsebujejo več kot en neustrezen izdelek, v petih vzorcih. Potem je $Z \sim B(5, \tilde{p})$ in

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - (1 - \tilde{p})^5 \approx 0.0815.$$

(d) $E(Y) = \frac{1}{\tilde{p}} \approx 59.3143$

NALOGA

3.10 (a) Verjetnost, da dajo v prodajo paket, ki vsebuje tri okvarjene izdelke, je enaka

$$\frac{\binom{3}{0}\binom{22}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{77}{115} \approx 0.67.$$

(b) Paket s samo enim okvarjenim izdelkom pošljejo nazaj v pregled z verjetnostjo

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{24}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{3}{25} = 0.12.$$

(c) Naj bo X število izbranih okvarjenih izdelkov, ki jih izberejo vsi trije kontrolorji iz paketa, ki vsebuje tri okvarjene izdelke. Potem je $X \sim B\left(3, \frac{3}{25}\right)$ in

$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(1-\frac{3}{25}\right)^3 = \left(\frac{22}{25}\right)^3 \approx 0.681.$$

Naj bo Y število izbranih okvarjenih izdelkov, ki jih izberejo vsi trije kontrolorji iz paketa, ki vsebuje samo en okvarjen izdelek. Potem je $Y \sim B\left(3, \frac{1}{25}\right)$ in paket vrnejo v pregled, če vsaj eden od kontrolorjev izbere okvarjen izdelek, torej z verjetnostjo

$$1 - P(Y=0) = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^3 \approx 0.115.$$

Verjetnost lahko izračunamo tudi tako:

$$P(Y{=}1)+P(Y{=}2)+P(Y{=}3) = \binom{3}{1}\frac{1}{25}\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{25}\right)^2\frac{24}{25} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{25}\right)^3 \approx 0.115.$$

NALOGA

3.11 (a) Slučajni spremenljivki X_A in X_B sta geometrijsko porazdeljeni z osnovnima verjetnostma $p_A = 0.8$ in $p_B = 0.75$:

$$X_A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0.8 & 0.2\cdot 0.8 & 0.2^2\cdot 0.8 & \dots \end{pmatrix} \quad E(X_A) = 1.25; \quad \sigma(X_A) = 0.56$$

$$X_B : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0.75 & 0.25\cdot 0.75 & 0.25^2\cdot 0.75 & \dots \end{pmatrix} \quad E(X_B) = 1.33; \quad \sigma(X_B) = 0.67$$

(b)

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 0.8 & 0.2\cdot 0.75 & 0.2\cdot 0.25\cdot 0.8 & 0.2^2\cdot 0.25\cdot 0.75 & 0.2^2\cdot 0.25^2\cdot 0.8 & 0.2^3\cdot 0.25^2\cdot 0.75 & \dots \end{pmatrix}$$

Igralec A zmaga natanko takrat, ko slučajna spremenljivka X zavzame liho vrednost. Ker za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$ velja $P(X = 2k+1) = 0.2^k \cdot 0.25^k \cdot 0.8$, s formulo za vsoto geometrijske vrste dobimo:

$$P(\text{A zmaga}) = \sum_{k=0}^{\infty} 0.8 \cdot 0.05^k = \frac{0.8}{0.95} = 0.842.$$

NALOGA

3.12 (a) Naj X označuje število ujetih rib v pol ure. Potem ima X Poissonovo porazdelitev $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, kjer je $\lambda=1$. Torej je verjetnost, da ulovi eno ribo v prve pol ure, enaka $P(X=1)=e^{-1}\approx 0.368$.

Če si za osnovno časovno enoto izberemo uro in pol, je vrednost parametra Poissonove porazdelitve $\lambda=3$ in verjetnost, da ulovi dve ribi v naslednji uri in pol, je enaka

$$P(Y=2)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^2}{2!}\approx 0.224.$$

(b) Če si za osnovno časovno enoto izberemo dve uri, je vrednost parametra Poissonove porazdelitve $\lambda=4$ in verjetnost, da čaka na prvo ribo več kot dve uri, je enaka

$$P(Z=0)=e^{-4}\approx 0.018.$$

(c) Razmik med ulovom rib Z ima eksponentno porazdelitev. Torej je $E(Z)=\sigma(Z)=0.5$.

NALOGA

3.13 Če si za osnovno časovno enoto izberemo 30 sekund, je vrednost parametra Poissonove porazdelitve $\lambda=3$ in $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

(a) $P(X=0)=e^{-3}\approx 0.05$

(b) $P(X\geq 3)=1-P(X<3)\approx 0.577$

(c) $N=5$. Dobimo ga iz neenačbe (izračunamo prvih nekaj členov vsote):

$$P(X\leq N)=\sum_{k=0}^{N}\frac{e^{-3}3^k}{k!}\geq 0.9.$$

NALOGA

3.14 Če si za osnovno časovno enoto izberemo eno uro, je vrednost parametra Poissonove porazdelitve $\lambda=2.5$ in $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

(a) $P(X=0)=e^{-2.5.}\approx 0.082$

(b) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)\approx 0.456$

(c) Iščemo najmanjši tak N, da bo veljalo $P(X\leq N)\geq 0.9$. Iz neenačbe

$$P(X\leq N)=\sum_{k=0}^{N}\frac{e^{-2.5}2.5^k}{k!}\geq 0.9$$

dobimo $N=5$ tako, da izračunamo prvih nekaj členov vsote.

(d) Razmik med rojstvi Y ima eksponentno porazdelitev s porazdelitveno funkcijo $F(y)=1-e^{-2.5y}$. Torej je

$$P(Y>2)=1-P(Y\leq 2)=1-F(2)=e^{-5}\approx 0.0068.$$

NALOGA

3.15 Za Poissonovo porazdelitev velja $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

(a) Če si za osnovno dolžinsko enoto izberemo 30 metrov, je vrednost parametra Poissonove porazdelitve $\lambda=\frac{2\cdot 30}{50}=1.2$ in $P(X=1)=1.2e^{-1.2}\approx 0.361$.

(b) Če si za osnovno dolžinsko enoto izberemo 50 metrov, je vrednost parametra Poissonove porazdelitve $\lambda=2$ in

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=e^{-2}+2e^{-2}+\frac{2^2e^{-2}}{2}=5e^{-2}\approx 0.677.$$

(c) Tako kot v točki (b) je $\lambda=2$. Iščemo najmanjše naravno število N, ki zadošča neenačbi

$$P(X\leq N)=\sum_{k=0}^{N}\frac{e^{-2}2^k}{k!}>0.8.$$

Ker je $P(X\leq 2)\approx 0.677$ in $P(X\leq 3)\approx 0.857$, je $N=3$.

(d) Razmik med balvani Y ima eksponentno porazdelitev s porazdelitveno funkcijo $F_Y(y)=1-e^{-\tilde{\lambda}y}$, kjer je $\tilde{\lambda}=\frac{2}{50}$. Torej je

$$P(Y>50)=1-P(Y\leq 50)=e^{-2}\approx 0.136.$$

Lahko pa uporabimo tudi Poissonovo porazdelitev, kjer je $\lambda=2$. Med dvema balvanoma je več kot 50 metrov natanko takrat, ko na 50 metrih ni balvana, torej

$$P(X=0)=e^{-2}\approx 0.136.$$

(e) Ker Poissonova porazdelitev nima spomina, je verjetnost, da tudi v naslednjih 50 metrih ne bomo naleteleli na balvan, če na zadnjih 100 metrih nismo naleteli na balvan, enaka kot v točki (d), torej $P(X=0)=e^{-2}\approx 0.136$.

NALOGA

3.16 Za Poissonovo porazdelitev velja $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Pri osnovni časovni enoti ena minuta je vrednost parametra Poissonove porazdelitve $\lambda=\frac{120}{60}=2$.

(a) $P(X=3)=\frac{2^3e^{-2}}{3!}\approx 0.180$

(b)

$$\begin{aligned}P(X\geq 3) &= 1-P(X\leq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)\\ &= 1-e^{-2}-2e^{-2}-\frac{2^2e^{-2}}{2}=1-5e^{-2}\approx 0.323\end{aligned}$$

(c) Označimo dogodke:

A ... prvi operater v enominutnem intervalu ni dobil zahtevka,

B ... drugi operater v enominutnem intervalu ni dobil zahtevka.

Potem je $p = P(A) = P(B) = P(X = 0) = e^{-2} \approx 0.135$. Ker sta dogodka A in B neodvisna, je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = p^2 \approx 0.018.$$

(d) Naj bo Y število operaterjev, ki v enominutnem intervalu niso dobili nobenega zahtevka. Potem je Y binomsko porazdeljena, $Y \sim B(5, p)$. Verjetnost, da v enominutnem intervalu natanko štirje od petih operaterjev ne dobijo zahtevka, je enaka

$$\binom{5}{4} p^4(1-p) \approx 0.0014.$$

NALOGA

3.17 Če X označuje število črpalk na 15 kilometrov, ima X Poissonovo porazdelitev in velja $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, kjer je $\lambda = 1.5$.

(a) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-1.5} + 1.5e^{-1.5} \approx 0.558$

(b) Označimo z A dogodek, da na črpalki nimajo bencina. Potem je $P(A) = 0.3$. Ker je razpoložljivost bencina na črpalkah neodvisna, je verjetnost, da na treh naslednjih bencinskih servisih ne bodo imeli bencina, enaka $P(A)^3 = 0.3^3 = 0.027$.

(c) $P(X = 1)P(A) = 1.5e^{-1.5}0.3 \approx 0.1004$

(d) Ker Poissonova porazdelitev nima spomina, lahko verjetnost, da bo naslednji bencinski servis šele po 30 kilometrih, izračunamo kot produkt

$$P(X = 0)P(X = 0) = \left(e^{-1.5}\right)^2 \approx 0.0498.$$

Seveda dobimo enak rezultat, če izračunamo $P(Y \geq 30)$, kjer je Y število kilometrov med dvema črpalkama. Slučajna spremenljivka Y ima eksponentno porazdelitev s parametrom $\tilde{\lambda} = 0.1$ in zato

$$P(Y \geq 30) = 1 - P(Y < 30) = \left(e^{-\tilde{\lambda}}\right)^{30} = \left(e^{-0.1}\right)^{30} = e^{-3} \approx 0.0498.$$

NALOGA

3.18 Čas med dvema klicema X je eksponentno porazdeljena slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo $F_X(x) = 1 - e^{-0.1x}$.

(a) Na vprašanje lahko odgovorimo z uporabo eksponentne ali pa z uporabo Poissonove porazdelitve.

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = e^{-0.1 \cdot 30} = e^{-3} \approx 0.0498$$

Če z Y označimo število klicev v pol ure, ima spremenljivka Y Poissonovo porazdelitev in velja $P(Y=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, kjer je $\lambda=3$. Verjetnost, da v pol ure ni nobenega klica, je enaka

$$P(Y=0)=e^{-3}\approx 0.0498.$$

(b) $P(Y>3)=1-P(Y\leq 3)=1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)-P(Y=3)\approx 0.3528$

(c) Tudi na to vprašanje lahko odgovorimo z uporabo eksponentne ali pa z uporabo Poissonove porazdelitve. Z eksponentno porazdelitvijo dobimo

$$P(X>120)=1-P(X\leq 120)=e^{-0.1\cdot 120}=e^{-12}.$$

Če z Z označimo število klicev v dveh urah, ima Z Poissonovo porazdelitev s parametrom $\lambda=12$. Verjetnost, da v dveh urah ni nobenega klica, je enaka $P(Z=0)=e^{-12}$. Ker so pri Poissonovem procesu pojavitve na disjunktnih intervalih neodvisne, dobimo enak rezultat, če izračunamo

$$\big(P(Y=0)\big)^4=(e^{-3})^4=e^{-12}.$$

(d) Iz enačbe

$$P(X>x)=1-P(X\leq x)=e^{-0.1x}=0.01$$

dobimo $x\approx 46.05$ minut.

NALOGA

3.19 Življenjska doba X je eksponentno porazdeljena slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)=1-e^{-\lambda x}$, kjer je $\lambda=\frac{1}{400}$.

(a) $P(X<100)=F_X(100)=1-e^{-\frac{1}{4}}\approx 0.2212$

(b) $P(X>500)=1-F_X(500)=e^{-\frac{5}{4}}\approx 0.2865$

(c) $P(X\leq 500|X>400)=P(X\leq 100)\approx 0.2212$

(d) Naj bo Y število pokvarjenih zglobov v manj kot 100 urah:

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-\big(P(X\geq 100)\big)^{10}=1-\big(e^{-\frac{1}{4}}\big)^{10}=1-e^{-\frac{5}{2}}\approx 0.9179.$$

NALOGA

3.20 Razdalja med nesrečama X je eksponentno porazdeljena slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)=1-e^{-\lambda x}$, kjer je $\lambda=\frac{1}{10}$.

(a) $P(X>20)=1-P(X\leq 20)=e^{-2}\approx 0.135$

(b) $P(X>30|X>20)=P(X\geq 10)=1-P(X<10)=e^{-1}\approx 0.368$

(c) Iz $P(X<x_{0.5})=0.5$ sledi $x_{0.5}=10\ln 2\approx 6.931$.

(d) Če z Y označimo število nesreč na 20 kilometrov dolgem odseku, ima Y Poissonovo porazdelitev in velja $P(Y=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, kjer je $\lambda=2$. Torej je

$$P(Y>3)=1-P(Y\leq 3)=1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)-P(Y=3)\approx 0.143.$$

NALOGA

3.21 Za eksponentno porazdeljeno slučajno spremenljivko X je gostota verjetnosti enaka $p_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ in porazdelitvena funkcija $F_X(x)=1-e^{-\lambda x}$.

(a) Iz podatkov razberemo: $0.01=P(X\leq 1)=F_X(1)$, torej je $\lambda=-\ln 0.99\approx 0.01$.

(b) $P(5\leq X\leq 10)=F_X(10)-F_X(5)\approx 0.047$

(c) Iščemo tak x_0, da bo veljalo $P(X\leq x_0)=F_X(x_0)=0.1$. Rešitev te enačbe je

$$x_0=-100\ln 0.9\approx 10.54.$$

(d) Za eksponentno porazdelitev je $E(X)=\frac{1}{\lambda}$, torej je povprečna življenjska doba naše naprave 100 mesecev.

NALOGA

3.22 (a) Če čas čakanja X merimo v minutah, je parameter porazdelitve enak $\lambda=\frac{1}{10}$ in $P(X>60)=e^{-6}\approx 0.0025$.

(b) Eksponentna porazdelitev je brez spomina, zato je

$$P(X<70\mid X>60)=P(X<10)=1-e^{-1}\approx 0.632.$$

(c) Iz enačbe $P(X\leq T)=1-e^{-\frac{T}{10}}=0.9$ dobimo $T=10\ln 10\approx 23$ minut.

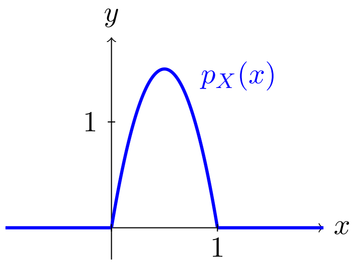
NALOGA

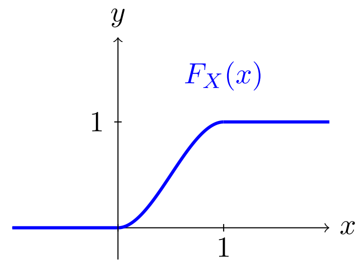
3.23 (a) Ker je $\int\limits_0^1 \alpha x(1-x)\,dx=\frac{\alpha}{6}$, je $\alpha=6$ in

$$p_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0\leq x\leq 1;\\ 0, & \text{sicer.}\end{cases}$$

(b) Ker je $\int\limits_0^x 6t(1-t)\,dt=3x^2-2x^3$, je

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 3x^2-2x^3, & 0\leq x\leq 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$





(c) $P(X > \frac{1}{3}) = 1 - F_X(\frac{1}{3}) = \frac{20}{27} \approx 0.74074$

(d) $E(X) = \int_0^1 x p_X(x)\, dx = \frac{1}{2}$

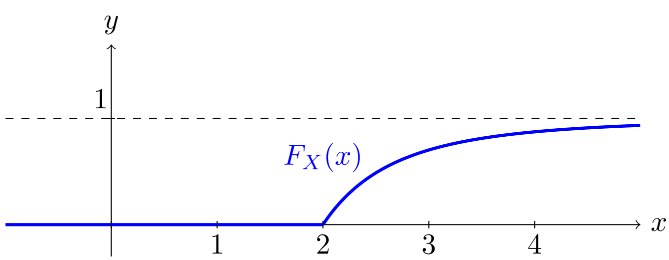
NALOGA

3.24 (a) $F_X(x) = \int_c^x \frac{\alpha c^\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha$ za $x \geq c$, drugod pa je enaka 0.

(b) Iz $F_X(x) = \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha$ sledi $x = c\sqrt[\alpha]{2}$.

(c) $E(X) = \int_2^\infty x \left(\frac{3 \cdot 2^3}{x^4}\right) dx = 24 \int_2^\infty x^{-3} dx = 24 \lim\limits_{b\to\infty} \int_2^b x^{-3} dx = 3$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{2}{x}\right)^3, & x \geq 2; \\ 0, & x < 2. \end{cases}$$

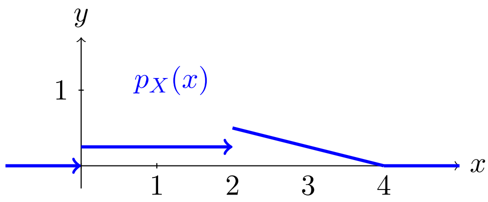


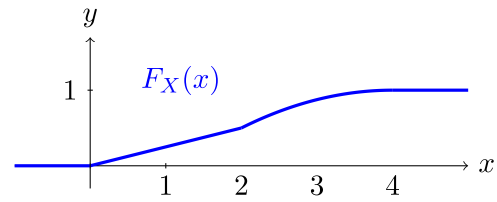
$P(4 < X \leq 6) = F_X(6) - F_X(4) = \frac{19}{216}$

NALOGA

3.25 (a) Ker je $\int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{4}\, dx + \int_2^4 \alpha(4-x)\, dx = \frac{1}{2} + 2\alpha$, je $\alpha = \frac{1}{4}$ in

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2; \\ \frac{4-x}{4}, & 2 \leq x \leq 4; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$





(b) Za $2 \leq x \leq 4$ je $F(x) = \int\limits_0^x p_X(x)\,dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{4} dt + \int\limits_2^x \frac{4-t}{4}\,dt = -\frac{x^2}{8} + x - 1$. Torej

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 2; \\ -\frac{x^2}{8} + x - 1, & 2 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

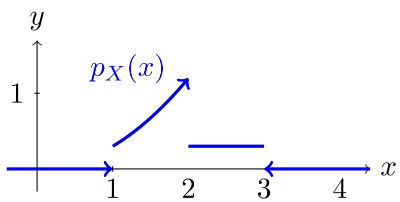
(c) $P(|X-2| \leq 1) = P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{5}{8} = 0.625$

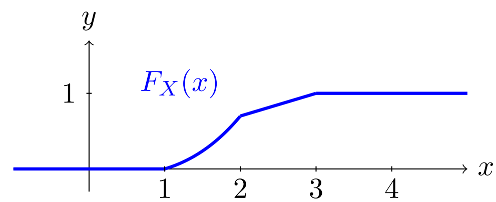
(d) $E(X) = \int\limits_0^4 x\,p_X(x)\,dx = \int\limits_0^2 \frac{x}{4}\,dx + \int\limits_2^4 \frac{x(4-x)}{4}\,dx = \frac{11}{6} \approx 1.833$

NALOGA

3.26 (a) Ker je $\int\limits_1^3 f(x)\,dx = \int\limits_1^2 cx^2\,dx + \int\limits_2^3 c\,dx = \frac{10c}{3} = 1$, je $c = \frac{3}{10}$ in

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{10}, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{3}{10}, & 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$





(b)

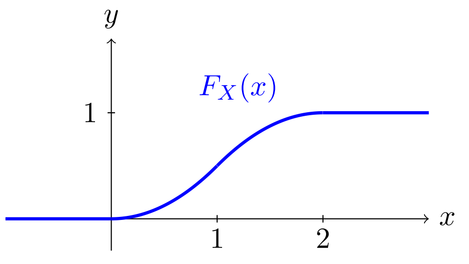
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \int\limits_1^x \frac{3t^2}{10} dt, & 1 \leq x < 2; \\ \int\limits_1^2 \frac{3t^2}{10} dt + \int\limits_2^x \frac{3}{10} dt, & 2 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{x^3-1}{10}, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{3x+1}{10}, & 2 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

(c) $P\left(|X-2| \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{49}{80} = 0.6125$

NALOGA

3.27 (a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \int\limits_0^x t dt, & 0 \leq x < 1; \\ \int\limits_0^1 t dt + \int\limits_1^x (2-t) dt, & 1 \leq x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), & 1 \leq x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$



(b) $E(X) = \int\limits_0^1 x^2 dx + \int\limits_1^2 x(2-x) dx = 1$

(c) $P(0.9 \leq X \leq 1.1) = F_X(1.1) - F_X(0.9) = 0.19$

(d) $E(X^2) = \int\limits_0^1 x^3 dx + \int\limits_1^2 x^2(2-x) dx = \frac{7}{6}$; $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6}$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0.408$

NALOGA

3.28 Število nalivov je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka X s parametroma $\mu = 35$ in $\sigma = 5.5$.

(a) Verjetnost, da je število nalivov med 25 in 40, je enaka

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 40) &= \Phi\left(\frac{40-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{11}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{11}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{10}{11}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{20}{11}\right) \approx 0.819 - 1 + 0.996 = 0.785. \end{aligned}$$

(b) Iz enačbe $P(X \geq n) = 0.95$ dobimo enačbo $\Phi(-\frac{n-\mu}{\sigma}) = 0.95$. Iz tabel razberemo, da je $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ in izračunamo $n \approx 25.95$. Torej bo s 95-odstotno verjetnostjo vsaj 25 nalivov.

NALOGA

3.29 Teža je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka X s parametroma $\mu = 12$ in $\sigma = 0.5$.

(a) $P(X > 13) = 1 - P(X \leq 13) = 1 - \Phi\left(\frac{13-12}{0.5}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023$

(b) Iz enačbe $P(X < x) = 0.75$ dobimo enačbo $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.75$. Iz tabel razberemo, da je $\Phi^{-1}(0.75) = 0.675$ in izračunamo $x \approx 12.337$.

(c) Iz enačbe $P(X < 13) = 0.99$ dobimo enačbo $\Phi\left(\frac{13-12}{\sigma}\right) = 0.99$. Iz tabel razberemo, da je $\Phi^{-1}(0.99) = 2.325$ in izračunamo $\sigma \approx 0.43$.

NALOGA

3.30 Debelina zaščitne folije je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka X s parametroma $\mu = 5$ in $\sigma = 0.2$.

(a) Delež folije, ki ne ustreza predpisom, je enak

$$\begin{aligned} P(X < 4.5) + P(X > 5.5) &= \Phi\left(\frac{4.5-5}{0.2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5.5-5}{0.2}\right) \\ &= \Phi(-2.5) + 1 - \Phi(2.5) \\ &= 1 - \Phi(2.5) + 1 - \Phi(2.5) = 2\big(1 - \Phi(2.5)\big) \\ &= 2(1 - 0.9938) \approx 0.0124 \end{aligned}$$

(b) Iz enačbe $P(X \leq x) = 0.95$ dobimo enačbo $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = 0.95$. Iz tabel razberemo, da je $\Phi^{-1}(0.95) = 1.65$ in izračunamo $x \approx 5.33$.

(c) Iščemo tak odmik x, da bo veljala enačba $P(\mu - x < X < \mu + x) = 0.95$. Enačbo prepišemo v $\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right) = 0.95$ oz. $\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) = 0.95$. Iz enačbe $\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = 0.975$ izrazimo $x = \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.975)$ in izračunamo $x \approx 0.2 \cdot 1.96 = 0.392$.

NALOGA

3.31 Dolžina brizganih plastičnih delov X je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka z $\mu = 90$ in $\sigma = 0.1$.

(a) Verjetnost, da je dolžina daljša od 90.3 mm ali krajša od 89.7 mm, je enaka

$$\begin{aligned} P(X < 89.7) + P(X > 90.3) &= \Phi\left(\frac{89.7-90}{0.1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{90.3-90}{0.1}\right) \\ &= \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) = 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(3) \\ &= 2\big(1 - \Phi(3)\big) = 2\big(1 - 0.9987\big) \approx 0.0026 \end{aligned}$$

(b) Iz enačbe $P(X \geq x) = 0.9$ dobimo enačbo $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.1$. Iz tabel razberemo, da je $\Phi^{-1}(0.1) = -1.28$ in izračunamo $x \approx 89.872$.

(c) Ker so dolžine delov neodvisne, je verjetnost, da je dolžina vseh med 89.7 in 90.3 mm, enaka

$$\big(P(89.7 \leq X \leq 90.3)\big)^{10} = (1 - 0.0026)^{10} \approx 0.9743.$$

NALOGA

3.32 Teža bloka X je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka z $\mu = 3$ in $\sigma = 0.25$.

(a) Verjetnost, da je blok težji od 2.75 kg, je enaka

$$P(X > 2.75) = 1 - \Phi\left(\frac{2.75 - 3}{0.25}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \approx 0.841.$$

Naj bo Y število blokov v vzorcu iz 20 blokov, ki so težji od 2.75 kg. Potem je

$$P(Y = 20) = P(X > 2.75)^{20} = 0.841^{20} \approx 0.032$$

(b) Naj A označuje dogodek, da je najtežji blok v vzorcu težji od 3.75 kg. Potem je $\overline{A}$ dogodek, da noben blok v vzorcu ni težji od 3.75 kg. Ker je

$$P(X \leq 3.75) = \Phi\left(\frac{3.75 - 3}{0.25}\right) = \Phi(3) \approx 0.999.$$

dobimo:

$$P(A) = 1 - P(X \leq 3.75)^{20} \approx 1 - 0.999^{20} \approx 0.02.$$

NALOGA

3.33 (a) $P(X \leq 5) = \Phi\left(\frac{\ln 5 - 1}{0.5}\right) \approx 0.889$

(b) Povprečen čas, ki ga uporabnik prebije na strani, je $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{1.125} \approx 3.08$ s. Mediano $x_{0.5}$ dobimo iz enačbe $\Phi\left(\frac{\ln x_{0.5} - \mu}{\sigma}\right) = 0.5$. Vrednost mediane $x_{0.5} \approx 2.718$ nam pove, da je s 50-odstotno verjetnostjo uporabnik na strani manj (oz. več) kot 2.718 s. Interkvartilni razpon je enak $x_{0.75} - x_{0.25} \approx 3.8 - 1.944 = 1.856$ in meri razpršenost porazdelitve. Pomeni razpon, ki ga doseže srednjih 50 % vrednosti.

NALOGA

3.34 Naj bo X življenjska doba, ki je porazdeljena lognormalno s povprečno vrednostjo $E(X) = 10\,000$ ur in disperzijo $D(X) = 20\,000^2$.

Potem velja $X = e^Y$, kjer je $Y \sim N(\sigma, \mu)$, $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ in $D(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

(a) Iz zgornjih dveh zvez izračunamo $\mu = \ln(2000\sqrt{5}) \approx 8.406$ in $\sigma = \sqrt{\ln 5} \approx 1.269$.

(b) $P(X > 10\,000) = P\big(Y > \ln(10\,000)\big) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(10\,000) - \mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi(0.634) \approx 0.263$

(c) Iz $P(X < x) = P(Y < \ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = 0.1$ dobimo

$$\frac{\ln x - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.1) = -1.28 \quad \text{in} \quad x \approx 879.892.$$

NALOGA

3.35 Naj bo X globina, ki je porazdeljena lognormalno s povprečno vrednostjo $E(X) = 9.5$ in disperzijo $D(X) = 1.9^2$.

Potem velja $X = e^Y$, kjer je $Y \sim N(\sigma, \mu)$, $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ in $D(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Iz teh dveh zvez izračunamo $\mu = \ln\left(\frac{47.5}{\sqrt{26}}\right) \approx 2.232$ in $\sigma = \sqrt{\ln\frac{26}{25}} \approx 0.198$.

(a) $P(5 \leq X \leq 15) = P(\ln 5 \leq Y \leq \ln 15) = \Phi\left(\frac{\ln 15 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 5 - \mu}{\sigma}\right)$
$\approx \Phi(2.41) - \Phi(-3.14) \approx 0.991$

(b) Iz $P(X < x) = P(Y < \ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = 0.25$, dobimo:

$$\frac{\ln x - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.25) = -0.674 \quad \text{in} \quad x \approx 8.15.$$

NALOGA

3.36 Naj bo X poraba vode, ki je porazdeljena lognormalno s povprečno vrednostjo $E(X) = 100\,000$ in disperzijo $D(X) = 60\,000^2$.

Potem velja $X = e^Y$, kjer je $Y \sim N(\sigma, \mu)$, $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ in $D(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Iz teh dveh zvez izračunamo $\mu \approx 11.36$ in $\sigma \approx 0.55$.

(a) $P(X > 300\,000) = P(Y > \ln(300\,000)) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(300\,000) - \mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi(2.258) \approx 0.012$

(b) Iz $P(X < x) = P(Y < \ln x) = \Phi(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}) = 0.99$ dobimo

$$\frac{\ln x - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.99) = 2.326 \quad \text{in} \quad x \approx 311\,506.$$

NALOGA

3.37 Življenjska doba X je porazdeljena lognormalno s povprečno vrednostjo $E(x) = 3$ in disperzijo $D(Y) = 1.5^2$. Potem velja $X = e^Y$, kjer je $Y \sim N(\sigma, \mu)$, $E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ in $D(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. Iz teh dveh zvez izračunamo $\mu = \ln\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.987$ in $\sigma = \sqrt{\ln\frac{5}{4}} \approx 0.472$.

(a) $P(X > 4) = P(Y > \ln 4) = 1 - P(Y \leq \ln 4) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln 4 - \mu}{\sigma}\right)$
$\approx 1 - \Phi(0.845) \approx 1 - 0.801 = 0.199$

(b) Iz $P(X < x) = P(Y < \ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = 0.75$ dobimo

$$\frac{\ln x - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.75) = 0.674 \quad \text{in} \quad x \approx 3.69.$$

NALOGA

3.38 (a) Iz podatkov razberemo, da je $\mu = 30$ in $P(X \leq 40) = \Phi\left(\frac{40 - \mu}{\sigma}\right) = 0.9$.
Iz tabel dobimo, da je $\Phi^{-1}(0.9) = 1.28$, in izračunamo $\sigma \approx 7.8$.
Torej $P(X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - \mu}{\sigma}\right) \approx 0.995$.

(b) Če je X porazdeljena lognormalno s povprečno vrednostjo $E(X) = \mu = 30$ in standardnim odklonom $\sigma(X) = \sigma = 7.8$, potem velja $X = e^Y$, kjer je $Y \sim N(\sigma_{nov}, \mu_{nov})$ ter

$$\mu = e^{\mu_{nov} + \frac{\sigma_{nov}^2}{2}} \quad \text{in} \quad \sigma^2 = e^{2\mu_{nov} + \sigma_{nov}^2}\big(e^{\sigma_{nov}^2} - 1\big).$$

Iz teh dveh zvez izračunamo

$$\mu_{nov} \approx 3.368 \ \text{ in } \ \sigma_{nov} \approx 0.256.$$

Torej $P(X < 50) = P(Y < \ln 50) = \Phi\left(\frac{\ln 50 - \mu_{nov}}{\sigma_{nov}}\right) \approx 0.983.$

NALOGA

3.39 (a) Označimo z X maksimalni letni pretok reke A. Ker je $\mu_A = 50$ in $\sigma_A = 10$, je

$$P(X > 65) = 1 - \Phi\left(\frac{65 - \mu_A}{\sigma_A}\right) = 1 - \Phi(1.5) \approx 1 - 0.933 = 0.067.$$

Naj bo Y maksimalni pretok reke B, ki je porazdeljen lognormalno s povprečno vrednostjo $E(Y) = 35$ in disperzijo $D(Y) = 8.75^2$.

Potem velja $Y = e^Z$, kjer je $Z \sim N(\sigma, \mu)$, $E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ in $D(Y) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Iz teh dveh zvez izračunamo $\mu = \ln\left(\frac{4.45}{\sqrt{17}}\right) \approx 3.525$ in $\sigma = \sqrt{\ln \frac{17}{16}} \approx 0.246$. Potem je

$$\begin{aligned} P(Y > 55) &= P(Z > \ln 55) = 1 - P(Z \le \ln 55) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln 55 - \mu}{\sigma}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1.959) \approx 1 - 0.975 = 0.025. \end{aligned}$$

(b) Ker sta pretoka v rekah A in B neodvisna, je verjetnost, da v nekem letu nobena od obeh rek ne bo poplavila, enaka

$$P(X \le 65)P(Y \le 55) = (1 - 0.067)(1 - 0.025) \approx 0.91.$$

(c) Iz $P(X > Q_{nov}) = 1 - P(X \le Q_{nov}) = 1 - \Phi\left(\frac{Q_{nov} - \mu_A}{\sigma_A}\right) = 0.02$ sledi, da je

$$\frac{Q_{nov} - \mu_A}{\sigma_A} = \Phi^{-1}(0.98) \approx 2.055 \quad \text{in} \quad Q_{nov} \approx 70.55.$$

NALOGA

4 Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$. **Porazdelitveno funkcijo** $F_{\mathbf{X}}\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ definiramo kot verjetnost preseka dogodkov

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) := P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n),$$

za vse $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Omejili se bomo na primer $n = 2$, to je dvorazsežne ali bivariatne porazdelitve.
Nekatere lastnosti porazdelitvene funkcije slučajnega vektorja (X, Y):

(i) v vsaki spremenljivki je naraščajoča in z desne zvezna;

(ii) $0 \le F_{(X,Y)}(x,y) \le 1$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F_{(X,Y)}(x,y) = 0$ in $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F_{(X,Y)}(x,y) = 1$;

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = 0$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$;

(v) $F_X(x) := \lim\limits_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y)$ in $F_Y(y) := \lim\limits_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y)$ imenujemo **robni porazdelitvi** slučajnega vektorja (X, Y);

(vi) $P\big((X,Y) \in (a,b] \times (c,d]\big) = F_{(X,Y)}(b,d) - F_{(X,Y)}(a,d) - F_{(X,Y)}(b,c) + F_{(X,Y)}(a,c)$.

Diskretni slučajni vektorji

(X, Y) je **diskreten slučajni vektor**, kadar njegovo zalogo vrednosti predstavlja števno mnogo točk (x_i, y_j). **Verjetnostna funkcija** slučajnega vektorja (X, Y) je

$$p_{ij} = p(x_i, y_j) := P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Pri tem velja: $p_{ij} \ge 0$ in $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.
Verjetnostno shemo vektorja (X, Y) podamo s tabelo:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	p_X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	q_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
p_Y	r_1	r_2	$\cdots$	1

$$q_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$r_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

V primeru $r_k \neq 0$ definiramo **pogojno verjetnostno funkcijo** $p_{i|k}$ slučajne spremenljivke X pri pogoju $Y = y_k$ kot

$$p_{i|k} := P(X = x_i | Y = y_k) = \frac{p_{ik}}{r_k}.$$

Pri tem velja $p_{i|k} \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{\infty} p_{i|k} = 1$. **Pogojno matematično upanje** $E(X \mid Y = y_k)$ je matematično upanje pogojne porazdelitve:

$$E(X \mid Y = y_k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i|k} = \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik}.$$

Diskretni slučajni spremenljivki X in Y imenujemo **neodvisni**, če za vse $i, j \in \mathbb{N}$ velja eden od ekvivalentnih pogojev:

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x_i, y_j) = F_X(x_i) F_Y(y_j) &\iff P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j) \\ &\iff p_{ij} = q_i r_j \iff p_{i|j} = q_i. \end{aligned}$$

Za diskretni slučajni vektor $(X, Y) \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ in preslikavo $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je $Z = g(X, Y)$ diskretna slučajna spremenljivka, za katero velja:

$$F_Z(z) = \sum_{i,j\colon g(x_i,y_j) \leq z} \sum p_{ij}, \quad p(Z = z_k) = \sum_{i,j\colon g(x_i,y_j) = z_k} \sum p_{ij}, \quad E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

Zvezni slučajni vektorji

(X, Y) je **zvezen slučajni vektor**, če sta X in Y zvezni slučajni spremenljivki. **Gostota verjetnosti** slučajnega vektorja (X, Y) (če obstaja) je taka pozitivna integrabilna funkcija $p_{(X,Y)}$, da je

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p_{(X,Y)}(u, v)\, du\, dv.$$

Nekatere lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(u, v)\, du\, dv = 1$;
- Za $D \subset \mathbb{R}^2$ je $P\left((X, Y) \in D\right) = \iint_D p_{(X,Y)}(u, v)\, du\, dv$;
- $p_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$;
- **robni gostoti vejetnosti** dobimo z integraloma:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y)\, dy \quad \text{in} \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x, y)\, dx.$$

V primeru $p_Y(y) \neq 0$ definiramo **pogojno gostoto verjetnosti** $p_{X|y}(x)$ slučajne spremenljivke X pri pogoju $Y = y$ kot

$$p_{X|y}(x) := \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}.$$

Pri tem velja: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X|y}(x)\, dx = 1$. **Pogojno matematično upanje** $E(X \mid Y = y)$ je matematično upanje pogojne porazdelitve:

$$E(X \mid Y = y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p_{X|y}(x)\, dx = \frac{1}{p_Y(y)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p_{(X,Y)}(x,y)\, dx.$$

Pogojno matematično upanje $E(X \mid Y = y)$, zapisano kot funkcija y, se imenuje tudi **regresijska enačba**.

Zvezni slučajni spremenljivki X in Y imenujemo **neodvisni**, če za vse $x, y \in \mathbb{R}$ velja eden od ekvivalentnih pogojev:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \iff p_{X|y}(x) = p_X(x).$$

Za zvezen slučajni vektor $(X,Y)\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ in zvezno preslikavo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je $Z = g(X,Y)$ zvezna slučajna spremenljivka, za katero velja:

$$F_Z(z) = \iint\limits_{g(x,y)\leq z} p_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \quad \text{in} \quad E(Z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y)p_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy.$$

Kovarianca in korelacija

Kovarianco slučajnih spremenljivk X in Y definiramo kot

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} := E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Nekaj lastnosti kovariance:

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{Cov}(X,X) = D(X) & \operatorname{Cov}(a + bX, c + dY) = bd\operatorname{Cov}(X,Y),\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \\
\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X) & D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) \\
\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) & |\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)
\end{array}$$

Kovariančna ali disperzijska matrika slučajnega vektorja (X,Y) je:

$$K(X,Y) := \begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{Cov}(X,Y) \\ \operatorname{Cov}(Y,X) & D(Y) \end{pmatrix}.$$

Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Corr}(X,Y) = r(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Velja: $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$. Če je $\rho(X,Y) = 0$, imenujemo X in Y **nekorelirani** slučajni spremenljivki, v nasprotnem primeru sta X in Y **korelirani**. Če je $|\rho(X,Y)| = 1$, rečemo, da sta X in Y **linearno** korelirani. Če sta X in Y neodvisni, sta tudi nekorelirani. Obrat v splošnem ne velja.

Naloge

4.1 Opazujemo dve neodvisni ponovitvi Bernoullijevega poskusa, kjer je pri vsaki ponovitvi verjetnost, da se opazovani dogodek A zgodi, enaka $\frac{2}{5}$. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja število ponovitev A v obeh poskusih, za slučajno spremenljivko Y pa velja: $Y = 1$, če se je A zgodil v zadnjem poskusu in $Y = 0$ sicer.

(a) Zapiši verjetnostne sheme za slučajni spremenljivki X in Y ter slučajni vektor (X,Y). Ali sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki? Ali sta korelirani?

(b) Izračunaj $P(Y \geq X)$, $P(X \geq 1 \mid Y = 0)$ in $E(Y \mid X = 1)$.

REŠITEV

4.2 Pošten kovanec vržemo trikrat. Slučajna spremenljivka X zavzame vrednost 1, če v prvem metu pade cifra, sicer pa vrednost 0. Slučajna spremenljivka Y označuje število grbov v vseh treh metih.

(a) Zapiši verjetnostne sheme za X, Y in slučajni vektor (X,Y).

(b) Ali sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki? Odgovor utemelji!

(c) Izračunaj $\mathrm{Cov}(X,Y)$ in $\rho(X,Y)$.

REŠITEV

4.3 X in Y sta neodvisni slučajni spremenljivki z enako verjetnostno shemo:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zapiši verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X,Y) in izračunaj $P(X = Y)$.

(b) Zapiši verjetnostne sheme slučajnih spremenljivk $U = X + Y$ in $V = X - Y$ ter slučajnega vektorja (U,V). Ali sta U in V tudi neodvisni slučajni spremenljivki?

(c) Za vse pare spremenljivk X, Y, U, in V ugotovi, ali so med sabo korelirani, ter izračunaj ustrezne korelacijske koeficiente.

REŠITEV

4.4 Diskretni slučajni vektor (X, Y) ima verjetnostno shemo:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0.05	0.10	0.05
1	0.10	0.40	0.10
2	0.05	0.10	0.05

(a) Izračunaj verjetnosti: $P(X = 1)$, $P(X = 1, Y = 1)$, $P(X = Y)$ in $P(X = 1 \mid Y = 1)$.

(b) Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke X pri pogoju $Y = 1$ in izračunaj pogojno matematično upanje $E(X \mid Y = 1)$.

(c) Zapiši kovariančno matriko za (X, Y) in ugotovi, ali sta X in Y korelirani slučajni spremenljivki. Ali sta neodvisni?

REŠITEV

4.5 Neodvisni diskretni slučajni spremenljivki X in Y imata verjetnostni shemi:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y : \begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zapiši verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y). Izračunaj $E(X)$, $E(Y)$ in $E(XY)$ ter preveri, da je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(b) Naj bo slučajna spremenljivka $Z = X + Y$. Ali sta slučajni spremenljivki X in Z korelirani? Kolikšen je njun korelacijski koeficient?

REŠITEV

4.6 Diskretni slučajni vektor (X, Y) ima verjetnostno shemo:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$

(a) Poišči robni gostoti za X in Y.

(b) Določi $P(1 \leq X < 3, Y \geq 1)$ in $P(X > Y)$.

(c) Poišči verjetnostno shemo za XY in kovarianco $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(d) Zapiši pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X pri pogoju $Y = 1$.

(e) Ali sta X in Y neodvisni?

REŠITEV

4.7 Diskretni slučajni vektor (X, Y) ima verjetnostno shemo:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$
1			$\frac{3}{16}$

(a) Dopolni tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

(b) Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke X pri pogoju $Y = 0$ in izračunaj pogojno matematično upanje $E(X \mid Y = 0)$.

(c) Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke $Z = \min\{X, Y\}$.

(d) Določi verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Z) in izračunaj kovarianco $\mathrm{Cov}(X, Z)$.

REŠITEV

4.8 Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti $\{1, 2\}$, Y diskretna slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti $\{0, 1\}$ in

$$P(X = x, Y = y) = \frac{x - y + a}{6}.$$

(a) Določi vrednost parametra a in zapiši verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Zapiši verjetnostni shemi slučajnih spremenljivk $Z = X - Y$ in $W = X + Y$.

(c) Zapiši verjetnostno shemo slučajnega vektorja (Z, W) in kovarianco $\mathrm{Cov}(Z, W)$. Ali sta slučajni spremenljivki Z in W neodvisni?

REŠITEV

4.9 Verjetnostna funkcija diskretnega slučajnega vektorja (X, Y) je enaka

$$p(x, y) = a(2x + y), \quad x \in \{0, 1, 2\},\ y \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

(a) Določi konstanto a in zapiši verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Poišči robni porazdelitvi spremenljivk X in Y in ugotovi, ali sta neodvisni.

(c) Izračunaj: $P(X = 2, Y = 1)$, $P(X \geq 1, Y \leq 2)$, $P(Y = 1 \mid X = 2)$ in $E(Y \mid X = 2)$.

REŠITEV

4.10 V zavarovalnici ponujajo avtomobilsko in stanovanjsko zavarovanje. Naj X označuje premijo avtomobilskega zavarovanja, Y pa premijo stanovanjskega zavarovanja, ki jo plača posamezna stranka. Diskretni slučajni vektor (X, Y) ima verjetnostno shemo:

$X \setminus Y$	0	100	200
100	0.20	0.10	0.20
250	0.05	0.15	0.30

(a) Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke X.

(b) Določi pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X pri pogoju $Y = 0$.

(c) Naj bo $Z = X + Y$. Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke Z.

(d) Kolikšna je pričakovana vrednost skupne premije?

REŠITEV

4.11 Na poti od doma do fakultete ima študent dva semaforja. Označimo z X število semaforjev, pri katerih se je moral ustaviti na poti do fakultete, in z Y število semaforjev, pri katerih se je moral ustaviti na poti domov. Predpostavimo, da sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni ter enako porazdeljeni:

$$X, Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(a) Poišči $E(X)$ in $D(X)$. Kakšen je pomen teh vrednosti?

(b) Zapiši verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y).

(c) Poišči verjetnostno shemo slučajne spremenljivke $Z = X + Y$. Kaj opisuje? Določi $E(Z)$ in $D(Z)$.

(d) Poišči verjetnostno shemo slučajne spremenljivke $W = \max\{X, Y\}$. Določi $E(W)$ in $D(W)$.

REŠITEV

4.12 V prometni študiji so beležili, kolikšno je število avtomobilov in avtobusov, ki želijo zaviti levo v enem ciklu semaforja. Naj X označuje število avtomobilov in Y število avtobusov, ki želijo zaviti levo. Rezultat študije je verjetnostna shema slučajnega vektorja (X, Y):

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0.025	0.015	0.010
1	0.050	0.030	0.020
2	0.125	0.075	0.050
3	0.150	0.090	0.060
4	0.100	0.060	0.040
5	0.050	0.030	0.020

(a) Kolikšna je verjetnost, da želita v ciklu vsaj en avtomobil in vsaj en avtobus zaviti levo?

(b) Kolikšna je verjetnost, da želi v ciklu natanko en avtobus zaviti levo? Kolikšno je pričakovano število avtobusov, ki želijo zaviti levo?

(c) Predpostavimo, da je na pasu za zavijanje levo prostor za pet avtomobilov in da je en avtobus enakovreden trem avtomobilom. Kolikšna je verjetnost, da na pasu za zavijanje levo ne bo dovolj prostora za vsa vozila, ki bi želela zaviti levo?

(d) Ali sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki? Odgovor utemelji.

REŠITEV

4.13 Podjetje ima dve napravi, ki odkrivata neustrezne izdelke in delujeta neodvisno. Prvi aparat odkrije 95 % neustreznih izdelkov, drugi pa 90 %. Predpostavimo, da sta izdelana dva neustrezna izdelka in poslana v pregled. Naj X označuje število neustreznih izdelkov, ki jih bo odkril prvi, in Y število, ki jih bo odkril drugi aparat.

(a) Določi verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

(c) Določi pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $Y \mid X = 2$.

(d) Naj bo $Z = \max\{X, Y\}$. Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke Z.

REŠITEV

4.14 V škatli je 12 baterij, od katerih so tri nove, štiri rabljene, vendar delujoče, in pet praznih. Na slepo vzamemo dve bateriji. Vrednost slučajne spremenljivke X je število izbranih novih baterij, vrednost slučajne spremenljivke Y pa število rabljenih delujočih baterij.

(a) Določi verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Poišči robni porazdelitvi. Ali sta slučajni spremenljivki neodvisni?

(c) Določi pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $Y \mid X = 0$.

(d) Naj bo $Z = XY$. Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke Z. Izračunaj $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

REŠITEV

4.15 Iz vrečke, v kateri so trije lešniki, dva mandlja in pet pistacij, na slepo vzamemo dva oreščka. Vrednost slučajne spremenljivke X je število izbranih lešnikov, vrednost slučajne spremenljivke Y pa število izbranih mandljev.

(a) Določi verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Izračunaj verjetnost, da smo izbrali največ en lešnik in največ en mandelj.

(c) Poišči robni porazdelitvi in določi kovarianco $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(d) Naj bo $Z = \max\{X, Y\}$. Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke Z in njeno disperzijo.

REŠITEV

4.16 Iz vreče, v kateri sta dve rdeči, tri bele in štiri modre žogice, naključno izvlečemo tri žogice. Vrednost slučajne spremenljivke X je število izbranih rdečih, vrednost slučajne spremenljivke Y pa število izbranih belih žogic.

(a) Določi verjetnostno shemo slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Kolikšna je verjetnost, da izberemo žogice treh različnih barv?

(c) Določi pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $X \mid Y = 2$.

(d) Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke $Z = XY$ ter izračunaj njeno matematično upanje in disperzijo.

REŠITEV

4.17 Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x+y)^2, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Preveri, da je f gostota nekega zveznega slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Poišči gostoti slučajnih spremenljivk X in Y ter obe pogojni gostoti. Ali sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

(c) Izračunaj verjetnosti: $P(X > Y)$ in $P\left(X \le \frac{1}{2}\right)$.

REŠITEV

4.18 Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi k tako, da bo $f(x, y)$ gostota nekega slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Poišči robno gostoto $p_X(x)$.

(c) Izračunaj $P(X > Y)$.

(d) Izračunaj $P(Y > \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$.

REŠITEV

4.19 Naj bo (X, Y) zvezen slučajni vektor z gostoto verjetnosti

$$p(x,y) = 2x + 2y - 4xy, \quad 0 \le x, y \le 1.$$

(a) Poišči robni gostoti $p_X(x)$ in $p_Y(y)$ ter porazdelitveni funkciji $F_X(x)$ in $F_Y(y)$. Opazi, da sta slučajni spremenljivki X in Y enakomerno porazdeljeni. Ali sta med sabo neodvisni?

(b) Izračunaj $E(XY)$, $E(X + Y)$ in $D(X + Y)$. Ali sta X in Y korelirani?

REŠITEV

4.20 Deleža moških (X) in ženskih (Y) udeleženk maratona želimo opisati s funkcijo oblike

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy, & 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi A tako, da bo $f(x,y)$ gostota slučajnega vektorja (X,Y).

(b) Poišči robni gostoti $p_X(x)$ in $p_Y(y)$.

(c) Ali sta X in Y neodvisni spremenljivki?

(d) Določi $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

REŠITEV

4.21 Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x^2 + \frac{xy}{2}), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi a tako, da bo $f(x,y)$ gostota nekega slučajnega vektorja (X,Y).

(b) Poišči robno gostoto $p_X(x)$.

(c) Poišči verjetnost $P(X > Y)$.

(d) Poišči verjetnost $P(Y > \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2})$.

REŠITEV

4.22 Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2y, & 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi a tako, da bo $f(x,y)$ gostota nekega slučajnega vektorja (X,Y).

(b) Poišči robno gostoto $p_X(x)$ in $E(X)$.

(c) Poišči verjetnost $P(X > Y)$.

(d) Poišči verjetnost $P(Y > \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2})$.

REŠITEV

4.23 Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} cx + 1, & x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi c tako, da bo $f(x,y)$ gostota nekega slučajnega vektorja (X,Y).

(b) Določi robno gostoto spremenljivke Y in skiciraj njen graf.

(c) Določi pogojno porazdelitev $p_{X|Y=\frac{1}{2}}(x)$ in $E\left(X \mid Y = \frac{1}{2}\right)$.

(d) Izračunaj $P(Y \leq 2X^2)$.

REŠITEV

4.24 Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \le x \le 3, 0 \le y \le x; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi c tako, da bo $f(x,y)$ gostota nekega slučajnega vektorja (X,Y).

(b) Določi $P(X<1, Y<2)$.

(c) Določi robno gostoto spremenljivke X in skiciraj njen graf.

(d) Določi pogojno porazdelitev $p_{Y|X=1}(y)$ in $E(Y \mid X=1)$.

(e) Izračunaj $P(X+Y \le 2)$.

REŠITEV

4.25 Lekarna ima poleg postrežbe na okencu tudi postrežbo v avtomobilu. Naj bo X delež časa, ko stranke uporabljajo postrežbo v avtu, in Y delež časa, ko stranke uporabljajo postrežbo na okencu. Gostota slučajnega vektorja (X,Y) je enaka

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{6(x+y^2)}{5}, & 0 \le x, y \le 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi robni gostoti spremenljivk X in Y ter skiciraj njuna grafa.

(b) Ali sta X in Y neodvisni spremenljivki?

(c) Poišči kovarianco X in Y ter ugotovi, ali sta X in Y korelirani.

REŠITEV

4.26 Poišči tako vrednost $c \in \mathbb{R}$, da bo naslednja funkcija predstavljala gostoto verjetnosti nekega slučajnega vektorja (X,Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-2x-3y}, & x > 0,\ 0 < y < x; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Izračunaj robno gostoto $p_X(x)$ spremenljivke X.

(b) Določi $P(X<1, Y<2)$ in $P(1<X<2)$.

(c) Poišči pogojno gostoto verjetnosti spremenljivke Y pri pogoju $X=1$ in $P(Y<2 \mid X=1)$.

REŠITEV

4.27 Gostota slučajnega vektorja (X, Y) rečnih pretokov dveh rek je enaka

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Poišči robno gostoto spremenljivke X in nariši njen graf.

(b) Izračunaj verjetnost, da je pretok X večji od $\frac{1}{2}$.

(c) Določi verjetnost, da bo pretok X večji od pretoka Y.

(d) Določi gostoto pogojne verjetnosti $p_{Y|X=\frac{1}{2}}(y)$ in $P\left(Y \leq \frac{1}{2} \mid X = \frac{1}{2}\right)$.

REŠITEV

4.28 Slučajni vektor (X, Y) je enakomerno zvezno porazdeljen na območju

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, y \geq 0, x - 1 \leq y \leq x + 1\}.$$

(a) Skiciraj območje D in določi konstanto c, da bo funkcija:

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D; \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

gostota slučajnega vektorja (X, Y).

(b) Določi robno gostoto spremenljivke X in nariši njen graf.

(c) Določi gostoto pogojne verjetnosti $p_{Y|X=1}(y)$ in izračunaj $E(Y \mid X = 1)$.

(d) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Odgovor utemelji!

(e) Izračunaj $P\left(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}\right)$.

REŠITEV

4.29 Gostota slučajnega vektorja (X, Y) je dana s funkcijo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi robno gostoto spremenljivke X in skiciraj njen graf.

(b) Določi robno gostoto spremenljivke Y in skiciraj njen graf.

(c) Ali sta X in Y neodvisni spremenljivki?

(d) Določi pogojno porazdelitev $p_{X|y}(x)$ in $E(X \mid Y = y)$ za $0 \leq y \leq 1$.

REŠITEV

4.30 V tovarni sladoleda v banjice mešajo različne deleže vanilijevega, lešnikovega in čokoladnega sladoleda. Naj bo vrednost slučajne spremenljivke X delež vanilijevega, vrednost slučajne spremenljivke Y pa delež lešnikovega sladoleda. Gostota slučajnega vektorja (X, Y) je enaka

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x, y \leq 1,\ x + y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi verjetnost, da je v izbrani banjici več kot polovica vanilijevega sladoleda.

(b) Poišči robno gostoto spremenljivke Y in nariši njen graf.

(c) Izračunaj verjetnost, da je delež vanilijevega sladoleda manjši od $\frac{1}{8}$, če vemo, da banjica vsebuje $\frac{3}{4}$ lešnikovega sladoleda.

REŠITEV

4.31 Kilogramske konzerve vsebujejo mandlje, indijske oreščke in arašide. Naj X označuje delež mandljev in Y delež indijskih oreščkov v konzervi. Gostota slučajnega vektorja (X, Y) je enaka

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x, y \leq 1,\ x + y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Določi verjetnost, da je v izbrani konzervi več kot polovica arašidov.

(b) Poišči robno gostoto spremenljivke X in nariši njen graf.

(c) Ali sta X in Y neodvisni spremenljivki?

(d) Kolikšna je pričakovana vrednost konzerve, če kilogram mandljev stane 20 evrov, indijskih oreščkov 15 evrov in arašidov 5 evrov?

REŠITEV

Rešitve

4.1 (a)

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}; \quad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \quad (X,Y):$$

$Y \setminus X$	0	1	2
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	0
1	0	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

X in Y nista neodvisni slučajni spremenljivki, saj je:

$$0 = P(X=0, Y=1) \neq P(X=0)P(Y=1) = \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{5}.$$

Ker je $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{6}{25}$, sta X in Y korelirani.

(b) $P(Y \geq X) = \frac{3}{5}$;

$$X \mid Y=0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}; \quad Y \mid X=1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$P(X \geq 1 \mid Y=0) = \frac{2}{5}$; $E(Y \mid X=1) = \frac{1}{2}$

NALOGA

4.2 (a)

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}; \quad (X,Y):$$

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0

(b) X in Y nista neodvisni spremenljivki, saj je npr.

$$P(X=1, Y=0) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{16} = P(X=1)P(Y=0).$$

(c) $E(X) = \frac{1}{2}$; $E(X^2) = \frac{1}{2}$; $D(X) = \frac{1}{4}$; $E(Y) = \frac{3}{2}$; $E(Y^2) = 3$; $D(Y) = \frac{3}{4}$;

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{4}$; $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

NALOGA

4.3 (a)

$X \setminus Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$P(X=Y) = \frac{1}{2}$$

(b)

$$U : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \quad V : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

$U \setminus V$	-2	0	2
-2	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0

Slučajni spremenljivki U in V sta odvisni.

(c) Ker sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, je $\rho(X,Y) = 0$.
Ker je $E(U) = E(V) = E(UV) = 0$, sta tudi U in V nekorelirani slučajni spremenljivki.
Če upoštevamo, da je $E(X^2) = E(Y^2) = 1$, dobimo $\sigma(X) = \sigma(Y) = 1$.
Če upoštevamo, da je $E(U^2) = E(V^2) = 2$, dobimo $\sigma(U) = \sigma(V) = \sqrt{2}$.
Izračunamo: $E(XU) = E(X^2 + XY) = E(X^2) + E(XY) = 1 + E(X)E(Y) = 1$, podobno tudi $E(XV) = E(YU) = 1$ in $E(YV) = -1$. Od tod dobimo

$$\mathrm{Cov}(X,U) = \mathrm{Cov}(X,V) = \mathrm{Cov}(Y,U) = 1 \quad \text{in} \quad \mathrm{Cov}(Y,V) = -1.$$

Torej so preostali pari korelirani:

$$\rho(X,U) = \rho(Y,U) = \rho(X,V) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{in} \quad \rho(Y,V) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

NALOGA

4.4 (a) $P(X=1) = 0.6$; $P(X=1, Y=1) = 0.4$; $P(X=Y) = 0.5$; $P(X=1\,|\,Y=1) = 0.667$

(b)

$$X \mid Y = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \qquad (X \mid Y = 1) = 1$$

(c) Ker je

$$X,\, Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.35 & 0.4 & 0.2 & 0.05 \end{pmatrix},$$

je $D(X) = D(Y) = 0.4$ in $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$. Torej sta X in Y nekorelirani slučajni spremenljivki in

$$K(X,Y) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Že računi v točki (a) pokažejo, da sta X in Y odvisni spremenljivki.

NALOGA

4.5 (a) Verjetnostna shema vektorja (X, Y):

$X \setminus Y$	-2	5	8	p_X
1	0.21	0.35	0.14	0.7
2	0.09	0.15	0.06	0.3
p_Y	0.3	0.5	0.2	1

$E(X) = 1.3$; $E(Y) = 3.5$; $E(XY) = 4.55$; $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

(b) Izračunamo $\mathrm{Cov}(X, Z) = E(X(X + Y)) - E(X)E(X + Y) = D(X) = 0.21 \neq 0$ (upoštevali smo neodvisnost X in Y ter $E(X^2) = 1.9$).

Torej sta X in Z korelirani spremenljivki. Njun korelacijski koeficient je enak

$$\rho(X, Z) = \sqrt{\frac{D(X)}{D(X) + D(Y)}} = 0.12.$$

Pri izračunu smo upoštevali, da je $D(Y) = 14.25$ in da je $D(Z) = D(X) + D(Y)$.

NALOGA

4.6 (a)

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}; \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) $P(1 \leq X < 3, Y \geq 1) = p(1,1) + p(1,2) + p(2,1) + p(2,2) = \frac{7}{18}$;

$P(X > Y) = p(1,0) + p(2,0) + p(2,1) = \frac{4}{9}$

(c)

$$XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{11}{18} & \frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix};$$

$E(X) = \frac{19}{18}$; $E(Y) = 1$; $E(XY) = \frac{5}{6}$; $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{2}{9}$

(d)

$$X|Y = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(e) Ker sta X in Y korelirani, nista neodvisni spremenljivki.

NALOGA

4.7 (a)

$X \setminus Y$	-1	0	1	p_X
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$
p_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(b) Ker sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, je verjetnostna shema spremenjivke $X \mid Y = 0$ enaka verjetnostni shemi spremenjivke X:

$$X \mid Y = 0 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad E(X \mid Y = 0) = \frac{1}{2}.$$

(c) $Z = \min\{X, Y\} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{16} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$

(d)

$X \setminus Z$	-1	0	1	p_X
-1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$
p_Z	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	1

$XZ : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$; $E(X) = \frac{1}{2}$; $E(Z) = -\frac{1}{4}$; $E(XZ) = \frac{1}{4}$; $\mathrm{Cov}(X, Z) = \frac{3}{8}$

NALOGA

4.8 (a) Ker je

$$p(1,0) + p(2,0) + p(1,1) + p(2,1) = \frac{1+a}{6} + \frac{2+a}{6} + \frac{a}{6} + \frac{1+a}{6} = \frac{2(1+a)}{3},$$

mora biti $a = \frac{1}{2}$.

$X \setminus Y$	0	1	p_X
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
p_Y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(b)

$$Z = X - Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}; \qquad W = X + Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(c)

$W \setminus Z$	0	1	2	p_W
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
p_Z	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	1

$$ZW : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}; \; E(Z) = \frac{4}{3}; \; E(W) = 2; \; E(ZW) = \frac{8}{3}; \; \mathrm{Cov}(Z, W) = 0$$

Slučajni spremenljivki Z in W nista neodvisni, saj je npr.:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} = P(Z = 0)P(W = 1) \neq P(Z = 0, W = 1) = 0.$$

NALOGA

4.9 (a)

$X \setminus Y$	0	1	2	3	p_X
0	0	a	$2a$	$3a$	$6a$
1	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$14a$
2	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$22a$
p_Y	$6a$	$9a$	$12a$	$15a$	$42a$

kjer je $a = \frac{1}{42}$

(b)

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{11}{21} \end{pmatrix}; \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

X in Y sta odvisni slučajni spremenljivki, saj je npr.

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{49}.$$

(c) $P(X = 2, Y = 1) = \frac{5}{42}$; $P(X \geq 1, Y \leq 2) = \frac{4}{7}$;

$P(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{5}{22}$; $E(Y \mid X = 2) = \frac{19}{11}$

NALOGA

4.10 (a) $X : \begin{pmatrix} 100 & 250 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

(b) $X \mid Y = 0 : \begin{pmatrix} 100 & 250 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$

(c) $Z = X + Y : \begin{pmatrix} 100 & 200 & 250 & 300 & 350 & 450 \\ 0.20 & 0.10 & 0.05 & 0.20 & 0.15 & 0.30 \end{pmatrix}$

(d) Pričakovana vrednost skupne premije je enaka

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 300.$$

NALOGA

4.11 (a) $E(X) = 1.1$; $E(X^2) = 1.7$; $D(X) = 0.49$

Matematično upanje nam pove povprečno število semaforjev, pri katerih se je študent moral ustaviti na poti do fakultete. Varianca je mera razpršenosti: v grobem pove, za koliko se realizirane vrednosti slučajne spremenljivke X lahko razlikujejo.

(b) Ker sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni, ima slučajni vektor (X, Y) verjetnostno shemo:

$X \setminus Y$	0	1	2	p_X
0	0.04	0.10	0.06	0.2
1	0.10	0.25	0.15	0.5
2	0.06	0.15	0.09	0.3
p_Y	0.2	0.5	0.3	1

(c)

$$Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.04 & 0.20 & 0.37 & 0.30 & 0.09 \end{pmatrix}$$

Slučajna spremenljivka Z pomeni skupno število semaforjev, pred katerimi se mora šudent ustaviti na poti do fakultete in domov.

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2.2$$
$$D(Z) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 0.98$$

(d)

$$W : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.04 & 0.45 & 0.51 \end{pmatrix}; \quad E(W) = 1.47; \quad E(W^2) = 2.49; \quad D(W) = 0.3291$$

NALOGA

4.12 Če seštejemo vrednosti v vrsticah oziroma stolpcih verjetnostne sheme, dobimo verjetnostni shemi za X oziroma Y.

$X \setminus Y$	0	1	2	p_X
0	0.025	0.015	0.010	0.05
1	0.050	0.030	0.020	0.10
2	0.125	0.075	0.050	0.25
3	0.150	0.090	0.060	0.30
4	0.100	0.060	0.040	0.20
5	0.050	0.030	0.020	0.10
p_Y	0.5	0.3	0.2	1

(a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1, Y \geq 1) &= 1 - P(X=0) - P(Y=0) + P(X=0, Y=0) \\ &= 1 - 0.05 - 0.5 + 0.025 = 0.475 \end{aligned}$$

(b) Verjetnost, da želi v ciklu natanko en avtobus zaviti levo, je enaka $P(Y=1) = 0.3$. Pričakovano število avtobusov, ki želijo zaviti levo, je enako $E(Y) = 0.7$.

(c) Verjetnost, da na pasu za zavijanje levo ne bo dovolj prostora za vsa vozila, ki bi želela zaviti levo, je enaka

$$\begin{aligned} &P(Y=2) + P(X=3, Y=1) + P(X=4, Y=1) + P(X=5, Y=1) \\ &= 0.2 + 0.09 + 0.06 + 0.03 = 0.38. \end{aligned}$$

(d) X in Y sta neodvisni slučajni spremenljivki, saj je

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) \text{ za vsak } x \in \{0,1,2,3,4,5\} \text{ in } y \in \{0,1,2\}.$$

NALOGA

4.13 (a) $p_{(X,Y)}(x,y) = \binom{2}{x} 0.95^x \cdot 0.05^{2-x} \binom{2}{y} 0.9^y \cdot 0.1^{2-y}$

$X \setminus Y$	0	1	2	p_X
0	0.000025	0.00045	0.002025	0.0025
1	0.00095	0.0171	0.07695	0.095
2	0.009025	0.16245	0.731025	0.9025
p_Y	0.01	0.18	0.81	1

(b) $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.0025 & 0.095 & 0.9025 \end{pmatrix}$; $E(X) = 1.9$; $D(X) = 0.095$

(c) Ker sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni, je slučajna spremnljivka $Y \mid X = 2$ enako porazdeljena kot Y:

$$Y \mid X = 2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{pmatrix}.$$

(d) $Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.000025 & 0.0185 & 0.981475 \end{pmatrix}$

NALOGA

4.14 (a)

$$p(0,0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}; \quad p(1,0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}; \quad p(2,0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22};$$

$$p(0,1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{20}{66} = \frac{10}{33}; \quad p(0,2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}; \quad p(1,1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{12}{66} = \frac{2}{11}$$

$X \setminus Y$	0	1	2	p_X
0	$\frac{5}{33}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$
1	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{9}{22}$
2	$\frac{1}{22}$	0	0	$\frac{1}{22}$
p_Y	$\frac{14}{33}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{1}{11}$	1

(b)

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{6}{11} & \frac{9}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix}; \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{14}{33} & \frac{16}{33} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Slučajni spremenljivki nista neodvisni, saj je npr.:

$$0 = P(X = 2, Y = 2) \neq P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{1}{22} \cdot \frac{1}{11}.$$

(c) $Y \mid X = 0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(d) $Z = XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$; $E(X) = \frac{1}{2}$, $E(Y) = \frac{2}{3}$; $E(XY) = \frac{2}{11}$;

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{5}{33}$

NALOGA

4.15 (a)

$X \setminus Y$	0	1	2	p_X
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{7}{15}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{15}$
p_X	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

(b) $P(X \leq 1, Y \leq 1) = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(1,1) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{15} = \frac{41}{45}$

(c)

$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}; \qquad Y\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{28}{45} & \frac{16}{45} & \frac{1}{45} \end{pmatrix}; \qquad XY\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{13}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix};$$

$E(X) = \frac{3}{5}$; $E(Y) = \frac{2}{5}$; $E(XY) = \frac{2}{15}$; $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\frac{8}{75}$

(d) $Z\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{9} & \frac{31}{45} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}$; $E(Z) = \frac{13}{15}$; $E(Z^2) = \frac{47}{45}$; $D(Z) = \frac{22}{75}$

NALOGA

4.16 (a)

$X \setminus Y$	0	1	2	3	p_X
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{12}$
p_Y	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$	1

(b) $P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{7}$

(c) $X \mid Y = 2\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(d) $Z = XY\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{17}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \end{pmatrix}$; $E(Z) = \frac{1}{2}$; $Z^2\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{17}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \end{pmatrix}$; $E(Z^2) = \frac{5}{7}$; $D(Z) = \frac{13}{28}$

NALOGA

4.17 (a) Ker je $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2\, dy = 1$, je f gostota slučajnega vektorja.

(b)

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}\int\limits_0^1 (x+y)^2\, dy, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{7}\left(3x^2+3x+1\right), & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

Podobno dobimo:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{7}\left(3y^2+3y+1\right), & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

Pogojni gostoti sta

$$p_{X|y}(x,y) = \frac{3(x+y)^2}{3y^2+3y+1} \quad \text{in} \quad p_{Y|x}(x,y) = \frac{3(x+y)^2}{3x^2+3x+1}.$$

Slučajni spremenljivki nista neodvisni, ker $p_{(X,Y)}(x,y) \ne p_X(x)p_Y(y)$.

(c)

$$P(X > Y) = \frac{6}{7}\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 (x+y)^2\, dx = \frac{1}{2}\,; \quad P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} p_X(x)\, dx = \frac{2}{7}$$

NALOGA

4.18 (a) Ker je $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 kxy\, dy = k$, mora biti $k = 1$.

(b)

$$p_X(x) = \begin{cases} \int\limits_0^2 xy\, dy, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

(c) $P(X > Y) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xy\, dy = \frac{1}{8}$

(d) $P\left(Y > \dfrac{1}{2} \mid X < \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{P(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2})}{P(X < \frac{1}{2})} = \dfrac{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 xy\, dy}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2x\, dx} = \dfrac{15}{16}$

NALOGA

4.19 (a)

$$p_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 (2x+2y-4xy)\,dy, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 (2x+2y-4xy)\,dx, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1; \end{cases} \qquad \text{in} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ y, & 0 \le y \le 1; \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Spremenljivki X in Y nista neodvisni, saj $p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$.

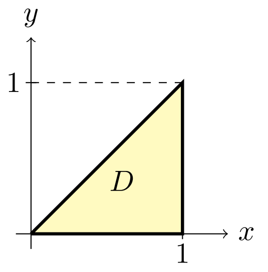
(b)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}; \qquad E(Y) = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2} \\
E(X+Y) &= E(X) + E(Y) = 1 \\
E(XY) &= \int_0^1 dx \int_0^1 xy(2x+2y-4xy)\,dy = \frac{2}{9} \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{36} \\
D(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{12} \\
D(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{12} \\
D(X+Y) &= D(X) + D(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Ker je $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, sta spremenljivki X in Y korelirani.

NALOGA

4.20 (a) Najprej skiciramo območje D, kjer je $f(x,y)$ različna od 0.



Iz spodnjega računa ugotovimo, da mora biti $A = 8$:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x Axy\,dy = \frac{A}{8}.$$

(b)

$$p_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 8xy\,dy, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 4x^3, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 8xy\,dx, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

(c) Spremenljivki X in Y nista neodvisni, saj $p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$.

(d) $E(X) = \int_0^1 x\,p_X(x)\,dx = \int_0^1 4x^4\,dx = \frac{4}{5}$

$E(Y) = \int_0^1 y\,p_Y(y)\,dy = \int_0^1 4y^2(1-y^2)\,dx = \frac{8}{15}$

$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^x xy\,p_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x 8x^2y^2\,dy = \frac{4}{9}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{225}$

NALOGA

4.21 (a) Ker je $\int_0^1 dx \int_0^2 a(x^2 + \frac{xy}{2})\,dy = \frac{7a}{6}$, mora biti $a = \frac{6}{7}$.

(b) $$p_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}\int_0^2 (x^2 + \frac{xy}{2})\,dy, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{6}{7}(2x^2 + x), & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

(c) $P(X>Y)=\frac{6}{7}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (x^2+\frac{xy}{2})\,dy=\frac{15}{56}\approx 0.2679$

(d)

$$P\left(Y>\frac{1}{2}\mid X\leq\frac{1}{2}\right)=\frac{P(Y>\frac{1}{2},X\leq\frac{1}{2})}{P(X\leq\frac{1}{2})}=\frac{\frac{6}{7}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2+\frac{xy}{2})\,dy}{\frac{6}{7}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(2x^2+x)\,dx}=\frac{69}{80}=0.8625$$

NALOGA

4.22 (a) Ker je $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 ax^2y\,dy=\frac{9a}{2}$, mora biti $a=\frac{2}{9}$.

(b) $p_X(x)=\begin{cases}\int\limits_0^1\frac{2x^2y}{9}\,dy, & 0\leq x\leq 3;\\ 0, & \text{sicer;}\end{cases}=\begin{cases}\frac{x^2}{9}, & 0\leq x\leq 3;\\ 0, & \text{sicer.}\end{cases}$

$E(X)=\int\limits_0^3\frac{x^3}{9}\,dx=\frac{9}{4}$

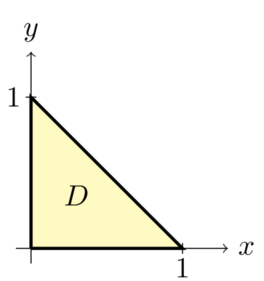
(c) $P(X>Y)=1-P(X\leq Y)=1-\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1\frac{2}{9}x^2y\,dy=\frac{133}{135}$

(d)

$$P\left(Y>\frac{1}{2}\mid X\leq\frac{1}{2}\right)=\frac{P(X\leq\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2})}{P(X\leq\frac{1}{2})}=\frac{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x^2y}{9}\,dy}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{9}\,dx}=\frac{3}{4}.$$

NALOGA

4.23 (a) Najprej skiciramo območje D, kjer je $f(x,y)$ različna od 0.



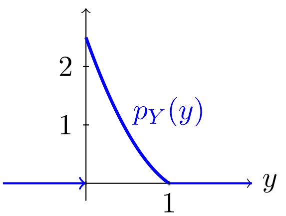
Ker je

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (cx+1)\,dy = \frac{c+3}{6},$$

mora biti $c = 3$.

(b)

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int\limits_0^{1-y} (3x+1)\,dx, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(y-1)(3y-5), & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

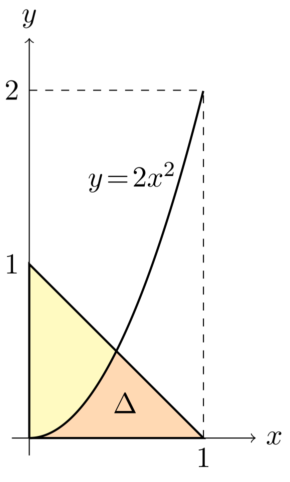


(c)

$$p_{X|Y=\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{p_{(X,Y)}(x,\frac{1}{2})}{p_Y(\frac{1}{2})}, & 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{8(3x+1)}{7}, & 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

$$E\left(X \mid Y = \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x(3x+1)}{7}\,dx = \frac{2}{7}$$

(d) Najprej skiciramo območje $\Delta = \{(x,y) \in D \mid y \le 2x^2\}$.

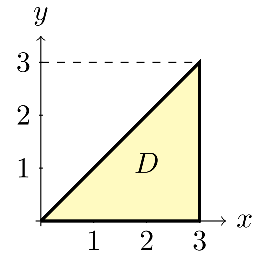


Dvojni integral po območju Δ lahko izračunamo v dveh različnih vrstnih redih.

$$P(Y \leq 2X^2) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{2x^2} (3x+1)\, dy \; + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{1-x} (3x+1)\, dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} (3x+1)\, dx = \frac{53}{96}$$

NALOGA

4.24 (a) Najprej skiciramo območje D, kjer je $f(x, y)$ različna od 0.



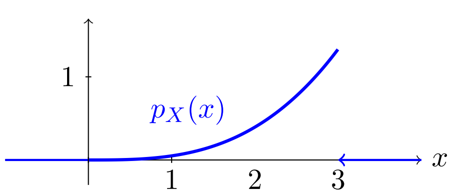
Ker je

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^3 dx \int_0^x cxy\, dy = \frac{81c}{8},$$

mora biti $c = \frac{8}{81}$.

(b) $P(X < 1, Y < 2) = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{8}{81} xy\, dy = \frac{1}{81}$

(c) $p_X(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{81}, & 0 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$

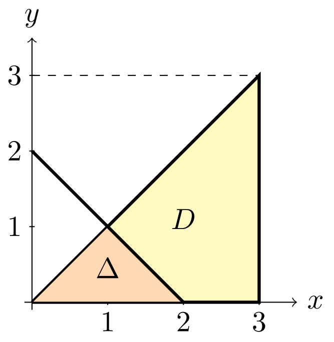


(d)

$$p_{Y|X=1}(y) = \begin{cases} \frac{p_{(X,Y)}(1,y)}{p_X(1)}, & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer;} \end{cases} = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$E(Y|X = 1) = \int_0^1 y\, p_{Y|X=1}(y) dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$$

(e) Najprej skiciramo območje $\Delta = \{(x,y) \in D \mid y \leq 2-x\}$.

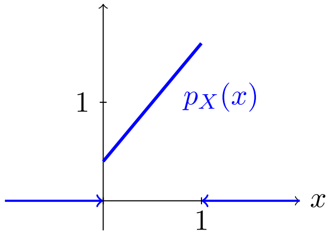


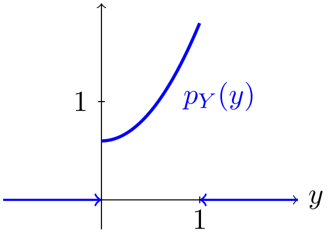
$$P(X+Y \leq 2) = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} \tfrac{8}{81} xy\,dx = \tfrac{8}{243}$$

NALOGA

4.25 (a)

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} \quad \text{in} \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5}, & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$





(b) Ne, ker $p_{(X,Y)}(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$.

(c) $E(X) = \int_0^1 x p_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2(3x^2+x)}{5}\,dx = \frac{3}{5}$

$E(Y) = \int_0^1 y p_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{3(y+2y^3)}{5}\,dy = \frac{3}{5}$

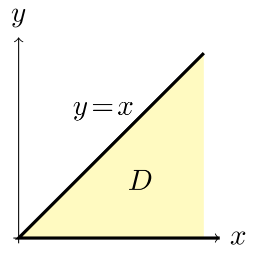
$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 xyp(x,y)\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{6(x^2y+xy^3)}{5}\,dy = \frac{7}{20}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{100}$

Ker je $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, sta X in Y korelirani spremenljivki.

NALOGA

4.26 Najprej skicirajmo območje D, kjer je $f(x, y)$ različna od 0.



Ker je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty dx \int_0^x ce^{-2x-3y}\,dy = \frac{c}{10},$$

mora biti $c = 10$.

(a)

$$p_X(x) = \begin{cases} 10\int_0^x e^{-2x-3y}\,dy, & x > 0; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{10}{3}\left(e^{-2x} - e^{-5x}\right), & x > 0; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

(b)

$$P(X < 1, Y < 2) = 10\int_0^1 dx \int_0^x e^{-2x-3y}\,dy = \frac{1}{3}\left(2e^{-5} - 5e^{-2} + 3\right) \approx 0.78$$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 p_X(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(2e^{-10} - 2e^{-5} - 5e^{-4} + 5e^{-2}\right) \approx 0.19$$

(c)

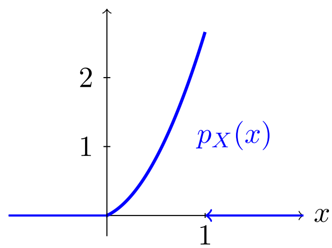
$$p_{Y|X=1}(y) = \begin{cases} \frac{p_{(X,Y)}(1,y)}{p_X(1)}, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{3e^3}{e^3-1}e^{-3y}, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

$P(Y < 2 \mid X = 1) = 1$

NALOGA

4.27 (a)

$$p_X(x) = \begin{cases} \int_0^2 (x^2 + \frac{xy}{3})dy, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x(3x+1)}{3}, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$



(b) $P(X > \frac{1}{2}) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} p_X(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x(3x+1)}{3}dx = \frac{5}{6}$

(c) $P(X > Y) = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} (x^2 + \frac{xy}{3})dy = \frac{7}{24}$

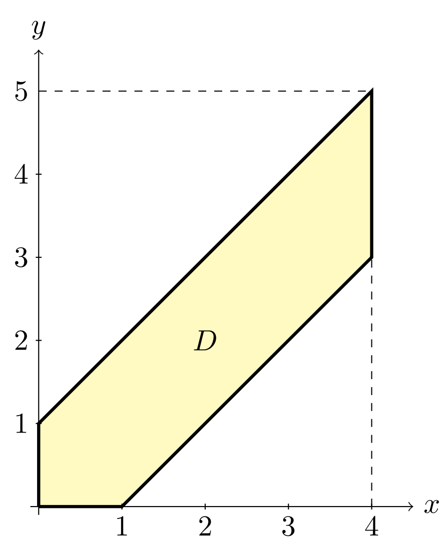
(d)

$$p_{Y|X=\frac{1}{2}}(y) = \begin{cases} \frac{f\left(\frac{1}{2},y\right)}{p_X\left(\frac{1}{2}\right)}, & 0 \le y \le 2; \\ 0, & \text{sicer;} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3+2y}{10}, & 0 \le y \le 2; \\ 0, & \text{sicer;} \end{cases}$$

$$P\left(Y \le \frac{1}{2} \middle| X = \frac{1}{2}\right) = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} p_{Y|X=\frac{1}{2}}(y)dy = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{3+2y}{10}dy = \frac{7}{40}$$

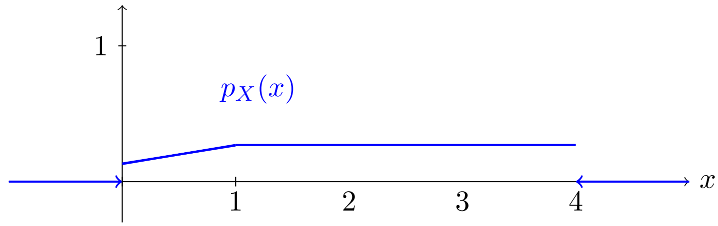
NALOGA

4.28 (a) Najprej skiciramo območje D, kjer je $f(x,y)$ različna od 0.



Iz $\iint\limits_D c\,dxdy = \frac{15c}{2}$, sledi $c = \frac{2}{15}$.

(b) $p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}(x+1), & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{4}{15}, & 1 < x \leq 4; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$



(c)

$$p_{Y|X=1}(y) = \begin{cases} \frac{p_{(X,Y)}(1,y)}{p_X(1)}, & 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{sicer;} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$E(Y \mid X=1) = \int\limits_0^2 \frac{y}{2} dy = 1$

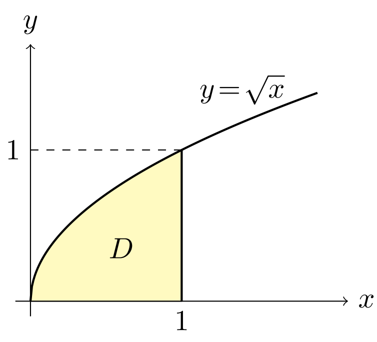
(d) Spremenljivki X in Y sta odvisni, ker je (X,Y) enakomerno porazdeljen na območju D in $p_X(x)$ funkcija spremenljivke x.

(e) $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{15} dy = \frac{1}{30}$

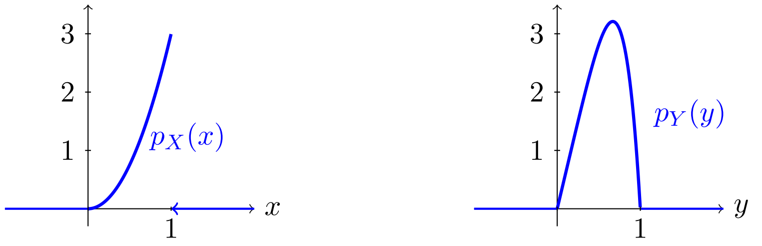
Opomba: Ker ima vektor (X,Y) enakomerno porazdelitev, bi lahko c, $p_{Y|X=1}(y)$, $E(Y|X=1)$ in $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$ določili tudi na podlagi skice.

NALOGA

4.29 Najprej skiciramo območje D, kjer je $f(x,y)$ različna od 0



(a) $p_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{x}} 6xy\,dy, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$



(b)

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_{y^2}^{1} 6xy\,dx, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 3y(1-y^4), & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

(c) Ker $p_{(X,Y)}(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$, spremenljivki X in Y nista neodvisni.

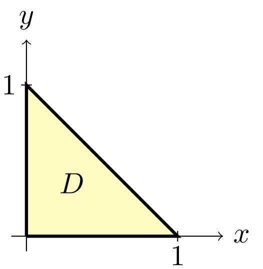
(d)

$$p_{X|y}(x) = \begin{cases} \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}, & y^2 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x}{1-y^4}, & y^2 \le x \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases}$$

$$E(X|Y=y) = \int_{y^2}^{1} \frac{2x^2}{1-y^4}\,dx = \frac{2(1-y^6)}{3(1-y^4)} = \frac{2(1+y^2+y^4)}{3(1+y^2)}$$

NALOGA

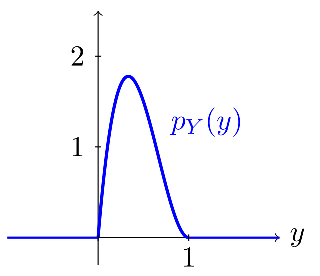
4.30 (a) Najprej skiciramo območje D, kjer je $f(x,y)$ različna od 0.



$$P(X > \tfrac{1}{2}) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} 24xy\, dy = 12 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x(1-x)^2 dx = \tfrac{5}{16}$$

(b)

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int\limits_0^{1-y} 24xy\, dx, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$



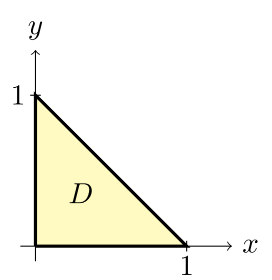
(c)

$$p_{X|Y=\frac{3}{4}}(x) = \begin{cases} \frac{f\left(x,\frac{3}{4}\right)}{p_Y\left(\frac{3}{4}\right)}, & 0 \le x \le \frac{1}{4}; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 32x, & 0 \le x \le \frac{1}{4}; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases}$$

$$P\left(X < \frac{1}{8} \middle| Y = \frac{3}{4}\right) = \int\limits_0^{\frac{1}{8}} p_{X|Y=\frac{3}{4}}(x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{8}} 32x\, dx = \frac{1}{4}$$

NALOGA

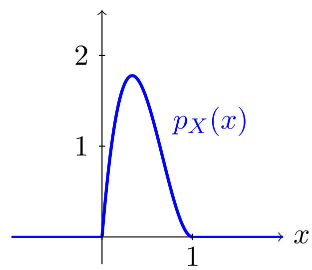
4.31 (a) Najprej skiciramo območje D, kjer je $f(x,y)$ različna od 0.



$$P(X + Y \le \tfrac{1}{2}) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}-x} 24xy\, dy = \tfrac{1}{16}$$

(b)

$$p_X(x) = \begin{cases} \int\limits_0^{1-x} 24xy\,dy, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sicer}; \end{cases} = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$



(c) Slučajni spremenljivki nista neodvisni, ker

$$p_X(x)p_Y(y) = 12x(1-x)^2 12y(1-y)^2 \neq 24xy = p_{(X,Y)}(x,y).$$

(d) $E(X) = \int\limits_0^1 12x^2(1-x)^2 dx = 0.4$; $E(Y) = E(X) = 0.4$;

$Z = 20X + 15Y + 5(1 - X - Y) = 5(1 + 3X + 2Y)$;

$E(Z) = E(5(1 + 3X + 2Y)) = 5(1 + 3E(X) + 2E(Y)) = 5(1 + 5E(X)) = 15$

NALOGA

5 Ocenjevanje parametrov

Vzorec $(X_1, \ldots, X_n)$ imenujemo **enostaven slučajni vzorec**, če so X_i med sabo neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Za tak vzorec definiramo

- **vzorčno povprečje** kot $\overline{X} := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$,
- **vzorčno disperzijo** kot $S^2 := \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$,
- **vzorčni standardni odklon** kot $S := \sqrt{S^2}$.

Točkovno ocenjevanje parametrov

Neznani parameter θ ocenimo s številsko vrednostjo statistike ali **cenilke** $\hat{\theta}$. Statistika $\hat{\theta}$ je **nepristranska** cenilka parametra θ, če je $E(\hat{\theta}) = \theta$ in je **asimptotsko nepristranska**, če je $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$. Standardni odklon $\sigma(\hat{\theta}) =: SE(\hat{\theta})$ imenujemo **standardna napaka** cenilke $\hat{\theta}$.
Za enostaven slučajni vzorec $(X_1, \ldots, X_n)$ z $E(X_i) = \mu$ in $D(X_i) = \sigma^2$ je

- $\overline{X}$ nepristranska cenilka parametra μ s standardno napako $SE(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$;
- S^2 nepristranska cenilka za σ^2 s standardno napako $SE(S^2) = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}$;
- $S := \sqrt{S^2}$ pristranska, a asimptotsko nepristranska cenilka za σ,
- $\hat{D} := \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ cenilka za σ^2 ob poznanem μ.

Če je $X \sim B(n, p)$ binomsko porazdeljena, je $\hat{p} := \frac{X}{n}$ nepristranska cenilka za p (delež populacije) s standardno napako $SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Metoda momentov

Začetne momente slučajne spremenljivke X definiramo kot $z_k := E(X^k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Cenilka za moment z_k je **vzorčni moment** slučajnega vzorca $(X_1, \ldots, X_n)$,

$$\widehat{z_k} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Če se parametri $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ izražajo z začetnimi momenti kot $\theta_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, potem dobimo **cenilke po metodi momentov** kot

$$\widehat{\theta_i} = f_i(\widehat{z_1}, \widehat{z_2}, \ldots, \widehat{z_m}), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Metoda največjega verjetja

Za porazdelitev, podano z verjetnostno funkcijo oz. gostoto verjetnosti $p(x, \theta)$, ki je odvisna od parametrov $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, in enostaven slučajni vzorec $(X_1, \dots, X_n)$ definiramo **funkcijo verjetja** kot

$$L(\theta) := \prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta).$$

Cenilka po metodi največjega verjetja je vrednost $\hat{\theta}$, pri kateri $L(\theta)$ doseže maksimum. Izračunamo ga s (parcialnimi) odvodi, pogosto si pomagamo z logaritmiranjem in poiščemo maksimum funkcije $\ell(\theta) := \ln L(\theta)$.

Intervalsko ocenjevanje parametrov

Interval zaupanja je slučajni interval $[A, B]$, ki s predpisano verjetnostjo $1 - \alpha$, imenovano **stopnja zaupanja**, vsebuje parameter θ:

$$P(\theta \in [A, B]) = 1 - \alpha.$$

Število α imenujemo **stopnja tveganja**. V Tabeli 4 so zbrani **dvostranski** intervali zaupanja za nekaj najpomembnejših parametrov porazdelitev. **Enostranski** interval zaupanja dobimo tako, da ustrezno mejo intervala nadomestimo s $\pm\infty$ ter $\alpha/2$ v kvantilu zamenjamo z α.

Parameter porazdelitve	Pogoji	Interval zaupanja	Kvantili	Porazdelitev cenilke
$\mu \sim N(\mu, \sigma)$	σ znan	$\overline{X} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$z(\alpha/2) = z_{1-\alpha/2}$	$N(0, 1)$
	σ ni znan, $n \geq 30$	$\overline{X} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}$	$z(\alpha/2) = z_{1-\alpha/2}$	$N(0, 1)$
	σ ni znan, $n < 30$	$\overline{X} \pm t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}$	$t(\alpha/2) = t_{1-\alpha/2}$	$T(n-1)$
$\sigma^2 \sim N(\mu, \sigma)$	μ znan	$\left[\frac{n\hat{D}}{b}, \frac{n\hat{D}}{a}\right]$	$a = \chi^2_{\alpha/2}$, $b = \chi^2_{1-\alpha/2}$	$\chi^2(n)$
	μ ni znan	$\left[\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right]$	$a = \chi^2_{\alpha/2}$, $b = \chi^2_{1-\alpha/2}$	$\chi^2(n-1)$
$p \sim B(n, p)$	$np > 5$, $n(1-p) > 5$	$\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$z(\alpha/2) = z_{1-\alpha/2}$	$N(0, 1)$

Tabela 4: Dvostranski intervali zaupanja s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$

Naloge

5.1 Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\alpha x), & -1 < x < 1; \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter.

(a) Določi cenilko za parameter α po metodi momentov in pokaži, da je nepristranska.

(b) Za $\alpha = \frac{3}{5}$ določi porazdelitveno funkcijo, nariši njen graf in izračunaj $P(X > 0)$.

REŠITEV

5.2 Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $\theta > 0$ neznan parameter.

(a) Določi cenilko za parameter θ po metodi momentov.

(b) Poišči cenilko za parameter θ po metodi največjega verjetja.

(c) Izračunaj vrednosti obeh cenilk na podlagi vzorca:

0.58, 0.77, 0.61, 0.85, 0.41, 0.93, 0.95, 0.67, 0.98, 0.72.

REŠITEV

5.3 Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \alpha x^{-\alpha-1}, & x > 1; \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter.

(a) Določi cenilko za parameter α po metodi momentov.

(b) Določi cenilko za parameter α po metodi največjega verjetja.

(c) Izračunaj vrednosti obeh cenilk na podlagi vzorca:

1.08, 1.05, 1.14, 1.03, 1.92, 1.15, 1.01, 1.04, 1.47, 1.59.

REŠITEV

5.4 Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter.

(a) Določi cenilko za parameter α po metodi momentov.

(b) Poišči cenilko za parameter α po metodi največjega verjetja. Dokaži zvezo $E(\ln(X)) = -\alpha$ in z njeno pomočjo ugotovi, ali je cenilka nepristranska.

(c) Izračunaj vrednosti obeh cenilk na podlagi vzorca:

0.77, 0.94, 0.94, 0.28, 0.86, 0.36, 0.68, 0.86, 0.56, 0.41.

REŠITEV

5.5 Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^{\alpha}, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter.

(a) Določi cenilko za parameter α po metodi momentov.

(b) Poišči cenilko za parameter α po metodi največjega verjetja.

(c) Izračunaj vrednosti obeh cenilk na podlagi vzorca:

0.71, 0.95, 0.99, 0.47, 0.78, 0.63, 0.93, 0.52, 0.22, 0.23.

REŠITEV

5.6 Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} x e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0; \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter.

(a) Določi cenilko za parameter α po metodi momentov.

(b) Pokaži, da je dobljena cenilka nepristranska.

(c) Določi cenilko za parameter α po metodi največjega verjetja.

(d) Izračunaj vrednosti obeh cenilk na podlagi vzorca:

$$0.41, \quad 6.62, \quad 2.91, \quad 4.81, \quad 10.73, \quad 4.16, \quad 2.04, \quad 17.95, \quad 4.25, \quad 6.52.$$

REŠITEV

5.7 Zanima nas višina valov na določenem območju. Opravili smo 10 meritev in dobili naslednje vrednosti v metrih:

$$1.5, \quad 2.8, \quad 2.5, \quad 3.2, \quad 1.9, \quad 4.1, \quad 3.6, \quad 2.6, \quad 2.9, \quad 2.3.$$

(a) Na podlagi opravljenih meritev oceni povprečno višino valov in standardni odklon od tega povprečja. Pri tem uporabi nepristranski cenilki!

(b) Višino valov modeliramo z Rayleighovo porazdelitvijo z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter. Oceni vrednost parametra α po metodi največjega verjetja.

REŠITEV

5.8 V drevesnici, kjer gojijo novoletne smrečice, je 5000 smrečic, ki so dovolj velike za prodajo. Izbrali so 100 smrečic in izmerili njihovo višino. Povprečna izmerjena višina je 150.42 cm s standardnim odklonom 25.68 cm.

(a) Kolikšna je standardna napaka za povprečno vrednost?

(b) Določi 95-odstotni interval zaupanja za μ.

REŠITEV

5.9 Stroj polni stekleničke z zdravilom. Predpostaviti smemo, da je masa zdravila normalno porazdeljena. V vzorcu je devet stekleničk. V njih so ugotovili naslednje mase zdravil (v g):

$$10.8, \quad 9.0, \quad 10.1, \quad 10.9, \quad 10.1, \quad 11.0, \quad 9.8, \quad 11.6, \quad 11.2.$$

(a) Izračunaj 95-odstotni interval zaupanja za povprečno maso zdravila v stekleničkah.

(b) Izračunaj 95-odstotni interval zaupanja za standardni odklon mase zdravila v stekleničkah.

REŠITEV

5.10 Meritve tlačne trdnosti devetih vzorcev betona so dale naslednje rezultate (v MPa):

$$40.2, \quad 30.4, \quad 28.9, \quad 30.5, \quad 22.4, \quad 25.8, \quad 18.4, \quad 14.2, \quad 15.3.$$

Predpostavimo, da so meritve normalno porazdeljene.

(a) Zapiši 98-odstotna intervala zaupanja za povprečno vrednost in disperzijo tlačne trdnosti.

(b) Naknadno je bilo ugotovljeno, da je bila vrednost 40.2 napačno zapisana – v resnici je bila izmerjena vrednost 20.4. Pravi vrednosti za vzorčno povprečje in vzorčno disperzijo sta tako $\overline{X}_p = 22.9$ in $S_p^2 = 39.8$. Ponovno izračunaj intervala zaupanja za povprečno vrednost in disperzijo tlačne trdnosti pri popravljenih podatkih.

(c) Primerjaj rezultate iz točk (a) in (b) ter komentiraj, kako je napaka vplivala na vzorčno povprečje, vzorčno disperzijo in širino intervalov zaupanja.

REŠITEV

5.11 Povprečna vrednost koncentracije cinka na 36 različnih lokacijah na reki je 2.6 g/ml. Privzemimo, da je standardni odklon 0.3 g/ml.

(a) Poišči 95-odstotni interval zaupanja za povprečno vrednost.

(b) Kako velik mora biti vzorec, da lahko s 95-odstotno zanesljivostjo rečemo, da napaka povprečja meritev ne bo večja od 0.05?

REŠITEV

5.12 Na vzorcu 30 normalno porazdeljenih primerkov smo opravili meritve in dobili: $\overline{X} = 3.5$, $S^2 = 0.184$.

(a) Poišči 99.5-odstotni interval zaupanja za pričakovano vrednost.

(b) Interval zaupanja bi radi zmanjšali za 10 %, a pri tem ohranili 99.5-odstotno stopnjo zaupanja. Najmanj koliko dodatnih primerkov moramo zato testirati?

REŠITEV

5.13 Pri testiranju 100 jeklenih žic so izmerili, da je povprečna sila, pri kateri se žica strga, 50 kN s standardnim odklonom 2 kN.

(a) Poišči 95-odstotni interval zaupanja za povprečno silo, pri kateri se žica strga.

(b) Inženir trdi, da je povprečna sila med 49.7 kN in 50.3 kN. Kolikšna je stopnja zaupanja te izjave?

(c) Kolikšen mora biti vzorec, da lahko s 95-odstotno zanesljivostjo rečemo, da napaka povprečja ne bo presegla 0.3 kN?

REŠITEV

5.14 V proizvodnji so preizkusili 85 izdelkov in ugotovili, da 10 izmed njih ne ustreza specifikacijam. Določi 95-odstotni interval zaupanja za delež neustreznih izdelkov.

REŠITEV

5.15 Testirali so 2000 avtomobilov in ugotovili, da je vsebnost škodljivih plinov v izpuhu pri 15 % vozil presegla dovoljeno mejo.

(a) Določi 95-odstotni interval zaupanja za delež neustreznih vozil.

(b) Iz zgornjih podatkov dobimo preliminarno oceno $\hat{p}$ za delež neustreznih vozil. Koliko vozil bi morali testirati, da bi se s 95-odstotno verjetnostjo vrednost $\hat{p}$ razlikovala od dejanske za največ 0.01?

REŠITEV

5.16 Napake pri merilnikih hitrosti lahko povzročijo hudo prometno nesrečo. Pri testiranju so med 1600 naključno izbranimi vozili pri osmih našli napake na merilnikih hitrosti.

(a) Določi 99-odstotni interval zaupanja za delež vozil z omenjeno napako.

(b) Iz zgornjih podatkov dobimo preliminarno oceno $\hat{p}$ za delež vozil z napako pri merilnikih hitrosti. Koliko vozil bi morali testirati, da bi se z 99-odstotno verjetnostjo vrednost $\hat{p}$ razlikovala od dejanske za največ 0.001?

(c) Ponovi izračun v točki (b) za delež $\hat{p} = 0.05$ in komentiraj rezultat.

REŠITEV

5.17 Na vzporednih volitvah so pred nekim voliščem naključno izbrali 100 volivcev in ugotovili, da jih je 55 izmed njih volilo kandidata A.

(a) Določi 95-odstotni interval zaupanja za delež volivcev kandidata A v celotni populaciji.

(b) Kako velik bi moral biti vzorec vzporednih volitev, da bi bila pri istem deležu $\hat{p}$ verjetnost izvolitve kandidata A vsaj 95 %?

REŠITEV

Rešitve

5.1 (a) Iz $z_1 = E(X) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x(1+\alpha x)dx = \frac{\alpha}{3}$ dobimo $\alpha = 3z_1$. Torej je cenilka $\hat{\alpha} = \frac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

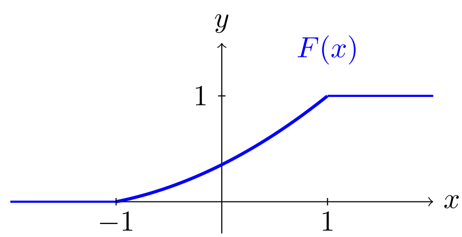
Ker je

$$E(\hat{\alpha}) = E\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{3} = \alpha,$$

je cenilka nepristranska.

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \int\limits_{-1}^{x} \frac{5+3t}{10}dt, & -1 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{3x^2+10x+7}{20}, & -1 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



$P(X > 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - F(0) = \frac{13}{20}$

NALOGA

5.2 (a) Iz $z_1 = E(X) = \int\limits_{0}^{1} x(\theta x^{\theta-1})dx = \frac{\theta}{\theta+1}$ dobimo $\theta = \frac{z_1}{1-z_1}$. Torej je cenilka

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{z}_1}{1-\hat{z}_1} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{1-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}.$$

(b) Cenilka po metodi največjega verjetja je vrednost $\hat{\theta}$, pri kateri doseže funkcija

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta X_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\theta-1}$$

maksimum. Če $L(\theta)$ logaritmiramo, dobimo

$$\ell(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Z odvajanjem dobimo stacionarno točko

$$\theta_0 = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

Ker je $\ell''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$ za vsak θ, je v stacionarni točki res dosežen maksimum. Torej je

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

(c) Iz vzorca dobimo po metodi momentov $\hat{\theta} \approx 2.95$, po metodi največjega verjetja pa $\hat{\theta} \approx 3.1$.

NALOGA

5.3 (a)

$$\begin{aligned} z_1 &= E(X) = \int_1^\infty x\, p(x)\, dx = \alpha \int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx \\ &= \alpha \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \alpha \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

Iz $z_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ dobimo $\alpha = \frac{z_1}{z_1-1}$. Torej je cenilka

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{z_1}}{\widehat{z_1} - 1} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 1}.$$

(b) Cenilka po metodi največjega verjetja je vrednost $\hat{\alpha}$, pri kateri doseže funkcija

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha X_i^{-\alpha-1} = \alpha^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{-\alpha-1}$$

maksimum. Če $L(\alpha)$ logaritmiramo, dobimo

$$\ell(\alpha) = n \ln \alpha - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Z odvajanjem dobimo stacionarno točko

$$\alpha_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

Ker je $\ell''(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} < 0$ za vsak α, je v stacionarni točki res dosežen maksimum. Torej je

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

(c) Iz vzorca dobimo po metodi momentov $\hat{\alpha} \approx 5.03$, po metodi največjega verjetja pa $\hat{\alpha} \approx 5.06$.

NALOGA

5.4 (a) Iz $z_1 = E(X) = \int_0^1 x \left(\frac{1}{\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) dx = \frac{1}{\alpha+1}$ dobimo $\alpha = \frac{1-z_1}{z_1}$. Torej je cenilka

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - 1.$$

(b) Cenilka po metodi največjega verjetja je vrednost $\hat{\alpha}$, pri kateri doseže funkcija

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha} X_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha^n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

maksimum. Če $L(\alpha)$ logaritmiramo, dobimo

$$\ell(\alpha) = -n \ln \alpha + \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Z odvajanjem dobimo stacionarno točko

$$\alpha_0 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Izračunamo $\ell''(\alpha)$ in vstavimo α_0. Ker je

$$\ell''(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0^3} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = -\frac{n}{\alpha_0^2} < 0,$$

je v stacionarni točki α_0 res dosežen maksimum. Torej je

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Z metodo *per partes* dobimo $E(\ln(X)) = \int\limits_0^1 \ln x \left(\frac{1}{\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) dx = -\alpha$. Ker je

$$E(\hat{\alpha}) = E\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\ln X_i) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\alpha) = \alpha,$$

je cenilka nepristranska.

(c) Iz vzorca dobimo po metodi momentov $\hat{\alpha} \approx 0.502$, po metodi največjega verjetja pa $\hat{\alpha} \approx 0.484$.

NALOGA

5.5 (a) Iz $z_1 = E(X) = \int\limits_0^1 x(\alpha+1)x^{\alpha} dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$ dobimo $\alpha = \frac{2z_1 - 1}{1 - z_1}$. Torej je cenilka

$$\hat{\alpha} = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{n - \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}.$$

(b) Cenilka po metodi največjega verjetja je vrednost $\hat{\alpha}$, pri kateri doseže funkcija

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha+1) X_i^{\alpha} = (\alpha+1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha}$$

maksimum. Če $L(\alpha)$ logaritmiramo, dobimo

$$\ell(\alpha) = n\ln(\alpha+1) + \alpha\sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Z odvajanjem dobimo stacionarno točko

$$\alpha_0 = -1 - \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

Ker je $\ell''(\alpha) = -\frac{n}{(\alpha+1)^2} < 0$ za vsak α, je v stacionarni točki res dosežen maksimum. Torej je

$$\hat{\alpha} = -1 - \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

(c) Iz vzorca dobimo po metodi momentov $\hat{\alpha} \approx 0.801$, po metodi največjega verjetja pa $\hat{\alpha} \approx 0.792$.

NALOGA

5.6 (a) Iz $z_1 = E(X) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{\alpha}} dx = 2\alpha$ dobimo $\alpha = \frac{z_1}{2}$. Torej je cenilka

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{z_1}}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(b) Ker je

$$E(\hat{\alpha}) = E\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} 2\alpha = \alpha,$$

je cenilka nepristranska.

(c) Cenilka po metodi največjega verjetja je vrednost $\hat{\alpha}$, pri kateri doseže funkcija

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha^2} X_i e^{-\frac{X_i}{\alpha}}$$

maksimum. Če $L(\alpha)$ logaritmiramo, dobimo

$$\ell(\alpha) = -2n \ln \alpha + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Z odvajanjem dobimo stacionarno točko

$$\alpha_0 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Izračunamo $\ell''(\alpha)$ in vstavimo α_0. Ker je

$$\ell''(\alpha_0) = -\frac{1}{\alpha_0^3} \sum_{i=1}^{n} X_i < 0,$$

je v stacionarni točki α_0 res dosežen maksimum. Torej je

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(d) Cenilki po metodi momentov in po metodi največjega verjetja sta enaki, in sicer $\hat{\alpha} \approx 3.02$.

NALOGA

5.7 (a) $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i \approx 2.74$ in $S = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2} \approx 0.77$.

(b) Zapišemo funkcijo verjetja:

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{10} \frac{X_i}{\alpha^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i}{\alpha}\right)^2},$$

logaritmiramo:

$$\ell(\alpha) = \ln L(\alpha) = \sum_{i=1}^{10} \ln X_i - 20 \ln \alpha - \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{10} X_i^2$$

ter odvajamo po α: $\ell'(\alpha) = -\frac{20}{\alpha} + \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i^2}{\alpha^3}$. Stacionarna točka je torej pri

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{10} X_i^2} \approx 2.$$

Z drugim odvodom se le še prepričamo, da je tu res dosežen maksimum funkcije $\ell(\alpha)$ (in s tem tudi $L(\alpha)$).

NALOGA

5.8 Iz podatkov razberemo, da je $m = 5000$, $n = 100$, $\overline{X} = 150.42$ cm in $S = 25.68$ cm.

Ker je vzorec dovolj velik, lahko v formuli σ nadomestimo s standardnim odklonom S.

(a) Standardna napaka je enaka $SE(\overline{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.568$.

(b) Iz tabel preberemo, da je $z(\alpha/2) = 1.96$, in določimo interval zaupanja

$$\left[\overline{X} - z(\alpha/2)SE(\overline{X}), \overline{X} + z(\alpha/2)SE(\overline{X})\right] = [145.39, 155.45].$$

NALOGA

5.9 Velikost vzorca je $n = 9$.

Iz podatkov izračunamo $\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i = 10.5$, $S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i - \overline{X})^2 \approx 0.6575$ in $S \approx 0.811$.

(a) Ker je vzorec majhen in σ^2 ne poznamo, vzamemo Studentovo porazdelitev z $n-1 = 8$ prostostnimi stopnjami. Iz tabel preberemo, da je $t(\alpha/2) = t(0.025) = 2.306$, in določimo interval zaupanja

$$\left[\overline{X} - t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \overline{X} + t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right] = [9.877, 11.123].$$

(b) Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, iz tabel za porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(8)$ preberemo $a = \chi^2_{0.025} = 2.18$ in $b = \chi^2_{0.975} = 17.53$ ter določimo interval zaupanja za standardni odklon

$$\left[S\sqrt{\frac{n-1}{b}}, S\sqrt{\frac{n-1}{a}}\right] = [0.55, 1.55].$$

NALOGA

5.10 Velikost vzorca je $n = 9$.

Iz podatkov izračunamo $\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i \approx 25.12$ in $S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i - \overline{X})^2 \approx 70.9$.

(a) Ker je vzorec majhen in σ^2 ne poznamo, moramo vzeti Studentovo porazdelitev z $n-1 = 8$ prostostnimi stopnjami. Iz tabel preberemo, da je $t(\alpha/2) = t(0.01) \approx 2.896$, in določimo interval zaupanja

$$\left[\overline{X} - t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \overline{X} + t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right] = [16.99, 33.25].$$

Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, iz tabel za porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(8)$ preberemo $a = \chi^2_{0.01} = 1.65$ in $b = \chi^2_{0.99} = 20.09$ ter določimo interval zaupanja za disperzijo

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right] = [28.23, 343.77].$$

(b) Iz podatkov razberemo: $\overline{X}_p = 22.9$ in $S_p^2 = 39.8$. Popravljeni interval zaupanja za povprečno vrednost je enak

$$\left[\overline{X}_p - t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S_p^2}{n}}, \overline{X}_p + t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S_p^2}{n}}\right] = [16.83, 29.01].$$

Popravljeni interval zaupanja za disperzijo je enak

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right] = [15.85, 192.97].$$

(c) Vzorčno povprečje in vzorčna disperzija se zmanjšata, prav tako širini obeh intervalov zaupanja. Sprememba se najbolj pozna pri disperziji; tako vrednost kot širina intervala se skoraj prepolovita.

NALOGA

5.11 Iz podatkov razberemo: $n = 36$, $\overline{X} = 2.6$ g/ml, $\sigma = 0.3$ g/ml in $\varepsilon = 0.05$.

(a) Iz tabel preberemo, da je $z(\alpha/2) = 1.96$. Torej je $SE(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.05$ in interval zaupanja
$$\left[\overline{X} - z(\alpha/2)SE(\overline{X}), \overline{X} + z(\alpha/2)SE(\overline{X})\right] = [2.502, 2.698].$$

(b) Iz neenačbe $z(\alpha/2)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \varepsilon$ dobimo $n \ge 138.298$. Torej mora vzorec vsebovati vsaj 139 meritev.

NALOGA

5.12 (a) Podana sta vzorčno povprečje in vzorčna disperzija. Vzorec je dovolj velik, da z njo v formuli nadomestimo pravo disperzijo. Za stopnjo zaupanja $1 - \alpha = 0.995$ iz tabele za standardno normalno porazdelitev dobimo $z(\alpha/2) = 2.81$ in interval zaupanja za pričakovano vrednost je tako enak
$$\left[\overline{X} - z(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \overline{X} + z(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right] = [3.28, 3.72].$$

(b) Označimo $c_\alpha = z(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}} \approx 0.22$. Iz zveze $\tilde{c}_\alpha = 0.9c_\alpha$ izračunamo novo velikost vzorca $\tilde{n} = \left(\frac{z(\alpha/2)S}{\tilde{c}_\alpha}\right)^2 = 37.06$. Ugotovimo, da bi za želeno natančnost morali testirati vsaj še osem dodatnih primerkov.

NALOGA

5.13 Iz podatkov razberemo: $n = 100$, $\overline{X} = 50$ kN in $S = 2$ kN.

(a) Ker je vzorec velik ($n \ge 30$), lahko uporabimo iste formule, kot kadar poznamo σ (namesto σ uporabimo S). Iz tabel preberemo, da je $z(\alpha/2) = 1.96$. Torej je $SE(\overline{X}) = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = 0.2$ in interval zaupanja
$$\left[\overline{X} - z(\alpha/2)SE(\overline{X}), \overline{X} + z(\alpha/2)SE(\overline{X})\right] = [49.608, 50.392].$$

(b) Iz enačbe $z(\tilde{\alpha}/2)SE(\overline{X}) = 0.3$ izračunamo $\tilde{\alpha} = 0.134$. Torej je stopnja zaupanja enaka $1 - \tilde{\alpha} = 0.866$.

(c) Iz neenačbe $z(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}} \le 0.3$ dobimo $n \ge 170.732$. Torej mora vzorec vsebovati vsaj 171 jeklenih žic.

NALOGA

5.14 Iz podatkov dobimo: $n = 85$, $X = 10$, vzorčni delež $\hat{p} = \frac{X}{n} \approx 0.118$ in $\alpha = 0.05$. Iz tabel razberemo $z(\alpha/2) = 1.96$. Torej je standardna napaka enaka

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 0.035$$

in interval zaupanja je

$$[\hat{p} - z(\alpha/2)SE(\hat{p}), \hat{p} + z(\alpha/2)SE(\hat{p})] \approx [0.05, 0.19].$$

NALOGA

5.15 Iz podatkov dobimo $n = 2000$ in vzorčni delež $\hat{p} = 0.15$.

(a) Ker je $\alpha = 0.05$, iz tabele razberemo $z(\alpha/2) = 1.96$. Izračunamo standardno napako $SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 0.008$ in interval zaupanja

$$[\hat{p} - z(\alpha/2)SE(\hat{p}), \hat{p} + z(\alpha/2)SE(\hat{p})] = [0.1343, 0.1657].$$

(b) Če označimo $\varepsilon = 0.01$, sledi

$$n > \left(\frac{z(\alpha/2)}{\varepsilon}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) \approx 4898.04.$$

Testirati bi morali vsaj 4899 vozil.

NALOGA

5.16 Iz podatkov razberemo: $n = 1600$, $X = 8$, vzorčni delež $\hat{p} = \frac{X}{n} \approx 0.005$ in $\alpha = 0.01$.

(a) Iz tabel preberemo $z(\alpha/2) = 2.58$ in določimo interval zaupanja

$$[\hat{p} - z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}] \approx [0.0005, 0.0095].$$

(b) Če označimo $\varepsilon = 0.001$, je

$$n > \left(\frac{z(\alpha/2)}{\varepsilon}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) \approx 33\,115.6.$$

Testirati bi morali vsaj 33 116 vozil.

(c) Če označimo $\varepsilon = 0.001$ in je vzorčni delež $\hat{p}_1 = 0.05$, je

$$n > \left(\frac{z(\alpha/2)}{\varepsilon}\right)^2 \hat{p}_1(1-\hat{p}_1) \approx 316\,179.$$

Testirati bi morali vsaj 316 179 vozil. Pri pogostejšem dogodku za isto natančnost potrebujemo večji vzorec.

NALOGA

5.17 Iz podatkov razberemo: $n = 100$, $X = 55$, vzorčni delež $\hat{p} = \frac{X}{n} = 0.55$ in $\alpha = 0.05$.

(a) Iz tabel preberemo $z(\alpha/2) = 1.96$. Izračunamo standardno napako

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 0.0497$$

in interval zaupanja

$$[\hat{p} - z(\alpha/2)SE(\hat{p}), \hat{p} + z(\alpha/2)SE(\hat{p})] = [0.4526, 0.6474].$$

(b) Spodnjo mejo enostranskega intervala zaupanja $[\hat{p} - z(\alpha)SE(\hat{p}), \infty)$ želimo povečati na 0.5. Za $\alpha = 0.05$ iz tabel razberemo $z(\alpha) = 1.65$. Iz pogoja $\hat{p} - z(\alpha)SE(\hat{p}) > 0.5$ pa dobimo

$$n > \left(\frac{z(\alpha)}{\hat{p} - 0.5}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) \approx 269.527.$$

Vzorec vzporednih volitev bi moral vsebovati vsaj 270 volivcev.

NALOGA

6 Preizkušanje domnev

Statistična domneva ali hipoteza je izjava o porazdelitvi neke slučajne spremenljivke. Govori o lastnosti populacije, po navadi vsebuje parametre. Na podlagi vzorca želimo ugotoviti, ali je domneva pravilna. Po Neyman-Pearsonovem[9] pristopu označimo:

$\mathbf{H_0}$: ničelna domneva (ki jo preizkušamo),

$\mathbf{H_A}$: alternativna domneva (kateri v prid ničelno domnevo zavrnemo).

Naj bo $(X_1, \ldots, X_n)$ enostaven slučajni vzorec. Preslikavo $T\colon (X_1, \ldots, X_n) \to \mathbb{R}$, s katero testiramo domnevo, imenujemo **testna statistika**. $Z(T) \subseteq \mathbb{R}$ je zaloga vrednosti te preslikave, $W_0 \subseteq Z(T)$ pa **kritično območje testa**. Če je za dani vzorec vrednost statistike T vsebovana v W_0, domnevo H_0 zavrnemo, sicer je ne zavrnemo. Napake in lastnosti testov:

- **Napaka I. vrste**: zavrnemo pravilno domnevo H_0. Verjetnost te napake
$$\alpha = P(T \in W_0 \mid H_0)$$
imenujemo **stopnja značilnosti ali tveganje testa**. Izberemo jo vnaprej in na podlagi tega določimo kritično območje testa (»$100\alpha\%$-test«).

- **Napaka II. vrste**: ne zavrnemo H_0, čeprav je napačna. Verjetnost te napake
$$\beta = P(T \notin W_0 \mid H_A)$$
je odvisna od dejanske vrednosti parametrov, velikosti vzorca ipd., določimo jo lahko le naknadno. Vrednost $1 - \beta$ določa **moč testa**.

- **p-vrednost** je najmanjša stopnja značilnosti α, pri kateri na podlagi danega vzorca H_0 še zavrnemo.

Preizkušanje domneve o parametru porazdelitve

V Tabeli 5 so zbrani testne statistike in kritična območja za nekaj najpomembnejših primerov.

Preizkušanje skladnosti

H_0 je domneva o modelu porazdelitve za dano populacijo. Slučajni vzorec velikosti n razdelimo na k razredov $S_1, \ldots, S_k$ in z o_i označimo frekvenco razreda S_i. Na podlagi predpostavljene porazdelitve izračunamo domnevno frekvenco razreda S_i kot $e_i := nP(X \in S_i \mid H_0)$ in testno statistiko
$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}.$$
Če je H_0 pravilna in m število nepoznanih parametrov domnevane porazdelitve, za velike n (dovolj: $e_i \geq 5$ za vse $i = 1, \ldots, n$) uporabimo porazdelitev $\chi^2(k-m-1)$. Kritično omočje testa s stopnjo značilnosti α je potem $W_0 = (\chi^2_{1-\alpha}, \infty)$.

[9] Jerzy Neyman (1894–1981), Egon Sharpe Pearson (1895–1980)

H_0	Pogoji	Testna statistika	H_A	W_0
$\mu = \mu_0$, $N(\mu, \sigma)$	σ znan	$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$
			$\mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
			$\mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$
	σ ni znan	$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} \sim T(n-1)$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_0 \rvert > t_{1-\alpha/2}$
			$\mu < \mu_0$	$T_0 < -t_{1-\alpha}$
			$\mu > \mu_0$	$T_0 > t_{1-\alpha}$
$\sigma = \sigma_0$, $N(\mu, \sigma)$	μ znan	$X_0^2 = \frac{n\hat{D}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	$\sigma \neq \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\alpha/2}$ ali $X_0^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}$
			$\sigma < \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\alpha}$
			$\sigma > \sigma_0$	$X_0^2 > \chi^2_{1-\alpha}$
	μ ni znan	$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\sigma \neq \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\alpha/2}$ ali $X_0^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}$
			$\sigma < \sigma_0$	$X_0^2 < \chi^2_{\alpha}$
			$\sigma > \sigma_0$	$X_0^2 > \chi^2_{1-\alpha}$
$p = p_0$, $B(n, p)$	n velik	$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \sim N(0,1)$	$p \neq p_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$
			$p < p_0$	$Z_0 < -z_{1-\alpha}$
			$p > p_0$	$Z_0 > z_{1-\alpha}$

Tabela 5: Preizkušanje domnev o parametru porazdelitve s stopnjo značilnosti α

Preizkušanje neodvisnosti

Domneva H_0 pravi, da sta izbrani lastnosti populacije (statistično) neodvisni. Vzorec velikosti n na podlagi obeh lastnosti razdelimo v r oziroma s razredov in z o_{ij} označimo frekvenco i-tega razreda prve in j-tega razreda druge lastnosti. Dobimo **kontingenčno tabelo** velikosti $r \times s$. Ob predpostavki neodvisnosti izračunamo domnevne frekvence razredov e_{ij} in testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}.$$

Uporabimo porazdelitev $\chi^2((r-1)(s-1))$, kritično omočje testa s stopnjo značilnosti α je $W_0 = (\chi^2_{1-\alpha}, \infty)$.

Zadnja dva testa sta primera t. i. Pearsonovega[10] χ^2-testa.

[10] Carl Pearson (1857–1936)

Naloge

6.1 Na modelu podmorskega vozila so izvedli osem testov in izmerili povprečno hitrost $\overline{X} = 97.8$ metra na sekundo. Predpostavimo, da je hitrost normalno porazdeljena s standardnim odklonom $\sigma = 4$ metre na sekundo.

(a) Ali lahko s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ trdimo, da je povprečna hitrost nižja od 100 metrov na sekundo?

(b) Kolikšna je p-vrednost testa v (a)?

(c) Kako bi odgovoril na (a) z zapisom 95-odstotnega enostranskega intervala zaupanja za μ? Zapiši odgovor.

REŠITEV

6.2 Meritve neke količine, porazdeljene normalno, dajo naslednje vrednosti:

$$7.07, \quad 7.00, \quad 7.10, \quad 6.97, \quad 7.00, \quad 7.03, \quad 7.01, \quad 7.01, \quad 6.98, \quad 7.08.$$

(a) S stopnjo značilnosti 0.05 testiraj ničelno domnevo, da je $\mu = 7$, proti domnevi $\mu \neq 7$.

(b) Recimo, da poznamo $\sigma = 0.044$. Ponovi test iz točke (a).
Izračunaj p-vrednost.

REŠITEV

6.3 Življenjska doba baterij je normalno porazdeljena s standardnim odklonom $\sigma = 1.25$ ur. Na vzorcu 10 baterij so izmerili povprečno življenjsko dobo $\overline{X} = 40.5$ ure.

(a) Ali lahko s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ trdimo, da je povprečna življenjska doba daljša od 40 ur?

(b) Kolikšna je p-vrednost?

(c) Kako bi odgovoril na (a) z zapisom 95-odstotnega enostranskega intervala zaupanja za μ?

REŠITEV

6.4 Meritve neke količine, porazdeljene normalno, dajo naslednje vrednosti:

$$46, \quad 51, \quad 48, \quad 46, \quad 52, \quad 47, \quad 51, \quad 44, \quad 47, \quad 48.$$

S stopnjo značilnosti 0.05 testiraj ničelno domnevo, da je $\mu = 50$, proti domnevi $\mu \neq 50$. Kakšen bi bil odgovor, če bi bila alternativna domneva $\mu < 50$?

REŠITEV

6.5 Razvojni inženirji proizvajalca pnevmatik so testirali njihovo življenjsko dobo. Privzemimo, da je življenjska doba pnevmatik normalno porazdeljena. Po končanem cestnem preizkusu 16 pnevmatik so izmerili povprečno vrednost 60 139.7 km in standardni odklon 3645.94 km.

(a) Poišči 95-odstotni interval zaupanja za povprečno življenjsko dobo pnevmatik.

(b) S stopnjo značilnosti 0.05 testiraj domnevo $H_0\colon \mu = 60\,000$ km proti alternativni domnevi $H_A\colon \mu > 60\,000$ km.

REŠITEV

6.6 Na vzorcu 51 naključno izbranih kosov zlitine, ki se uporablja v letalski industriji, so izmerili odstotek titana. Izmerjeni standardni odklon vzorca je bil $S = 0.37$.

(a) S stopnjo značilnosti 0.05 testiraj ničelno domnevo, da je $\sigma = 0.25$, proti domnevi $\sigma \neq 0.25$.

(b) Kako bi odgovoril na vprašanje iz (a) s 95-odstotnim intervalom zaupanja za σ?

REŠITEV

6.7 V preteklosti je bil standardni odklon mase strojno pakiranih 40-kilogramskih paketov enak 0.25 kg. Na vzorcu 20 naključno izbranih paketov so izmerili standardni odklon 0.32 kg.

(a) S stopnjo značilnosti 0.01 testiraj ničelno domnevo, da je $\sigma = 0.25$, proti hipotezi $\sigma > 0.25$. Oceni p-vrednost testa.

(b) Zapiši 99-odstotni interval zaupanja za σ.

REŠITEV

6.8 Pri raziskavi o uporabi elektrostimulacije za krepitev zdravih kostnih mišic je sodelovalo 17 profesionalnih igralcev hokeja na ledu. Po treh tednih terapije so pri vseh izmerili čas na 10-metrski drsalni progi. Pri tej meritvi je bil standardni odklon drsalnega časa enak 0.09 s.

(a) Zapiši 95-odstotni interval zaupanja za standardni odklon drsalnega časa.

(b) Ali lahko trdimo, da je standardni odklon drsalnega časa večji od 0.075 s? Uporabi stopnjo značilnosti 0.05.

(c) Kako bi na vprašanje iz (b) odgovoril z intervali zaupanja?

REŠITEV

6.9 Pri testiranju 300 izdelkov jih je bilo 13 okvarjenih.

(a) Določi 95-odstotni interval zaupanja za delež okvarjenih izdelkov.

(b) Iz zgornjih podatkov dobimo preliminarno oceno $\hat{p}$ za delež izdelkov z napako. Koliko izdelkov bi morali testirati, da bi se s 95-odstotno verjetnostjo vrednost $\hat{p}$ od dejanske razlikovala za največ 0.01?

(c) S stopnjo značilnosti 0.05 preveri domnevo, da je verjetnost, da je izdelek okvarjen, enaka 0.05, proti alternativni domnevi, da je manjša od 0.05. Določi še p-vrednost.

REŠITEV

6.10 Pri testiranju 500 izdelkov so jih zaradi napake zavrnili 10.

(a) Ali lahko s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ trdimo, da je delež okvarjenih izdelkov manjši od 0.03?

(b) Kolikšna je p-vrednost?

(c) Kako bi odgovoril na vprašanje (a) z zapisom 95-odstotnega enostranskega intervala zaupanja za p?

REŠITEV

6.11 V tovarni vozil trdijo, da je verjetnost, da je izdelano vozilo brezhibno, enaka 0.9. V oddelku za kontrolo kakovosti s slučajno izbiro v kontrolni vzorec izberejo štiri vozila. Za vsako vozilo ugotovijo, ali je brezhibno ali ne. V kontrolnem vzorcu so lahko 0, 1, 2, 3 ali 4 brezhibna vozila. V 200 kontrolnih vzorcih (tj. pri skupaj 800 vozilih) je bilo ugotovljeno naslednje stanje:

Število brezhibnih vozil	1	2	3	4
Frekvenca	1	19	78	102

S stopnjo značilnosti 0.05 preveri, ali je verjetnost, da je vozilo brezhibno, enaka 0.9.

REŠITEV

6.12 Proizvajalec leč trdi, da delež leč s poškodbo ni večji od 2 %. Vzorec 250 leč je vseboval šest poškodovanih leč. S stopnjo značilnosti 0.05 testiraj ničelno domnevo, da je delež poškodovanih leč enak 2 %, proti alternativni domnevi, da je delež manjši od 2 %. Oceni p-vrednost.

REŠITEV

6.13 Pregled 320 družin s petimi otroki nam je dal naslednjo porazdelitev:

(Število fantkov, število deklic)	$(5, 0)$	$(4, 1)$	$(3, 2)$	$(2, 3)$	$(1, 4)$	$(0, 5)$
Število družin	18	56	110	88	40	8

Z χ^2-testom s stopnjo značilnosti 0.05 preveri, ali je rojstvo deklic in fantkov enako verjetno.

REŠITEV

6.14 Na evropskem nogometnem prvenstvu je bila razporeditev zadetkov glede na minuto tekme naslednja (podaljškov in enajstmetrovk tu niso upoštevali):

Časovni interval (min)	0–15	16–30	31–45	46–60	61–75	75–90+
Št. zadetkov	4	10	8	9	16	17

Z χ^2-testom ugotovi, ali je čas zadetka enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka. Stopnjo značilnosti si izberi sam in razloži, kako ta izbira vpliva na odgovor.

REŠITEV

6.15 Kovanec mečemo toliko časa, da pade grb. Naj slučajna spremenljivka X označuje število metov. Po 256 poskusih dobimo naslednje rezultate:

Število metov	1	2	3	4	5	6	7	8
Frekvenca	136	60	34	12	9	1	3	1

Na podlagi χ^2-testa s stopnjo značilnosti 0.05 ugotovi, ali je geometrijska porazdelitev s $p = 0.5$ ustrezen model za X.

REŠITEV

6.16 V križišču nam avtomatski števec šteje vozila, ki se pripeljejo z enosmerne ceste. Spodnje zaporedje predstavlja izmerjena števila vozil na minuto:

$$(0, 3, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 1, 4, 3, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 2).$$

(a) Na podlagi teh podatkov oceni povprečno število vozil na minuto in standardni odklon od tega povprečja. Pri tem uporabi nepristranski cenilki!

(b) Z χ^2-testom s stopnjo značilnosti 0.01 ugotovi, ali smemo za modeliranje prihodov vozil uporabiti Poissonovo porazdelitev.

REŠITEV

6.17 Naj X označuje število napak, opaženih na veliki tuljavi iz pocinkanega jekla. Pregledali so 80 tuljav in zabeležili naslednje podatke:

Število napak na tuljavi	1	2	3	4	5	6	7	8
Frekvenca	3	6	9	15	14	10	16	7

Z χ^2-testom s stopnjo značilnosti 0.01 ugotovi, ali je Poissonova porazdelitev ustrezen model za število napak na tuljavah. Oceni p-vrednost.

REŠITEV

6.18 V igralnici so uvedli novo igro, pri kateri igralec meče tri kocke. Dobitek je sorazmeren številu padlih šestic. Predpostavimo, da je igralec pri 100 igrah dosegel naslednji rezultat:

Število šestic	0	1	2	3
Frekvenca	48	35	15	2

V igralnici so podvomili o poštenosti igralčevih kock. Uporabili so χ^2-test s 5-odstotno stopnjo značilnosti. Kakšen je bil njihov sklep? Oceni p-vrednost.

REŠITEV

6.19 Na Krki je ribiška zveza opravila meritve dolžine 90 lovnih ščuk. V povprečju je bila dolžina 67.5 cm s standardnim odklonom 2.73 cm, rezultati meritev so zbrani v tabeli spodaj.

(a) Izračunaj, koliko bi bilo ščuk v posameznem razredu, če bi bila dolžina lovne ščuke normalno porazdeljena slučajna spremenljivka.

(b) Z χ^2-testom s stopnjo značilnosti 0.05 ugotovi, ali je normalna porazdelitev ustrezen model za dolžino lovne ščuke.

Dolžina (cm)	59.5–62.5	62.5–65.5	65.5–68.5	68.5–71.5	71.5–74.5
Število ščuk	3	16	40	25	6

REŠITEV

6.20 Opravili so raziskavo o odpovedi elektronskih komponent. Obstajajo štirje tipi napak in dve različni mesti vgradnje komponent. Rezultat raziskave je naslednja frekvenčna tabela:

		Tip napake			
		A	B	C	D
Mesto	1	22	46	18	9
	2	4	17	6	12

S stopnjo značilnosti $\alpha = 0.01$ testiraj, ali je tip napake neodvisen od mesta vgradnje. Oceni p-vrednost testa.

REŠITEV

6.21 V tabeli je število študentov, ki so opravili oz. niso opravili izpita pri različnih profesorjih: prof. X, prof. Y in prof. Z.

		Profesor		
		X	Y	Z
Uspeh	Opravil	50	47	56
	Ni opravil	5	14	8

S stopnjo značilnosti 0.05 testiraj domnevo, da je uspeh na izpitu neodvisen od profesorja. Oceni p-vrednost testa.

REŠITEV

6.22 Naključni vzorec 200 upokojenih poročenih moških so razvrstili glede na izobrazbo in število otrok.

		Število otrok		
		0–1	2–3	> 3
Izobrazba	Osnovnošolska	14	37	32
	Srednješolska	19	42	17
	Univerzitetna	12	17	10

(a) S stopnjo značilnosti 0.05 testiraj domnevo, da je število otrok v družini neodvisno od izobrazbe očeta.

(b) Oceni p-vrednost testa.

REŠITEV

6.23 Na vzorcu 400 študentov želimo preveriti domnevo, da tip stanovanja v času študija ne vpliva na učni uspeh. Z χ^2-testom s stopnjo značilnosti 0.05 preizkusi to domnevo na podatkih v spodnji tabeli.

		Uspeh		
		Slab	Dober	Odličen
Tip stan.	Dom	40	100	60
	Starši	25	50	25
	Zasebno	35	50	15

REŠITEV

Rešitve

6.1 Velikost vzorca $n = 8$, vzorčno povprečje $\overline{X} = 97.8$ in standardni odklon $\sigma = 4$.

(a) Ker disperzijo poznamo, vzamemo za testno statistiko

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{97.8 - 100}{\sqrt{\frac{4^2}{8}}} \approx -1.56.$$

Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon \mu = 100$, proti alternativni domnevi $H_A\colon \mu < 100$, uporabimo enostranski test. V našem primeru je kritično območje interval

$$W_0 = (-\infty, -z_{1-\alpha}) = (-\infty, -1.65)$$

in ker $Z_0 \notin W_0$, ničelne domneve ne zavrnemo.

(b) p-vrednost $= \Phi(Z_0) = \Phi(-1.56) = 1 - \Phi(1.56) \approx 0.059$.

(c) Ker zgornja meja enostranskega intervala zaupanja

$$\left(-\infty, \overline{X} + z(\alpha)\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = \left(-\infty, 97.8 + 1.65\sqrt{\frac{4^2}{8}}\right] = (-\infty, 100.13]$$

ni manjša od 100, ne moremo trditi, da je $\mu < 100$.

NALOGA

6.2 (a) Velikost vzorca je $n = 10$, vzorčno povprečje je $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 7.025$ in vzorčna disperzija je $S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 = 0.0019$. Ker disperzije ne poznamo, vzamemo za testno statistiko

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{7.025 - 7}{\sqrt{\frac{0.0019}{10}}} \approx 1.80.$$

Na podlagi tabele za Studentovo porazdelitev z $n - 1 = 9$ prostostnimi stopnjami določimo kritično območje:

$$W_0 = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}) \cup (t_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -2.26) \cup (2.26, \infty).$$

Ker $T_0 \notin W_0$, ničelne domneve ne zavrnemo.

(b) Ker disperzijo poznamo, vzamemo za testno statistiko

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{7.025 - 7}{\sqrt{\frac{0.044^2}{10}}} \approx 1.797.$$

Določimo kritično območje:

$$W_0 = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty).$$

Ker $Z_0 \notin W_0$, ničelne domneve ne zavrnemo. Na podlagi tabel določimo

$$p\text{-vrednost } = 2(1 - \Phi(|Z_0|)) = 2(1 - \Phi(1.797)) \approx 0.072.$$

NALOGA

6.3 Velikost vzorca $n = 10$, vzorčno povprečje $\overline{X} = 40.5$ in standardni odklon $\sigma = 1.25$.

(a) Ker disperzijo poznamo, vzamemo za testno statistiko

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{40.5 - 40}{\sqrt{\frac{1.25^2}{10}}} \approx 1.265.$$

Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon \mu = 40$, proti alternativni domnevi $H_A\colon \mu > 40$, uporabimo enostranski test. V našem primeru je kritično območje interval

$$W_0 = (z_{1-\alpha}, \infty) = (1.65, \infty)$$

in ker $Z_0 \notin W_0$, ničelne domneve ne zavrnemo. Torej ne moremo trditi, da je $\mu > 40$.

(b) p-vrednost $= 1 - \Phi(Z_0) \approx 0.103$.

(c) Ker spodnja meja enostranskega intervala zaupanja

$$\left[\overline{X} - z(\alpha)\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \infty\right) = \left[40.5 - 1.65\sqrt{\frac{1.25^2}{10}}, \infty\right) = [39.85, \infty)$$

ni večja od 40, ne moremo trditi, da je $\mu > 40$.

NALOGA

6.4 Velikost vzorca $n = 10$, vzorčno povprečje je $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 48$ in vzorčna disperzija je $S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{20}{3}$. Ker disperzije ne poznamo, vzamemo za testno statistiko

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{48 - 50}{\sqrt{\frac{20}{3 \cdot 10}}} \approx -2.45.$$

Na podlagi tabele za Studentovo porazdelitev z $n - 1 = 9$ prostostnimi stopnjami določimo kritično območje W_0.

Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon \mu = 50$, proti alternativni domnevi $H_A\colon \mu \neq 50$, uporabimo dvostranski test. V našem primeru je

$$W_0 = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}) \cup (t_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -2.26) \cup (2.26, \infty).$$

Ker je $T_0 \in W_0$, ničelno domnevo zavrnemo.

Če za alternativno domnevo vzamemo, da je $H_A\colon \mu < 50$, uporabimo enostranski test. V tem primeru je

$$W_0 = (-\infty, -t_{1-\alpha}) = (-\infty, -1.83).$$

Ker je $T_0 \in W_0$, ničelno domnevo zavrnemo.

NALOGA

6.5 Velikost vzorca $n = 16$, $\overline{X} = 60\,139.7$ km in $S = 3645.94$ km.

(a) Ker je vzorec majhen, moramo vzeti Studentovo porazdelitev z $n-1 = 15$ prostostnimi stopnjami. Iz tabel preberemo, da je $t(\alpha/2) = t(0.025) = t_{0.975} = 2.131$ in določimo interval zaupanja

$$\left[\overline{X} - t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \overline{X} + t(\alpha/2)\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right] = [58\,197.7, 62\,082.1].$$

(b) Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon \mu = 60\,000\,\text{km}$, proti domnevi $H_A\colon \mu > 60\,000\,\text{km}$, uporabimo enostranski test. V tem primeru je $W_0 = (t_{1-\alpha}, \infty) = (1.753, \infty)$. Ker

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \approx 0.15 \notin W_0,$$

ničelne domneve ne zavrnemo.

NALOGA

6.6 (a) Velikost vzorca $n = 51$ in izmerjeni standardni odklon $S = 0.37$. Ker testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon \sigma^2 = 0.25^2$, proti alternativni domnevi $H_A\colon \sigma^2 \neq 0.25^2$, uporabimo dvostranski test. Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, ima testna statistika

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{50 \cdot 0.37^2}{0.25^2} \approx 109.52$$

porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(50)$. Torej je kritično območje

$$W_0 = (-\infty, \chi^2_{0.025}) \cup (\chi^2_{0.975}, \infty) = (-\infty, 32.36) \cup (71.42, \infty).$$

Ničelno domnevo zavrnemo, saj $X_0^2 \in W_0$.

(b) Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, iz tabel za porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(50)$ preberemo $a = \chi^2_{0.025} = 32.36$ in $b = \chi^2_{0.975} = 71.42$. Interval zaupanja

$$\left[S\sqrt{\frac{n-1}{b}}, S\sqrt{\frac{n-1}{a}}\right] \approx [0.31, 0.46]$$

ne vsebuje vrednosti 0.25, zato sklepamo, da standardni odklon σ ni enak 0.25.

NALOGA

6.7 (a) Velikost vzorca $n = 20$ in izmerjeni standardni odklon $S = 0.32$. Ker testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon \sigma^2 = 0.25^2$, proti alternativni domnevi $H_A\colon \sigma^2 > 0.25^2$, uporabimo enostranski test. Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, ima testna statistika

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{19 \cdot 0.32^2}{0.25^2} \approx 31.13$$

porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(19)$. Torej je kritično območje

$$W_0 = (\chi^2_{0.99}, \infty) = (36.18, \infty).$$

Ker $X_0^2 \notin W_0$, ničelne hipoteze ne zavrnemo.

Ker je $\chi^2_{0.975} = 31.85$ in $\chi^2_{0.95} = 30.14$, je $0.025 < p$-vrednost < 0.05.
Točno vrednost lahko izračunamo z Mathematico:

$$p\text{-vrednost } = 1 - CDF[ChiSquareDistribution[19], 31.13] = 0.0391.$$

(b) Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, iz tabel za porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(19)$ preberemo $a = \chi^2_{0.005} = 6.84$ in $b = \chi^2_{0.995} = 38.58$ ter določimo interval zaupanja za σ:

$$\left[S\sqrt{\frac{n-1}{b}}, S\sqrt{\frac{n-1}{a}}\right] \approx [0.225, 0.533].$$

NALOGA

6.8 (a) Velikost vzorca $n = 17$ in izmerjeni standardni odklon $S = 0.09$.
Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, iz tabel za porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(16)$ preberemo $a = \chi^2_{0.025} = 6.91$ in $b = \chi^2_{0.975} = 28.85$ ter določimo interval zaupanja za σ:

$$\left[S\sqrt{\frac{n-1}{b}}, S\sqrt{\frac{n-1}{a}}\right] \approx [0.067, 0.137].$$

(b) Testiramo domnevo $H_0\colon \sigma = 0.075$ proti domnevi $H_A\colon \sigma > 0.075$. Ker povprečne vrednosti μ ne poznamo, ima testna statistika

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{16 \cdot 0.09^2}{0.075^2} \approx 23.04$$

porazdelitev $\chi^2(n-1) = \chi^2(16)$. Torej je kritično območje

$$W_0 = (\chi^2_{0.95}, \infty) = (26.30, \infty).$$

Ker $X_0^2 \notin W_0$, ničelne domneve ne moremo zavreči.

Torej z dano stopnjo značilnosti ne moremo reči, da je odklon večji od 0.075 s.

(c) Iz tabel preberemo, da je $b = \chi^2_{0.95} = 26.30$. Torej je enostranski 95-odstotni interval zaupanja za standardni odklon drsalnega časa:

$$\left[S\sqrt{\frac{n-1}{b}}, \infty\right) \approx [0.07, \infty)\,.$$

To pomeni, da z dano verjetnostjo ne moremo reči, da je spodnja meja 0.075 s.

NALOGA

6.9 Velikost vzorca $n = 300$, $X = 13$ in vzorčni delež $\hat{p} = \frac{13}{300} \approx 0.043$.

(a) Ker je $\alpha = 0.05$, je $z(\alpha/2) = 1.96$. Standardna napaka je

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 0.01175,$$

interval zaupanja pa

$$[\hat{p} - z(\alpha/2)SE(\hat{p}), \hat{p} + z(\alpha/2)SE(\hat{p})] = [0.02029, 0.06637].$$

(b) Označimo $\varepsilon = 0.01$. Iz neenakosti

$$n > \left(\frac{z(\alpha/2)}{\varepsilon}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) \approx 1592.56$$

sledi, da bi morali testirati vsaj 1593 izdelkov.

(c) Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon\ p = 0.05$, proti domnevi $H_A\colon p < 0.05$, uporabimo enostranski test. V tem primeru je

$$W_0 = (-\infty, -z_{1-\alpha}) = (-\infty, -1.65).$$

Ker

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{13-15}{\sqrt{300 \cdot 0.05 \cdot 0.95}} \approx -0.5298 \notin W_0,$$

ničelne domneve ne zavrnemo.

$$p\text{-vrednost } = P(X < 13) = \Phi(Z_0) = 0.298.$$

NALOGA

6.10 Velikost vzorca $n = 500$, $X = 10$ in vzorčni delež $\hat{p} = \frac{10}{500} = 0.02$.

(a) Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon p = 0.03$, proti domnevi $H_A\colon p < 0.03$, uporabimo enostranski test. V tem primeru je

$$W_0 = (-\infty, -z_{1-\alpha}) = (-\infty, -1.65).$$

Ker

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{10 - 500 \cdot 0.03}{\sqrt{500 \cdot 0.03 \cdot 0.97}} \approx -1.31 \notin W_0,$$

ničelne domneve ne zavrnemo.

(b) p-vrednost $= \Phi(Z_0) = \Phi(-1.31) = 1 - \Phi(1.31) \approx 0.095$.

(c) Ker je $\alpha = 0.05$, je $z(\alpha) = 1.65$. Standardna napaka je enaka

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 0.0063,$$

interval zaupanja pa

$$(-\infty, \hat{p} + z(\alpha)SE(\hat{p})] = (-\infty, 0.0303].$$

Ker je $0.03 < 0.0303$, ne moremo trditi, da je delež okvarjenih izdelkov manjši od 0.03.

NALOGA

6.11 Velikost vzorca $n = 800$, $p_0 = 0.9$ in $X = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 78 + 4 \cdot 102 = 681$. Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon p = 0.9$, proti domnevi $H_A\colon p \neq 0.9$, uporabimo dvostranski test. V tem primeru je

$$W_0 = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty).$$

Ker je

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{681 - 800 \cdot 0.9}{\sqrt{800 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} \approx -4.59 \in W_0,$$

ničelno domnevo zavrnemo.

NALOGA

6.12 Velikost vzorca $n = 250$, $X = 6$ in $p_0 = 0.02$.
Če s stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo ničelno domnevo, da je $H_0\colon p = p_0$, proti domnevi $H_A\colon p < p_0$, uporabimo enostranski test. V tem primeru je

$$W_0 = (-\infty, -z_{1-\alpha}) = (-\infty, -1.65).$$

Ker

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{6 - 5}{\sqrt{250 \cdot 0.02 \cdot 0.98}} \approx 0.452 \notin W_0,$$

ničelne domneve ne zavrnemo.

$$p\text{-vrednost } = P(X<6) = \Phi(Z_0) = 0.674.$$

NALOGA

6.13 Če je rojstvo deklic in fantkov enako verjetno, potem pričakujemo binomsko porazdelitev $B(5, 0.5)$. Pričakovane frekvence so

$$e_i = 320\binom{5}{i}0.5^i 0.5^{5-i} = 320\binom{5}{i}0.5^5 : \ [10, 50, 100, 100, 50, 10].$$

Uporabili bomo χ^2-test. Po domnevi H_0 ima testna statistika $X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$ porazdelitev $\chi^2(k-m-1)$, kjer je k število razredov in m število neznanih parametrov porazdelitve. V našem primeru ima torej porazdelitev $\chi^2(6-0-1) = \chi^2(5)$. Testna statistika ima vrednost

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 11.96.$$

Iz tabele preberemo, da je $\chi^2_{0.95} = 11.07$. Ker je $X_0^2 > \chi^2_{0.95}$, domnevo H_0 zavrnemo s stopnjo značilnosti 0.05.

NALOGA

6.14 Nalogo lahko rešujemo z diskretno ali zvezno enakomerno porazdelitvijo. Preprosteje je z diskretno: imamo šest razredov in verjetnost, da je čas zadetka v kateremkoli od razredov, je enaka $\frac{1}{6}$. Ker je število vseh zadetkov enako 64, je $e_i = \frac{64}{6}$. Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 11.562,$$

ki ima porazdelitev $\chi^2(6-1)$. Odločitev o zavrnitvi domneve je odvisna od stopnje značilnosti: za $\alpha = 0.05$ je $\chi^2_{0.95} = 11.07$ in domnevo zavrnemo, za $\alpha = 0.025$ pa je $\chi^2_{0.975} = 12.83$ in domneve ne moremo zavreči.

NALOGA

6.15 Velikost vzorca je $n = 256$ in $p = q = \frac{1}{2}$. Sestavimo tabelo opazovanih o_i in pričakovanih frekvenc $e_i = nq^{i-1}p = 256\left(\frac{1}{2}\right)^i$.

i	Število metov	o_i	e_i
1	1	136	128
2	2	60	64
3	3	34	32
4	4	12	16
5	5	9	8
6	6	1	4
7	7	3	2
8	≥ 8	1	2

Ker so pričakovane vrednosti v zadnjih treh razredih premajhne, jih združimo in dobimo:

i	Število metov	o_i	e_i
1	1	136	128
2	2	60	64
3	3	34	32
4	4	12	16
5	5	9	8
6	≥ 6	5	8

Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{j=1}^{6} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \frac{25}{8} = 3.125,$$

ki ima porazdelitev $\chi^2(6-1)$. Iz tabele razberemo, da je $\chi^2_{0.95} = 11.07$. Ker je $\chi^2_{0.95} > X_0^2$, je geometrijska porazdelitev ustrezen model za število metov kovanca.

NALOGA

6.16 (a) Vzorčno povprečje $\overline{X} = 1.2$ in vzorčni standardni odklon $S = 1.152$.

(b) Podatke razvrstimo v šest razredov in naredimo tabelo (o_i = izmerjena frekvenca razreda, e_i = pričakovana frekvenca razreda, dobljena s Poissonovo porazdelitvijo s parametrom $\lambda = 1.2$):

i	Število vozil	o_i	e_i
1	0	6	6.02
2	1	8	7.23
3	2	3	4.34
4	3	2	1.73
5	4	1	0.52
	≥ 5	0	0.16

Ker so pričakovane vrednosti v zadnjih štirih razredih premajhne, jih združimo in dobimo:

i	Število vozil	o_i	e_i
1	0	6	6.02
2	1	8	7.23
3	≥ 2	6	6.75

Nato izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0.165.$$

Za kritično vrednost upoštevamo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.01$ in uporabimo tabelo za porazdelitev χ^2 z eno prostostno stopnjo ($k = 3$ in en parameter smo ocenili iz podatkov, zato $3 - 1 - 1 = 1$). Iz tabel razberemo, da je $\chi^2_{0.99} = 6.63$. Ker je $0.165 < \chi^2_{0.99}$, je Poissonova porazdelitev ustrezen model za naš primer.

NALOGA

6.17 Velikost vzorca je enaka $n = 80$. Iz podatkov izračunamo oceno

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{80}\left(1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 16 + 8 \cdot 7\right) = 5.$$

Sestavimo tabelo opazovanih o_i in pričakovanih frekvenc e_i. Če je v razredu več vrednosti, potem za e_i vzamemo ustrezno vsoto.

i	Število napak	o_i	e_i
1	0	0	0.54
2	1	3	2.70
3	2	6	6.74
4	3	9	11.23
5	4	15	14.04
6	5	14	14.04
7	6	10	11.70
8	7	16	8.36
9	≥ 8	7	10.67

Ker so pričakovane vrednosti v prvih treh razredih premajhne, jih združimo in dobimo:

j	Število napak	o_j	e_j
1	≤ 2	9	9.98
2	3	9	11.23
3	4	15	14.04
4	5	14	14.04
5	6	10	11.70
6	7	16	8.36
7	≥ 8	7	10.67

Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{j=1}^{7} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = 9.09.$$

Ker smo iz vzorca določili parameter $\overline{\lambda}$, ima testna statistika porazdelitev $\chi^2(7-1-1)$. Iz tabele razberemo, da je $\chi^2_{0.99} = 15.09$. Ker je $\chi^2_{0.99} > X_0^2$, je Poissonova porazdelitev ustrezen model za število napak na tuljavah. Iz tabele lahko ocenimo, da je p-vrednost > 0.1.

Točno vrednost lahko izračunamo z Mathematico:

$$p\text{-vrednost } = 1 - CDF[ChiSquareDistribution[5], 9.09] = 0.106.$$

NALOGA

6.18 Če je kocka poštena, potem pričakujemo binomsko porazdelitev $B(3, \frac{1}{6})$. Sestavimo tabelo opazovanih o_i in pričakovanih frekvenc e_i:

i	Število šestic	o_i	e_i
1	0	48	57.87
2	1	35	34.72
3	2	15	6.95
4	3	2	0.46

Ker so pričakovane vrednosti v zadnjem razredu premajhne, združimo zadnja dva razreda:

i	Število šestic	o_i	e_i
1	0	48	57.87
2	1	35	34.72
3	≥ 2	17	7.41

Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \approx 14.097,$$

ki ima porazdelitev $\chi^2(3-1)$. Iz tabele razberemo, da je $\chi^2_{0.95} = 5.99$. Ker je $\chi^2_{0.95} < X_0^2$, sklepamo, da kocke niso poštene.

Ker je $\chi^2_{0.995} = 10.60$, je p-vrednost < 0.005.

Točno vrednost lahko izračunamo z Mathematico:

$$p\text{-vrednost} = 1 - CDF[ChiSquareDistribution[2], 14.097] \approx 0.0009.$$

NALOGA

6.19 (a) Če bi bila dolžina lovne ščuke normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, bi bile vrednosti v razredih (e_i) naslednje:

i	Dolžina (cm)	o_i	e_i
1	< 59.5	0	0.15
2	59.5–62.5	3	2.86
3	62.5–65.5	16	17.85
4	65.5–68.5	40	36.99
5	68.5–71.5	25	25.71
6	71.5–74.5	6	5.96
7	> 74.5	0	0.47

Združimo razrede, tako da bo v vsakem razredu e_i vsaj 5. To pomeni, da združimo prve tri in zadnja dva razreda.

i	Dolžina (cm)	o_i	e_i
1	< 65.5	19	20.86
2	65.5.5–68.5	40	36.99
3	68.5–71.5	25	25.71
4	> 71.5	6	6.43

(b) Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0.46,$$

ki ima porazdelitev $\chi^2(4-2-1)$. Upoštevali smo, da sta bila povprečna vrednost in standardni odklon ocenjena iz podatkov. Iz tabele razberemo, da je $\chi^2_{0.95} = 3.84$. Ker je $\chi^2_{0.95} > X_0^2$, lahko s stopnjo značilnosti 0.05 rečemo, da je normalna porazdelitev ustrezen model za dolžino lovne ščuke.

NALOGA

6.20 V naslednjih dveh tabelah so zapisane opazovane frekvence o_{ij}, $i = 1,2$, $j = 1,2,3,4$, in pričakovane frekvence e_{ij}, če bi bil tip napake neodvisen od mesta vgradnje.

o_{ij}		Tip napake				Skupaj
		A	B	C	D	
Mesto	1	22	46	18	9	95
	2	4	17	6	12	39
Skupaj		26	63	24	21	134

e_{ij}		Tip napake				Skupaj
		A	B	C	D	
Mesto	1	18.43	44.66	17.01	14.89	95
	2	7.57	18.34	6.99	6.11	39
Skupaj		26	63	24	21	134

Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = 10.71,$$

ki ima porazdelitev $\chi^2((2-1)(4-1))$. Ker je $\chi^2_{0.99} = 11.34 > 10.71 = X_0^2$, domneve ne zavrnemo s stopnjo značilnosti 0.01.

Iz tabele razberemo, da je $\chi^2_{0.975} = 9.35$, torej $0.01 < p$-vrednost < 0.025.

Točno vrednost lahko izračunamo z Mathematico:

$$p\text{-vrednost } = 1 - CDF[ChiSquareDistribution[3], 10.71] = 0.0134.$$

NALOGA

6.21 V naslednjih dveh tabelah so zapisane opazovane frekvence o_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, in pričakovane frekvence e_{ij}, če bi bil uspeh na izpitu neodvisen od profesorja.

o_{ij}		Profesor			Skupaj
		X	Y	Z	
Uspeh	Opravil	50	47	56	153
	Ni opravil	5	14	8	27
Skupaj		55	61	64	180

e_{ij}		Profesor			Skupaj
		X	Y	Z	
Uspeh	Opravil	46.75	51.85	54.4	153
	Ni opravil	8.25	9.15	9.6	27
Skupaj		55	61	64	180

Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = 4.84,$$

ki ima porazdelitev $\chi^2((2-1)(3-1))$. Ker je $\chi^2_{0.95} = 5.99 > 4.84 = X_0^2$, domneve ne zavrnemo s stopnjo značilnosti 0.05.

Iz tabele razberemo, da je $\chi^2_{0.9} = 4.61$, torej $0.05 < p$-vrednost < 0.1.

Točno vrednost lahko izračunamo z Mathematico:

$$p\text{-vrednost } = 1 - CDF[ChiSquareDistribution[2], 4.84] = 0.089.$$

NALOGA

6.22 (a) V naslednjih dveh tabelah so zapisane opazovane frekvence o_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, in pričakovane frekvence e_{ij}, če bi bilo število otrok v družini neodvisno od izobrazbe očeta.

o_{ij}		Število otrok			Skupaj
		0–1	2–3	> 3	
Izobrazba	Osnovnošolska	14	37	32	83
	Srednješolska	19	42	17	78
	Univerzitetna	12	17	10	39
Skupaj		45	96	59	200

e_{ij}		Število otrok			Skupaj
		0–1	2–3	> 3	
Izobrazba	Osnovnošolska	18.68	39.84	24.49	83
	Srednješolska	17.55	37.44	23.01	78
	Univerzitetna	8.78	18.72	11.51	39
Skupaj		45	96	59	200

Izračunamo testno statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = 7.46,$$

ki ima porazdelitev $\chi^2((3-1)(3-1))$. Ker je $\chi^2_{0.95} = 9.49 > 7.46 = X_0^2$, domneve ne zavrnemo s stopnjo značilnosti 0.05.

(b) Iz tabele razberemo, da je $\chi^2_{0.5} = 3.36$ in $\chi^2_{0.9} = 7.78$, torej $0.1 < p$-vrednost < 0.5.

Točno vrednost lahko izračunamo z Mathematico:

$$p\text{-vrednost } = 1 - CDF[ChiSquareDistribution[4], 7.46] = 0.1133.$$

NALOGA

6.23 V naslednjih dveh tabelah so zapisane opazovane frekvence o_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, in pričakovane frekvence e_{ij}, če tip stanovanja v času študija ne bi vplival na učni uspeh.

o_{ij}		Uspeh			
		Slab	Dober	Odličen	Skupaj
Tip stan.	Dom	40	100	60	200
	Starši	25	50	25	100
	Zasebno	35	50	15	100
Skupaj		100	200	100	400

e_{ij}		Uspeh			
		Slab	Dober	Odličen	Skupaj
Tip stan.	Dom	50	100	50	200
	Starši	25	50	25	100
	Zasebno	25	50	25	100
Skupaj		100	200	100	400

Na podlagi vrednosti v obeh tabelah dobimo statistiko

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = 12.$$

Iz tabele za porazdelitev $\chi^2((3-1)(3-1))$ odčitamo $\chi^2_{0.95} = 9.49$. Ker je

$$\chi^2_{0.95} = 9.49 < 12 = X_0^2,$$

domnevo zavrnemo. Torej s 95-odstotno verjetnostjo lahko trdimo, da tip stanovanja vpliva na uspeh.

NALOGA

7 Tabele

Standardna normalna porazdelitev

V tabeli so vrednosti $\Phi(z)$ za $z \geq 0$. Za $z < 0$ uporabimo lastnost $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.
p-to kvantilo dobimo po formuli $\Phi(z_p) = p$.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Studentova porazdelitev

Izbrane kvantile Studentove porazdelitve $T(n)$ za prostostne stopnje $n \leq 35$

n	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$	$t_{0.9975}$	$t_{0.999}$	$t_{0.9995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	0.256	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591

Izbrane kvantile Studentove porazdelitve $T(n)$ za prostostne stopnje $n \geq 36$

n	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$	$t_{0.9975}$	$t_{0.999}$	$t_{0.9995}$
36	0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	0.255	0.529	0.851	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	0.255	0.529	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	0.255	0.529	0.851	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
41	0.255	0.529	0.850	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	2.967	3.301	3.544
42	0.255	0.528	0.850	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	2.963	3.296	3.538
43	0.255	0.528	0.850	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	2.959	3.291	3.532
44	0.255	0.528	0.850	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	2.956	3.286	3.526
45	0.255	0.528	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	2.952	3.281	3.520
46	0.255	0.528	0.850	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	2.949	3.277	3.515
47	0.255	0.528	0.849	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	2.946	3.273	3.510
48	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	2.943	3.269	3.505
49	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	2.940	3.265	3.500
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
55	0.255	0.527	0.848	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	2.925	3.245	3.476
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
65	0.254	0.527	0.847	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	2.906	3.220	3.447
70	0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	2.899	3.211	3.435
75	0.254	0.527	0.846	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643	2.892	3.202	3.425
80	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
85	0.254	0.526	0.846	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635	2.882	3.189	3.409
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	2.878	3.183	3.402
95	0.254	0.526	0.845	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	2.874	3.178	3.396
100	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
105	0.254	0.526	0.845	1.290	1.659	1.983	2.362	2.623	2.868	3.170	3.386
110	0.254	0.526	0.845	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621	2.865	3.166	3.381
115	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.981	2.359	2.619	2.862	3.163	3.377
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
125	0.254	0.526	0.845	1.288	1.657	1.979	2.357	2.616	2.858	3.157	3.370
130	0.254	0.526	0.844	1.288	1.657	1.978	2.355	2.614	2.856	3.154	3.367
135	0.254	0.526	0.844	1.288	1.656	1.978	2.354	2.613	2.854	3.152	3.364
140	0.254	0.526	0.844	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	2.852	3.149	3.361
145	0.254	0.526	0.844	1.287	1.655	1.976	2.352	2.610	2.851	3.147	3.359
150	0.254	0.526	0.844	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	2.849	3.145	3.357
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Porazdelitev χ^2

Izbrane kvantile $\chi^2(n)$ porazdelitve za prostostne stopnje $n \leq 35$

n	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.5}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
31	14.46	15.66	17.54	19.28	21.43	30.34	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	31.34	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33
33	15.82	17.07	19.05	20.87	23.11	32.34	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	33.34	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	34.34	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27

Izbrane kvantile porazdelitve $\chi^2(n)$ za prostostne stopnje $n \geq 36$

PS	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.5}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
36	17.89	19.23	21.34	23.27	25.64	35.34	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58
37	18.59	19.96	22.11	24.07	26.49	36.34	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	37.34	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18
39	20.00	21.43	23.65	25.70	28.20	38.34	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
41	21.42	22.91	25.21	27.33	29.91	40.34	52.95	56.94	60.56	64.95	68.05
42	22.14	23.65	26.00	28.14	30.77	41.34	54.09	58.12	61.78	66.21	69.34
43	22.86	24.40	26.79	28.96	31.63	42.34	55.23	59.30	62.99	67.46	70.62
44	23.58	25.15	27.57	29.79	32.49	43.34	56.37	60.48	64.20	68.71	71.89
45	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	44.34	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17
46	25.04	26.66	29.16	31.44	34.22	45.34	58.64	62.83	66.62	71.20	74.44
47	25.77	27.42	29.96	32.27	35.08	46.34	59.77	64.00	67.82	72.44	75.70
48	26.51	28.18	30.75	33.10	35.95	47.34	60.91	65.17	69.02	73.68	76.97
49	27.25	28.94	31.55	33.93	36.82	48.33	62.04	66.34	70.22	74.92	78.23
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
55	31.73	33.57	36.40	38.96	42.06	54.33	68.80	73.31	77.38	82.29	85.75
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
65	39.38	41.44	44.60	47.45	50.88	64.33	79.97	84.82	89.18	94.42	98.11
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
75	47.21	49.48	52.94	56.05	59.79	74.33	91.06	96.22	100.84	106.39	110.29
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
85	55.17	57.63	61.39	64.75	68.78	84.33	102.08	107.52	112.39	118.24	122.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
95	63.25	65.90	69.92	73.52	77.82	94.33	113.04	118.75	123.86	129.97	134.25
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17
105	71.43	74.25	78.54	82.35	86.91	104.33	123.95	129.92	135.25	141.62	146.07
110	75.55	78.46	82.87	86.79	91.47	109.33	129.39	135.48	140.92	147.41	151.95
115	79.69	82.68	87.21	91.24	96.04	114.33	134.81	141.03	146.57	153.19	157.81
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.62	119.33	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65
125	88.03	91.18	95.95	100.18	105.21	124.33	145.64	152.09	157.84	164.69	169.47
130	92.22	95.45	100.33	104.66	109.81	129.33	151.05	157.61	163.45	170.42	175.28
135	96.43	99.74	104.73	109.16	114.42	134.33	156.44	163.12	169.06	176.14	181.07
140	100.65	104.03	109.14	113.66	119.03	139.33	161.83	168.61	174.65	181.84	186.85
145	104.89	108.35	113.56	118.17	123.65	144.33	167.21	174.10	180.23	187.53	192.61
150	109.14	112.67	117.98	122.69	128.28	149.33	172.58	179.58	185.80	193.21	198.36

Literatura

[1] A. H-S. Ang, W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, (John Wiley & Sons, 1975).

[2] J. L. Devore, *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, (9th ed., Cengage Learning, 2016).

[3] R. V. Hogg, E. A. Tanis, D. L. Zimmerman, *Probability and Statistical Inference*, (9th ed., Pearson, 2015).

[4] M. Jovanović, M. Merkle, Z. Mitrović, *Vjerovatnoća i statistika, Zbirka riješenih zadataka*, (EFT Banjaluka, 2006).

[5] K. Košmelj, *Uporabna statistika* (2. dopolnjena izd., Biotehniška fakulteta, Ljubljana, 2007).

[6] D. C. Mongomery, G. C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers* (5th ed., John Wiley & Sons, 2011).

[7] J. S. Milton, *Introduction to Probability and Statistics: Principles and Applications for Engineering and the Computer Sciences*,(4th ed., McGraw Hill, 2002).

[8] W. Navidi, *Principles of Statistics for Engineers and Scientists*, (3rd ed., New York: McGraw-Hill, 2011).

[9] M. Raič, *Rešene naloge iz verjetnosti in statistike*, (2018), `http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~raicm/Poucevanje/VRS/VRS_vaje.pdf`.

[10] S. M. Ross, *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, (5th ed., Elsevier, 2014).

[11] G. G. Roussas, *An Introduction to Probability and Statistical Inference*, (2nd ed., Elsevier, 2015).

[12] M. R. Spiegel, J. Schiller, R. A. Srinivisan, *Schaum's Outline Probability and Statistics* (3rd ed., McGraw-Hill, 2009).

[13] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, (9th ed., Pearson, 2014).

[14] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 14.0, Champaign, IL (2024).